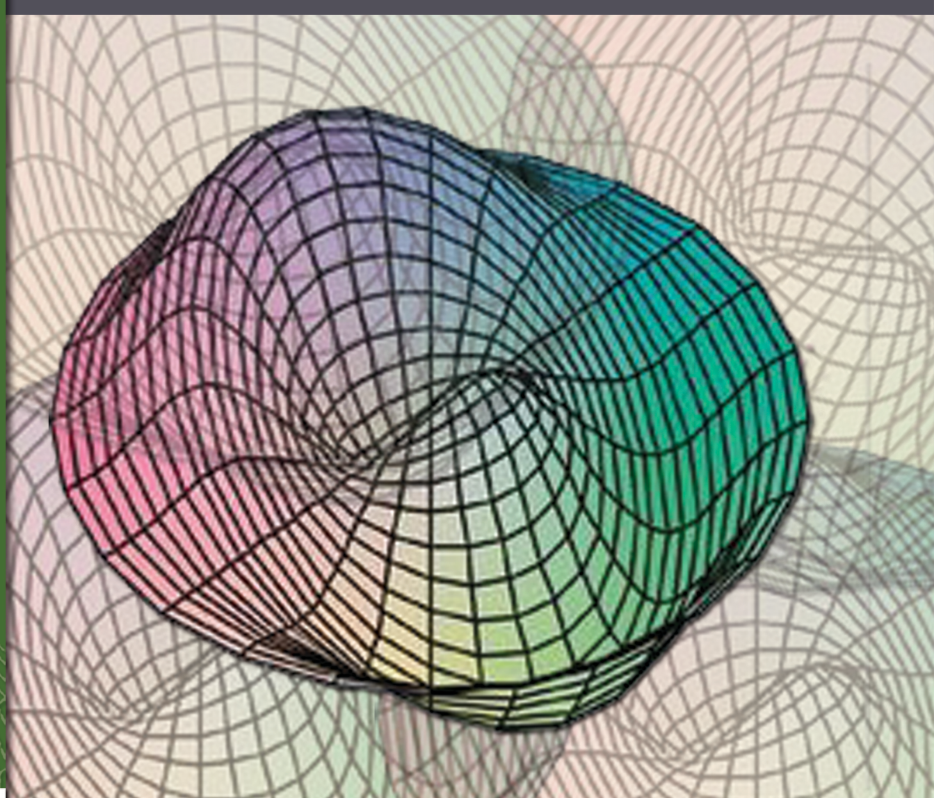
სალექციო კურსების ელექტრონული ბიბლიოთეკა

მერაბ ელიაშვილი

გიორგი ციციშვილი

ფიზიკის მათემატიკური მეთოდები



ფიზიკის მათემატიკური

მეთოდები

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მერაბ ელიაშვილი

გიორგი ციციშვილი

ფიზიკის მათემატიკური მეთოდები

უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

ტექსტს საფუძვლად უდევს სალექციო კურსი, რომელიც იკითხება თსუ-ის ფიზიკის სპეციალობის სტუდენტებისათვის. ძირითადი მასალის დასაუფლებლად არ მოითხოვება რაიმე განსაკუთრებული წინაპირობების დაკმაყოფილება. დამატებითი მასალა ნავარაუდებია დამოუკიდებელი შესწავლისათვის და განკუთვნილია იმ სტუდენტებისათვის, რომლებსაც აინტერესებთ თეორიული ფიზიკის მათემატიკური აპარატის შედარებით ღრმად შესწავლა.

სამეცნიერო რედაქტორი თეიმურაზ ნადარეიშვილი

რეცენზენტები: ალექსანდრე თევზაძე
გია გიორგაძე

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

ISBN 978-9941-13-694-8 (pdf)

შინაარსი

კურსის შესახებ

გამოცემას საფუძვლად უდევს სალექციო კურსი, რომელიც იკითხება თსუ-ის ფიზიკის სპეციალობის სტუდენტებისათვის. ძირითადი მასალის დასაუფლებლად არ არის აუცილებელი რაიმე განსაკუთრებული წინაპირობების დაკმაყოფილება. დამატებითი მასალა ნავარაუდევია დამოუკიდებელი შესწავლისათვის და განკუთვნილია მათთვის, ვინც დაინტერესებულია, შედარებით ღრმად გაეცნოს თეორიული ფიზიკის მათემატიკურ აპარატს.

თხუთმეტი ლექციისაგან შემდგარი კურსი მოიცავს შემდეგ ძირითად თემებს:

- შესავალი ტენზორულ აღრიცხვაში;
- ვარიაციული აღრიცხვის საწყისები;
- ფურიეს გარდაქმნები;
- ფურიეს გარდაქმნების გამოყენება გრინის ფუნქციების გამოსათვლელად.

მაღალი ხარისხის უნივერსალური თანამედროვე სახელმძღვანელოებიდან შეგვიძლია, რეკომენდაცია გავუწიოთ შემდეგ ლიტერატურას:

G. Arfken, H. Weber, F. Harris: *Mathematical Methods For Physicists* Elsevier, 2013;

K. Riley, M. Hobson: *Foundation Matematics for the Physical Sciences;* Cambridge University Press, 2011;

S. Hassani: *Mathematical Methods for Students of Physics and Related Fields;* Springer, 2009;

W. Appel: *Mathematics for Physics and Physicists;* Prinston University Press, 2007;

J. Mathews, R. Walker: *Mathematical Methods of Physics;* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

თანამედროვე მათემატიკური ფიზიკის გეომეტრიული და ტოპოლოგიური ასპექტები გადმოცემულია სახელმძღვანელო-მონოგრაფიაში:

B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov; *Modern Geometry – Methods and Applications (Part I)*, Springer Science, 1984.

აქ მითითებულია ის წყაროები, რომლებმაც უშუალო გავლენა მოახდინეს წინამდებარე კურსის შედგენაზე. ამას გარდა, დიდძალი სასარგებლო მასალა არის განთავსებული ინტერნეტში.

ავტორები

შეთანხმებები და აღნიშვნები

თითოეული ლექცია შედგება დანომრილი პარაგრაფებისაგან. პარაგრაფები, რომლებიც შეიცავენ შედარებით რთულ ან არასავალდებულო საკითხებს, აღნიშნულია ვარსკვლავით.

ტექსტის გამოყოფილ არეებში განთავსებულია კურსის ძირითადი ნაწილის საკვანძო ცნებები და დებულებები.

გამოყენებული მათემატიკური სიმბოლოები

სიმბოლო	სიმბოლოს მნიშვნელობა
$\forall$	$\forall\, x$: ნებისმიერი/ყველა x
$\exists$	$\exists\, x$: არსებობს x
$a \in A$	a ეკუთვნის სიმრავლეს A
$p \to q$	p გულისხმობს q-ს
$\mathbb{N}$	ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე
$\mathbb{Z}$	მთელ რიცხვთა სიმრავლე
$\mathbb{Q}$	რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე
$\mathbb{R}$	ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე
$\mathbb{C}$	კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე
$\coloneqq$	ტოლობა განმარტების ძალით

I. ვექტორული აღრიცხვა

ლექცია 1

§1.1. დეკარტული კოორდინატები

კლასიკური ფიზიკის წარმოდგენები გარემომცველი სივრცის შესახებ დიდი სიზუსტით არის ასახული მათემატიკურ მოდელში, რომელსაც სამგანზომილებიანი ($3D$) სივრცის ევკლიდური გეომეტრია ეწოდება.

ჩამოვაყალიბოთ ამ გეომეტრიული მოდელის ძირითადი ცნებები:

- თავისთავად სივრცე წარმოადგენს წერტილებისაგან შედგენილ უწყვეტ სიმრავლეს (კონტინუუმს);
- სივრცეში განმარტებულია ვექტორის ცნება. გეომეტრიულად ვექტორი გაიგება, როგორც სივრცის ორი წერტილის შემაერთებელი წრფის მიმართული მონაკვეთი (ისარი). დასაშვებია ვექტორების პარალელური გადატანა;
- სიგრძეები და კუთხეები ემორჩილებიან ევკლიდეს გეომეტრიის პოსტულატებს;
- წერტილებსა და ვექტორებს აქვთ გეომეტრიული შინაარსი და ისინი არ არიან დამოკიდებული რომელიმე კოორდინატულ სისტემაზე.

კოორდინატები იძლევა სივრცის წერტილის იდენტიფცირების საშუალებას. ეს არის წესი, რომლის თანახმადაც სივრცის ნებისმიერ P წერტილს შეესაბამება სამი რიცხვის მოწესრიგებული მიმდევრობა, მაგალითად:

$$x(P), y(P), Z(P).$$

ამ რიცხვებს P წერტილის კოორდინატები ეწოდებათ. ამასთანავე, უნდა სრულდებოდეს შემდეგი:

i) სივრცის განსხვავებულ წერტილებს შეესაბამება კოორდინატების განსხვავებული კრებულები

$$P \to x(P), y(P), Z(P)$$
$$Q \to x(Q), y(Q), Z(Q)$$
$$\dots$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$x(P) = x(Q), \;\; y(P) = y(Q), \quad z(P) = z(Q)$$

სივრცის P და Q წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა;

ii) კოორდინატების ნებისმიერ მიმდევრობას (x, y, z) შეესაბამება სივრცის რომელიმე წერტილი.

ევკლიდური სივრცის აღსაწერად განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა. მოსახერხებელია კოორდინატების ინდექსური აღნიშვნების გამოყენება:

$$x = [x_1, x_2, x_3]$$
$$y = [y_1, y_2, y_3]$$
$$\ldots$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ x წერტილის კოორდინატების სამეული არის x_1, x_2, x_3, y წერტილს შეესაბამება სამეული y_1, y_2, y_3 და ა.შ.

დეკარტეს კოორდინატები ისეთი კოორდინატებია, რომ სიდიდე

$$l^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$$

ტოლია x და y წერტილების შემაერთებელი წრფის მონაკვეთის სიგრძის კვადრატისა.

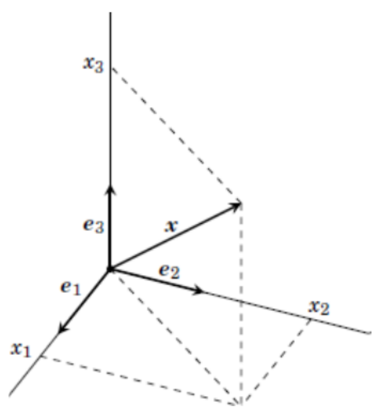
წერტილები და წრფის მონაკვეთები გეომეტრიული ობიექტებია, ხოლო კოორდინატები კი – მათი ალგებრული მახასიათებლები.

§1.2. ვექტორები და კოორდინატული ბაზისი

სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ყოველ წერტილში შეიძლება აიგოს სამი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი. ჩავთვალოთ, რომ ეს ვექტორები ურთიერთმართობია და რომ თითოეული მათგანის სიგრძე ერთის ტოლია. ეს ვექტორები ავღნიშნოთ, როგორც $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. იმავე სივრცის ნებისმიერი მეოთხე ვექტორი $\boldsymbol{a}$ შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც წრფივი კომბინაცია

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3.$$

ნახაზზე გამოსახულია ორთოგონალური კოორდინატული სისტემა, რომელიც აღჭურვილია კოორდინატთა სათავიდან გამომავალი სამი ერთეულოვანი ურთიერთმართობი ვექტორით $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)$:



კოორდინატული ღერძების გასწვრივ მიმართულ ერთეულოვან საბაზისო ვექტორებს კოორდინატული ორტები ეწოდება.

კოორდინატების O სათავისა და ორტების ერთობლიობა ქმნის კოორდინატულ ბაზისს $\mathcal{B}$. ბაზისს ასევე კოორდინატულ რეპერსაც უწოდებენ. რეპერის სათავისა და ორტების მიმართულების არჩევა ნებისმიერია.

დავუშვათ, გვაქვს წერტილი x კოორდინატებით (x_1, x_2, x_3). ამ წერტილს შეესაბამება რადიუს-ვექტორი

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3.$$

ჩავწეროთ ეს რადიუს-ვექტორი 3×1 მატრიცა-სვეტის სახით

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

უნდა გვახსოვდეს, რომ წერტილებისა და რადიუს-ვექტორების ამგვარი იდენტიფიცირება გულისხმობს კონკრეტული კოორდინატული ბაზისის გამოყენებას, რაზეც მიუთითებს ინდექსი $\mathcal{B}$.

მატრიცა-სვეტს $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ ეწოდება $\boldsymbol{x}$ ვექტორის წარმომადგენელი ბაზისში $\mathcal{B}$.

ამასთან ერთად, თვით წერტილები და ვექტორები არიან კოორდინატების სისტემის არჩევაზე დამოუკიდებელი გეომეტრიულ ობიექტები. შემდგომში ჩვენ კოორდინატთა სისტემის აღმნიშვნელ ინდექსს $\mathcal{B}$ გამოვიყენებთ მხოლოდ საჭიროების შემთხვევებში. ამას გარდა, ორივეს, ვექტორსაც და მის შესაბამის მატრიცა-სვეტსაც, ვექტორს ვუწოდებთ.

საბაზისო ვექტორებისათვის გვექნება მატრიცული წარმოდგენა

$$[\boldsymbol{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

შევნიშნოთ, რომ, გარკვეულ შემთხვევებში, კოორდინატების ინდექსური აღნიშვნების ნაცვლად, მოსახერხებელია (x, y, z) ცვლადების გამოყენება, ხოლო კოორდინატული ორტებისათვის კი გამოიყენება აღნიშვნები:

$$\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}_1 \qquad \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_2 \qquad \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_3 .$$

მატრიცა-სვეტებისათვის განმარტებულია მიმატებისა და ნამდვილ რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები:

$$[\boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{w}] = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha[\boldsymbol{v}] = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}.$$

სივრცის ვექტორებისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ მატრიცული წარმოდგენა

$$[\boldsymbol{u}] = u_1[\boldsymbol{e}_1] + u_2[\boldsymbol{e}_2] + u_3[\boldsymbol{e}_3]\ .$$

$3D$ ევკლიდური სივრცის რადიუს-ვექტორები ქმნიან ნამდვილ წრფივ ვექტორულ სივრცეს $\mathbb{R}^3$, ასე რომ, სამართლიანია შემდეგი:

1. ვექტორების შეკრების წესები

$$[\boldsymbol{u}] \in \mathbb{V},\ [\boldsymbol{v}] \in \mathbb{V} \rightarrow [\boldsymbol{u}] + [\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{w}] \in \mathbb{V}$$

$$[\boldsymbol{u}] + [\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{u}]$$

$$[\boldsymbol{u}] + ([\boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{w}]) = ([\boldsymbol{u}] + [\boldsymbol{v}]) + [\boldsymbol{w}]$$

$$\exists \quad [\boldsymbol{0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{V}: \quad [\boldsymbol{u}] + [\boldsymbol{0}] = [\boldsymbol{u}]$$

$$\forall\ [\boldsymbol{u}] \ \exists\ [-\boldsymbol{u}]: \qquad [\boldsymbol{u}] + [-\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{0}]$$

2. ვექტორების ნამდვილ რიცხვებზე გამრავლების წესები

$$[\boldsymbol{u}] \in \mathbb{V} \rightarrow \alpha[\boldsymbol{v}] \in \mathbb{V}; \qquad \alpha, \beta, \gamma \ldots. \in \mathbb{R}$$

$$(\alpha + \beta)[\boldsymbol{u}] = \alpha[\boldsymbol{u}] + \beta[\boldsymbol{u}]$$

$$\alpha([\boldsymbol{u}] + [\boldsymbol{v}]) = \alpha[\boldsymbol{u}] + \alpha[\boldsymbol{v}]$$

$$1[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u}]$$

$$0[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{0}]$$

§1.3. მატრიცები, δ და ε სიმბოლოები

ვექტორები ჩვენ წარმოვადგინეთ 3×1 მატრიცა-სვეტების დახმარებით. მოკლედ შევჩერდეთ მატრიცების ძირითად თვისებებზე.
$m \times n$ მატრიცა შეიცავს m რაოდენობით სტრიქონსა და n სვეტს:

$$\mathrm{A} \equiv [\mathrm{A}] = [A_{ik}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

მატრიცებისათვის განმარტებულია მიმატებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები:

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B} \qquad \rightarrow \qquad C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$$

$$\mathrm{C} = \lambda\mathrm{A} \qquad \rightarrow \qquad C_{ik} = \lambda A_{ik}\ .$$

მატრიცული გამრავლების წესი მდგომარეობს შემდეგში: დაუშვათ, გვაქვს ორი მატრიცა: $m \times n$ მატრიცა A და $n \times m'$ მატრიცა B. ამ ორი მატრიცის ნამრავლი არის $m \times m'$ მატრიცა

$$[\mathrm{C}] = [\mathrm{A}][\mathrm{B}]$$

ელემენტებით

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}, \qquad i = 1,2 \ldots, m \qquad k = 1,2, \ldots, m'.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $m = m' = 1$, ვღებულობთ 1×1 მატრიცას, ე.ი. რიცხვს. ეს ის შემთხვევაა, როდესაც მატრიცა-სტრიქონი მარცხნიდან მრავლდება მატრიცა-სვეტზე.

განვმარტოთ ერთეულოვანი $n \times n$ მატრიცა:

$$[\mathrm{I}] \equiv \mathrm{I}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

ამ მატრიცის ელემენტებია

$$[\mathrm{I}]_{ij} = \delta_{ij}.$$

ორინდექსიან სიდიდეების ერთობლიობას δ_{ij} ეწოდება კრონეკერის δ-სიმბოლო

$$[\mathrm{I}]_{ij} = \delta_{ij} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

კრონეკერის სიმბოლო სიმეტრიულია ინდექსების გადასმის მიმართ:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

შეიძლება, განიმარტოს ანტისიმეტრიული ობიექტიც:

n-ინდექსიანი სრულიად ანტისიმეტრიული სიმბოლო

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

წარმოადგენს სიდიდეს, რომელიც იცვლის ნიშანს ნებისმიერი ორი ინდექსის გადასმისას

$$\varepsilon_{\dots i \dots j \dots} = -\varepsilon_{\dots j \dots i \dots}$$

თუ რომელიმე ორი ინდექსი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ

$$\varepsilon_{\dots i \dots i \dots} = 0.$$

მიღებულია, რომ

$$\varepsilon_{12\cdots n} = +1.$$

მაგალითად, როდესაც $n = 2$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1; \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0.$$

ანალოგიურად, სამინდექსიანი ანტისიმეტრიული სიმბოლოს ნულისაგან განსხვავებული კომპონენტებია

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1.$$

ამ ობიექტს ასევე ლევი-ჩივიტას ε-სიმბოლოს უწოდებენ.

δ- და ε-სიმბოლოების დახმარებით შეიძლება განიმარტოს კვადრატული მატ-რიცების ორი მნიშვნელოვანი მახასიათებელი:

1. მატრიცის კვალი (დიაგონალური ელემენტების ჯამი)

$$Tr\,\mathrm{A} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}\ ;$$

2. მატრიცის დეტერმინანტი

$$\det \mathrm{A} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} A_{1i_1} A_{2i_2} \cdots A_{ni_n}\ .$$

ამ გამოსახულებებში გათვალისწინებულია განმეორებადი ინდექსების წყვი-ლებით დაჯამების ოპერაციების ჩატარება. ამ ოპერაციებთან დაკავშირებით გა-მოიყენება შემდეგი ორი შეთანხმება:

- მოცემულ წევრში ინდექსების განმეორებადი წყვილის არსებობა ავ-ტომატურად გულისხმობს ამ ინდექსით დაჯამებას 1-დან n-მდე, რის გამოც ჯამის ნიშანი Σ შეიძლება მოიხსნას. განმეორებად ინდექსებს მუნჯ ინდექსებსაც უწოდებენ. დაშვებულია მუნჯი ინდექსის ჩანაც-ვლება სხვა მუნჯი ინდექსით, რაც არ ცვლის მათემატიკური გამოსა-ხულების შინაარსს. მუნჯი ინდექსებით დაჯამებას ასევე ინდექსების შეკვეცას უწოდებენ;
- ინდექსებს, რომლებითაც დაჯამება არ ხდება, ეწოდება თავისუფალი ინდექსები და მათი ჩანაცვლება განსხვავებული ინდექსით არ არის დაშვებული.

გადავწეროთ კვალისა და დეტერმინანტის გამოსახულებები ამ წესების გამო-ყენებით:

$$Tr\,\mathrm{A} = A_{ii}, \qquad \det \mathrm{A} = \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} A_{1i_1} A_{2i_2} \cdots A_{ni_n}\ .$$

მატრიცული ნამრავლისათვის $[\mathrm{C}] = [\mathrm{A}][\mathrm{B}]$ გვექნება

$$C_{ik} = A_{ij}B_{jk} = A_{il}B_{lk}.$$

აქ j მუნჯი ინდექსია. მუნჯი ინდექსების გარდა, მოყვანილ გამოსახულებაში გვაქვს ორი თავისუფალი ინდექსი: i და k, რომლებსაც ვერ ჩავანაცვლებთ.

კრონეკერის δ-ს აქვს ე.წ. ფილტრაციის თვისება:

$$\delta_{ik}u_k = u_i$$
$$\delta_{ik}A_{km} = A_{im}$$
$$\delta_{ik}A_{ik} = A_{kk}$$
$$\delta_{kk} = 3$$

სამინდექსიანი ε-სიმბოლო შეიძლება გამოისახოს კრონეკერის δ-ისაგან შედგენილი მატრიცის დეტერმინანტის დახმარებით:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon_{123} = +1\,.$$

რომელიმე ორი ინდექსის ტოლობისას ეს დეტერმინანტი ნულდება და მეზობელი სტრიქონების გადასმისას იცვლის ნიშანს.

ახლა განვიხილოთ 6-ინდექსიანი გამოსახულება

$$X_{mnlijk} = \begin{vmatrix} \delta_{mi} & \delta_{ni} & \delta_{li} \\ \delta_{mj} & \delta_{nj} & \delta_{lj} \\ \delta_{mk} & \delta_{nk} & \delta_{lk} \end{vmatrix}.$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ:

- $X_{mnlijk} = 0$, თუ (m,n,l) ან (i,j,k) ინდექსებს შორის არის თანმხვედრი ინდექსები;
- $X_{mnlijk} = 1$, თუ $(m,n,l) = (i,j,k) = (1,2,3)$;
- X_{mnlijk} იცვლის ნიშანს მეზობელი (m,n,l) ან $(i,j,k\ )$ ინდექსების გადასმისას.

აქედან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$X_{mnlijk} = \varepsilon_{mnl}\varepsilon_{ijk}\,.$$

გავატოლოთ l და k ინდექსები და დავაჯამოთ ინდექსებით:

$$\varepsilon_{mnk}\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{mi} & \delta_{ni} & \delta_{ki} \\ \delta_{mj} & \delta_{nj} & \delta_{kj} \\ \delta_{mk} & \delta_{nk} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \delta_{mi}\left(3\delta_{nj} - \delta_{jn}\right) - \delta_{ni}\left(3\delta_{mj} - \delta_{mj}\right) +$$

$$+\delta_{ki}\left(\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{nj}\delta_{mk}\right) = \delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{ni}\delta_{mj}.$$

სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\varepsilon_{mnk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{ni}\delta_{mj}$$

$$\varepsilon_{mnk}\varepsilon_{ink} = \delta_{mi}\delta_{nn} - \delta_{ni}\delta_{mn} = 3\delta_{mi} - \delta_{mi} = 2\delta_{mi}$$

$$\varepsilon_{mnk}\varepsilon_{mnk} = 6.$$

მოცემული $n \times n$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცა განიმარტება ტოლობით

$$\mathrm{M}\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{M} = \mathbb{I}.$$

შებრუნებული მატრიცის გამოსათვლელად გამოიყენება:

$$[\mathrm{M}^{-1}]_{ij} = \frac{1}{\det \mathrm{M}}(-1)^{i+j}\det\left[\widetilde{\mathrm{M}}(\jmath,\imath)\right],$$

სადაც $\widetilde{\mathrm{M}}(\jmath,\imath)$ არის $(n-1)\times(n-1)$ მატრიცა, რომელიც მიიღება საწყისი M მატრიცის j-ური სტრიქონისა და i-ური სვეტის ამოშლით.

M მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \equiv \widetilde{\mathrm{M}}$ განიმარტება ტოლობით

$$\widetilde{\mathrm{M}}_{ik} = \mathrm{M}_{ki}\,.$$

§1.4. მატრიცები (ძირითადი განმარტებები)

1. მატრიცას ეწოდება სიმეტრიული, თუ ტრანსპონირებისას მატრიცა არ იცვლება:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \equiv \widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \quad \text{i.e.} \quad A_{ki} = A_{ik}.$$

2. მატრიცას ეწოდება ანტისიმეტრიული, თუ ტრანსპონირებისას მას ნიშანი ეცვლება:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{A} \qquad \text{i.e.} \quad A_{ki} = -A_{ik} \ .$$

3. მატრიცას ეწოდება ორთოგონალური, თუ

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \ .$$

4. მატრიცების ნამრავლის დეტერმინანტი ტოლია თანამამრავლი მატრიცების დეტერმინანტის ნამრავლისა:

$$\det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \det \mathrm{B}.$$

5. მატრიცების ნამრავლი საზოგადოდ არ არის კომუტაციური:

$$\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}.$$

6. მატრიცების ნამრავლი ასოციაციურია:

$$(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC}).$$

7. არსებობს ერთეულოვანი მატრიცა I ელემენტებით $[\mathrm{I}]_{ij} = \delta_{ij}$ ისეთი, რომ

$$\mathrm{IA} = \mathrm{AI}, \quad \forall \, \mathrm{A}.$$

8. თუ $\det \mathrm{A} \neq 0$, მაშინ არსებობს ერთადერთი მატრიცა A^{-1}, ისეთი, რომ $\forall \, \mathrm{A}$

$$\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}, \quad \forall \, \mathrm{A}.$$

9. არსებობს ნულოვანი მატრიცა 0, ისეთი, რომ მისი ყველა ელემენტი ნულის ტოლია:

$$[0]_{ij} \equiv 0$$
$$\mathrm{A}0 = 0\mathrm{A} = 0.$$

10. დიაგონალური მატრიცები ერთმანეთთან კომუტირებენ:

$$[\mathrm{D}]_{ij} = D_{\underline{ii}}\delta_{ij}, \ \ [\mathrm{D}']_{ij} = D'_{\underline{ii}}\delta_{ij}$$
$$[\mathrm{DD}']_{ij} = \left(D_{\underline{ii}}D'_{\underline{ii}}\right)\delta_{ij}.$$

ბოლო გამოსახულებაში ხაზგასმული ინდექსებით დაჯამება არ იგულისხმება.

11. მატრიცის კვალი არის მისი დიაგონალური ელემენტების ჯამი:

$$Tr\ \mathrm{A} = A_{ii}.$$

მატრიცების ნამრავლის კვალი არ იცვლება თანამამრავლთა ციკლური გადანაცვლებისას:

$$Tr\ \mathrm{AB} = Tr\ \mathrm{BA}$$
$$Tr\ \mathrm{ABC} = Tr\ CAB = Tr\ \mathrm{BCA}.$$

12. A მატრიცის მსგავსების გარდაქმნა გადაუგვარებელი მატრიცით S ეწოდება ოპერაციას

$$A \to A' = S^{-1}AS.$$

მსგავსების გარდაქმნა არ ცვლის მატრიცის დეტერმინანტსა და კვალს

$$\det A = \det A' \qquad Tr\ A = Tr\ A'.$$

13. მატრიცული განტოლება

$$AB = C$$

სამართლიანია მსგავსების გარდაქმნით მიღებული მატრიცებისათვისაც

$$A'B' = C'$$

$$A' = S^{-1}AS \quad B' = S^{-1}BS \quad C' = S^{-1}CS.$$

14. მატრიცების პირდაპირი ნამრავლი

$$C = A \otimes B$$

წარმოადგენს მატრიცას ინდექსების ორი წყვილით

$$[C]_{im,kn} = [A]_{ik}[B]_{mn} \quad .$$

ასეთი მატრიცების გამრავლებისას გვექნება

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = AA' \otimes BB'.$$

ორი დიაგონალური მატრიცის პირდაპირი ნამრავლი დიაგონალურია.

ლექცია 2

§2.1. ვექტორების სკალარული ნამრავლი

კოორდინატული ორტები $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ ჩვენ წარმოვადგინეთ 3×1 სვეტების დახმარებით:

$$[\boldsymbol{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

შემოვიღოთ ამ მატრიცების ტრანსპონირებული 1×3 მატრიცები:

$$[\boldsymbol{e}_1]^T = [1 \quad 0 \quad 0] \qquad [\boldsymbol{e}_2]^T = [0 \quad 1 \quad 0] \qquad [\boldsymbol{e}_3]^T = [0 \quad 0 \quad 1].$$

როგორც ვიცით, სტრიქონის ნამრავლი სვეტზე გვაძლევს რიცხვს. ორტების შესაბამისი მატრიცების შემთხვევაში მივიღებთ:

$$[\boldsymbol{e}_i]^T[\boldsymbol{e}_j] = \delta_{ij}.$$

ორი ორტის სკალარული ნამრავლი განიმარტება, როგორც შესაბამისი მატრიცა-სტრიქონის ნამრავლი მატრიცა-სვეტზე:

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = [\boldsymbol{e}_i]^T[\boldsymbol{e}_j] = \delta_{ij} \ .$$

$\boldsymbol{u} = u_{\boldsymbol{i}}[\boldsymbol{e}_i]$ და $\boldsymbol{v} = v_{\boldsymbol{k}}[\boldsymbol{e}_k]$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი არის რიცხვი

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = [\boldsymbol{u}]^T[\boldsymbol{v}] = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \ .$$

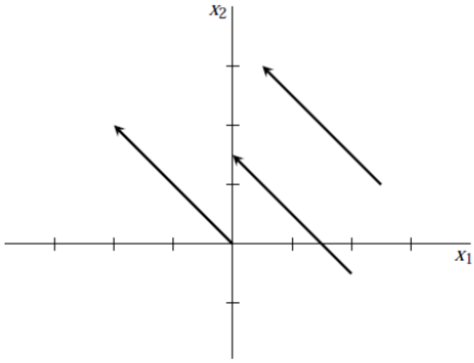
სკალარული ნამრავლის აღსანიშნავად გამოიყენება ასევე აღნიშვნები

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \equiv (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \equiv \ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \ .$$

სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. სკალარული ნამრავლი კომუტაციურია
$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle;$$
2. სკალარული ნამრავლი დისტრიბუციულია
$$\langle \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$$
($\alpha, \beta, ..$ ნამდვილი რიცხვებია);
3. არანულოვანი ვექტორების სკალარული ნამრავლი დადებითად არის განსაზღვრული
$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle > 0 \quad \text{თუ} \ \ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0};$$
4. ვექტორის სიგრძე (მოდული) განიმარტება, როგორც დადებითი რიცხვი
$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ჩვენ განვიხილავთ არა მარტო სივრცის წერტილების რადიუს-ვექტორებს $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\dots$, არამედ სივრცეში არსებულ ყველა შესაძლო ისარს (მიმართულ მონაკვეთს), რომელთა სათავე არ ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს O. თუ ჩავთვლით, რომ ეს ვექტორები წარმოადგენენ თავისუფალ ვექტორებს, ყოველთვის შესაძლებელია მათი პარალელური გადატანა კოორდინატთა სისტემის სათავეში.



ნახაზზე გამოსახულია რადიუს ვექტორი და მისი ეკვივალენტური ორი ვექტორი.

შემდგომში საჭიროების გარეშე აღარ განვასხვავებთ ვექტორსა და მის მატრიცულ წარმოდგენას და ვექტორისათვის გამოვიყენებთ ჩაწერას

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

§2.2. ბაზისისა და კოორდინატების ორთოგონალური გარდაქმნები

განვიხილოთ ისეთი კოორდინატული სისტემები, რომლებსაც აქვთ საერთო სათავე O და ერთმანეთს უკავშირდებიან მობრუნების ოპერაციებით.

დაუშვათ, რომ გვაქვს საერთო სათავის მქონე ორი ორთოგონალური რეპერი $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ და $\{O; \boldsymbol{e'}_1, \boldsymbol{e'}_2, \boldsymbol{e'}_3\}$, ე.ი.

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k \rangle = \langle \boldsymbol{e'}_i, \boldsymbol{e'}_k \rangle = \delta_{ik}.$$

გამოვსახოთ ახალი ორტები ძველი ორტების დახმარებით:

$$\boldsymbol{e'}_1 = R_{11}\boldsymbol{e}_1 + R_{12}\boldsymbol{e}_2 + R_{13}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{e'}_2 = R_{21}\boldsymbol{e}_1 + R_{22}\boldsymbol{e}_2 + R_{23}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{e'}_3 = R_{31}\boldsymbol{e}_1 + R_{32}\boldsymbol{e}_2 + R_{33}\boldsymbol{e}_3.$$

მოსახერხებელია ინდექსური აღნიშვნების გამოყენება

$$\boldsymbol{e'}_m = R_{mi}\boldsymbol{e}_i.$$

გაშლის კოეფიციენტები წარმოადგენენ სკალარულ ნამრავლებს

$$R_{mi} = \langle \boldsymbol{e'}_m, \boldsymbol{e}_i \rangle, \quad (i, m = 1,2,3).$$

ანალოგიურად, ძველი ორტები შეიძლება გამოვსახოთ ახალი ორტების მეშ-ვეობით

$$\boldsymbol{e}_i = R'_{in} \boldsymbol{e'}_n,$$

სადაც

$$R'_{in} = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e'}_n \rangle = \langle \boldsymbol{e'}_n, \boldsymbol{e}_i \rangle = R_{ni}.$$

ამგვარად, მატრიცები $\mathrm{R} = [R_{im}]$ და $\mathrm{R}' = [R'_{nj}]$ წარმოადგენენ კვადრატულ 3×3 ურთიერთტრანსპონირებულ მატრიცებს

$$\mathrm{R}' = \mathrm{R}^T.$$

გარდა ამისა, ეს ორი მატრიცა ურთიერთშებრუნებულია:

$$\mathrm{R}' = \mathrm{R}^{-1}.$$

მართლაც, ვინაიდან

$$\boldsymbol{e}_i = R_{im} \boldsymbol{e'}_m = R_{im} R'_{mj} \boldsymbol{e}_j ,$$

სამართლიანი უნდა იყოს ტოლობები:

$$R_{im} R'_{mj} = R_{im} R_{jm} = \delta_{ij} .$$

მაშასადამე,

$$\mathrm{R}\,\mathrm{R}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}.$$

როგორც უკვე აღინიშნა, ასეთ მატრიცებს ორთოგონალური მატრიცები ეწო-დებათ.

კოორდინატული ორტების გარდაქმნისას თვით x-წერტილის მდებარეობა და, შესაბამისად, რადიუს-ვექტორი $\boldsymbol{x}$ რჩება უცვლელი. გამოვსახოთ ეს რადიუს-ვექტორი ორივე კოორდინატულ ბაზისში

$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i = x'_m \boldsymbol{e'}_m,$$

სადაც კოორდინატები

$$x_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i, \qquad x'_m = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e'}_m.$$

ამ ბოლო ფორმულებიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ორტების წრფივი გარდაქმნისას კოორდინატები გარდაიქმნება შემდეგი წესის მიხედვით:

$$x'_m = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e'}_m \rangle = \langle \boldsymbol{x}, R_{mi} \boldsymbol{e}_i \rangle = R_{mi} x_i.$$

ბოლო თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$R_{mk} x'_m = R_{mk} R_{mi} x_i = \delta_{ki} x_i = x_k.$$

დეკარტეს კოორდინატების ორთოგონალური გარდაქმნის მატრიცები ეწოდებათ ისეთ მატრიცებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\mathrm{R}\,\mathrm{R}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$$
$$\det \mathrm{R} = \pm 1.$$

სამართლიანია საბაზისო ვექტორებისა და x-წერტილის კოორდინატე-ბის გარდაქმნის შემდეგი წესები:

$$\boldsymbol{e}'_m = R_{mi}\boldsymbol{e}_i; \quad x'_m = R_{mk}x_k$$

და

$$\boldsymbol{e}_j = R_{nj}\boldsymbol{e}'_n; \quad x_j = R_{nj}x'_n \ .$$

გარდაქმნის დეტერმინანტის სიდიდე გამომდინარეობს ტოლობიდან

$$det\mathrm{R}\det\mathrm{R}^T = 1.$$

ორთოგონალურ გარდაქმნებს დადებითი დეტერმინანტით ეწოდებათ საკუთრივი ბრუნვები.

არსებითია, რომ სკალარული ნამრავლი არ არის დამოკიდებული კოორდინა-ტთა სისტემის არჩევაზე:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_i y_i = x'_m y'_m.$$

რადგანაც გარდაქმნის კოეფიციენტები R_{nk} მუდმივებია (არ არიან დამოკიდე-ბული კოორდინატებზე), დეკარტული კოორდინატების წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნის ფორმულები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$x'_m = \frac{\partial x'_m}{\partial x_k}x_k \quad x_k = \frac{\partial x_k}{\partial x'_n}x'_n \ .$$

კოორდინატების ორთოგონალური გარდაქმნებისას გვექნება ტოლობები

$$R_{nk} = \frac{\partial x'_n}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_n}.$$

ახლა შეგვიძლია მივიღოთ ვექტორის ზოგადი განმარტება:

$3D$ ევკლიდურ სივრცეში ვექტორი ეწოდება ისეთ სამკომპონენტიან სიდი-დეს $\boldsymbol{V}(V_1, V_2, V_3)$, რომლის მდგენელები ბაზისის ორთოგონალური გარდაქ-მნებისას იცვლებიან შემდეგი წესის თანახმად:

$$V_i \to V'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}V_k \ .$$

ეს განმარტება შეიძლება ჩაიწეროს სიმბოლური სახითაც:

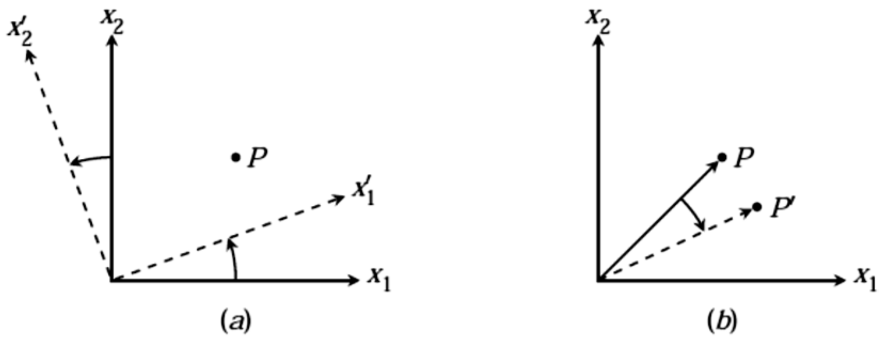
$$\mathcal{B} \to \mathcal{B}': \qquad [\boldsymbol{V}]_{\mathcal{B}} \to [\boldsymbol{V}]_{\mathcal{B}'} = \mathrm{R}[\boldsymbol{V}]_{\mathcal{B}}.$$

ჩვენ ვიხილავთ ბაზისის გარდაქმნებს და ვაკვირდებით, თუ როგორ იცვლება ამ დროს მოცემული P წერტილის კოორდინატები. ასეთი ტიპის გარდაქმნებს პა-სიური გარდაქმნები ეწოდება.

ამასთან ერთად სივრცეში შეიძლება განხორციელდეს გარდაქმნები, რომლე-ბიც ერთმანეთს უკავშირებენ ორი განსხვავებული, მაგალითად, P და P' წერტი-ლების, კოორდინატებს:

$$x_i(P) \to x_i(P').$$

ასეთ გარდაქმნებს აქტიური გარდაქმნები ეწოდება. ნახაზზე გამოსახულია პასიური (a) და აქტიური (b) ტიპის გარდაქმნები $2D$ სივრცის შემთხვევაში:



§2.3. ვექტორების ზოგადი განმარტება

ჩვენ ვექტორი განვმარტეთ, როგორც სამკომპონენტიანი ობიექტი, რომელიც კოორდინატთა სისტემის ცვლილებისას ემორჩილება გარდაქმნის მკაცრად განსაზღვრულ წესს. ამასთანავე, ვექტორი შეიძლება დამოკიდებული იყოს სივრცის წერტილის კოორდინატებზე. ასეთი ვექტორები ქმნიან ე.წ. ვექტორულ ველებს. ჩავწეროთ ერთი და იგივე ვექტორი ორ განსხვავებულ ბაზისში

$$\boldsymbol{V}(x) = V_i(x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{e}_i = V'_k(x'_1, x'_2, x'_3)\boldsymbol{e}'_k,$$

სადაც

$$\boldsymbol{e}'_m = \frac{\partial x'_m}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\ .$$

ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია დავადგინოთ

ვექტორული ველის გარდაქმნის ზოგადი სახე

$$V'_m(x'_1, x'_2, x'_3) = \frac{\partial x'_m}{\partial x_i}V_i(x_1, x_2, x_3)\ .$$

როგორც ვიცით, სივრცეში ასევე განმარტებულია სკალარული ველები.

სკალარი ეწოდება ისეთ ერთკომპონენტიან სიდიდეს (ფუნქციას), რომლის გარდაქმნის კანონი განისაზღვრება წესით:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f'(x'_1, x'_2, x'_3).$$

ბოლო განსაზღვრების გეომეტრიული შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში: სივრცის მოცემულ წერტილში $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე. ასეთ სიდიდეებს აგრეთვე ინვარიანტებს უწოდებენ.

განვსაზღვროთ სკალარული ფუნქციის წარმოებულის გარდაქმნის წესი. ამისათვის გამოვთვალოთ სიდიდე

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} f'(x'_1, x'_2, x'_3) = \frac{\partial x_m}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_1, x_2, x_3).$$

ერთი შეხედვით, ეს ფორმულა გვაძლევს გარდაქმნის განსხვავებულ წესს, მაგრამ ვინაიდან დეკარტულ კოორდინატთა სისტემაში სრულდება ტოლობა

$$\frac{\partial x_m}{\partial x'_k} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_m},$$

შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

დეკარტულ სისტემაში ფუნქციის კერძო წარმოებულებისათვის სამართლიანია გარდაქმნის წესი

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} f'(x'_1, x'_2, x'_3) = \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_1, x_2, x_3)\,.$$

§2.4. დეკარტული ტენზორები

დეკარტულ კოორდინატთა ორთოგონალური გარდაქმნებისას ჩვენ განვმარტეთ სკალარული და ვექტორული ველების გარდაქმნების წესები:

$$f(x) \to f'(x') = f(x)$$

$$V_m(x) \to V'_m(x') = \frac{\partial x'_m}{\partial x_i} V_i(x).$$

როგორც აღინიშნა, დეკარტულ კოორდინატულ სისტემებში სკალარული ფუნქციის კერძო წარმოებულები გარდაიქმნებიან ისევე, როგორც ვექტორის მდგენელები:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_k} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} \frac{\partial f}{\partial x_m}\ .$$

ამგვარად, სკალარული ფუნქციის გაწარმოების დახმარებით ვღებულობთ ვექტორს, რომელსაც ფუნქციის გრადიენტი ეწოდება:

$$grad\, f(x) = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\ .$$

ისმის კითხვა, რა ტიპის სიდიდე მიიღება $\boldsymbol{A}(x)$ ვექტორის კომპონენტების გაწარმოებით. ასეთი წარმოებულები ქმნიან 3×3=9 ელემენტისაგან შემდგარ ერთობლიობას:

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} \qquad i, k = 1,2,3\ .$$

დავადგინოთ ამ ობიექტის გარდაქმნის კანონი. კოორდინატთა გარდაქმნა ჩავწეროთ დიფერენციალებისა და კერძო წარმოებულების ტერმინებით:

$$dx_i \to dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} dx_m; \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \to \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_m} .$$

განმარტების ძალით ვექტორი გარდაიქმნება ისევე, როგორც დიფერენციალები

$$A_k(x) \to A'_k(x') = \frac{\partial x'_k}{\partial x_n} A_n(x) .$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\frac{\partial A_k(x)}{\partial x_i} \to \frac{\partial A'_k(x')}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_n} A_n(x) \right) = \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_n} \frac{\partial A_n(x)}{\partial x_m} + \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} \frac{\partial^2 x'_k}{\partial x_m \partial_n} A_n(x) .$$

ვინაიდან ჩვენ ვიხილავთ კოორდინატების წრფივ გარდაქმნებს, მეორე შესაკრებში

$$\frac{\partial^2 x'_k}{\partial x_m \partial_n} = 0 .$$

გარდა ამისა, ვიცით, რომ წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნებისას სრულდება ტოლობები

$$\frac{\partial x_m}{\partial x'_i} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} .$$

ამგვარად, ვღებულობთ ორინდექსიანი სიდიდის გარდაქმნის კანონს:

$$\frac{\partial A_i(x)}{\partial x_j} \to \frac{\partial A'_m(x')}{\partial x'_n} = \frac{\partial x'_m}{\partial x_i} \frac{\partial x'_n}{\partial x_j} \frac{\partial A_i(x)}{\partial x_j} .$$

მეორე რანგის ტენზორული ველი არის ორინდექსიან სიდიდეთა ერთობლიობა, რომელიც კოორდინატთა სისტემის წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნებისას იცვლება შემდეგი წესით:

$$T_{ik}(x) \to T'_{mn}(x') = \frac{\partial x'_m}{\partial x_i} \frac{\partial x'_n}{\partial x_j} T_{ij}(x) .$$

კრონეკერის სიმბოლო წარმოადგენს მეორე რანგის ინვარიანტულ რიცხვით სიმეტრიული ტენზორს

$$\delta_{ik} \to \delta'_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x'_k}{\partial x_n} \delta_{mn} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x'_k} = \delta_{ik} .$$

სამინდექსიანი ε-სიმბოლო არის მესამე რანგის ინვარიანტული ტენზორი. ორთოგონალური გარდაქმნებისას

$$\varepsilon_{ijk} \;\to\; \varepsilon'_{ijk} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} \frac{\partial x'_j}{\partial x_m} \frac{\partial x'_k}{\partial x_n} \varepsilon_{lmn} \;= \det\left[\frac{\partial x'_m}{\partial x_n}\right] \varepsilon_{ijk} \;.$$

ტენზორს, რომლის გარდაქმნის წესში, როგორც თანამამრავლი, მონაწილეობს გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი

$$\det\left[\frac{\partial x'_m}{\partial x_n}\right] = \pm 1\,,$$

ეწოდება ფსევდოტენზორი. ამგვარად, ლევი-ჩივიტას სიმბოლო წარმოადგენს მესამე რანგის რიცხვით ფსევდოტენზორს.

ანალოგიურად განიმარტება უფრო მაღალი რანგის ტენზორები:

ამბობენ, რომ $3D$ ევკლიდურ სივრცეში გვაქვს r რანგის ტენზორი, თუ ყოველ კოორდინატულ სისტემაში მოცემულია 3^r რაოდენობის კომპონენტები $T_{i_1 i_2 \cdots i_r}(x)$, ისე რომ, კოორდინატთა სისტემის ორთოგონალური გარდაქმნებისას ეს კომპონენტები გარდაიქმნებიან შემდეგი წესის თანახმად:

$$T_{i_1 i_2 \cdots i_r}(x) \to {T'}_{i_1 i_2 \cdots i_r}(x') = \frac{\partial x'_{i_1}}{\partial x_{m_1}} \frac{\partial x'_{i_2}}{\partial x_{m_2}} \cdots \frac{\partial x'_{i_r}}{\partial x_{m_r}} T_{m_1 m_2 \cdots m_r}(x)\,.$$

თითოეულ ინდექსს შეუძლია. მიიღოს მნიშვნელობები 1,2,3.

§2.5. ტენზორული ალგებრა

- ორი ერთნაირი რანგის ტენზორის ჯამი წარმოადგენს იმავე რანგის ტენზორს

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_r}(x) + B_{i_1 i_2 \cdots i_r}(x) = C_{i_1 i_2 \cdots i_r}(x).$$

- ტენზორის გამრავლება სკალარზე არ ცვლის ტენზორის რანგს

$$f(x) A_{i_1 i_2 \cdots i_r}(x) = B_{i_1 i_2 \cdots i_r}(x).$$

- ინდექსების შეკვეცისას ტენზორის რანგი მცირდება ორით

$$A_{i i i_3 \cdots i_r}(x) = D_{i_3 \cdots i_r}(x).$$

- p და q რანგის ორი ტენზორის გადამრავლებით მიღებულ $p+q$ რანგის ტენზორს ეწოდება ტენზორების გარე ნამრავლი

$$C_{i_1 i_2 \cdots i_p k_1 k_2 \cdots k_q} = A_{i_1 i_2 \cdots i_p} B_{k_1 k_2 \cdots k_q}.$$

ამასთან, ნამრავლში შენარჩუნებული უნდა იყოს თანამამრავლი ტენზორების ინდექსების თანამიმდევრობა.

- ინდექსების შეკვეცით გარე ნამრავლიდან მიიღება $p+q-2$ რანგის ტენზორი, რომელსაც შიდა ნამრავლი ეწოდება:

$$C_{ijjlm} = A_{ij} B_{jlm}.$$

- ტენზორს ეწოდება სიმეტრიული ტენზორი, თუ

$$S_{ij} = S_{ji}$$

და ანტისიმეტრიული, თუ

$$A_{ij} = -A_{ji}.$$

§2.6. ვექტორული ნამრავლი

დაუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს ორი 3-ვექტორი A_j და B_k. განვიხილოთ მათი ნამრავლები $A_j B_k$. δ და ε სიმბოლოების გამოყენებით შეგვიძლია შევკვეცოთ ეს ნამრავლები, რის შედეგადაც მივიღებთ:

- უინდექსო სიდიდეს (სკალარულ ნამრავლს)

$$\delta_{jk} A_j B_k = A_i B_i;$$

- ერთინდექსიან სიდიდეს კომპონენტებით

$$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

ბაზისის ორთოგონალური გარდაქმნისას სკალარული ნამრავლი უცვლელი რჩება

$$A_i B_i \to A'_i B'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_l} \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} A_l B_m = \delta_{lm} A_l B_m = A_i B_i \,.$$

დავადგინოთ, თუ როგორ გარდაიქმნება ერთინდექსიანი სიდიდე.

$$C'_i = \varepsilon_{ijk} A'_j B'_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} A_l B_m$$

გამოვიყენოთ ჩასმები

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{njk} \delta_{ni} = \varepsilon_{njk} \frac{\partial x'_i}{\partial x_p} \frac{\partial x'_n}{\partial x_p}$$

და

$$\varepsilon_{njk} \frac{\partial x'_n}{\partial x_p} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} = \det\left[\frac{\partial x'_m}{\partial x_n}\right] \varepsilon_{plm} \,.$$

მივიღებთ:

$$C'_i = \det\left[\frac{\partial x'_m}{\partial x_n}\right] \frac{\partial x'_i}{\partial x_p} \varepsilon_{plm} A_l B_m = \det\left[\frac{\partial x'_m}{\partial x_n}\right] \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} C_k \,.$$

$\boldsymbol{A}$ და $\boldsymbol{B}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

არის ფსევდოვექტორი კომპონენტებით

$$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

ნამდვილ ვექტორებს ასევე უწოდებენ პოლარულ ვექტორებსაც, ხოლო ფსევდოვექტორებს – აქსიალურ ვექტორებსაც.

საბაზისო ორტების ვექტორული ნამრავლებისათვის სამართლიანია გამრავლების ტაბულა

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\boldsymbol{e}_k$$

$$\boldsymbol{e}_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{mij}\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j.$$

ამ ოპერაციის გამოყენებით ორ ვექტორს შეიძლება შევუსაბამოთ მესამე ვექტორი, რომელიც ორივე თანამამრავლი ვექტორის მართობია. ეს ნამრავლი ანტისიმეტრიულია:

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3.$$

ვექტორის ვექტორული ნამრავლი თავის თავზე ნულოვანი ვექტორის ტოლია. ვექტორულ ნამრავლს ასევე ირიბ ნამრავლსაც უწოდებენ.

ინდექსური აღნიშვნების გამოყენებით შეგვიძლია შევამოწმოთ შემდეგი ვექტორული იგივეობების სისწორე:

1. $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C})$;
2. $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$;
3. $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$;
4. $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = [\boldsymbol{D} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})] \cdot \boldsymbol{C} - [\boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})] \cdot \boldsymbol{D}.$

ლექცია 3

§3.1. ვექტორების გაწარმოება

სივრცეში მოძრავი მატერიალური წერტილის აღსაწერად შეიძლება გამოვიყენოთ დროზე დამოკიდებული რადიუს-ვექტორი $\boldsymbol{r}(t)$. ამ და მომდევნო პარაგრაფებში ჩვენ ვიხმართ კოორდინატულ სისტემას $\{O; xyz\}$.

რადიუს-ვექტორისათვის გვექნება გაშლა

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y + z(t)\boldsymbol{e}_z.$$

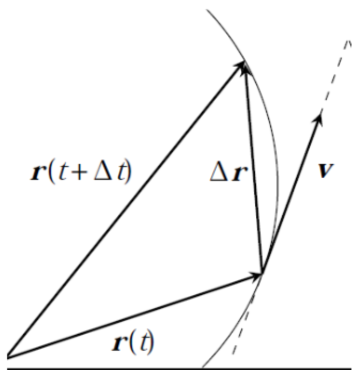
აქ იგულისხმება, რომ მდებარეობის ვექტორის კოორდინატები წარმოადგენენ დროზე დამოკიდებული სიდიდეებს.

დროის მცირე Δt ინტერვალში წერტილის გადაადგილების ვექტორი არის სხვაობა

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t).$$

მატერიალური წერტილის სიჩქარე განისაზღვრება წარმოებულით

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta \boldsymbol{r}\to\boldsymbol{0}} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$



სიჩქარისა და აჩქრების ვექტორებისათვის სამართლიანია გაშლები

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{x}(t)\boldsymbol{e}_x + \dot{y}(t)\boldsymbol{e}_y + \dot{z}(t)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \ddot{x}(t)\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}(t)\boldsymbol{e}_y + \ddot{z}(t)\boldsymbol{e}_z\,.$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ $\dot{\boldsymbol{e}}_x = \dot{\boldsymbol{e}}_y = \dot{\boldsymbol{e}}_z = \boldsymbol{0}$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ დროზე დამოკიდებული ვექტორების გაწარმოება ემორჩილება შემდეგ მარტივ წესებს:

1. $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$;
2. $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$;
3. $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$;
4. $\frac{d}{dt}(f\boldsymbol{A})=f\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+\frac{df}{dt}\boldsymbol{A}$;
5. $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\times\boldsymbol{C}\right)+\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\frac{d\boldsymbol{C}}{dt}\right)$;
6. $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{A}\times\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\times\boldsymbol{C}\right)+\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{B}\times\frac{d\boldsymbol{C}}{dt}\right)$.

§3.2. მრუდი წირები

დაუშვათ, რომ დროთა განმავლობაში რადიუს-ვექტორი $\boldsymbol{r}(t)$ აღწერს სივრცულ მრუდს C:

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_x+y(t)\boldsymbol{e}_y+z(t)\boldsymbol{e}_z.$$

აქ t დროითი პარამეტრია, ხოლო (x,y,z) – წირის წერტილების დეკარტული კოორდინატები.

ტრაექტორიის ყოველ წერტილში სიჩქარის ვექტორი მიმართულია C წირისადმი მხები მიმართულებით. მრუდის პარამეტრული წარმოდგენა C-მრუდს ანიჭებს ორიენტაციას: ჩავთვალოთ, რომ t-ის ზრდა შეესაბამება მოძრაობას დადებითი მიმართულებით. ანალოგიურად, პარამეტრის კლება შეესაბამება უარყოფით მიმართულებას.

C-მრუდის სიგრძე შეიძლება განიმარტოს, როგორც ქორდებისაგან შედგენილი ტეხილი ხაზების სიგრძეთა ჯამის ზღვარი. მცირე მონაკვეთის სიგრძე მოიცემა სიდიდით

$$dl=\sqrt{d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}=\sqrt{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}dt\,.$$

C-მრუდის სიგრძე ეწოდება დადებით რიცხვს

$$l=\int_a^b dl=\int_{t_a}^{t_b}dt\ \sqrt{\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)}=\int_{t_a}^{t_b}dt\ |\boldsymbol{v}(t)|\,.$$

ბოლო გამოსახულებაში t_a და t_b შესაბამისად დროის საწყისი და საბოლოო მომენტებია: $t_a<t_b$. შევცვალოთ ინტეგრალის ზედა საზღვარი ცვლადით t. მივიღებთ დროზე დამოკიდებულ სიდიდეს

$$s(t) = \int_{t_a}^{t} dt' \sqrt{\boldsymbol{v}(t') \cdot \boldsymbol{v}(t')}\,,$$

რომელიც წარმოადგენს $[t_a, t]$ დროით ინტერვალში გავლილი რკალის სიგრძეს. ბოლო გამოსახულების გაწარმოებით ვღებულობთ

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)}\,,$$

საიდანაც გამომდინარეობს ტოლობა

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,.$$

სიდიდეს

$$ds = \sqrt{d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}}$$

ეწოდება C-მრუდის წრფივი ელემენტი.

ვინაიდან $s = s(t)$, შეიძლება განიმარტოს შებრუნებული ფუნქცია $t = t(s)$. მაშინ

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{u}\frac{ds}{dt} \qquad \boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

და, შესაბამისად,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

რადგანაც ადგილი აქვს ტოლობას

$$(ds)^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

ვასკვნით, რომ $\boldsymbol{u}$ ერთეულოვანი ვექტორია

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 1.$$

ბოლო ტოლობის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) = 0\,,$$

ე.ი.

$$\boldsymbol{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{u} \perp \frac{d\boldsymbol{u}}{ds}\,.$$

გამომდინარე აქედან, ხშირად მოსახერხებელია t დროითი პარამეტრის ნაცვლად ვიხმაროთ მრუდის სიგრძე s:

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{e}_x + y(s)\boldsymbol{e}_y + z(s)\boldsymbol{e}_z.$$

ასე შერჩეულ პარამეტრს ნატურალური პარამეტრი ეწოდება. ნატურალური პარამეტრის შესაბამისი სიჩქარე

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$$

წარმოადგენს ერთეულოვან ვექტორს, ე.ი. $|\boldsymbol{u}(s)| = 1$. ამის შესაბამისად, მრუდის სიგრძე

$$l = \int_{t_a}^{t_b} dt\ |\boldsymbol{v}(t)| = \int_a^b ds |\boldsymbol{u}(s)| = (b-a)\,.$$

ამგვარად, ნატურალური პარამეტრი წარმოადგენს გავლილი წირის სიგრძეს.

C ტრაექტორიის მახასიათებელი სიდიდეებია სიმრუდე

$$\kappa(s) = \sqrt{\frac{d\boldsymbol{u}}{ds}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{ds}}$$

და სიჩქარის ვექტორის მართობული მთავარი ნორმალი

$$\boldsymbol{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\boldsymbol{u}}{ds} \qquad \boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{u}(s) = 0.$$

გარდა ამისა, შეიძლება შემოვიყვანოთ ერთეულოვანი ვექტორი

$$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n},$$

რომელსაც ბინორმალი ეწოდება. ვექტორული ნამრავლის განმარტების ძალით

$$\boldsymbol{b}(s)\perp\boldsymbol{u}(s) \qquad \boldsymbol{b}(s)\perp\boldsymbol{n}(s).$$

ამგვარად, ვექტორები $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ ადგენენ მარჯვენა ორიენტაციის კოორდინატულ რეპერს

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n} \quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u}.$$

როგორც სასარგებლო მაგალითი, განვიხილოთ $r = const$ რადიუსის წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ამ წრეწირზე მდებარე წერტილის კოორდინატები შეიძლება გამოვსახოთ ნატურალური პარამეტრის დახმარებით

$$x(s) = r\cos\frac{s}{r} \qquad y(s) = r\sin\frac{s}{r},$$

სადაც s არის რკალის სიგრძე. მაშინ რადიუს-ვექტორი

$$\boldsymbol{r}(s) = x(s)\boldsymbol{e}_x + y(s)\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_x r\cos\frac{s}{r} + \boldsymbol{e}_y r\sin\frac{s}{r}.$$

ახლა შეგვიძლია გამოვთვალოთ სიჩქარე

$$\boldsymbol{u}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = -\boldsymbol{e}_x\sin\frac{s}{r} + \boldsymbol{e}_y\cos\frac{s}{r}$$

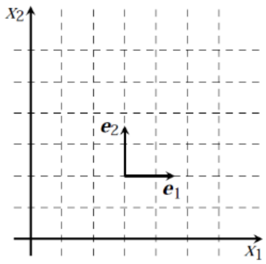
და აჩქარება

$$\boldsymbol{a}(s) = \frac{d\boldsymbol{u}}{ds} = -\frac{1}{r}\left(\boldsymbol{e}_x\cos\frac{s}{r} + \boldsymbol{e}_y\sin\frac{s}{r}\right) = \frac{1}{r}\boldsymbol{n}(s),$$

სადაც $\boldsymbol{n}(s)$ არის სიჩქარის ვექტორის მართობი ერთეულოვანი ნორმალი.

§3.3. კოორდინატული წირები და მრუდწირული კოორდინატები

დეკარტული კოორდინატული სისტემა შეიძლება წარმოვადგინოთ კოორდინატული ბადის დახმარებით:



ამ ნახაზზე ბადეს ქმნიან კოორდინატული წირები – x_1 და x_2 ღერძების პარალელური წრფეები. x_1-ღერძის პარალელური წირი განისაზღვრება ტოლობით $x_2 = const.$, ხოლო x_2-ღერძის პარალელური წირისათვის გვექნება $x_1 = const.$

კოორდინატული წირები წარმოადგენენ წრფეებს

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x_1, x_2 = const) \text{ და } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x_1 = const, x_2)$$

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2.$$

ერთეულოვანი ვექტორები $\boldsymbol{e}_1$ და $\boldsymbol{e}_2$ კოორდინატული წირების მხები ვექტორებია:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_1}\bigg|_{x_2=Const} \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_2}\bigg|_{x_1=Const}.$$

ევკლიდურ სიბრტყეში ასევე შეგვიძლია განვიხილოთ მრუდწირული კოორდინატების სისტემა, მაგალითად, პოლარული კოორდინატები r და θ.

გადასვლა დეკარტული სისტემიდან პოლარულზე ასე ჩაიწერება:

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta$$

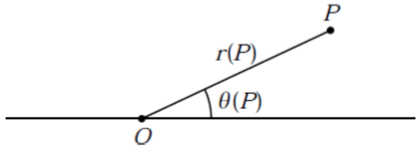
$$r \equiv u_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta \equiv u_2 = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

კოორდინატული ცვლადების განმარტების არეებია, შესაბამისად:

$$-\infty \le x, y \le +\infty$$

$$r \ge 0, \quad 0 \le \theta < 2\pi.$$

კოორდინატული წყვილები (r, θ) და $(r, \theta + 2k\pi)$ შეესაბამება სიბრტყის ერთსა და იმავე წერტილს, კოორდინატთა სათავეს $O(x = 0, y = 0)$ კი პოლარულ სისტემაში შეიძლება შეუსაბამოთ ნებისმიერი წყვილი $(r = 0, \theta)$.



ნახაზზე მითითებულია წერტილი P და მისი პოლარული კოორდინატები.

ამგვარად გვაქვს გარდაქმნები

$$(x_1, x_2) \leftrightarrow (u_1, u_2).$$

ამ გარადაქმნების ცალსახობის დასადგენად უნდა გამოითვალოს იაკობიანი

$$J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_a}\right) = r \geq 0\,,$$

რომელიც ნულდება წერტილში $r = 0$. შესაბამისად, არეში

$$r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

პოლარული კოორდინატები ცალსახად განსაზღვრავენ სიბრტყის წერტილების კოორდინატებს.

პოლარული სისტემის შემთხვევაში კოორდინატული ორტები წარმოადგენენ რადიალურ სხივებისა და კონცენტრული წრეწირების მხებ ვექტორებს.

დეკარტულ კოორდინატებში რადიალური წირის განტოლება ასე გამოიყურება:

$$x_1 = r\cos\vartheta_0\,,\;\; x_2 = r\sin\vartheta_0,$$

ხოლო აზიმუტალური წირი აღიწერება განტოლებით:

$$x_1 = r_0\cos\vartheta\,,\quad x_1 = r_0\sin\vartheta.$$

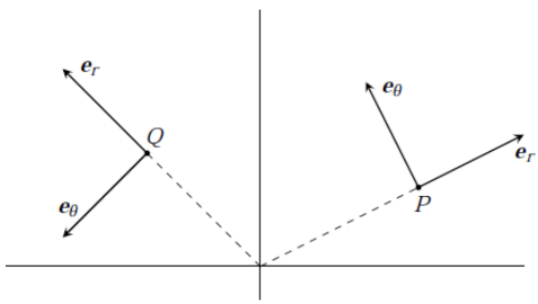
წერტილში $P = (r_0, \vartheta_0)$ ავაგოთ ამ წირების მხები ვექტორები. როგორც შედეგს, მივიღებთ პოლარული კოორდინატული სისტემის ურთიერთმართობ, თუმცა არა-ნორმირებულ, ორტებს:

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} = \frac{\partial x_1}{\partial r}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial r}\boldsymbol{e}_2 = \cos\vartheta_0 \boldsymbol{e}_1 + \sin\vartheta_0 \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_\vartheta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \vartheta} = -r_0\sin\vartheta_0\,\boldsymbol{e}_1 + \; r_0\cos\vartheta_0 \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\vartheta = 0 \qquad\quad |\boldsymbol{e}_r| = 1 \qquad |\boldsymbol{e}_\vartheta| = r_0.$$

დეკარტული რეპერისაგან განსხვავებით, $\boldsymbol{e}_r$ და $\boldsymbol{e}_\vartheta$ შეადგენენ ე.წ. მოძრავ რეპერს. ავაგოთ ბაზისები P და Q წერტილებში:



ამგვარად, დეკარტული კოორდინატები შეესაბამება გლობალურად განმარ-ტებულ ბაზისს, ხოლო პოლარული კოორდინატები უკავშირდება ყოველ ცალკე-ულ წერტილში აგებულ ლოკალურ რეპერს.

დავაზუსტოთ აღნიშვნები. გლობალური ბაზისის კოორდინატები და ორტები აღვნიშნოთ, როგორც

$$x_i, \qquad \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_i}.$$

მრუდწირული კოორდინატული სისტემის კოორდინატებისა და საბაზისო ვექ-ტორებისათვის ვიხმაროთ აღნიშვნები

$$u_a, \qquad \boldsymbol{u}_a(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_a} \qquad (\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{x})$$

სიბრტყის ყოველ წერტილში P კოორდინატებით

$$(x_1, x_2) \equiv (x, y) \sim (u_1, u_2) \equiv (r, \theta)$$

ჩვენ განვმარტეთ შემდეგი ორთოგონალური რეპერები:

1. გლობალური მართკუთხა ორთონორმირებული რეპერი, რომელიც არ არის დამოკიდებული წერტილის კოორდინატებზე, ორტებით $\boldsymbol{e}_1$ და $\boldsymbol{e}_2$ და მეტიკული ტენზორით

$$\delta_{ik} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ორ მახლობელ წერტილს შორის მანძილის კვადრატი განისაზღვრება კვადრატული ფორმით

$$ds^2 = d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} = \delta_{ik} dx_i dx_k.$$

2. ლოკალური (წერტილის კოორდინატებზე დამოკიდებული) პოლარული ორთოგონალური სისტემა ორტებით

$$\boldsymbol{u}_1 \equiv \boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{u}_2 \equiv \boldsymbol{e}_\vartheta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \vartheta} = -r\sin\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \ r\cos\theta \boldsymbol{e}_2\,.$$

ინფინიტეზიმალური წანაცვლების ვექტორის

$$d\boldsymbol{r} = du_a \boldsymbol{u}_a$$

შესაბამისი ინტერვალი

$$ds^2 = (du_a \boldsymbol{u}_a) \cdot du_b \boldsymbol{u}_b = (\boldsymbol{u}_a \cdot \boldsymbol{u}_b) du_a du_b = g_{ab} du_a du_b\,,$$

პოლარული კოორდინატების შემთხვევაში, მეტრიკული ტენზორი ჩაიწერე-ბა შემდეგი მატრიცის სახით:

$$[g_{ab}] = \begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

ორ მეზობელ წერტილს შორის მანძილის კვადრატი მოიცემა კვადრატუ-ლი ფორმით

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 = g_{ab} du_a du_b.$$

§4.1. სკალარული ველის გრადიენტი

დაუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს სკალარული ველი $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.

სკალარული ფუნქციის გრადიენტი ეწოდება ვექტორული ველს

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\, \varphi(x_1, x_2, x_3)\,.$$

გრადიენტის სიმბოლოს წარმოადგენს ვექტორული ოპერატორი ნაბლა

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,.$$

ვინაიდან $\boldsymbol{r} = x_i\boldsymbol{e}_i$, რადიუს-ვექტორის დიფერენციალი

$$d\boldsymbol{r} = dx_i\boldsymbol{e}_i$$

და, როგორც შედეგი, სკალარული ნამრავლი

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i = d\varphi$$

წარმოადგენს φ სკალარის ცვლილებას

$$\varphi(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) - \varphi(\boldsymbol{r}) = d\varphi$$

$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$ წანაცვლებისას.

ვექტორი $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ გვიჩვენებს φ-ფუნქციის მაქსიმალური ზრდის მიმართულებას, ხოლო $|\boldsymbol{\nabla}\varphi|$ არის ზრდის სიჩქარე.

დაუშვათ, რომ წერტილში $\boldsymbol{r}$ მოცემული გვაქვს ერთეულოვანი ვექტორი $\boldsymbol{v}$, მაშინ

$$\varphi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}dt) - \varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \boldsymbol{v}dt.$$

სიდიდეს

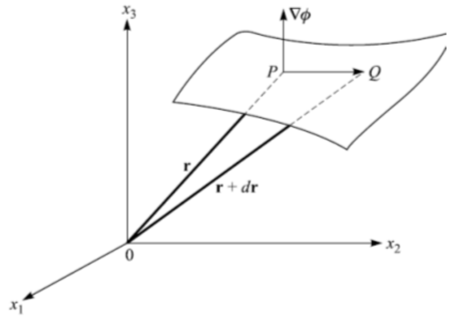
$$\lim_{dt\to 0} \frac{\varphi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}dt) - \varphi(\boldsymbol{r})}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{v}}\varphi$$

ეწოდება მიმართული წარმოებული:

- მიმართული წარმოებული მაქსიმალურია, როდესაც $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{\nabla}\varphi$;
- მიმართული წარმოებული ნულის ტოლია, როდესაც $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{\nabla}\varphi$.

დაუშვათ, რომ გვაქვს დონის ზედაპირი $\varphi(x_1, x_2, x_3) = C = const$. ამ ზედაპირის ყოველ წერტილში ვექტორი $\boldsymbol{\nabla}\varphi$ მიმართულია ამ ზედაპირისადმი ნორმალის გასწვრივ. ამგვარად, $\varphi = Const$ ზედაპირისადმი ნორმალი არის ერთეულოვანი ვექტორი

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\nabla}\varphi}{|\boldsymbol{\nabla}\varphi|}\,.$$



იმავდროულად, ვექტორები $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{\nabla}\varphi$ განთავსებულია $\varphi = Const$ ზედაპირის მხებ სიბრტყეში.

§4.2. ვექტორული ველის დივერგენცია და როტორი

დაუშვათ, გვაქვს ვექტორული ველი

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_i V_i(x_1, x_2, x_3).$$

ვექტორული ველის დივერგენცია (განშლადობა) არის ნაბლა-ოპერატორის სკალარული ნამრავლი მოცემულ ვექტორულ ველთან

$$div\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}.$$

ვექტორული ველის როტორი (გრიგალი) არის ნაბლა-ოპერტორის ვექტორული ნამრავლი მოცემულ ვექტორულ ველთან

$$rot\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\frac{\partial V_k}{\partial x_j}.$$

გაშლილი სახით გვექნება

$$div\,\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

$$rot\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_1\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right) + \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right) + \boldsymbol{e}_3\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right).$$

არსებობს ბოლო გამოსახულების დამახსოვრების მარტივი ხერხი:

$$rot\,\boldsymbol{V} = \det\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3\\ V_1 & V_2 & V_3\end{bmatrix}.$$

ვექტორულ ველს, რომლის დივერგენცია ნულის ტოლია, ეწოდება სოლენოიდური ველი. ასეთია, მაგალითად, მაგნიტური ველი $\boldsymbol{B}$:

$$div\,\boldsymbol{B} = 0,$$

ვინაიდან

$$div\,rot\,\boldsymbol{A} = \partial_i\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k\right) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}A_k = 0\,.$$

სოლენოიდური მაგნიტური ველი შეიძლება წარმოვადგინოთ ვექტორული ველის გრიგალის სახით:

$$\boldsymbol{B} = rot\,\boldsymbol{A}.$$

ელექტროდინამიკაში ვექტორულ ველს $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ ეწოდება ვექტორ-პოტენციალი. ვექტორ-პოტენციალი განისაზღვრება გრადიენტული (ყალიბური) გარდაქმნის სიზუსტით. ყალიბური გარდაქმნის შედეგად მიღებული ვექტორ-პოტენციალი

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + grad\,f$$

გვაძლევს იმავე მაგნიტურ ველს $\boldsymbol{B}$**,** რასაც თავდაპირველი ველი $\boldsymbol{A}$**:**

$$rot\,\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B}.$$

დაუშვათ, რომ გვაქვს ვექტორული ველი $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$**,** მაშინ სკალარული ნამრავლი

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} = V_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

არის სკალარული დიფერენციალური ოპერატორი. ამასთან

$$\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\nabla} \neq \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}.$$

ნაბლა-ოპერატორის სკალარული ნამრავლი თავის თავზე გვაძლევს მეორე რიგის დიფერენციალურ სკალარულ ოპერატორს:

$$\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_i\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_k\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{ik} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \Delta\,.$$

ამ ოპერატორს ლაპლასის ოპერატორი ან უბრალოდ ლაპლასიანი ეწოდება. განტოლება

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$$

ცნობილია ლაპლასის განტოლების სახელით.

$\boldsymbol{\nabla}$ ოპერატორის გამოყენებით შეგვიძლია ავაგოთ:

– ვექტორული ველები $\boldsymbol{\nabla}\phi$, $\quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V}$ **;**
– სკალარული ველები $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V}$, $\quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi$.

გრადიენტი, დივერგენცია და ლაპლასიანი შეიძლება განიმარტოს ნებისმიერი განზომილების სივრცეში, გრიგალი კი უკავშირდება სამგანზომილებიანი სივრცის თვისებებს.

§4.3. დიფერენციალური ოპერატორების კომბინაციები

ქვემოთ მოყვანილია დიფერენციალური ოპერატორების კომბინაციების გამოყენების გავრცელებული შემთხვევები. ამ ფორმულებში $f(\boldsymbol{r})$ და $g(\boldsymbol{r})$ ნებისმიერი სკალარული ფუნქციებია, ხოლო $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ და $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ წარმოადგენენ ვექტორულ ველებს.

ძირითადი ფორმულები:

1. $\boldsymbol{\nabla}(fg) = f\boldsymbol{\nabla}g + g\boldsymbol{\nabla}f$;

2. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{A}) = f\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{A}$;

3. $\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{A}) = f\boldsymbol{\nabla}\times A + \boldsymbol{\nabla}f\times\boldsymbol{A}$;

4. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}$;

5. $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$;

6. $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}$;

7. $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}$;

9. $\nabla\cdot\boldsymbol{r} = 3$;

10. $\nabla\times\boldsymbol{r} = 0$;

11. $\nabla\cdot(r^{-3}\boldsymbol{r}) = 0$;

12. $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f) = 0$;

13. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0$;

14. $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$.

დამატება

მოყვანილი ფორმულების გამოყვანისას გამოიყენება შემდეგი ტოლობები:

$$\epsilon_{ijk}A_jA_k = 0$$

$$\epsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}; \quad \epsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}; \quad \epsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \quad \rightarrow \ C_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_iB_i$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \varepsilon_{ijk}\,A_iB_jC_k$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}).$$

საილუსტრაციოდ გამოვიყვანოთ თანაფარდობები **3**, **4** და **6:**

3. $rot\,(f\boldsymbol{A}) \rightarrow [rot\,(f\boldsymbol{A})]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j[fA_k] = \varepsilon_{ijk}\left[\partial_j f\,A_k + f\,\partial_j A_k\right] = [grad\,f\times\boldsymbol{A}]_i +$
$+f[rot\,\boldsymbol{A}]_i \rightarrow grad\,f\times\boldsymbol{A} + f\,rot\,\boldsymbol{A}$;

4. $div\,[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}] = \partial_i\left[\varepsilon_{ijk}A_{\boldsymbol{j}}B_k\right] = \varepsilon_{kij}B_k\partial_iA_j - \varepsilon_{jik}A_j\partial_iB_k = \boldsymbol{B}\cdot rot\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot rot\,\boldsymbol{B}$;

6. $ad\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \rightarrow [grad\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})]_i = \partial_i(A_kB_k) = \partial_iA_k\,B_k + A_k\,\partial_iB_k = \partial_iA_k\,B_k +$
$+A_k\,\partial_iB_k + A_k\partial_kB_i + B_k\partial_kA_i - A_k\partial_kB_i - B_k\partial_kA_i = A_k\partial_kB_i + B_k\partial_kA_i +$
$+[\partial_iA_k\,B_k + A_k\,\partial_iB_k - A_k\partial_kB_i - B_k\partial_kA_i]$

პირველი ორი წევრის ჯამი არის

$$A_k\partial_kB_i + B_k\partial_kA_i = [(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}]_i,$$

აქ გამოყენებულია აღნიშვნა $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla) \equiv A_k\partial_k$.

კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება შეიძლება წარმოვად-გინოთ, როგორც

$$[\partial_i A_k\, B_k + A_k\, \partial_i B_k - A_k \partial_k B_i - B_k \partial_k A_i] = \left[\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right]\left(A_j \partial_m B_n + B_j \partial_m A_n\right) =$$

$$= \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{lmn}\left(A_j \partial_m B_n + B_j \partial_m A_n\right) = [\boldsymbol{A} \times rot\, \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times rot\, \boldsymbol{A}]_i\,.$$

ამგვარად, საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$grad\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = [(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}] + \ [\boldsymbol{A} \times rot\, \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times rot \boldsymbol{A}.$$

§4.4.* ჰელმჰოლცის თეორემა

ფიზიკის ამოცანებისათვის მნიშვნელოვანია ვექტორული ველის დივერგენ-ცია და როტორი. როგორც აღვნიშნეთ, თუ $div\, \boldsymbol{V} = 0$, მაშინ ველი სოლენოიდურია, ხოლო თუ $rot\, \boldsymbol{V} = 0$, მაშინ ველი უგრიგალოა.

ზოგადი ვექტორული ველი არც სოლინოიდურია, არც უგრიგალო, მაგრამ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც სოლენოიდური და უგრიგალო ველების კომ-ბინაცია. ეს დებულება წარმოადგენს ჰელმჰოლცის თეორემის შინაარსს. თეორემა ასე ყალიბდება:

სივრცის რაიმე არეში ვექტორული ველი ცალსახად განისაზღვრება მისი დი-ვერგენციით, როტორითა და ამ არის საზღვარზე ვექტორული ველის ნორმალური მდგენელით. იმ შემთხვევაში, როდესაც დივერგენცია და როტორი განსაზღვრუ-ლია მთელ სივრცეში და ისინი საკმაოდ სწრაფად ნულდებიან უსასრულობაში, სამართლიანია ტოლობა:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).$$

აქ $-\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})$ არის $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ ვექტორული ველის უგრიგალო ნაწილი, ხოლო $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ **–** სოლენოიდური ველი.

შევამოწმოთ ამ თეორემის სამართლიანობა. ამისათვის უნდა განისაზღვროს სკალარული ველი $\phi(\boldsymbol{r})$ და ვექტორული ველი $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$. შემოვიყვანოთ ორი დამხმარე ველი: სკალარული ველი $\rho(\boldsymbol{r})$ და ვექტორული ველი $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$**,** ისეთები, რომ

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} = \rho(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}).$$

მაშინ სამართლიანი უნდა იყოს ტოლობა:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} = \rho(\boldsymbol{r}) = -\Delta\phi + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = -\Delta\phi.$$

მაშასადამე, სკალარული ველი ϕ აკმაყოფილებს პუასონის განტოლებას

$$\Delta\phi = -\rho(\boldsymbol{r}).$$

ამას გარდა,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times [-\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})] = -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}).$$

ტოლობა

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

ინვარიანტულია გრადიენტული გარდაქმნის მიმართ

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r})$$

($f(\boldsymbol{r})$ არის რაიმე სკალარული ფუნქცია). ამიტომ შეგვიძლია მოვითხოვით, რომ შესრულდეს პირობა

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0,$$

რის შედეგადაც უნდა კმაყოფილდებოდეს პუასონის განტოლება

$$\Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}).$$

ამგვარად, საძიებელი ველების $\phi(\boldsymbol{r})$ და $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ დასადგენად საჭიროა პუასონის განტოლებების ამოხსნა.

§4.5.* ტენზორული ველები

სკალარის (0-რანგის ტენზორის) კერძო წარმოებულები ქმნიან ვექტორს $grad\, f \equiv \boldsymbol{\nabla} f$, რომელიც წარმოადგენს პირველი რანგის ტენზორს. სკალარული ფუნქციის დიფერენციალი არის ინვარიანტული სიდიდე

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

თვით სიდიდეები dx_i და $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ კი ვექტორებია.

ორინდექსიანი სიდიდე – ვექტორის კერძო წარმოებული, წარმოადგენს მეორე რანგის ტენზორს. მართლაც, კოორდინატთა ორთოგონალური გადაქმნებისას ამ ობიექტის გარდაქმნის წესი ემთხვევა მეორე რანგის ტენზორის გარდაქმნის კანონს

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \to \frac{\partial A'_i}{\partial x'_k} = \frac{\partial x_m}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_n} A_n \right) = \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} \frac{\partial x'_i}{\partial x_n} \frac{\partial A_n}{\partial x_m}.$$

შესაბამისად, ვექტორის დიფერენციალი

$$dA_i(x) = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_k$$

წარმოადგენს ვექტორს.

მეორე რანგის ტენზორში შეიძლება განვაცალკევოთ ინდექსების გადასმის მიმართ ანტისიმეტრიული და სიმეტრიული ნაწილები:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} + \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) = F_{ik} + G_{ik}.$$

თითოეული ეს ნაწილი ქმნის მეორე რანგის ტენზორს. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ორთოგონალური გარდაქმნებისას სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გარდაიქმნებიან:

$$F_{ik} \to F'_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x'_k}{\partial x_n} F_{mn}$$

$$G_{ik} \to G'_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} \frac{\partial x'_k}{\partial x_n} G_{mn}.$$

ანტისიმეტრიულ ნაწილს შეესაბამება დუალური ვექტორი

$$B_i(x) = \varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}\right) = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \,.$$

ვექტორულ აღნიშვნებში გვექნება

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = rot\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}).$$

პირველი რანგის ტენზორის წარმოებულებისაგან ინდექსების შეკვეცის ოპერაციის დახმარებით შეიძლება შევადგინოთ სკალარი

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \partial_j A_j = div\ \boldsymbol{A} \,.$$

მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორის გაწარმოებით მივიღებთ მესამე რანგის ტენზორს

$$X_{mik} = \partial_m F_{ik}.$$

შევკვეცოთ ეს ტენზორი ლევი-ჩივიტას ε ტენზორის გამოყენებით:

$$\varepsilon_{mik}X_{mik} = 2\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}\right) = \partial_m E_m = div\ \boldsymbol{E} \,.$$

ბოლო გამოსახულებაში

$$E_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{mik}F_{ik}$$

არის F_{ik} ტენზორის დუალური ვექტორი.

მოყვანილი ფორმულები გამოიყენება ელექტრომაგნიტური ველის შესწავლისას.

$5.1. დიფერენციალური ოპერატორები და ინტეგრალური თეორემები

ჩვენ განვიხილეთ სკალარული ველის გრადიენტი, ვექტორული ველის დივერგენცია და როტორი.

ეს სამივე ოპერატორი მიიღება ნაბლა

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ოპერატორის გამოყენებით.

ვინაიდან კოორდინატული ორტებისათვის სამართლიანია გამრავლების წესები

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ik}$$
$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k,$$

შესაბამისად გვექნება

$$grad\, f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$div\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$
$$rot\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}.$$

ამგვარად, ოპერატორი ნაბლა წარმოადგენს გაწარმოების ოპერატორის განზოგადოებას

$$\frac{d}{dx} \to \boldsymbol{\nabla}.$$

გაწარმოების შებრუნებული ოპერაცია არის ინტეგრება. ერთი ცვლადის შემთხვევაში, ეს დებულება შეადგენს კალკულუსის ფუნდამენტური თეორემის შინაარსს:

$$\int_a^b dx \frac{df(x)}{dx} = f(b) - f(a).$$

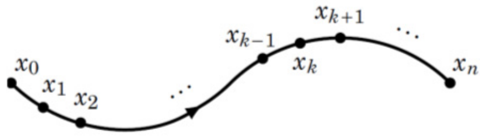
შემდგომში რაიმე $g(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი გაიგება, როგორც შესაბამისი რიმანის ჯამის ზღვარი:

$$\int_a^b dx g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta\,(x_k) g(x_k); \quad x_0 = a,\, x_n = b; \;\; \Delta(x_k) = \frac{b-a}{n}.$$

აქ იგულისხმება, რომ წერტილები x_k მიეკუთვნებიან საინტეგრაციო არეს: $x_k \in [a, b]$.

§5.2 წირითი ინტეგრალები. გრადიენტის თეორემა

როდესაც სივრცის განზომილება ერთზე მეტია, ინტეგრება შეიძლება განხორციელდეს რაიმე გლუვი წირის გასწვრივ:



ამ შემთხვევაშიც წირითი ინტეგრალი წარმოადგენს რიმანის ჯამის ზღვარს

$$\int_C d\boldsymbol{x}\, F(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \Delta\boldsymbol{x}_k F(\boldsymbol{x}_k)\,,$$

სადაც უსასრულოდ მცირე ვექტორი $\Delta\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}$. ამგვარად, ხდება გლუვი საინტეგრაციო წირის აპროქსიმაცია ტეხილი ხაზით. მოყვანილ ფორმულაში $F(\boldsymbol{x}) \equiv F(\boldsymbol{r})$ წარმოადგენს $\boldsymbol{r}$ რადიუს-ვექტორის სკალარულ ფუნქციას.

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ ინტეგრალები ვექტორული ველისათვის $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. ასეთი ტიპის ინტეგრალებისათვის სამართლიანია შემდეგი ზოგადი წესი:

ინტეგრალს აქვს იგივე ტენზორული ბუნება, რაც ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას.

შესაბამისად, ინტეგრალი

$$\int_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \Delta\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k)$$

წარმოადგენს სკალარს, ხოლო

$$\int_C d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \Delta\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k)$$

ვექტორული სიდიდეა.

ამ გამოსახულბებში $\Delta\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k)$ და $\Delta\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k)$, შესაბამისად, სკალარული და ვექტორული ნამრავლებია.

უსასრულოდ მცირე ნაზრდები შეიძლება ჩაიწეროს კოორდინატების დიფერენციალების დახმარებით

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_i dx_{\boldsymbol{i}}.$$

როგორც შედეგი, წირითი ინტეგრალებისათვის გვექნება:

$$\int_C d\boldsymbol{r}\, F(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_i \int_{\boldsymbol{C}} dx_{\boldsymbol{i}}\, F(\boldsymbol{r})$$

$$\int_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{C}} dx_{\boldsymbol{i}}\, F_i(\boldsymbol{r})$$

$$\int_C d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\int_C dx_{\boldsymbol{j}}\, A_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}).$$

რადგანაც

$$d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r}) = d\Phi(\boldsymbol{r}),$$

სამართლიანია

გრადიენტის თეორემა

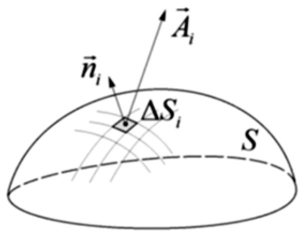
$$\int_C d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_C d\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}_b) - \Phi(\boldsymbol{r}_a).$$

როგორც შედეგი, ჩაკეტილ კონტურზე $\boldsymbol{r}_b = \boldsymbol{r}_a$ ინტეგრალი ნულდება

$$\oint d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r}) = 0.$$

§5.3. ზედაპირული ინტეგრალები

განვიხილოთ ინტეგრალი, როდესაც ინტეგრების არე წარმოადგენს რაიმე გლუვ ზედაპირს.



ნახაზზე გამოსახულია ზედაპირი S და გამოყოფილია უსასრულოდ მცირე ფართის ელემენტი ΔS_i (მიახლოებით კვადრატი), ცენტრით წერტილში $\boldsymbol{r}_i$. ამ ელემენტისადმი ერთეულოვანი ნორმალი არის ვექტორი $\boldsymbol{n}_i$, ხოლო $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)$. მოსახერხებელია, შემოვიყვანოთ ფართის ელემენტის შესაბამისი ვექტორი

$$\Delta\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{n}_i \Delta S_i.$$

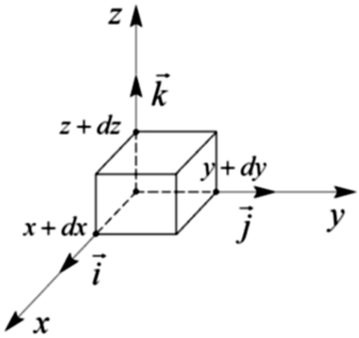
დავფაროთ საინტეგრაციო არე ფართის მცირე ელემენტებით ΔS_i. როგორც წირის შემთხვევაში, ზედაპირული ინტეგრალი განისაზღვრება, როგორც რიმანის ჯამის ზღვარი

$$\iint_S d\boldsymbol{S}\phi(\boldsymbol{r}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta\boldsymbol{S}_k \phi(\boldsymbol{r}_k).$$

განვიხილოთ მცირე ზომის კუბი (კუბოიდი), რომლის საზღვარს წარმოადგენს ექვსი კვადრატის ერთობლიობა. აღვნიშნოთ შესაბამისი მცირე ზედაპირი როგორც ΔS. კუბოიდის შემთხვევაში უნდა გამოვითვალოთ ჯამი

$$\sum_{a=1}^{6} \Delta\boldsymbol{S}_a \phi(\boldsymbol{r}_a)\,.$$

ნაზაზზე გამოსახულია საინტეგრაციო მოცულობა და მისი $2D$ საზღვარი:



ფართის ელემენტები შემდეგნაირად არის შერჩეული:

$$\Delta \boldsymbol{S}_1 = -\Delta \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{i}\, dydz$$

$$\Delta \boldsymbol{S}_3 = -\Delta \boldsymbol{S}_4 = \boldsymbol{j}\, dzdx$$

$$\Delta \boldsymbol{S}_5 = -\Delta \boldsymbol{S}_6 = \boldsymbol{k}\, dxdy.$$

შესაბამისად,

$$\sum_{a=1}^{6} \Delta \boldsymbol{S}_a \phi(\boldsymbol{r}_a) = \boldsymbol{i}\, dydz\phi(x+dx,y,z) - \boldsymbol{i}\, dydz\phi(x,y,z) +$$

$$+\boldsymbol{j}\, dzdx\phi(x,y+dy,z) - \boldsymbol{j}\, dzdx\phi(x,,z) +$$
$$+\boldsymbol{k}\, dxdy\phi(x,y,z+dz) - \boldsymbol{k}\, dxdy\phi(x,,z) =$$
$$= \boldsymbol{i}\, dydz\phi dx\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\, dzdxdy\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\, dxdydz\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

ამრიგად, ვღებულობთ, რომ

$$\sum_{a=1}^{6} \Delta \boldsymbol{S}_a \phi(\boldsymbol{r}_a) = dxdydz\, \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}).$$

ნებისმიერი სასრული მოცულობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც მცირე მოცულობის კუბოიდების ერთობლიობა. ორ მეზობელ კუბოიდს აქვს საერთო წახნაგი. ამ წახნაგის შესაბამისი წვლილები ერთმანეთს აბათილებენ, რის შედეგადაც ზედაპირულ ინტეგრალში არანულოვან წვლილს იძლევა მხოლოდ V მოცულობის შემომსაზღვრელი ჩაკეტილი ზედაპირი $S \equiv \partial V$.

ამრიგად, ჩაკეტილ ზედაპირზე სკალარული ფუნქციის ინტეგრალისათვის გვექნება

$$\oint_S d\boldsymbol{S}\, \phi(\boldsymbol{r}) = \int_V dV \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}); \quad dV \equiv dxdydz.$$

გამოსახულების მარჯვენა მხარეს გვაქვს ამ ფუნქციის გრადიენტის ინტეგრება საინტეგრაციო ზედაპირით შემოსაზღვრულ მოცულობაში. მცირე მოცულობის შემთხვევაში,

$$\oint_{\Delta S} d\boldsymbol{S}\,\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\Delta V} dV\,\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) \approx \Delta V \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) \qquad \Delta S \equiv \partial\Delta V.$$

როგორც შედეგი, მივიღეთ

სკალარული ფუნქციის გრადიენტის კოორდინატებზე დამოუკიდებელი გეომეტრიული წარმოდგენა

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta S} d\boldsymbol{S}\,\phi(\boldsymbol{r})\right)$$

და ნაბლა ოპერატორის ფორმალური ინტეგრალური წარმოდგენა

$$\boldsymbol{\nabla} = \lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta S} d\boldsymbol{S}\right).$$

§5.4. გაუსისა და სტოქსის თეორემები

ნაბლა ოპერატორის ინტეგრალური წარმოდგენის საფუძველზე შეიძლება დავადგინოთ

ვექტორული ველის დივერგენციისა და როტორის გეომეტრიული განმარტებები

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta S} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta S} d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right).$$

მცირე მოცულობებისთვის ადგილი აქვს ტოლობებს

$$\Delta V\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \oint_{\Delta S} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

$$\Delta V\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \oint_{\Delta S} d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),$$

სადაც ΔV არის $\boldsymbol{r}$-წერტილის შემცველი მცირე მოცულობა, ხოლო ΔS ამ მოცულობის საზღვარი (ჩაკეტილი ზედაპირი). თუ სასრულ მოცულობას დავყოფთ მცირე კუბოიდებად, მაშინ ორი მომიჯნავე კუბოიდის საერთო წახნაგზე ხდება ზედაპირული ინტეგრალების წვლილების გაბათილება და, როგორც შედეგს, ვღებულობთ ორ ინტეგრალურ ტოლობას:

$$\int_V dV \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \oint_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

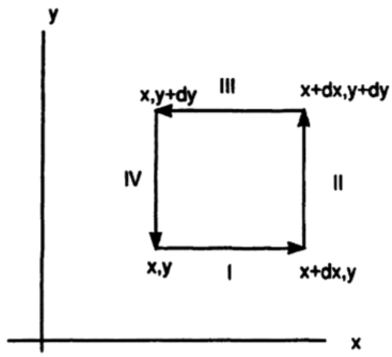
$$\int_V dV \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \oint_S d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).$$

პირველი ფორმულა წარმოადგენს გაუსის თეორემას, რომელიც აკავშირებს ვექტორული ველის დივერგენციას იმავე ველის ნაკადთან.

მეორე ფორმულის შინაარსის დასადგენად თავდაპირველად განვიხილოთ $x-y$ სიბრტყეში განთავსებული მცირე ზომის კვადრატული ფორმის მქონე ფართი S. კვადრატი შემოსაზღვრულია წირით $\delta C = \partial S$. ინტეგრალს

$$\oint_{\delta C} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

ეწოდება $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ვექტორული ველის ცირკულაცია δC-კონტურის გასწვრივ.



არჩეული შეკრული კონტური შეიძლება დაიყოს ოთხ ინტერვალად:

$$C = I + II + III + IV.$$

შესაბამისად, ცირკულაციისათვის გვექნება

$$\oint_{\delta C} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{I}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \cdots + \int_{\boldsymbol{IV}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) =$$

$$= \int_x^{x+dx} dx\, A_x(x,y) + \int_y^{y+dy} dy\, A_y(x+dx,y) + \int_{x+dx}^{x} dx\, A_x(x,y+dy) + \int_{y+dy}^{y} dy\, A_y(x,y) =$$

$$= \int_x^{x+dx} dx\, [A_x(x,y) - A_x(x,y+dy)] + \int_y^{y+dy} dy\, \left[A_y(x+dx,y) - A_y(x,y)\right] =$$

$$= \int_x^{x+dx} dx \left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} dy\right) + \int_y^{y+dy} dy \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} dx\right) \approx dxdy \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right].$$

ამგვარად მცირე ფართისათვის

$$\oint_{\delta C} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \approx dxdy\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right],$$

სასრული ფართის შემთხვევაში, ეს უკანასკნელი უნდა წარმოვიდგინოთ როგორც ელემენტარული მცირე ფართების გაერთიანება. მომიჯნავე კვადრატებს ექნებათ საერთო გვერდები. როგორც შედეგი, მომიჯნავე კვადრატების საერთო გვერდებ-ზე წირითი ინტეგრალები განულდება და, შესაბამისად, ნულისაგან განსხვავებუ-ლი იქნება მხოლოდ სრული ფართის საზღვარზე გამოთვლილი წირითი ინტეგრა-ლი, მარჯვენა მხარეს კი გვექნება ზედაპირული ინტეგრალი

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_S dS\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right].$$

დაუბრუნდეთ კვლავ $x - y$ სიბრტყეში განლაგებული მცირე ფართის შემთხ-ვევას, როდესაც ცირკულაცია

$$\oint_{\delta C} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \approx dxdy\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right] = \delta S\,(rot\,\boldsymbol{A})_z.$$

ფართის ელემენტს δS ჩვენ შეგვიძლია შევუსაბამოთ ვექტორი

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}\delta S,$$

სადაც $\boldsymbol{k}$ არის z -ღერძის გასწვრივ მიმართული ორტი, რომელიც საინტეგრაციო $x - y$ სიბრტყის ნორმალს წარმოადგენს. ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ სკალარული ნამრავლი

$$\delta S\,(rot\,\boldsymbol{A})_z = \delta S\boldsymbol{k} \cdot rot\boldsymbol{A} = d\boldsymbol{S} \cdot rot\boldsymbol{A}.$$

ეს ფორმულა შეიძლება განვაზოგადოთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ფარ-თისადმი ნორმალი ნებისმიერად არის ორიენტირებული. შესაბამისად გვექნება:

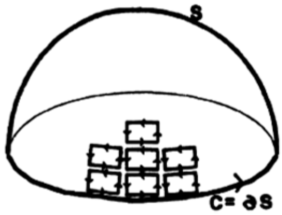
$$\delta S\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \approx \oint_{\delta C} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).$$

მაშასადამე, სამართლიანია

გრიგალის ინტეგრალური წარმოდგენა წირითი ინტეგრალის დახმარებით

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \lim_{\delta S \to 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\delta C} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).$$

თუ იმავე არგუმენტებს გავიმეორებთ სასრული ზედაპირისათვის,



მივიღებთ სტოქსის თეორემას

$$\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{r}\ \cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ ვექტორული ანალიზის სამი მნიშვნელოვანი შედეგი:

1. გრადიენტის თეორემა

$$\int_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_C d\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}_b) - \Phi(\boldsymbol{r}_a)\,;$$

2. სტოქსის თეორემა

$$\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{r}\ \cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,;$$

3. გაუსის (დივერგენციის) თეორემა

$$\int_V dV\boldsymbol{\nabla}\cdot\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \oint_{\partial V} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}).$$

აღვნიშნოთ, რომ ეს სამივე თეორემა წარმოადგენს ე.წ. სტოქსის განზოგადოებული თეორემის კერძო შემთხვევებს (იხ.§8.2.).

შესაბამისი ფორმულების გეომეტრიული შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში:

1. სკალარული ფუნქციის გრადიენტი განსაზღვრავს ამ ფუნქციის ფარდობითი ზრდის სიდიდეს და მიმართულებას;
2. ვექტორული ველის გრიგალის პროექცია მცირე ფართისადმი ნორმალზე არის ვექტორული ველის ცირკულაცია ამ ფართის საზღვრზე;
3. ვექტორული ველის დივერგენცია არის ვექტორული ველის ნაკადი, გამომავალი მცირე მოცულობიდან ΔV გაყოფილი ამ მოცულობაზე.

§6.1.* წრფივი გარდაქმნები მინკოვსკის სივრცეში

დაუშვათ, რომ გვაქვს D-განზომილების სივრცე, სადაც შემოყვანილია კოორდინატები $x_a (a = 1,2, \dots, D)$. ასე რომ, ინტერვალი ორ მეზობელ წერტილს შორის მოიცემა კვადრატული ფორმით

$$ds^2 = \sum_{a,b=1}^{D} \eta_{ab} dx_a dx_b.$$

მოვითხოვოთ, რომ მეტრიკული ტენზორი η_{ab} იყოს კოორდინატებისაგან დამოუკიდებელი დიაგონალური მატრიცა, რომლის კვადრატი ერთეულოვანი მატრიცის ტოლია:

$$\sum_{c=1}^{D} \eta_{ac} \eta_{cb} = \delta_{ab}.$$

სივრცეს ასე შემოყვანილი მეტრიკით ეწოდება ფსევდოევკლიდური სივრცე. იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$\eta_{ab} = \delta_{ab},$$

საქმე გვაქვს D-განზომილებიან ევკლიდურ სივრცესთან.

განვიხილოთ ოთხგანზომილებიანი ფსევდოევკლიდური სივრცე. ჩავთვალოთ, რომ ამ სივრცეში შემოღებულია კოორდინატები (x_0, x_1, x_2, x_3) და განმარტებულია კვადრატული ფორმა (მეტრიკა)

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

ამგვარად განმარტებულ ფსევდოევკლიდურ სივრცეს მინკოვსკის სივრცე ეწოდება. ინდექსური ჩაწერის გამოყენება გვაძლევს

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu}^{3} \eta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad \mu, \nu = 0,1,2,3,$$

სადაც სიდიდეები $\eta_{\mu\nu}$ ადგენენ 4×4 გადაუგვარებელ დიაგონალურ მატრიცას

$$[\eta] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

მინკოვსკის მეტრიკული ტენზორი $\eta_{\mu\nu}$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\mu\lambda} \eta_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

ზემოთ მოყვანილ გამოსახულებებში გათვალისწინებულია დაჯამების ოპერაცია განმეორებადი ინდექსების წყვილებით. ვინაიდან დაჯამების ინდექსებისათ-

ვის დასაშვებია ინდექსების ჩანაცვლების ოპერაცია, ასეთ ინდექსებს მუნჯი ინდექსები ეწოდებათ. მაგალითად,

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu}^{3} \eta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \equiv \sum_{\lambda,\rho}^{3} \eta_{\lambda\rho} dx_\lambda dx_\rho.$$

ამგვარად, რაიმე გამოსახულებაში მუნჯი ინდექსების არსებობა თავისთავად გულისხმობს ამ ინდექსებით დაჯამების არსებობას. მაშასადამე, მუნჯი ინდექსების შემთხვევებში, ჯამის ნიშანი Σ შეიძლება მოიხსნას. მოყვანილ მაგალითში გვექნება

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu}^{3} \eta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \equiv \eta_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \, .$$

განვიხილოთ კოორდინატების წრფივი გადაუგვარებელი გარდაქმნები

$$x \to x' = \mathrm{L}x \qquad x = \mathrm{L}^{-1}x',$$

სადაც L არის გარდაქმნის გადაუგვარებელი მატრიცა. ასეთი ჩაწერისას ჩვენ x-ით აღვნიშნავთ კოორდინატების ერთობლიობას (x_0, x_1, x_2, x_3).

თუ გამოვიყენებთ კომპონენტურ ჩაწერას, გვექნება

$$x_\mu \to x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L_{\mu\nu} x_\nu \, .$$

ინდექსებს, რომლებიც არ მონაწილეობენ დაჯამებაში, თავისუფალი ინდექსები ეწოდებათ. მათი ჩანაცვლება არ არის დაშვებული. მაგალითად, ბოლო ფორმულაში μ თავისუფალი, ხოლო ν მუნჯი ინდექსებია. ამასთან, ყოველი განტოლების მარჯვენა და მარცხენა მხარეს უნდა გვქონდეს ტოლი რაოდენობის ერთნაირი დასახელების თავისუფალი ინდექსები.

კოორდინატების დიფერენციალებისათვის სამართლიანია გარდაქმნის წესი

$$dx_\mu \to dx'_\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} dx_\lambda \qquad L_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}.$$

ეს გარდაქმნები შექცევადია

$$\det\left[\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda}\right] \neq 0$$

და, შესაბამისად,

$$dx_\nu = \sum_{\rho=0}^{3} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\rho} dx'_\rho \, .$$

მეტრიკა ინვარიანტულია, თუ გარდაქმნებისას იგი არ იცვლება

$$ds'^2 = ds^2 = inv.$$

კომპონენტურ ჩაწერაში გვექნება

$$\eta_{\mu\nu}dx'_{\mu}dx'_{\nu}=\eta_{\lambda\rho}dx_{\lambda}dx_{\rho}.$$

ტოლობის მარცხენა მხარე შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\eta_{\mu\nu}\left[\sum_{\lambda=0}^{3}\frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\lambda}}dx_{\lambda}\right]\left[\sum_{\lambda=0}^{3}\frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\rho}}dx_{\rho}\right]=\sum_{\lambda,\rho=0}^{3}\left[\frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\lambda}}\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\rho}}\right]dx_{\lambda}dx_{\rho}\,.$$

მაშასადამე, მეტრიკის ინვარიანტობა გამოისახება თანაფარდობებით

$$\sum_{\lambda,\rho=0}^{3}\left[\frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\lambda}}\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'_{\nu}}{\partial x_{\rho}}\right]=\eta_{\lambda\rho}\,.$$

სკალარული ველი ეწოდება კოორდინატების ისეთ ფუნქციას, რომლის მნიშ-ვნელობა კოორდინატების გარდაქმნებისას უცვლელი რჩება:

$$x\to x':\quad f(x)\to f'(x')=f(x)$$

ან, რაც იგივეა,

$$f(x)\to f'(x)=f(\mathrm{L}^{-1}x).$$

მინკოვსკის სივრცის ვექტორული ველი განიმარტება, როგორც ოთხკომპო-ნენტიანი სიდიდე $V_{\mu}(x)\equiv\{V_0,V_1,V_{2,}V_3\}$, რომელიც კოორდინატთა გარდაქმნებისას გარდაიქმნება ისევე, როგორც კოორდინატების დიფერენციალები, ე.ი.

$$V_{\mu}(x)\to V'_{\mu}(x')=\sum_{\lambda=0}^{3}\frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\lambda}}V_{\lambda}(x).$$

დაუშვათ, გვაქვს ორი ვექტორული ველი $V_{\mu}(x)$ და $W_{\mu}(x)$. თუ შევადგენთ ამ ვექტორების სკალარულ ნამრავლს

$$V(x)\cdot W(x)\equiv\sum_{\mu,\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}V_{\mu}(x)W_{\nu}(x)$$

მივიღებთ ინვარიანტს, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\eta_{\mu\nu}V'_{\mu}(x)W'_{\nu}(x)=\eta_{\lambda\rho}V_{\lambda}(x)W_{\rho}(x).$$

კერძოდ, ინვარიანტს წარმოადგენს სიდიდე

$$\eta_{\lambda\rho}V_{\lambda}(x)dx_{\rho}.$$

ბოლო თანაფარდობების შემოწმება ადვილია, თუ გამოვიყენებთ გარდაქმნე-ბის ფორმულებს.

ახლა განვიხილოთ სკალარული ფუნქციის დიფერენციალი

$$df(x)=\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_{\mu}}dx_{\mu}=\sum_{\mu=0}^{3}\delta_{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x_{\mu}}dx_{\nu}\,.$$

როგორც აღვნიშნეთ, მინკოვსკის ტენზორი აკმაყოფილებს ტოლობებს

$$\sum_{\lambda}^{3} \eta_{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} .$$

ამ ფაქტის გამოყენებით დიფერენციალი შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$df(x) = \sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\mu\lambda}\eta_{\lambda\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} dx_\nu = \sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\lambda\nu} \nabla_\lambda f(x) dx_\nu ,$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა

$$\nabla_\lambda f(x) = \eta_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu}.$$

ვინაიდან სკალარული ფუნქციის დიფერენციალი ინვარიანტული სიდიდეა, ვღებულობთ, რომ სიდიდე

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\lambda\nu} \nabla_\lambda f(x) dx_\nu = inv.$$

მაშასადამე, სიდიდეები $\nabla_\lambda f(x)$ წარმოადგენენ ვექტორული ველის კომპონენ-ტებს. ამ ვექტორული ველისათვის სამართლიანია გარდაქმნის კანონი

$$\nabla_\mu f(x) \to \nabla'_\mu f'(x') = \sum_{\lambda=0}^{3} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} \nabla_\lambda f(x).$$

დიფერენციალურ ოპერატორს

$$\nabla_\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \eta_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda}$$

ეწოდება მინკოვსკის სივრცის გრადიენტის ოპერატორი. ფუნქციის გრადიენტის მდგენელებია

$$\nabla_\mu f(x) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_0} , \boldsymbol{\nabla} f(x)\right).$$

შემდგომში ჩვენ მუნჯი ინდექსებით დაჯამებისას ხშირად გამოვიყენებთ გამარტივებულ შეთანხმებას, რომელიც არ მოითხოვს მეტრიკული ტენზორის ცხადი სახით ამოწერას. კერძოდ, ვიგულისხმებთ, რომ $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ და $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ 4-ვექტორების ნამრავლი შეიძლება ჩაიწეროს, როგორც

$$a \cdot b = \eta_{\mu\nu} a_\mu b_\nu \equiv a_\mu b_\mu.$$

მაგალითად,

$$dx_\mu dx_\mu \equiv -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

$$A_{\mu\nu} B_\nu \equiv -A_{\mu 0} B_0 + A_{\mu i} B_i$$

და ა.შ. აქვე შევთანხმდეთ, რომ ბერძნული ასოებით აღნიშნული ინდექსები ღე-ბულობენ ოთხ მნიშვნელობას (0, 1, 2, 3), ხოლო ლათინური ასოებით აღნიშნული ინდექსები იღებენ მნიშვნელობებს (1, 2, 3). ამგვარად,

$$a_\mu b_\mu = -a_0 b_0 + a_i b_i = -a_0 b_0 + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

აქ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ წარმოადგენს ჩვეულებრივი $3D$ ევკლიდური სივრცის სკალარულ ნამრავლს

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

მონკოვსკის სივრცის სკალარული ნამრავლისათვის ასევე გამოიყენება აღნიშვნა

$$a.b \equiv a_\mu b_\mu \,.$$

§6.2.* დიფერენციალური ოპერატორები და ტენზორული ველები მინკოვსკის სივრცეში

ვექტორული ველი წარმოადგენს ოთხი ფუნქციის ერთობლიობას, რომელიც კოორდინატთა გარდაქმნისას გარდაიქმნება იმავე წესით, როგორც კოორდინატების დიფერენციალები

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A_\nu(x).$$

აქ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ∇_μ-ოპერატორის განმარტება, მუნჯი ინდექსებით დაჯამების წესი

$$\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{3} \left[\eta_{\nu\lambda} \nabla_\lambda x'_\mu\right] A_\nu(x) \equiv \left[\nabla_\nu x'_\mu\right] A_\nu(x)$$

და ვექტორის გარდაქმნის წესი ჩავწეროთ შემდეგი შემოკლებული სახით:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x') = \left[\nabla_\nu x'_\mu\right] A_\nu(x).$$

მინკოვსკის სივრცის მეორე რანგის ტენზორი არის 16-კომპონენტიანი ობიექტი, რომელიც გარდაქმნება შემდეგი წესის თანახმად:

$$V_{\mu\nu}(x) \to V'_{\mu\nu}(x') = \left[\nabla_\lambda x'_\mu\right]\left[\nabla_\rho x'_\nu\right] V_{\lambda\rho}(x).$$

ამგვარი სიდიდის მაგალითია ტენზორი $\nabla_\mu A_\nu(x)$. შევადგინოთ მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი

$$F_{\mu\nu}(x) = \nabla_\mu A_\nu(x) - \nabla_\nu A_\mu(x)$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu},$$

რომელსაც აქვს 6 დამოუკიდებელი კომპონენტი:

$$F_{01}, F_{02}, F_{03}; \qquad F_{12}, F_{23}, F_{31} \;\; .$$

სამგანზომილებიანი ორთოგონალური გარდაქმნებისას

$$dx_0 \to dx_0, \quad dx_i \to \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} dx_k \,.$$

კომპონენტები $F_{0i} \equiv E_i$ გარდაიქმნებიან ისევე, როგორც $3D$ სივრცის ვექტორები. ასევე ვექტორული ხასიათი აქვს ე.წ. დუალურ ვექტორს

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F_{jk} \equiv B_i.$$

მართლაც, ორთოგონალური გარდაქმნების დროს

$$\varepsilon_{ijk}F_{jk} \to \varepsilon'_{ijk}F'_{jk} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m}\frac{\partial x'_j}{\partial x_n}\frac{\partial x'_k}{\partial x_l}\varepsilon_{mnl}\frac{\partial x'_j}{\partial x_r}\frac{\partial x'_k}{\partial x_s}F_{rs} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m}\delta_{nr}\delta_{ls}\varepsilon_{mnl}F_{rs} =$$

$$= \frac{\partial x'_i}{\partial x_m}(\varepsilon_{mrs}F_{rs}) .$$

ბოლო ტოლობის გამოყვანისას ჩვენ გამოვიყენეთ ორთოგონალური გარდაქმნების თვისება

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_n} = \frac{\partial x_n}{\partial x'_j} .$$

ამგვარად, მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი $F_{\mu\nu}$ ეკვივალენტურია ორი 3-ვექტორისა: $\boldsymbol{E}$ და $\boldsymbol{B}$.

მინკოვსკის სივრცეში განმარტებულია ინვარიანტული კვადრატული ფორმა

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu \equiv dx_\mu dx_\mu, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 ,$$

სადაც მეტრიკული ტენზორი $diag\,\eta_{\mu\nu} = (-1,1,1,1)$ აკმაყოფილებს პირობას

$$[\nabla_\lambda x'_\mu][\nabla_\rho x'_\mu] = \eta_{\lambda\rho} .$$

სხვა სიტყვებით, მეორე რანგის მეტრიკული ტენზორი ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნის მიმართ.

მინკოვსკის სივრცის მეორე ინვარიანტული სიდიდეა მეოთხე რანგის სრულიად ანტისიმეტრიული ფსევდოტენზორი

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \varepsilon_{0123} = +1$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \to [\nabla_\alpha x'_\mu][\nabla_\beta x'_\nu][\nabla_\gamma x'_\rho][\nabla_\delta x'_\sigma]\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\det\left[\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\lambda}\right] .$$

გრადიენტის ოპერატორის გამოყენებით შეიძლება ავაგოთ:

- სკალარული ველის 4-გრადიენტი

$$\nabla_\mu f(x) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_0},\ \boldsymbol{\nabla} f\right);$$

- ვექტორული ველის 4-დივერგენცია

$$\nabla_\mu A_\mu(x) = -\frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}.$$

რაც შეეხება 4-როტორს, შესაძლებელია მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ორი ტენზორული ველის განმარტება:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

და

$$* F_{\mu\nu} = \sum_{\rho,\sigma=0}^{3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} .$$

ლაპლასის ოპერატორის ოთხგანზომილებიანი ანალოგი არის ე.წ. დალამბერის ოპერატორი

$$\nabla_\mu \nabla_\mu = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \Delta\,.$$

§6.3.* ზოგადი ტენზორული ანალიზის საწყისი ცნებები

წინა პარაგრაფებში გავეცანით ტენზორული სიდიდეების განმარტებას ევკლიდურ და ფსევდოევკლიდურ სივრცეებში. ამ განმარტებებს საფუძვლად დაედო კოორდინატის დიფერენციალისა და კერძო წარმოებულის გარდაქმნის წესები

$$dx_i \to dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \to \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\,.$$

ახლა განვიხილოთ კოორდინატების ზოგადი გარდაქმნები, ე.ი. ჩავთვალოთ, რომ ახალი კოორდინატები არის ძველი კოორდინატების ნებისმიერი ფუნქციები.

ქვემოთ განვიხილავთ ზოგადი N-განზომილებიანი სივრცის კოორდინატთა გარდაქმნებს. ამჯერად მოსახერხებელი ხდება კოორდინატებისათვის ინდექსების ზედა განლაგების გამოყენება.

$$x^i \to x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

კორდინატების დიფერენციალები და კერძო წარმოებულები გარდაიქმნებიან ნაცნობი წესით

$$dx^i \to dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\, dx^k \qquad \frac{\partial}{\partial x^i} \to \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\,.$$

პრინციპული განსხვავება დეკარტულ კოორდინატების შემთხვევისაგან მდგომარეობს იმაში, რომ ამჯერად, საზოგადოდ,

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \neq \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

და გვაქვს ორი ტიპის ვექტორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ტრანსფორმაციული თვისებებით.

კონტრავარიანტული ეწოდება ვექტორს, რომლის მდგენელები კოორდინატთა ცვლილებისას გარდაიქმნებიან ისევე, როგორც კოორდინატების დიფერენციალები

$$V^i(x) \to V'^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\, V^k(x).$$

კოვარიანტული ეწოდება ვექტორს, რომელიც გარდაიქმნება, როგორც სკალარული ფუნქციის გრადიენტი

$$U_i(x) \to U'_i(x) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} U_k(x)\,.$$

ამ ორი განსხვავებული ტიპის ვექტორს ჩვენ ვარჩევთ ინდექსების ზედა-ქვედა განლაგებით.

მოყვანილი გარდაქმნის წესი განსხვავდება დეკარტული კოორდინატების გარდაქმნის კანონიდან იმ მნიშვნელოვანი გარემოებით, რომ ახლა გარდაქმნის მატრიცა

$$M_k^i(x) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}$$

წარმოადგენს ლოკალურ სიდიდეს, ე.ი. დამოკიდებულია სივრცის წერტილის კოორდინატებზე.

ისევე, როგორც დეკარტული კოორდინატების შემთხვევაში, ახლაც შეგვიძლია განვმარტოთ სხვადასხვა რანგის ტენზორები. ამასთან, შესაძლოა ტენზორული ინდექსების განლაგების სხვადასხვა კომბინაცია. როგორც მაგალითი, მოვიყვანოთ მეორე რანგის ტენზორთა სამი განსხვავებული ტიპი:

ა) კონტრავარიანტული ტენზორი

$$T^{ij}(x) \to T'^{ij}(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x'^j}{\partial x^n}\, T^{mn}(x);$$

ბ) შერეული ტენზორი

$$T_k^i(x) \to T'^i_k(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x'^i} T_n^m(x)\,;$$

გ) კოვარიანტული ტენზორი

$$T_{ik}(x) \to T'_{ik}(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} T_{mn}(x)\,.$$

განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანია ისეთი სივრცეები, სადაც განმარტებულია ინვარიანტული ფუნდამენტური კვადრატული ფორმა

$$ds^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k.$$

ასეთი ტიპის სივრცეს რიმანის სივრცეს უწოდებენ. მივაქციოთ ყურადღება მუნჯი ინდექსების ზედა-ქვედა განლაგებას.

რადგანაც ფორმა ინვარიანტულია, სრულდება პირობა

$$g'_{ik}(x')dx'^i dx'^k = g_{mn}(x)dx^m dx^n,$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$g'_{ik}(x')\frac{\partial x'^i}{\partial x^m}\, dx^m \frac{\partial x'^k}{\partial x^n}\, dx^n = g_{mn}(x)dx^m dx^n\,.$$

მაშასადამე,

$$g'_{ik}(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k} g_{mn}(x).$$

სიდიდეები $g_{mn}(x)$ ქმნიან მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს, რომელსაც რიმანის სივრცის მეტრიკული ტენზორი ეწოდება.

მეტრიკული ტენზორის შებრუნებული ტენზორი განიმარტება ტოლობით

$$g_{im} g^{mk} = \delta_i^k.$$

შევკვეცოთ კონტრავარიანტული ვექტორი მეტრიკული ტენზორით და ვნახოთ ამ ობიექტის გარდაქმნის წესი:

$$g_{im}V^m \to g'_{im}V'^m = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^m} g_{kl} \frac{\partial x'^m}{\partial x^j}\, V^j = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\delta^l_j g_{kl}\, V^j =$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\left(g_{kj}\, V^j\right).$$

ამგვარად,

$$V_i = g_{im}V^m$$

წარმოადგენს კოვარიანტულ ვექტორს.

ანალოგიურად შეგვიძლია განვახორციელოთ ინდექსის აწევის ოპერაცია

$$V^m = g^{in}V_n.$$

საზოგადოდ, უნდა გვახსოვდეს, რომ როგორც V^i, ასევე V_n წარმოადგენენ ერთი და იმავე ვექტორის კონტრავარიანტულ და კოვარიანტულ კომპონენტებს.

ლექცია 7

§7.1.* დიფერენციალური ფორმები

$\mathbb{R}^3$-სივრცის დეკარტულ კოორდინატებს x, y, z შევუსაბამოთ სამი ახალი ტიპის სიდიდე:

$$\boldsymbol{d}x, \boldsymbol{d}y, \boldsymbol{d}z.$$

ამ ობიექტებს ეწოდებათ საბაზისო დიფერენციალური 1-ფორმები. ყურადღება უნდა მიექცეს იმ გარემოებას, რომ შემოღებული სიმბოლოები არ წარმოადგენენ დამოუკიდებელი კოორდინატების დიფერენციალებს, ე.ი. $\boldsymbol{d}x \neq dx$, $\boldsymbol{d}y \neq dy$, $\boldsymbol{d}z \neq dz$.

1-ფორმების გარდა, სამგამზომილებიან სივრცეში განმარტებულია 2-ფორმები

$$\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y = -\boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}x, \qquad \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z = -\boldsymbol{d}z \wedge \boldsymbol{d}y, \qquad \boldsymbol{d}z \wedge \boldsymbol{d}x = -\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}z$$

და 3-ფორმა

$$\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z = -\boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}z = \boldsymbol{d}z \wedge \boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y \ .$$

სიმბოლოს $\wedge$ ეწოდება გარე ან ირიბი ნამრავლის ნიშანი. რაც შეეხება ჩვეულებივ ფუნქციებს, მათ ეწოდებათ 0-ფორმები.

ამგვარად, სამგანზომილებიან სივრცეში არსებობს დიფერენციალური ფორმების ოთხი განსხვავებული ტიპი $\Lambda^k(\mathbb{R}^3)$:

0) Λ^0: 0-ფორმები $\varphi^{(0)} = F$;
1) Λ^1: 1-ფორმები $\varphi^{(1)} = A\boldsymbol{d}x + B\boldsymbol{d}y + \boldsymbol{C}\boldsymbol{d}z$;
2) Λ^2: 2-ფორმები $\varphi^{(2)} = L\boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z + M\boldsymbol{d}z \wedge d\boldsymbol{x} + N\boldsymbol{d}\boldsymbol{x} \wedge d\boldsymbol{y}$;
3) $\Lambda^{3:}$: 3-ფორმები $\varphi^{(3)} = D\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z$.

ამ გამოსახულებებში $F, A, B, C, D, L \ldots$ წარმოადგენენ (x, y, z) ცვლადების ჩვეულებრივ სკალარულ ფუნქციებს.

დიფერენციალური ფორმების მაგალითებია:

- 0-ფორმა $\varphi^{(0)} = x^2y + e^z$;
- 1-ფორმა $\varphi^{(1)} = x^2\boldsymbol{d}x + (yz+1)\boldsymbol{d}z$;
- 2-ფორმა $\varphi^{(2)} = xyz\boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z + xe^y\boldsymbol{d}z \wedge dx + 2\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y$;
- 3-ფორმა $\varphi^{(3)} = (x^2 + xyz + 2z^3)\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z$.

დიფერენციალური ფორმებისათვის სამართლიანია შემდეგი წესები:

ა) განმარტებულია ერთი და იმავე რიგის ორი დიფერენციალური ფორმის ჯამი

$$\varphi^{(k)} + \omega^{(k)} = \sigma^{(k)}.$$

მაგალითად, თუ გვაქვს 1-ფორმები

$$\phi^{(1)} = A\boldsymbol{d}x + B\boldsymbol{d}y + \boldsymbol{C}\boldsymbol{d}z \text{ და } \psi^{(1)} = a\boldsymbol{d}x + b\boldsymbol{d}y + c\boldsymbol{d}z\,,$$

მაშინ მათი ჯამი მოგვცემს 1-ფორმას

$$\phi^{(1)} + \psi^{(1)} = (A + a)\boldsymbol{d}x + (B + b)\boldsymbol{d}y + (C + c)\boldsymbol{d}z.$$

ბ) არ განიმარტება განსხვავებული რიგის ფორმების ჯამი. მაგალითად,

$$\phi^{(1)} + \psi^{(2)}$$

არ არის დაშვებული.

გ) განმარტებულია ფორმების ნამრავლი ჩვეულებრივ ფუნქციაზე $f(x, y, z)$, ე.ი. 0-ფორმაზე. მაგალითად, 2-ფორმისათვის

$$\varphi^{(2)} = xyz\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + xe^{y}\boldsymbol{d}z\wedge dx + 2\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y$$

გვექნება

$$f(x, y, z) \cdot \varphi^{(2)} = f \cdot (xyz\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + xe^{y}\boldsymbol{d}z\wedge dx + 2\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y) =$$
$$= fxyz\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + fxe^{y}\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x + f2\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y$$

და ნამრავლი $f\varphi^{(2)}$ კვლავ 2-ფორმას წარმოადგენს.

k-ფორმების მიმატება კომუტაციური და ასოციაციურია, ხოლო ფუნქციაზე გამრავლება – დისტრიბუციული. ამრიგად, k-ფორმები ქმნიან წრფივ სივრცეს $\Lambda^{k}(\mathbb{R}^{3})$.

დიფერენციალური ფორმების გამრავლება წარმოადგენს ე.წ. გრასმანის ალგებრის მაგალითს

$$\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}x = \boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}y = \boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}z = 0$$

$$\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y = -\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}x,\ \ \boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z = -\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}y,\ \ \boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x = -\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}z.$$

k-ფორმის ნამრავლი l-ფორმაზე იძლევა $(k + l)$-ფორმას (იგულისხმება, რომ $k + l \leq 3$)

$$\varphi^{(k)}\wedge\omega^{(l)} = \eta^{(k+l)}.$$

დიფერენციალური ფორმების გამრავლება არ არის კომუტაციური. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\varphi^{(k)}\wedge\omega^{(l)} = \eta^{(k+l)}$$
$$= (-1)^{kl}\omega^{(l)}\wedge\varphi^{(l)}$$

თუ ფორმის რიგი k კენტი რიცხვია, მაშინ

$$\varphi^{(k)}\wedge\varphi^{(k)} = 0.$$

დ) განმარტებულია გარე დიფერენცირების ოპერაცია $\boldsymbol{d}$: მაგალითად, თუ მოცემულია 0-ფორმა (ფუნქცია) $\varphi = A(x, y, z)$, მაშინ გარე დიფერენცირებით მივიღებთ 1-ფორმას

$$\boldsymbol{d}\varphi = \frac{\partial A}{\partial x}\boldsymbol{d}x + \frac{\partial A}{\partial y}\boldsymbol{d}y + \frac{\partial A}{\partial z}\boldsymbol{d}z\,.$$

თუ გვაქვს 1-ფორმა

$$\varphi = A\boldsymbol{d}x + B\boldsymbol{d}y + C\boldsymbol{d}z\,,$$

მაშინ ამ 1-ფორმის გარე დიფერენცირების შედეგად მივიღებთ 2-ფორმას

$$\boldsymbol{d}\varphi = \boldsymbol{d}A\wedge\boldsymbol{d}x + \boldsymbol{d}B\wedge\boldsymbol{d}y + \boldsymbol{d}C\wedge\boldsymbol{d}z = \left(C_y - B_z\right)\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + (A_z - C_x)\boldsymbol{d}z\wedge d\boldsymbol{x} + \\ +\left(B_x - A_y\right)\boldsymbol{dx}\wedge d\boldsymbol{y}.$$

2-ფორმისათვის

$$\varphi = A\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + B\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x + C\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\,.$$

შესაბამისად, გვექნება

$$\boldsymbol{d}\varphi = \boldsymbol{d}A\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + \boldsymbol{d}B\wedge\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x + \boldsymbol{d}C\wedge\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y = \left(A_x + B_y + C_z\right)\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z.$$

3-ფორმის გარე დიფერენციალი ნულის ტოლია

$$\varphi = A\boldsymbol{d}\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z$$

$$\boldsymbol{d}\varphi = \boldsymbol{d}A\wedge d\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z = 0.$$

ამგვარად, k-ფორმის გარე დიფერენციალი არის $(k+1)$-ფორმა. ჩამოვთვალოთ k-ფორმების გარე დიფერენცირების ძირითადი თვისებები:

1. $\boldsymbol{d}\left(c_1\phi_1^{(k)} + c_2\phi_k^{(k)}\right) = c_1\boldsymbol{d}\phi_1^{(k)} + c_2\boldsymbol{d}\phi_2^{(k)}$,
   სადაც $c_{1,2}$ -მუდმივი კოეფიციენტებია;
2. $\boldsymbol{d}\left(\varphi^{(k)}\theta^{(l)}\right) = \left(\boldsymbol{d}\varphi^{(k)}\right)\theta^{(l)} + (-1)^k\varphi^{(k)}\boldsymbol{d}\theta^{(l)}$;
3. ჩაკეტილი ფორმა ეწოდება ისეთ ფორმას, რომლის გარე დიფერენციალი ნულის ტოლია
   $$\boldsymbol{d}\varphi = 0;$$
4. ზუსტი k-ფორმა ეწოდება ისეთ ფორმას, რომელიც მიიღება $(k-1)$-ფორმის გარე დიფერენცირებით
   $$\varphi = \boldsymbol{d}\theta;$$
   ზუსტი ფორმა ჩაკეტილია
   $$\boldsymbol{d}\varphi = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}\theta) = 0;$$
5. თუ φ k-ფორმაა, ხოლო ψ – ჩაკეტილი k-ფორმა, მაშინ
   $$\boldsymbol{d}(\varphi + \psi) = \boldsymbol{d}\varphi;$$
6. თუ $\boldsymbol{d}\varphi_1 = \boldsymbol{d}\varphi_2$,
   მაშინ $\varphi_2 = \varphi_1 + \psi$, სადაც ψ არის ჩაკეტილი ფორმა.

§7.2.* შესაბამისობა დიფერენციალურ ფორმებსა და ვექტორულ ველებს შორის

სამგანზომილებიან დეკარტულ სივრცეში $\mathbb{R}^3\colon x = (x_1, x_2, x_3)$ ჩვენ განმარტებული გვაქვს სკალარული, ვექტორული და ტენზორული ველები. ამ განმარტებებს საფუძვლად ედება კოორდინატების დიფერენციალების გარდაქმნის წესი კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნებისას:

$$x \to x'^{(x)}: \qquad dx_i \to dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m} dx_m.$$

როგორც ვიცით, ტენზორული ველების გაწარმოებით შეიძლება მივიღოთ სხვა ველები. ასე მაგალითად, $F(x)$ სკალარული ფუნქციის გრადიენტი არის ვექტორი

$$\boldsymbol{\nabla} F = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = \boldsymbol{e}_m \frac{\partial F}{\partial x_m}.$$

$\boldsymbol{V}(x)$ ვექტორული ველის როტორი არის ვექტორი

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{imn} \frac{\partial V_n}{\partial x_m},$$

ხოლო ვექტორული ველის დივერგენცია წარმოადგენს სკალარულ ველს

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V} = \frac{\partial V_m}{\partial x_m}.$$

განვიხილოთ ანალოგიური ოპერაციები დიფერენციალური ფორმებისათვისაც. თავდაპირველად შემოვიღოთ შესაბამისობის წესები:

1. 0-ფორმა $\varphi^{(0)} = A(x)$ შეესაბამება ფუნქციას $A(x)$;
2. 1-ფორმა $\varphi^{(1)} = V_1 \boldsymbol{d}x_1 + V_2 \boldsymbol{d}x_2 + V_3 \boldsymbol{d}x_3$ შეესაბამება ვექტორულ ველს
$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{e}_1 V_1 + \boldsymbol{e}_2 V_2 + \boldsymbol{e}_3 V_3;$$
3. 2-ფორმა $\varphi^{(2)} = U_1 \boldsymbol{d}x_2 \wedge \boldsymbol{d}x_3 + U_2 \boldsymbol{d}x_3 \wedge \boldsymbol{d}x_1 + U_3 \boldsymbol{d}x_1 \wedge \boldsymbol{d}x_2$ შეესაბამება ვექტორულ ველს
$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 U_1 + \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 U_2 + \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 U_3;$$
4. 3-ფორმა $\varphi = A \boldsymbol{d}x_1 \wedge \boldsymbol{d}x_2 \wedge \boldsymbol{d}x_3$ შეესაბამება სკალარულ ფუნქციას $A(x)$.

ეს შესაბამისობა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ საბაზისო დიფერენციალური ფორმების და კოორდინატული ორტების ენაზე:

$$\boldsymbol{d}x_i \leftrightarrow \boldsymbol{e}_i \qquad \boldsymbol{d}x_i \wedge \boldsymbol{d}x_k \leftrightarrow \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i.$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ შესაბამისობის ამ წესების მკაცრი მათემატიკური დასაბუთება ცდება ჩვენი კურსის ფარგლებს და მოყვანილი ანალოგიები ატარებენ ერთგვარად ზედაპირულ, თუმცა ეფექტურ, ხასიათს.

შესაბამისობის წესები შეიძლება ჩაიწეროს დიფერენციალური ოპერატორებისა და გარე დიფერენცირების წესების გამოყენებით.

დაუშვათ, გვაქვს სკალარული ფუნქცია – 0-ფორმა

$$\phi^{(0)}(x) = \phi(x).$$

ამ ფუნქციის გრადიენტს

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(x) = \boldsymbol{e}_m \frac{\partial \phi}{\partial x_m}$$

შეესაბამება 1-ფორმა

$$\phi^{(1)}(x) = \boldsymbol{d}\phi^{(0)}(x) = \boldsymbol{d}x_m \frac{\partial \phi}{\partial x_m}.$$

ვექტორულ ველის შესაბამისი 1-ფორმიდან

$$A^{(1)} = A_1\boldsymbol{d}x_1 + A_2\boldsymbol{d}x_2 + A_3\boldsymbol{d}x_3$$

გარე დიფერენცირებით მივიღებთ 2-ფორმას

$$F^{(2)} = \boldsymbol{d}A^{(1)} = \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\boldsymbol{d}x_2\wedge\boldsymbol{d}x_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\boldsymbol{d}x_3\wedge\boldsymbol{d}x_1 +$$

$$+\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\boldsymbol{d}x_1\wedge\boldsymbol{d}x_2 + \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\boldsymbol{d}x_3\wedge\boldsymbol{d}x_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\boldsymbol{d}x_1\wedge\boldsymbol{d}x_3 + \frac{\partial A_3}{\partial x_2}\boldsymbol{d}x_2\wedge\boldsymbol{d}x_3 .$$

გარე ნამრავლის ანტიკომუტაციის თვისების გამოყენებით მივიღებთ

$$F^{(2)} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{d}x_2\wedge\boldsymbol{d}x_3 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{d}x_3\wedge\boldsymbol{d}x_1 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{d}x_1\wedge\boldsymbol{d}x_2 .$$

ამგვარად, მიღებული 2-ფორმა შეესაბამება ვექტორული ველის როტორს.

დაუშვათ, რომ გვაქვს 2-ფორმა

$$\Phi^{(2)} = V_1\boldsymbol{d}x_2\wedge\boldsymbol{d}x_3 + V_2\boldsymbol{d}x_3\wedge\boldsymbol{d}x_1 + V_3\boldsymbol{d}x_1\wedge\boldsymbol{d}x_2.$$

გარე დიფერენცირებით მივიღებთ 3-ფორმას

$$\boldsymbol{d}\Phi^{(2)} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\boldsymbol{d}x_1\wedge\boldsymbol{d}x_2\wedge\boldsymbol{d}x_3 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\boldsymbol{d}x_2\wedge\boldsymbol{d}x_3\wedge\boldsymbol{d}x_1 + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}\boldsymbol{d}x_3\wedge\boldsymbol{d}x_1\wedge\boldsymbol{d}x_2 =$$

$$= \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{d}x_1\wedge\boldsymbol{d}x_2\wedge\boldsymbol{d}x_3 ,$$

რომელიც შეესაბამება $V_m(x)$ ვექტორული ველის დივერგენციას.

ამრიგად, ვღებულობთ შესაბამისობის შემდეგ წესებს:

$$\begin{array}{lcl}
\phi(x) & \leftrightarrow & \phi^{(0)}(x) ; \\
\boldsymbol{\nabla}\phi(x) & \leftrightarrow & \boldsymbol{d}\phi^{(0)}(x) ; \\
\boldsymbol{A}(x) & \leftrightarrow & A^{(1)}(x) ; \\
rot\,\boldsymbol{A}(x) & \leftrightarrow & \boldsymbol{d}A^{(1)}(x) ; \\
\boldsymbol{V}(x) & \leftrightarrow & V^{(2)}(x) ; \\
div\,\boldsymbol{V}(x) & \leftrightarrow & \boldsymbol{d}V^{(2)}(x).
\end{array}$$

3-განზომილებიან სივრცეში ჰოჯის დუალობის ოპერაცია $*$ ამყარებს კავშირს k-ფორმებსა და $(3-k)$-ფორმებს შორის. ეს წესები შემდეგში მდგომარეობს:

$$* 1 = \boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z;$$

$$* \boldsymbol{d}x = \boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z,\ * \boldsymbol{d}y = \boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x,\quad * \boldsymbol{d}z = \boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y ;$$

$$* (\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z) = \boldsymbol{d}x,\ * (\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x) = \boldsymbol{d}y,\quad * (\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y) = \boldsymbol{d}z;$$

$$* (\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z) = 1.$$

§8.1.* დიფერენციალური ფორმების ინტეგრება

დაუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს 1-ფორმა

$$\varphi^{(1)} = A_1\boldsymbol{d}x + A_2\boldsymbol{d}y + A_3\boldsymbol{d}z,$$

ხოლო $\sigma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ წარმოადგენს წირს 3-განზომილებიან სივრცეში. ჩავთვალოთ, რომ ეს წირი მოცემულია პარამეტრული სახით

$$x_i = x_i(t), \qquad a \le t \le b.$$

1-ფორმის ინტეგრალი σ-წირის გასწვრივ არის რიცხვი, რომელიც განისაზღვრება, როგორც წირითი ინტეგრალი

$$\int_\sigma \varphi^{(1)} = \int_\sigma A_1\boldsymbol{d}x + A_2\boldsymbol{d}y + A_3\boldsymbol{d}z := \int_a^b dt\,\frac{dx_i}{dt}A_i\,.$$

ანალოგიურად, 2-ფორმისათვის

$$\varphi^{(2)} = A\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + B\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x + C\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y$$

შეიძლება განისაზღვროს ზედაპირული ინტეგრალი

$$\iint_S \varphi^{(2)} := \iint_S A\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + B\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x + C\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\,.$$

ამისათვის საჭიროა S ზედაპირის პარამეტრიზაცია ორი დამოუკიდებელი პარამეტრის დახმარებით, მაგალითად,

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v),$$

მაშინ

$$\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\boldsymbol{d}u + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\boldsymbol{d}v\right]\wedge\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\boldsymbol{d}u + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)\boldsymbol{d}v\right] = \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right]\boldsymbol{d}u\wedge\boldsymbol{d}v$$

$$\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x = \left[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right]\boldsymbol{d}u\wedge\boldsymbol{d}v$$

$$\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z = \left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right]\boldsymbol{d}u\wedge\boldsymbol{d}v\,.$$

2-ფორმის ინტეგრალი განისაზღვრება, როგორც ზედაპირული ინტეგრალი

$$\iint_S \varphi_2 := \iint_\Sigma dudv = \left[A(u,v)\left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right] + \right.$$

$$\left. + B(u,v)\left[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right] + C(u,v)\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right]\right],$$

სადაც $A(u,v) \equiv A(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. ანალოგიურად, $B(u,v)$ და $C(u,v)$ 3-ფორმის შემთხვევაში

$$\varphi^{(3)} = A\boldsymbol{d}x \wedge \boldsymbol{d}y \wedge \boldsymbol{d}z$$

გვაქვს მოცულობითი ინტეგრალი

$$\iiint\limits_V \varphi_3 := \iiint\limits_V Adxdydz\,.$$

§8.2.* სტოქსის განზოგადებული თეორემა

§§5.1-5.4-ში გავეცანით ვექტორული ანალიზის სამ მნიშვნელოვან თეორემას. ეს თეორემებია:

ა) გრადიენტის თეორემა

$$\int\limits_C d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{r}) = \int\limits_C d\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}_b) - \Phi(\boldsymbol{r}_a)\,;$$

ბ) სტოქსის თეორემა

$$\int\limits_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \oint\limits_{\partial S} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,;$$

გ) გაუსის თეორემა

$$\int\limits_V dV \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \oint\limits_{\partial V} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}).$$

დიფერენციალური ფორმების ენაზე ჩამოთვლილი სამი თეორემა წარმოადგენს ე.წ. სტოქსის განზოგადებული თეორემის კერძო შემთხვევებს.

განვიხილოთ n-განზომილებიან სივრცე $\mathbb{R}^n$, სადაც გამოყოფილია p-განზომილებინი შემოსაზღვრული ქვესივრცე (მოცულობა M). ამ მოცულობის საზღვარი აღვნიშნოთ, როგორც ∂M. ამგვარად,

$$\dim M = p \leq n\,; \quad \dim \partial M = p - 1.$$

დაუშვათ, რომ n-განზომილებიან სივრცეში $\mathbb{R}^n$ მოცემული გვაქვს $(p-1)$ ფორმა $\omega^{(p-1)}$. მაშინ სამართლიანია თეორემა

$$\int\limits_M \boldsymbol{d}\omega^{(p-1)} = \oint\limits_{\partial M} \omega^{(p-1)}.$$

მივაქციოთ ყურადღება, რომ საინტეგრაციო ფორმის რიგი ემთხვევა ინტეგრაციის არის განზომილებას.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

1) სივრცე $\mathbb{R}^1$; $p = 1$. ავიღოთ 0-ფორმა A, მაშინ

$$\boldsymbol{d}A = \frac{dA}{dx}\boldsymbol{d}x$$

და, შესაბამისად, გვაქვს წირითი ინტეგრალი. ამ წირის საზღვარი შედგება ორი წერტილისაგან $x = a$ და $x = b$

$$\int_M \boldsymbol{d}A = \int_a^b \boldsymbol{d}A = \int_a^b dx\,\frac{dA}{dx}\,.$$

სხვა მხრივ,

$$\int_{\partial M} A = A(b) - A(a)\,.$$

ე.ი. ვღებულობთ კალკულუსის ფუნდამენტურ თეორემას:

$$\int_a^b dx\,\frac{dA}{dx} = A(b) - A(a).$$

ახლა განვიხილოთ 1-ფორმის მაგალითი

$$\varphi_1 = A_x\boldsymbol{dx} + A_y\boldsymbol{dy} + C_z\boldsymbol{dz}.$$

შესაბამისი 2-ფორმა იქნება

$$\boldsymbol{d}\varphi^{(1)} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{d}z\wedge\boldsymbol{d}x + \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z\,.$$

ინტეგრაცია უნდა განვახორციელოთ 2-განზომილებიანი არეზე, მაგალითად, $x-y$ სიბრტყეში განლაგებულ ფართის ელემენტზე S.

ამგვარად,

$$\int_S \boldsymbol{d}\varphi^{(1)} = \int_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y = \int_S dxdy\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \int_S d\boldsymbol{S}\cdot rot\,\boldsymbol{A}\,.$$

S ფართის საზღვარი არის წირი ∂S. მაშინ

$$\oint_{\partial S} \varphi^{(1)} = \oint_{\partial S} A_x\boldsymbol{dx} + A_y\boldsymbol{dy} = \int_a^b dt\left[\frac{dx}{dt}A_x + \frac{dy}{dt}A_y\right] = \int_{\partial S} d\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv \int_{\partial S} dx_i\,A_i\,.$$

ტოლობიდან

$$\int_S \boldsymbol{d}\varphi^{(1)} = \oint_{\partial S} \varphi^{(1)}$$

ვღებულობთ სტოქსის თეორემას

$$\int_S d\boldsymbol{S}\cdot rot\,\boldsymbol{A} = \oint_{\partial S} d\boldsymbol{r}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,.$$

განვიხილოთ 2-ფორმა

$$\varphi_{(2)} = A_x\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z + B_y\boldsymbol{d}z\wedge d\boldsymbol{x} + C_z\boldsymbol{dx}\wedge d\boldsymbol{y}.$$

შესაბამისად, გვექნება

$$\boldsymbol{d}\psi^{(2)} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{d}x\wedge\boldsymbol{d}y\wedge\boldsymbol{d}z\,.$$

ტოლობა

$$\int_{I_3} \boldsymbol{d}\psi^{(2)} = \int_{\partial I_3} \psi^{(2)}$$

შეესაბამება გაუსის თეორემას

$$\iiint\limits_V dxdydz\, div\boldsymbol{A} = \oiint\limits_{\partial V} d\boldsymbol{S} \cdot rot\ \boldsymbol{A}\,.$$

ამრიგად, ჩვენ დავრწმუნდით სტოქსის განზოგადებული თეორემის სისწორეში.

§8.3.* მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემა

დიფერენციალური ფორმების გამოყენება მრუდწირულ კოორდინატებში ააღვილებს გრადიენტის, როტორის, დივერგენციისა და ლაპლასიანის გამოთვლებს. სამგანზომილებიან სივრცეში შემოვიღოთ ორთოგონალური მრუდწირული კოორდინატები (u_1, u_2, u_2). უსასრულოდ მცირე სიგრძის ინტერვალის კვადრატი განისაზღვრება კვადრატული ფორმით

$$ds^2 = \left(h_{(1)}du_1\right)^2 + \left(h_{(2)}du_2\right)^2 + \left(h_{(3)}du_3\right)^2,$$

სადაც $h_{(1)}, h_{(2)}$ და $h_{(3)}$ ლამეს მასშტაბური კოეფიციენტებია. მათი დახმარებით ჩაიწერება სიგრძის ელემენტი i-ური კოორდინატული წირის გასწვრივ

$$ds_i = h_{(i)}du_i.$$

შემოვიღოთ დიფერენციალური 1-ფორმები $\boldsymbol{du}_1$, $\boldsymbol{du}_2$ და $\boldsymbol{du}_3$. ნულოვანი ფორმის, ე.ი. სკალარული ფუნქციის, დიფერენციალი მოიცემა გამოსახულებით

$$\boldsymbol{df} = \frac{\partial f}{\partial u_i}\boldsymbol{du}_i = \left(\frac{1}{h_{(i)}}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\boldsymbol{\omega}_i,$$

სადაც შემოყვანილია 1-ფორმები

$$\boldsymbol{\omega}_i = h_{(i)}\boldsymbol{du}_i \quad .$$

განვიხილოთ $\boldsymbol{df}$ 1-ფორმის დუალური 2-ფორმა

$$*\,\boldsymbol{df} = \left(\frac{1}{h_{(i)}}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) *\boldsymbol{\omega}_i = \left(\frac{1}{h_{(1)}}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)\boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_3 + \left(\frac{1}{h_{(2)}}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)\boldsymbol{\omega}_3 \wedge \boldsymbol{\omega}_1 + \left(\frac{1}{h_{(3)}}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2.$$

ვინაიდან

$$\left(\frac{1}{h_{(1)}}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)\boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_3 = \left(\frac{h_{(2)}h_{(3)}}{h_{(1)}}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)\boldsymbol{du}_2 \wedge \boldsymbol{du}_3\,,$$

ვღებულობთ, რომ

$$*\,\boldsymbol{df} = \left(\frac{h_{(2)}h_{(3)}}{h_{(1)}}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)\boldsymbol{du}_2 \wedge \boldsymbol{du}_3 + \left(\frac{h_{(1)}h_{(3)}}{h_{(2)}}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)\boldsymbol{du}_3 \wedge \boldsymbol{du}_1 + \left(\frac{h_{(1)}h_{(2)}}{h_{(3)}}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\boldsymbol{du}_1 \wedge \boldsymbol{du}_2.$$

ლევი-ჩივიტას სრულიად ანტისიმეტრიული ტენზორის გამოყენება მოგვცემს

$$*\,\boldsymbol{df} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{h_{(j)}h_{(k)}}{h_{(i)}}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\boldsymbol{du}_j \wedge \boldsymbol{du}_k\,.$$

მოვძებნოთ მიღებული 2-ფორმის გარე დიფერენციალი

$$\boldsymbol{d}(*\,\boldsymbol{d}f)=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_{(j)}h_{(k)}}{h_{(i)}}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\boldsymbol{d}u_i\wedge\boldsymbol{d}u_j\wedge\boldsymbol{d}u_k=$$
$$=\frac{1}{2h_{(i)}h_{(j)}h_{(k)}}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_{(j)}h_{(k)}}{h_{(i)}}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\boldsymbol{\omega}_i\wedge\boldsymbol{\omega}_j\wedge\boldsymbol{\omega}_k\,,$$

საიდანაც ვიღებთ ტოლობას

$$\boldsymbol{d}(*\,\boldsymbol{d}f)=\frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}}\left[\frac{\partial}{\partial u_{(1)}}\left(\frac{h_{(2)}h_{(3)}}{h_{(1)}}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)+c.p.\right]\boldsymbol{\omega}_1\wedge\boldsymbol{\omega}_2\wedge\boldsymbol{\omega}_3,$$

შესაბამისი დუალური 0-ფორმა კი გვაძლევს ლაპლასიანს

$$*\,\boldsymbol{d}(*\,\boldsymbol{d}f)\equiv\Delta f=\frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_{(2)}h_{(3)}}{h_{(1)}}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)+c.p.\right].$$

ამ გამოსახულებებში აღნიშვნა $c.p.$ ნიშნავს ინდექსების ციკლიურ გადანაცვლებას.

ახლა განვიხილოთ 1-ფორმა

$$A=A_i\boldsymbol{\omega}_i.$$

შევადგინოთ 2-ფორმა

$$F=\boldsymbol{d}A=\boldsymbol{d}\big(A_ih_{(i)}\boldsymbol{d}u_i\big)$$

$$F=\frac{\partial}{\partial u_k}\big(A_ih_{(i)}\big)\boldsymbol{d}u_k\wedge\boldsymbol{d}u_i=\frac{1}{h_{(i)}h_{(k)}}\frac{\partial}{\partial u_k}\big(A_ih_{(i)}\big)\boldsymbol{\omega}_k\wedge\boldsymbol{\omega}_i$$

და გამოვთვალოთ მისი დუალური 1-ფორმა

$$*\,F=*\,\boldsymbol{d}A=\frac{1}{h_{(i)}h_{(k)}}\frac{\partial}{\partial u_k}\big(A_ih_{(i)}\big)*(\boldsymbol{\omega}_k\wedge\boldsymbol{\omega}_i)\,.$$

ვინაიდან

$$*\,(\boldsymbol{\omega}_k\wedge\boldsymbol{\omega}_i)=\varepsilon_{kil}\boldsymbol{\omega}_l\equiv\frac{1}{h_{(l)}}\varepsilon_{kil}h_{(l)}\boldsymbol{\omega}_l,$$

საბოლოოდ ვიღებთ როტორის შესაბამის 1-ფორმის გამოსახულებას მრუდწირულ კოორდინატებში

$$*\,F=\varepsilon_{kil}\frac{h_{(l)}\boldsymbol{\omega}_l}{h_{(i)}h_{(k)}}\frac{\partial}{\partial u_k}\big(A_ih_{(i)}\big).$$

ახლა დავადგინოთ დივერგენციის დუალური 3-ფორმის სახე. ამისათვის განვიხილოთ 2-ფორმა

$$V^{(2)}=V_1\boldsymbol{\omega}_2\wedge\boldsymbol{\omega}_3+V_2\boldsymbol{\omega}_3\wedge\boldsymbol{\omega}_1+V_3\boldsymbol{\omega}_1\wedge\boldsymbol{\omega}_2=$$
$$=\big[V_1h_{(2)}h_{(3)}\big]\boldsymbol{d}u_2\wedge\boldsymbol{d}u_3+\big[V_2h_{(3)}h_{(1)}\big]\boldsymbol{d}u_3\wedge\boldsymbol{d}u_1+\big[V_3h_{(1)}h_{(2)}\big]\boldsymbol{d}u_1\wedge\boldsymbol{d}u_2.$$

გამოვთვალოთ ამ ფორმის გარე დიფერენციალი, ე.ი. 2-ფორმა

$$\boldsymbol{d}V^{(2)}=\frac{\partial}{\partial u_1}\big[V_1h_{(2)}h_{(3)}\big]\boldsymbol{d}u_1\wedge\boldsymbol{d}u_2\wedge\boldsymbol{d}u_3+c.p.=$$
$$=\frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}}\frac{\partial}{\partial u_1}\big[V_1h_{(2)}h_{(3)}\big]\boldsymbol{\omega}_1\wedge\boldsymbol{\omega}_2\wedge\boldsymbol{\omega}_3+c.p.=(div\,\boldsymbol{V})\boldsymbol{\omega}_1\wedge\boldsymbol{\omega}_2\wedge\boldsymbol{\omega}_3.$$

ამგვარად, მრუდწირულ კოორდინატებში ვექტორის დივერგენცია მოიცემა გამოსახულებით

$$div\,\boldsymbol{V} = \frac{1}{h_{(1)}h_{(2)}h_{(3)}}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left[V_1 h_{(2)}h_{(3)}\right] + \frac{\partial}{\partial u_2}\left[V_2 h_{(3)}h_{(1)}\right] + \frac{\partial}{\partial u_3}\left[V_3 h_{(1)}h_{(2)}\right]\right).$$

§8.4.*დიფერენციალური ფორმები მინკოვსკის სივრცეში

განვიხილოთ 4-განზომილებიანი ფსევდოევკლიდური სივრცე, სადაც რაიმე x-წერტილის კოორდინატები მოიცემა 4-რიცხვით

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3).$$

გამოვიყენოთ §6.2.-ში შემოღებული აღნიშვნები. მინკოვსკის სივრცის ორი 4-ვექტორის სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება გამოსახულებით

$$A_\mu B_\mu = -A_0 B_0 + A_i B_i = -A_0 B_0 + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}.$$

იგივე შეთანხმებები გამოვიყენოთ გარე ფორმებისათვისაც. განვმარტოთ საბაზისო 1-ფორმები

$$\boldsymbol{d}x_\mu,$$

4-ვექტორის შესაბამისი 1-ფორმა

$$A = A_\mu \boldsymbol{d}x_\mu = -A_0 \boldsymbol{d}x_0 + A_i \boldsymbol{d}x_i$$

და 2-ფორმა

$$\boldsymbol{d}A = \nabla_\rho A_\mu \boldsymbol{d}x_\rho \wedge \boldsymbol{d}x_\mu = \tfrac{1}{2}F_{\rho\mu}\boldsymbol{d}x_\rho \wedge \boldsymbol{d}x_\mu,$$

სადაც

$$F_{\rho\mu} = \nabla_\rho A_\mu - \nabla_\mu A_\rho.$$

ტოლობიდან

$$\boldsymbol{dd}A = 0$$

გამომდინარეობს, რომ

$$\nabla_\sigma F_{\rho\mu}\boldsymbol{d}x_\sigma \wedge \boldsymbol{d}x_\rho \wedge \boldsymbol{d}x_\mu = 0$$

და, შესაბამისად,

$$\nabla_\sigma F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\sigma} + \nabla_\mu F_{\sigma\rho} = 0.$$

გამოვთვალოთ დუალური 2-ფორმა

$$*\,\boldsymbol{d}A = \frac{1}{2}F_{\rho\mu} * \boldsymbol{d}x_\rho \wedge \boldsymbol{d}x_\mu = \frac{1}{2}F_{\rho\mu}\varepsilon_{\sigma\tau\rho\mu}\boldsymbol{d}x_\sigma \wedge \boldsymbol{d}x_\tau\,,$$

საიდანაც ვიღებთ 3-ფორმას

$$\boldsymbol{d} * \boldsymbol{d}A = \frac{1}{2}\nabla_\omega F_{\rho\mu}\varepsilon_{\sigma\tau\rho\mu}\boldsymbol{d}x_\omega \wedge \boldsymbol{d}x_\sigma \wedge \boldsymbol{d}x_\tau\,,$$

რომლის დუალური 1-ფორმა არის

$$*\,\boldsymbol{d} * \boldsymbol{d}A = \frac{1}{2}\nabla_\omega F_{\rho\mu}\varepsilon_{\sigma\tau\rho\mu} * \boldsymbol{d}x_\omega \wedge \boldsymbol{d}x_\sigma \wedge \boldsymbol{d}x_\tau = \boldsymbol{d} * \boldsymbol{d}A = \frac{1}{2}\nabla_\omega F_{\rho\mu}\varepsilon_{\sigma\tau\rho\mu}\varepsilon_{\omega\sigma\tau\lambda}\boldsymbol{d}x_\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\nabla_\omega F_{\rho\mu}\left(\delta_{\rho\lambda}\delta_{\mu\omega} - \delta_{\rho\omega}\delta_{\mu\lambda}\right)\boldsymbol{d}x_\lambda = \frac{1}{2}\left(\nabla_\omega F_{\lambda\omega} - \nabla_\rho F_{\rho\lambda}\right)\boldsymbol{d}x_\lambda = \nabla_\omega F_{\lambda\omega}\boldsymbol{d}x_\lambda = J_\lambda \boldsymbol{d}x_\lambda\,.$$

4-ვექტორი J_λ აკმაყოფილებს უწყვეტობის განტოლებას

$$\nabla_\lambda J_\lambda = 0.$$

განტოლებები

$$\boldsymbol{dd}A = 0$$

$$*\,\boldsymbol{d} * \boldsymbol{d}A = J_\lambda \boldsymbol{d}x_\lambda$$

შეადგენენ მაქსველის განტოლებებათა სისტემას.

§8.5.* დიფერენციალური ფორმების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში დეკარტული კოორდინატებით x_i და კოორდინატული ორტებით $\boldsymbol{e}_i$ შეიძლება განიმარტოს საბაზისო დიფერენციალური ფორმების მოქმედება საბაზისო ვექტორებზე

$$\boldsymbol{d}x_i(\boldsymbol{e}_k) = \delta_{ik}.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი ვექტორისათვის $\boldsymbol{a}$ გვექნება

$$\boldsymbol{d}x_i(\boldsymbol{a}) = a_i; \quad \boldsymbol{a} = a_m \boldsymbol{e}_k.$$

ამგვარად, ზოგადი 1-ფორმა

$$\boldsymbol{\omega}_{(1)} = \omega_m \boldsymbol{d}x_m$$

მოქმედებს ვექტორზე და გვაძლევს რიცხვს

$$\boldsymbol{\omega}_{(1)}(\boldsymbol{a}) = \omega_k a_k.$$

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, 1-ფორმა წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეში მოქმედ წრფივ ფუნქციონალს.

განმარტების თანახმად, საბაზისო 1-ფორმა $\boldsymbol{d}x_i$ გვაძლევს $\boldsymbol{a}$ ვექტორის პროექციას $\boldsymbol{i}$-ურ კოორდინატულ ღერძზე. ახლა განვმარტოთ საბაზისო 2-ფორმის მოქმედება ვექტორების წყვილზე

$$\boldsymbol{d}x_i \wedge \boldsymbol{d}x_j(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{d}x_i(\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{d}x_i(\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{d}x_j(\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{d}x_j(\boldsymbol{b}) \end{bmatrix} = a_i b_j - a_j b_i.$$

ეს სიდიდე წარმოადგენს $\boldsymbol{a}$ და $\boldsymbol{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართის პროექციას $x_i - x_j$ სიბრტყეზე.

ანალოგიურად, საბაზისო სამი ფორმა მოქმედებს ვექტორების სამეულზე და გვაძლევს ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობას

$$\boldsymbol{d}x_1 \wedge \boldsymbol{d}x_2 \wedge \boldsymbol{d}x_3(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{d}x_1(\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{d}x_2(\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{d}x_3(\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{d}x_1(\boldsymbol{b}) & \boldsymbol{d}x_2(\boldsymbol{b}) & \boldsymbol{d}x_3(\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{d}x_1(\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{d}x_2(\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{d}x_3(\boldsymbol{c}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}] = Vol\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).$$

II. ვარიაციული აღრიცხვის ელემენტები

ლექცია 9

§9.1. ვარიაციული აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა

დაუშვათ, რომ გვაქვს $x - y$ სიბტრყეში განთავსებული ორი წერტილი კოორდინატებით (x_1, y_1) და (x_2, y_2). ამ წერტილების შემაერთებელი C წირი შეიძლება წარმოვადგინოთ ფუნქციით $y = y(x)$ ისე, რომ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს

$$y(x_1) = y_1, \qquad y(x_2) = y_2.$$

ისმის კითხვა: როგორ დავადგინოთ მოცემული ორი წერტილის შემაერთებელი მინიმალური სიგრძის წირი?

თავდაპირველად შემოვიღოთ მანძილის ცნება წირზე მდებარე ორ მეზობელ წერტილს შორის. თუ წერტილების კოორდინატებია (x, y) და $(x + dx, y + dy)$, მაშინ მანძილის დიფერენციალი განისაზღვრება პითაგორას თეორემით

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \equiv \sqrt{1 + y'^2} dx\,.$$

ამრიგად, C წირის სიგრძე იქნება ინტეგრალი

$$l = \int_C dl = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2}\,.$$

ახლა უნდა დავადგინოთ ფუნქცია $y(x)$, რომელიც ამ ინტეგრალს ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას და აკმაყოფილებს პირობებს $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

ამგვარი საკითხი სცილდება სტანდარტული კალკულუსის ჩარჩოებს და ის წარმოადგენს ვარიაციული აღრიცხვის ტიპურ (და ერთ-ერთ უძველეს) ამოცანას.

ინტეგრალი

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F\{y(x), y'(x); x\} \qquad y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

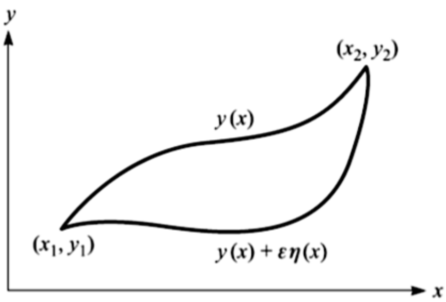
წარმოადგენს $y(x)$ ფუნქციაზე დამოკიდებულ ფუნქციონალს. ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანაა, მოიძებნოს ისეთი ფუნქცია $y = y(x)$, რომელიც ფუნქციონალს ანიჭებს სტაციონარულ მნიშვნელობას – ე.ი. მინიმუმს ან მაქსიმუმს.

შედარებისათვის გავიხსენოთ, რომ შეგვიძლია, ფუნქცია წარმოვიდგინოთ, როგორც ასახვა, რომელიც რიცხვს კვლავ რიცხვად აქცევს:

$$x \rightarrow y = f(x).$$

თუ ვისარგებლებთ ამ ანალოგიით, ფუნქციონალი წარმოადგენს ასახვას, რომელიც ფუნქციას, როგორც მთლიანს, რიცხვად აქცევს:

$$f(x) \rightarrow \mathcal{F}[f] \in \mathbb{R}\,.$$



ვისარგებლოთ წარმოდგენილი ნახაზით. დაუშვათ, რომ ფუნქცია $y(x)$ შეესაბამება ინტეგრალის მინიმალურ მნიშვნელობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ მცირედ განსხვავებული მეზობელი ფუნქცია იწვევს ინტეგრალის რიცხვითი მნიშვნელობის ზრდას. მეზობელი ფუნქციის განმარტება შეიძლება გამოსახულებით

$$y(x;\varepsilon) = y(x) + \varepsilon\eta(x)\ ,$$

სადაც ε მცირე პარამეტრია, ხოლო $\eta(x)$ – ისეთი უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც ნულდება საინტეგრაციო ინტერვალის საზღვრებზე

$$\eta(x_1) = \eta(x_2).$$

ახლა ინტეგრალი

$$I[y;\varepsilon] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F\{y(x;\varepsilon), y'(x;\varepsilon); x\} =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, F\{y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x); x\}$$

ხდება ε-პარამეტრის ფუნქცია. ვინაიდან ჩვენ დაუშვით, რომ ფუნქცია $y = y(x)$ შეესაბამება ინტეგრალის მინიმუმს, ეს იმას ნიშნავს, რომ სიდიდე $I[y;\varepsilon]$, როგორც ε-პარამეტრის ფუნქცია, აღწევს მინიმუმს ε -ის ნულოვანი მნიშვნელობისათვის. ამგვარად, ექსტრემუმის წერტილში კმაყოფილდება განტოლება

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[y;\varepsilon]\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

ფუნქციას $y = y(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს ამ განტოლებას (სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით), ეწოდება $I[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემალი.

დავადგინოთ ექსტრემუმის განტოლების სახე. მოცემული $F\{y(x), y'(x); x\}$ ფუნქციის შემთხვევაში, გვექნება

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_1}^{x_2} dx\, F\{y(x)+\varepsilon\eta(x), y'(x)+\varepsilon\eta'(x); x\} =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'^{(x)}\right\} = \int_{x_1}^{x_2} dx\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\right] - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)\right\}.$$

ბოლო გამოსახულების მიღებისას ჩვენ განვახორციელეთ ნაწილობითი ინტეგრება. ამგვარად, საძიებელი წარმოებულისათვის ვიღებთ:

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[y;\varepsilon]_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\eta(x) + \int_{x_1}^{x_2} dx\,\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\right].$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, ბოლო წევრი ნულდება

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\,\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\right] = \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_1} = 0$$

და, როგორც შედეგი, ექსტრემუმის პირობა გამოიხატება ტოლობით:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}\eta(x) = 0.$$

ვინაიდან საინტეგრაციო არეში $\eta(x)$ ნებისმიერი ფუნქციაა, ბოლო განტოლების შედეგია

ვარიაციული აღრიცხვის ფუნდამენტური განტოლება

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

რომელსაც ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება ეწოდება. ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების ამონახსნს $I[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემალს უწოდებენ.

დავუბრუნდეთ უმოკლესი წირის დადგენის ამოცანას. ამ შემთხვევაში გვაქვს ფუნქცია

$$F\{y(x), y'(x); x\} = \sqrt{1+y'^2}$$

და შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება ასე გამოიყურება:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

ამ განტოლებიდან ჩანს, რომ ფარდობა

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = Const\,.$$

ამრიგად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ წარმოებული

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = b$$

მუდმივია. მაშასადამე, გვაქვს ამოხსნა, რომელიც შეესაბამება წრფეს

$$y(x) = a + bx,$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინება კი გვაძლევს

$$y(x) = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x \,.$$

რაც შეეხება ინტეგრალის ექსტრემალურ მნიშვნელობას, იგი თანხმობაშია პითაგორას თეორემასთან

$$I_{ext} = \int_{x_1}^{x_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

§9.2. ქმედების ფუნქციონალი და ლაგრანჟიანი

ფიზიკაში გვხვდება ფუნქციონალები, სადაც მონაწილეობენ როგორც ფუნქციები, ასევე მათი წარმოებულები. დასაწყისისათვის განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x(t), \dot{x}(t)).$$

ფიზიკაში დამკვიდრებული ტერმინოლოგიის შესაბამისად, ამ ფუნქციონალს უწოდებენ ქმედების ფუნქციონალს, შემოკლებით – ქმედებას. დამოუკიდებელ ცვლადს t – დრო, ფუნქციას $x(t)$ – ტრაექტორია, ხოლო $\dot{x}(t)$-ს სიჩქარე ეწოდება. კოორდინატისა და სიჩქარის ფუნქცია $L(x(t), \dot{x}(t))$ არის ლაგრანჟიანი (ლაგრანჟის ფუნქცია). t_2 და t_1 დროის საწყისი და საბოლოო მომენტებია.

ქმედების ფუნქციონალისათვის ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას ექნება ნაცნობი სახე

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0\,.$$

როგორც პირველი მაგალითი, განვიხილოთ სიჩქარეზე დამოკიდებული ლაგრანჟიანი

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2\,.$$

ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \qquad m\ddot{x} = 0\,.$$

გამოვთვალოთ ქმედების მნიშვნელობა ექსტრემალური ტრაექტორიისათვის $x(t) = x_0 + vt$.

ჩავთვალოთ, რომ საწყისი და საბოლოო კოორდინატები ფიქსირებულია

$$x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2.$$

ქმედებისათვის მივიღებთ:

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} v^2 (t_2 - t_1)\,.$$

მუდმივა v დავაფიქსიროთ პირობებიდან

$$x_2 = x_0 + vt_2 \qquad x_1 = x_0 + vt_1$$
$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \equiv \frac{x_2 - x_1}{T}.$$

შესაბამისად, ქმედებისათვის მივიღებთ რიცხვს

$$S[x] = \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{T}\ ,$$

რომელიც დამოკიდებულია საწყის და საბოლოო კოორდინატებსა და დროის ინტერვალზე T.

§9.3.* ქმედების ფუნქციონალის გამოთვლის მაგალითები

როგორც შემდეგი მაგალითი, განვიხილოთ ლაგრანჟიანი, რომელიც შეიცავს როგორც კოორდიანტებს, ასევე სიჩქარეებს

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2\,.$$

ამ შემთხვევაში ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება აღწერს ჰარმონიული ოსცილატორის მოძრაობას

$$\ddot{x} = -\omega^2 x.$$

ქმედება გამოვთვალოთ ექსტრემალური ტრაექტორიისათვის

$$x(t) = ae^{i\omega t} + \bar{a}e^{-i\omega t} = ae^{i\omega t} + c.c.$$

აღნიშვნა $c.c.$ ნიშნავს კომპლექსურად შეუღლებულ წევრს.

სიჩქარისათვის გვექნება

$$\dot{x}(t) = i\omega a e^{i\omega t} + c.c.$$

კომპლექსური მუდმივა a უნდა დავაფიქსიროთ საწყისი და საბოლოო დროის მომენტებითა და შესაბამისი კოორდინატებით, ე.ი. წყვილებით (t_1, x_1) და (t_2, x_2). ამგვარად, უნდა ამოვხსნათ წრფივი განტოლებების სისტემა

$$e^{i\omega t_1} a + e^{-i\omega t_1} \bar{a} = x_1$$
$$e^{i\omega t_1} a + e^{-i\omega t_1} \bar{a} = x_2\,,$$

სადაც უცნობებია კომპლექსური ამპლიტუდები a და $\bar{a}$. ვინაიდან ეს ამპლიტუდები ურთიერთშეუღლებულია, სინამდვილეში გვრჩება ორი ნამდვილი უცნობი: $Re\, a$ და $Im\, a$.

ამოხსნას აქვს შემდეგი სახე:

$$a = -\frac{i}{2\sin\omega T}[e^{-i\omega t_1}x_2 - e^{-i\omega t_2}x_1]$$

$$\bar{a} = \frac{i}{2\sin\omega T}[e^{i\omega t_1}x_2 - e^{i\omega t_2}x_1]\,.$$

ვინაიდან

$$\dot{x}(t) = i\omega a e^{i\omega t} - i\omega a e^{-i\omega t},$$

საწყისი და საბოლოო სიჩქარეებისათვის, შესაბამისად, მივიღებთ

$$\dot{x}_1 = \frac{\omega}{\sin\omega T}[x_2 - \cos\omega T\cdot x_1]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\omega}{\sin\omega T}[-x_1 + \cos\omega T\cdot x_2].$$

გამოვთვალოთ ქმედება

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2\right].$$

ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენება გვაძლევს:

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \left[\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(x\dot{x}) - \frac{m}{2}x\ddot{x} - \frac{m\omega^2}{2}x^2\right].$$

ფუნქცია $x(t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t),$$

რის გამოც ინტეგრალში ბოლო ორი წევრი ბათილდება და საბოლოოდ გვრჩება

$$S[x] = \frac{m}{2}[x_2\dot{x}_2 - x_1\dot{x}_1].$$

ელემენტარული გარდაქმნების ჩატარების შემდეგ მივიღებთ საბოლოო პასუხს:

$$S[x] = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\cos\omega T(x_1^2 + x_2^2) - \frac{m\omega}{\sin\omega T}x_1x_2\,.$$

როგორც შემდეგი მაგალითი, გამოვთვალოთ ქმედება

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + Fx\right]$$

ტრაექტორიისათვის

$$x(t) = \xi + vt + \frac{F}{2m}t^2.$$

შესაბამისი ლაგრანჟიანისათვის გვექნება

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\left[v + \frac{F}{m}t\right]^2 + F\left[\xi + vt + \frac{F}{2m}t^2\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\left[v^2 + \left(\frac{F}{m}\right)^2 t^2 + 2\frac{F}{m}vt\right] + F\xi + Fvt + \frac{F^2}{2m}t^2$$

$$= \frac{m}{2}v^2 + F\xi + [Fv + Fv]t + \left[\frac{F^2}{2m} + \frac{F^2}{2m}\right]t^2$$

ე.ი.

$$L = \frac{m}{2}v^2 + F\xi + 2Fvt + \frac{F^2}{m}t^2$$

ინტეგრების შემდეგ ვღებულობთ ქმედებას

$$S[x] = \left[\frac{m}{2}v^2 + F\xi\right]T + Fv[t_2^2 - t_1^2] + \frac{F^2}{3m}[t_2^3 - t_1^3].$$

მუდმივები ξ და v უნდა დავადგინოთ პირობებიდან

$$x_2 = \xi + vt_2 + \frac{F}{2m}t_2^2$$

$$x_1 = \xi + vt_1 + \frac{F}{2m}t_1^2.$$

ვიღებთ

$$v = \frac{x_2 - x_1}{T} - \frac{F}{2m}(t_1 + t_2)$$

$$\xi = \frac{x_1 t_2 - x_2 t_1}{T} + \frac{F}{2m}t_1 t_2$$

და, საბოლოოდ, ქმედებისათვის ვიღებთ შემდეგ მნიშვნელობას:

$$S[x] = \frac{m}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{T} + \frac{1}{2}F(x_2 + x_1)T - \frac{F^2}{6m}T^3.$$

§10.1. ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებების სისტემა

ჩვენ განვიხილეთ შემთხვევები, როდესაც ფუნქციონალი შეიცავს ერთი დამოუკიდებელი ცვლადის ერთ ფუნქცის $x(t)$ და მის წარმოებულს $\dot{x}(t)$.

გადავიდეთ ისეთ შემთხვევებზე, როდესაც გვაქვს ერთი დამოუკიდებელი ცვლადი t და n-რაოდენობის დამოკიდებული ცვლადები $x_i(t)$. დამოკიდებული ცვლადებისა და მათი წარმოებულებისათვის ვიხმაროთ აღნიშვნები

$$x_i(t),\ \ \dot{x}_i(t) \equiv \frac{dx_i}{dt} \qquad i = 1,2,\dots,n$$

და ვუწოდოთ მათ კოორდინატები და სიჩქარეები.

შესაბამისი ქმედება იქნება

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[x_i(t), \dot{x}_i(t)].$$

კოორდინატები და სიჩქარეები მცირედ შევცვალოთ

$$x_i(t) \to x'_i(t) = x_i(t) + \delta x_i(t)$$

$$\frac{dx_i}{dt} \to \frac{dx'_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} + \frac{d}{dt}\delta x_i\ .$$

აქ ჩვენ ვიყენებთ ტოლობას

$$\delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta x_i\ ,$$

რომელიც სამართლიანია, როდესაც არ წარმოებს დამოუკიდებელი t-ცვლადის ვარიაცია, ე.ი. $\delta t = 0$. კოორდინატების ვარიაციები შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც მცირე ფუნქციები

$$\delta x_i(t) = \varepsilon \eta_i(t) \qquad \varepsilon \ll 1.$$

ამ ფუნქციებს დავადოთ პირობები

$$\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0.$$

კოორდინატების ვარიაციების შედეგად ქმედება შეიცვლება ახალი ქმედებით:

$$S[x] \to S[x + \delta x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}].$$

ლაგრაჟიანისათვის გამოვიყენოთ მწკრივად გაშლა

$$L[x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x}] = L[x,\dot{x}] + \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i + O(\varepsilon^2) =$$

$$= L[x,\dot{x}] + \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{d}{dt}\delta x_i + O(\varepsilon^2)$$

$$= L[x,\dot{x}] + \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\delta x_i + O(\varepsilon^2)\,.$$

ქმედების ფუნქციონალის ვარიაცია განიმარტება, როგორც სხვაობა ახალ და ძველ ქმედებებს შორის

$$\delta S[x] = S[x+\delta x] - S[x].$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟიანის მწკრივად გაშლა. $O(\varepsilon^2)$ წევრების სიზუსტით მივიღებთ

$$\delta S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right]\delta x_i + \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{\delta S[x]}{\delta x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\Big|_{1}^{t_2}\,.$$

ვინაიდან ინტეგრების არის საზღვრებზე $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$, სასაზღვრო წევრი ნულის ტოლია და ვარიაციისთვის ვღებულობთ

$$\delta S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\right]\delta x_i = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{\delta S[x]}{\delta x_i}\delta x_i\,.$$

ქმედების ფუნქციონალის

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[x_i(t),\dot{x}_i(t)]$$

ფუნქციონალური წარმოებულები განისაზღვრება ტოლობებით

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right).$$

ექსტრემალური წირებისათვის სრულდება განტოლება

$$\frac{\delta S[x = x_{extr}]}{\delta x_i} = 0\,.$$

§10.2.* გეოდეზიური წირის განტოლება

პარაგრაფ §9.2.-ში დავადგინეთ, რომ წრფე წარმოადგენს წირის სიგრძის ფუნქციონალის ექსტრემალს. ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ეს ფუნქციონალი განისაზღვრება ინტეგრალით

$$l = \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2}\,,$$

სადაც C საინტეგრაციო წირია.

ახლა გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე და განვიხილოთ სივრცე, სადაც შემოყვანილია კოორდინატები x^i. ამასთან, არ ვგულისხმოთ, რომ კოორდინატები დეკარტულია. შევნიშნოთ, რომ ამჯერად კოორდინატებისათვის ვხმარობთ ინდექსების ზედა განლაგებას.

ინტერვალი ორ მეზობელ წერილს შორის განიმარტება კვადრატული ფორმით

$$ds^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k,$$

სადაც $g_{ik}(x)$ არის კოორდინატებზე დამოკიდებული მეტრიკული ტენზორი. მისი შებრუნებული ტენზორი განიმარტება ტოლობით

$$g^{mk}g_{kj} = \delta_j^m.$$

ასევე შევნიშნოთ, რომ ახლა მუნჯი ინდექსებით დაჯამების წესი ეხება ერთსახელა ზედა და ქვედა განლაგების ინდექსების წყვილებს.

უმოკლესი სიგრძის ე.ი. გეოდეზიური წირის განტოლების მისაღებად შეიძლება, გამოვიყენოთ სიგრძის წრფივი ელემენტის შემცველი ლაგრანჟიანი

$$L = \int_C \sqrt{g_{ik}(x)dx^i dx^k} = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{g_{ik}(x)v^i v^k} \qquad v^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

ეილერ-ლაგარანჟის განტოლებების ჩასაწერად თავდაპირველად გამოვთვალოთ

$$\frac{\partial L}{\partial x^m} = \frac{1}{2\sqrt{g_{ik}(x)v^i v^k}}\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}v^p v^q$$

და

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^m} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\sqrt{g_{ik}(x)v^i v^k}}2g_{mn}v^n\right\}.$$

ექსტრემალის განტოლების მისაღებად გავუტოლოთ ეს ორი გამოსახულება ერთმანეთს

$$\frac{\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}v^p v^q}{2\sqrt{g_{ik}(x)v^i v^k}} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{g_{mn}v^n}{\sqrt{g_{ik}(x)v^i v^k}}\right\}.$$

მიღებულ განტოლებაში კვადრატული ფესვის არსებობა წარმოადგენს გარკვეულ სირთულეს.

კვადრატული ფესვის თავიდან აცილება შეიძლება, თუ წირების პარამეტრიზაციისათვის გამოვიყენებთ ნატურალურ პარამეტრს

$$s(t) = \int_{t_1}^{t} dt\sqrt{g_{ik}(x)v^i v^k}\,,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ik}(x)v^i v^k} \quad \to \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{ik}(x)v^i v^k}}\,.$$

გადავიდეთ ნატურალურ პარამეტრზე. ეს პროცედურა ხორციელდება ქვემოთ მოყვანილი გარდაქმნების საშუალებით:

$$t = t(s) \to \quad x^i \to \bar{x}^i(s) = \; x^i\big(t(s)\big) \qquad g_{ik}(x) \to \bar{g}_{ik}(\bar{x}) = g_{ik}(x)$$

$$\frac{d\bar{x}^i}{ds} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{ds} = \bar{v}^i = \frac{dt}{ds}v^i$$

$$\bar{g}_{ik}(\bar{x})\bar{v}^i\bar{v}^k = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 g_{ik}(x)v^i v^k = 1\,.$$

ამგვარად, თუ გამოვიყენებთ ნატურალურ პარამეტრს, ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება გეოდეზიური წირისათვის მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{pn}}{\partial \bar{x}^m}\bar{v}^p\bar{v}^n = \frac{d}{ds}\{\bar{g}_{mn}\bar{v}^n\}\,.$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარის გაწარმოების შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{pn}}{\partial \bar{x}^m}\bar{v}^p\bar{v}^n = \frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^p}\bar{v}^p\bar{v}^n + \bar{g}_{mn}\frac{d\bar{v}^n}{ds}\,.$$

მუნჯი ინდექსების წესების გამოყენებით გარდავქმნათ მარჯვენა მხარის პირველი წევრი:

$$\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^p}\bar{v}^p\bar{v}^n = \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{mn}}{\partial \bar{x}^p}\bar{v}^p\bar{v}^n + \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{mp}}{\partial \bar{x}^n}\bar{v}^p\bar{v}^n\,.$$

ამ გზით მივდივართ განტოლებასთან

$$\bar{g}_{mn}\frac{d\bar{v}^n}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{ml}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^l} - \frac{\partial \bar{g}_{jl}}{\partial \bar{x}^m}\right)\bar{v}^j\bar{v}^l = 0\,.$$

შევკვეცოთ ზედა-ქვედა მუნჯი ინდექსები

$$\bar{g}^{im}\bar{g}_{mn} = \delta^i_n,$$

რის შემდეგაც ვღებულობთ გეოდეზიური წირის განტოლებას

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}^i_{jl}\frac{d\bar{x}^j}{ds}\frac{d\bar{x}^l}{ds} = 0\,.$$

აქ განმარტებული გვაქვს კრისტოფელის მეორე გვარის სიმბოლო

$$\bar{\Gamma}^i_{jl} = \frac{1}{2}\bar{g}^{im}\left(\frac{\partial \bar{g}_{ml}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{g}_{mj}}{\partial \bar{x}^l} - \frac{\partial \bar{g}_{jl}}{\partial \bar{x}^m}\right).$$

უნდა გვახსოვდეს, რომ ამგვარი მსჯელობა სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც წირის აღსაწერად გამოყენებულია ნატურალური პარამეტრი s.

განვიხილოთ ლაგრანჟიანი

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$$

და შევადგინოთ შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = 0\,.$$

ლაგრანჟიანის წარმოებულებისათვის, შესაბამისად, გვექნება

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = g_{kj}(x)\dot{x}^j$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = g_{kj}(x)\ddot{x}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}\dot{x}^l\dot{x}^j\,.$$

ამჯერად ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$g_{kj}(x)\ddot{x}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l}\dot{x}^l\dot{x}^j - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0\,.$$

თუ გამოვიყენებთ კრისტოფელის სიმბოლოს განმარტებას, კვლავ მივიღებთ გეოდეზიური წირის განტოლებას

$$\frac{d^2x^m}{dt^2} + \Gamma^m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 \qquad \Gamma^m_{ij} = \Gamma^m_{ji}\,,$$

ოღონდ ამჯერად ნატურალური პარამეტრის გამოყნება აღარ არის სავალდებულო.

დეკარტულ კოორდინატებში, სადაც g_{ij} მუდმივებია, კრისტოფელის სიმბოლოები ნულდება $\Gamma^m_{ij} = 0$ და ვიღებთ წრფის განტოლებას

$$\ddot{x}^m = 0.$$

გამოვიყენოთ სიჩქარის ვექტორის გამოსახულება

$$v^m(t) = \frac{dx^m}{dt}\,.$$

მაშინ გეოდეზიური წირის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{dv^m}{dt} + \Gamma_{ij}^m v^i v^j = \left(\delta_j^m \frac{d}{dt} + \Gamma_{ij}^m v^i\right) v^j = Dv^j = 0 \,.$$

კონტრავარიანტულ ვექტორს

$$DA^i = \frac{dA^i}{dt} + A^m \Gamma_{mn}^i \frac{dx^n}{dt}$$

ეწოდება A^i ვექტორის აბსოლუტური წარმოებული.

აბსოლუტური წარმოებული წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dA^i}{dt} + A^m \Gamma_{mn}^i \frac{dx^n}{dt} = \frac{\partial A^i}{\partial x^n}\frac{dx^n}{dt} + \Gamma_{nm}^i A^m \frac{dx^n}{dt} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^n} + \Gamma_{nm}^i A^m\right)\frac{dx^n}{dt}\,.$$

ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებას ეწოდება კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტული წარმოებული

$$D_n A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^n} + \Gamma_{nm}^i A^m \,.$$

§10.3. დამოუკიდებელი ცვლადის გარდაქმნა

ამ პარაგრაფში დამოკიდებელი ცვლადებისათვის ვიხმაროთ აღნიშვნა q_a. ამგვარი სახის ვარიაციული ამოცანა გვხვდება კლასიკურ მექანიკაში, სადაც ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები იწერება განზოგადოებული კოორდინატებისათვის q_a.

ვარიაციული განტოლებები

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right) = 0 \qquad a = 1,2, \dots, n$$

მიიღება სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით, როდესაც ფუნქციის ვარიაციები აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\delta q_a(t_1) = \delta q_a(t_2) = 0.$$

ახლა განვიხილოთ უფრო ზოგადი ვარიაციები, როდესაც $q_a(t)$ ფუნქციების ფორმის ცვლილებასთან ერთად მცირედ იცვლება თვით დამოუკიდებელი ცვლადი, ე.ი. დრო t. ასეთი გარდაქმნები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$t \to t' = t + \delta t(t)$$

$$q_a(t) \to {q'}_a(t') = q_a(t) + \delta^* q_a(t).$$

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ახლად შემოტანილი δ^*-ვარიაციების შემთხვევაში, იცვლება დროითი ცვლადიც. ამგვარად, კოორდინატული ფუნქციებისათვის გვაქვს ორი ტიპის ვარიაცია: ფუნქციის ფორმის ვარიაცია δ და სრული ვარიაცია δ^*. ვიპოვოთ კავშირი მათ შორის.

$$\delta q_a(t) = q'_a(t) - q_a(t) = q_a(t-\delta t) + \delta^* q_a(t-\delta t) - q_a(t) = q_a(t) - \dot{q}_a(t)\delta t +$$
$$+\delta^* q_a(t) - q_a(t) + \cdots = \delta^* q_a(t) - \dot{q}_a(t)\delta t + \cdots$$

აქ მრავალწერტილით აღნიშნულია მაღალი რიგის მცირე სიდიდები, რომლებსაც უგულებელვყოფთ. ასევე ვისარგებლეთ ტოლობით

$$f(t+\delta t) = g(t) \to f(t) = g(t-\delta t).$$

ამგვარად,

$$\delta^* q_a(t) = \delta q_a(t) + \dot{q}_a(t)\delta t.$$

ახლა გამოვთვალოთ სიჩქარეების δ^*-ვარიაციები. ეს ცვლილება გამოისახება ფორმულით

$$\delta^* \dot{q}_a(t) = \frac{dq'_a(t')}{dt'} - \frac{dq_a(t)}{dt}.$$

გამოვიყენოთ ცვლადთა გარდაქმნის წესები

$$dt' = \frac{dt'}{dt}dt \qquad \frac{d}{dt} = \frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'} = (1+\frac{d\delta t}{dt})\frac{d}{dt'}$$
$$\frac{d}{dt'} = \left(1 - \frac{d\delta t}{dt}\right)\frac{d}{dt} \equiv \left(1 - \frac{d}{dt}\delta t\right)\frac{d}{dt}.$$

ამ ფორმულების გამოყენებით ვიღებთ:

$$\frac{dq'_a(t')}{dt'} = \left(1 - \frac{d}{dt}\delta t\right)\frac{d}{dt}[q_a(t) + \delta^* q_a(t)] =$$
$$= \left(1 - \frac{d}{dt}\delta t\right)\frac{d}{dt}[q_a(t) + \delta q_a(t) + \dot{q}_a(t)\delta t].$$

ამგვარად,

$$\delta^* \dot{q}_a(t) = \frac{d}{dt}[\delta q_a(t) + \dot{q}_a(t)\delta t] - \dot{q}_a(t)\frac{d}{dt}\delta t = \delta \dot{q}_a(t) + \ddot{q}(t)\delta t.$$

აქ ჩვენ ვისარგებლეთ იმით, რომ ფუნქციის ფორმის ვარიაცია და გაწარმოება ურთიერთგადასმადია

$$\frac{d}{dt}\delta q_a(t) = \delta \dot{q}_a(t),$$

ვარსკვლავიანი ვარიაცია კი, საზოგადოდ, არ კომუტირებს დროით გაწარმოებასთან:

$$\frac{d}{dt}\delta^* q_a(t) = \delta^* \dot{q}_a(t) + \dot{q}_a(t)\frac{d}{dt}\delta t \neq \delta^* \dot{q}_a(t).$$

ახლა შეგვიძლია გამოვთვალოთ ქმედების δ^*-ვარიაცია:

$$\delta^* S[q(t)] = S[q'(t')] - S[q(t)].$$

ამ გამოსახულებაში

$$S[q'(t')] = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \, \mathcal{L}(q_a'(t), \dot{q}_a'(t)$$

ვისარგებლოთ საინტეგრაციო ცვლადის შეცვლის წესით:

$$\int_{t_1'}^{t_2'} dt' = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dt'}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 + \frac{d\delta t}{dt}\right).$$

გარდა ამისა, გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა

$$\mathcal{L}(q_a'(t), \dot{q}_a'(t) = \mathcal{L}(q_a + \delta^* q_a, \dot{q}_a + \delta^* \dot{q}_a) = \mathcal{L}(q_a, \dot{q}_a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta^* q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta^* \dot{q}_a$$

(ამ გამოსახულებაში ნაგულისხმებია მუნჯი ინდექსებით დაჯამება).

ამგვარად მივიღებთ:

$$\delta^* S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta^* q_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta^* \dot{q}_a + \frac{d\delta t}{dt} \mathcal{L}\right].$$

ვინაიდან

$$\delta^* q_a(t) = \delta q_a(t) + \dot{q}_a(t)\delta t$$

$$\delta^* \dot{q}_a(t) = \delta \dot{q}_a(t) + \ddot{q}(t)\delta t,$$

სრული ვარიაციისათვის ვიღებთ:

$$\delta^* S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} (\delta q_a(t) + \dot{q}_a(t)\delta t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a(t) + \ddot{q}(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta t + \frac{d\delta t}{dt} \mathcal{L}\right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \delta q_a(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \dot{q}_a(t)\delta t + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}\right) \delta q_a(t) + \ddot{q}(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta t \right.$$

$$\left. + \frac{d\delta t}{dt} \mathcal{L}\right].$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად ეს გამოსახულება შეგვიძლია გადავწეროთ, როგორც

$$\delta^* S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}\right)\right) \delta q_a(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a + \mathcal{L}\delta t\right)\right\}.$$

ამრიგად, ვიღებთ მნიშვნელოვან შედეგს

$$\delta^* S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\frac{\delta S[q(t)]}{\delta q_a(t)} \delta q_a(t) + \frac{d}{dt} \delta \mathcal{M}\right\} \equiv \delta S[q(t)] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{\frac{d}{dt} \delta \mathcal{M}\right\},$$

სადაც

$$\frac{\delta S[q(t)]}{\delta q_a(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}\right)$$

არის ქმედების ვარიაციული წარმოებული, ხოლო

$$\delta \mathcal{M}(t) = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a(t)} \delta q_a(t) + \mathcal{L}\delta t$$

არის კოორდინატებისა და სიჩქარეების დროზე დამოკიდებული ფუნქცია. რადგანაც ეს ფუნქცია ქმედების ვარიაციის ინტეგრალში შედის სრული წარმოებულის სახით, საბოლოოდ ვღებულობთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\delta^* S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta S[q(t)]}{\delta q_a(t)} \delta q_a(t) + \delta \mathcal{M}\,(t_2) - \delta \mathcal{M}(t_1).$$

ახლა დაუშვათ, რომ ფუნქციები $q_a(t)$ შეესაბამებიან ჭეშმარიტ მოძრაობას, ანუ აკმაყოფილებენ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს

$$\frac{\delta S[q(t)]}{\delta q_a(t)} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a}\right) = 0\,.$$

ამ შემთხვევაში

$$\delta^* S[q(t)] = \delta \mathcal{M}(t_2) - \delta \mathcal{M}(t_1).$$

ამ შედეგზე დაყრდნობით, შეგვიძლია, ჩამოვაყალიბოთ მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელსაც ეწოდება ემი ნიოტერის თეორემა:

თუ ქმედება ინვარიანტულია (არ იცვლება)

$$t \to t' = t + \delta t$$

$$q_a(t) \to q'_a(t') = q_a(t) + \delta^* q_a(t)$$

გარდაქმნების მიმართ, ე.ი.

$$\delta^* S[q(t)] = 0,$$

მაშინ ექსტრემალური (ნამდვილი) ტრაექტორიებისათვის $q_a = q_a^{extr}(t)$ სიდიდე

$$\delta \mathcal{M}(t) = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a(t)} \delta q_a(t) + \mathcal{L}\delta t; \qquad q_a = q_a^{extr}(t)$$

ინახება, ე.ი.

$$\frac{d}{dt}\,\delta \mathcal{M}(t) = 0\,.$$

§11.1. ვარიაციული ამოცანა ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევისათვის

აქამდე განხილული ვარიაციული ამოცანები ეხებოდა შემთხვევებს ერთი დამოუკიდებელი ცვლადით, როდესაც ქმედების ფუნქციონალს აქვს ერთჯერადი ინტეგრალის სახე

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[x(t), \dot{x}(t)].$$

განვაზოგადოთ ეს ამოცანა მრავალჯერადი ინტეგრალებით წარმოდგენილი ფუნქციონალებისათვის.

დასაწყისისათვის განვიხილოთ ქმედება:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathcal{L}(u, \dot{u}, u').$$

ვთვლით, რომ ლაგრანჟიანის სიმკვრივე $\mathcal{L}$ დამოკიდებულია როგორც ველზე $u(t,x)$, ასევე მის პირველ წარმოებულებზე

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u' = \frac{\partial u}{\partial x}\ .$$

ჩავატაროთ ველის ფუნქციის ვარიაცია

$$u(t,x) \to u(t,x) + \delta u(t,x),$$

სადაც უსასრულოდ მცირე ფუნქციები აკმაყოფილებენ სტანდარტულ პირობებს

$$\delta u(t_1, x) = \delta u(t_2, x) = 0.$$

ამასთან ერთად, ვთვლით, რომ სივრცულად დაშორებულ არეებში ველები ნულდებიან

$$u(t, x \to \pm\infty) = 0.$$

ქმედების ფუნქციის ვარიაცია განიმარტება ტოლობით:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [\mathcal{L}(u + \delta u, \dot{u} + \delta\dot{u}, u' + \delta u') - \mathcal{L}(u, \dot{u}, u')].$$

ვინაიდან ამ დროს არ წარმოებს ინტეგრების ცვლადების გარდაქმნები, წარმოებულების ვარიაციებისათვის გვექნება:

$$\delta\dot{u} = \frac{\partial}{\partial t}\delta u \qquad \delta u' = \frac{\partial}{\partial x}\delta u\, .$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაში გამოვიყენოთ მწკრივად გაშლა

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\frac{\partial}{\partial t}\delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}\frac{\partial}{\partial x}\delta u\right\}$$

და ჩავატაროთ ნაწილობითი ინტეგრება:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u - \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\right)\delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}\right)\delta u\right\} +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}\delta u\right)\right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\delta u - \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\right)\delta u - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}\right)\delta u\right\} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\delta u\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\delta u\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}.$$

სასაზღვრო პირობების გამო, მიღებულ გამოსახულებაში ბოლო ორი წევრი ნულდება და საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}\right)\right\}\delta u\,.$$

ქმედების ვარიაციის ნულთან გატოლება გვაძლევს ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას ველისათვის $u(t,x)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'}\right) = 0\,.$$

მაგალითისათვის განვიხილოთ ლაგრანჟიანის სიმკვრივე:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}v^2\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2.$$

ასეთი ლაგრანჟიანის შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება აღწერს ტალღის გავრცელებას სიჩქარით v

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,.$$

§11.2.* მრავალგანზომილებიანი ვარიაციული ამოცანა

განვიხილოთ D-განზომილებიანი სივრცე კოორდინატებით $x = (x_0, x_1, \dots, x_{D-1})$. სივრცის რაიმე G-არეში განვმარტოთ N-კომპონენტიანი ვექტორ-ფუნქცია (ველი) $u_A(x),\ A = 1,2, \dots, N$.

შევადგინოთ ფუნქციონალი

$$S[u] = \int\limits_G d^D x \mathcal{L}\big(u_A(x), u_{A;i}(x)\big)\,,$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნა:

$$u_{A;i}(x) = \frac{\partial u_A(x)}{\partial x_i}.$$

ფუნქცია $\mathcal{L}\big(u_A(x), u_{A;i}(x)\big)$ წარმოადგენს ლაგრანჟიანის სიმკვრივეს.

ჩავატაროთ დამოუკიდებელი ცვლადებისა და ველის ფუნქციების ინფინიტეზიმალური (უსასრულოდ მცირე) გარდაქმნები:

$$x_i \to x'_i = x_i + \delta x_i$$

$$u_A(x) \to u'_A(x') = u_A(x) + \delta u_A(x).$$

განვმარტოთ ფუნქციონალის ვარიაცია

$$\delta S[u] = \int\limits_{G'} d^D x' \mathcal{L}\left(u'_A(x'), u'_{A;i}(x')\right) - \int\limits_G d^D x \mathcal{L}\big(u_A(x), u_{A;i}(x)\big)\,.$$

აქ G' არის ინტეგრების ახალი არე

$$\int\limits_{G'} d^D x' = \int\limits_G d^D x J\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right),$$

სადაც გარდაქმნის იაკობიანი

$$J\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = \det\left|\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\right| = \det|\delta_{ik} + \partial_i \delta x_k| = 1 + \partial_i \delta x_i + \mathcal{O}((\delta x)^2)\,.$$

დაწვრილებით განვიხილოთ ველებისა და მათი პირველი წარმოებულების გარდაქმნები. შემოვიღოთ ე.წ. ფუნქციის ფორმის ვარიაცია:

$$\bar{\delta} u(x) = u'(x) - u(x) = u(x - \delta x) + \delta u(x - \delta x) - u(x) =$$

$$= u(x) - \partial_i u(x) \delta x_i + \delta u(x) - u(x) + \mathcal{O}((\delta x)^2) \approx \delta u(x) - \partial_i u(x) \delta x_i\,.$$

ველის წარმოებულის სრული ცვლილება არის

$$\delta(\partial_i u) = \partial'_i u'(x') - \partial_i u(x).$$

ვინაიდან

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x'_k} = (\delta_{ki} + \partial_i \delta x_k)\frac{\partial}{\partial x'_k} \approx \frac{\partial}{\partial x'_i} + \partial_i \delta x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,,$$

ე.ი.

$$\partial'_i \approx \partial_i - \partial_i \delta x_k \partial_k .$$

წარმოებულის ვარიაციისათვის მივიღებთ:

$$\delta(\partial_i u) = \partial'_i u'(x') - \partial_i u(x) = (\partial_i - \partial_i \delta x_k \partial_k)(u + \delta u) - \partial_i u(x) = \partial_i \delta u - \partial_i \delta x_k \partial_k u =$$
$$= \partial_i\big(\bar{\delta} u(x) + \partial_k u(x)\delta x_k\big) - \partial_i \delta x_k \partial_k u \approx \partial_i \bar{\delta} u(x) + \partial_i \partial_k u(x) \delta x_k \, .$$

ამრიგად, სრული ვარიაციებისათვის გვექნება:

$$\delta u(x) \approx \bar{\delta} u(x) + \partial_i u(x) \delta x_i \;\; \delta(\partial_i u) \approx \partial_i \bar{\delta} u(x) + \partial_i \partial_k u(x) \delta x_k \, .$$

ფუნქციონალის სრული ვარიაცია მოიცემა გამოსახულებით:

$$\delta S = \int\limits_G d^D x \, (1 + \partial_i \delta x_i) \mathcal{L}\big(u + \bar{\delta} u(x) + \partial_i u(x) \delta x_i, \partial_i u + \partial_i \bar{\delta} u(x) + \partial_i \partial_k u(x) \delta x_k\big) -$$

$$- \int\limits_G d^D x \mathcal{L}(u, \partial_i u) = \int\limits_G d^D x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\big(\bar{\delta} u(x) + \partial_i u(x) \delta x_i\big) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,i}} \partial_i \bar{\delta} u(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,i}} \partial_i \partial_k u(x) \delta x_k\right] +$$

$$+ \int\limits_G d^D x \, \partial_i \delta x_i \mathcal{L}(u, \partial u) = \int\limits_G d^D x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}}\right) \bar{\delta} u_A(x)\right] +$$

$$+ \int\limits_G d^D x \left[\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}} \bar{\delta} u_A(x)\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} \partial_i u_A(x) \delta x_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}} \partial_i \partial_k u_A(x) \delta x_k + \partial_i \delta x_i \mathcal{L}(u, \partial u)\right]$$

(ჩაწერის სიმოკლისათვის იქ, სადაც ეს შესაძლებელია, ველის ინდექსი A ცხადი სახით არ არის მითითებული).

ბოლო ინტეგრალქვეშა წევრი არის D-განზომილებიანი დივერგენცია

$$\left[\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}} \bar{\delta} u_A(x)\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} \partial_i u_A(x) \delta x_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}} \partial_i \partial_k u_A(x) \delta x_k + \partial_i \delta x_i \mathcal{L}(u, \partial u)\right] = \frac{\partial \delta \mathfrak{M}_i}{\partial x_i} \, ,$$

სადაც განმარტებულია სიდიდე

$$\delta \mathfrak{M}_i = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}} \bar{\delta} u_A(x)\right) + \mathcal{L} \delta x_i \, .$$

ამგვარად, სრული ვარიაციისათვის ვღებულობთ გამოსახულებას:

$$\delta S = \int\limits_G d^D x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}}\right) \bar{\delta} u_A(x)\right] + \int\limits_G d^D x \frac{\partial \delta \mathfrak{M}_i}{\partial x_i} .$$

გაუსის თეორემის დახმარებით, გარდავქმნათ ამ გამოსახულების ბოლო წევრი:

$$\int\limits_G d^D x \frac{\partial \delta \mathfrak{M}_i}{\partial x_i} = \oint\limits_\sigma d\sigma_i \, \delta \mathfrak{M}_i \, .$$

აქ $d\sigma_i$ არის G-არის შემომსაზღვრელი σ ზედაპირის ფართის ელემენტი ($\partial G = \sigma$).

ქმედების ფუნქციონალის სრული ვარიაცია შედგება ორი წევრისაგან:

$$\delta S = \int_G d^D x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}} \right) \bar{\delta} u_A(x) \right] + \oint_\sigma d\sigma_i \, \delta \mathfrak{M}_i \, .$$

თავდაპირველად განვიხილოთ მხოლოდ ველების ფორმის ვარიაციები, როდესაც $\delta x_i = 0$ და

$$\delta u(x) \approx \bar{\delta} u(x)$$

$$\delta(\partial_i u) \approx \partial_i \bar{\delta} u(x).$$

მოვითხოვოთ, რომ σ ზედაპირზე $\bar{\delta} u(x) = 0$ ($x \in \sigma$). მაშინ

$$\delta S = \int_G d^D x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}} \right) \bar{\delta} u_A(x) \, .$$

ვარიაცია ნულდება, როდესაც კმაყოფილდება ეილერ-ლაგრანჟის განტოლე-ბები (ინტეგრების არეში $\bar{\delta} u_A(x)$ ნებისმიერია)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_A} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}} = 0 \, .$$

ამგვარად, ველების ფორმის ვარიაციები გვაძლევენ ეილერ-ლაგრანჟის გან-ტოლებებს.

ისეთი გარდაქმნებისას

$$x_i \to x'_i = x_i + \delta x_i$$

$$u_A(x) \to u'_A(x') = u_A(x) + \delta u_A(x),$$

რომლებიც არ ცვლიან ფუნქციონალს S, ე.ი. $\delta S = 0$, სიდიდეები

$$\delta \mathfrak{M}_i [u^{ext}] = \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{A,i}} \bar{\delta} u_A(x) \right) + \mathcal{L} \delta x_i \right]_{u = u^{extr}}$$

აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{\partial \delta \mathfrak{M}_i [u^{extr}]}{\partial x_i} = 0 \, .$$

ამ გამოსახულებაში ფუნქციები $u^{extr}{}_A(x)$ წარმოადგენენ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებების ამონახსნს.

ეს არის ნიოტერის თეორემის მრავალგანზომილებიანი ვერსია.

§11.3.* მაგალითები: სკალარული და ვექტორული ველები

მრავალგანზომილებიანი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები წარმოადგენენ ველის თეორიის დინამიკური განტოლებების მიღების მთავარ მეთოდს.

განვიხილოთ ორი მაგალითი, როდესაც ველები $u_A(x)$ წარმოადგენენ ფსევდო-ევკლიდური (მინკოვსკის) სივრცის კოორდინატების ფუნქციებს:

$$u_A(x) = u_A(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

გამოვიყენოთ იგივე აღნიშვნები და შეთანხმებები, რომლებიც გვქონდა §§6.1.-6.3.-ში.

თავდაპირველად განვიხილოთ სკალარულ ველზე დამოკიდებული ლაგრანჟიანის სიმკვრივე:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi(x)\nabla_\mu\phi(x) + \frac{m^2}{2}\phi(x)\phi(x)\,.$$

აქ $\phi(x)$ ერთკომპონენტიანი სკალარული ველია, ხოლო m^2 – ველის მახასიათებელი მუდმივა.

ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)} = 0$$

შეიძლება ჩაიწეროს, როგორც განტოლება

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \sum_{\mu=0}^{3}\nabla_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu\phi)} = 0\,.$$

პირველი წევრის გამოთვლა მარტივია

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} = m^2\phi(x)\,.$$

ახლა გამოვთვალოთ

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu\phi)} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\nabla_\mu\phi)}\left[\eta_{\lambda\rho}\nabla_\lambda\phi\nabla_\rho\phi\right] = \frac{1}{2}\eta_{\lambda\rho}\left[\delta_{\mu\lambda}\nabla_\rho\phi + \delta_{\mu\rho}\nabla_\lambda\phi\right],$$

საიდანაც გამომდინარეობს ტოლობა

$$\sum_{\mu=0}^{3}\nabla_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu\phi)} = \nabla_\lambda\nabla_\lambda\phi(x) = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x_0^2} + \Delta\phi\,.$$

ამგვარად, ვღებულობთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას

$$\nabla_\lambda\nabla_\lambda\phi(x) - m^2\phi(x) = 0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \Delta - m^2\right]\phi(x) = 0 \,.$$

ამ განტოლებას კლეინ-გორდონის განტოლება ეწოდება.

მეორე მაგალითი ეხება ოთხკომპონენტიან ვექტორულ ველს $A_\mu(x)$. შევადგინოთ მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი

$$F_{\lambda\rho} = \nabla_\lambda A_\rho - \nabla_\rho A_\lambda$$

და ავაგოთ ლაგრანჟიანის სიმკვრივე

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} - \frac{M^2}{2}A_\lambda A_\lambda \,.$$

როგორც წინა შემთხვევაში, შემოვიფარგლეთ ველების მიმართ კვადრატული წევრებით. აქაც M^2 ველის დამახასიათებელი მუდმივაა.

ამოვწეროთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება ველისათვის $A_\mu(x)$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \nabla_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_\nu A_\mu)} = 0 \,.$$

წარმოებულებისათვის მივიღებთ:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -M^2 \sum_{\rho}^{3} \eta_{\mu\rho} A_\rho \,.$$

ამის შემდეგ გამოვთვალოთ

$$\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial(\nabla_\nu A_\mu)} = \left(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\rho\mu} - \delta_{\rho\nu}\delta_{\lambda\mu}\right)$$

და

$$\frac{\partial}{\partial(\nabla_\nu A_\mu)}\left[F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right] = 4\sum_{\lambda,\rho=0}^{3} \eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\rho}F_{\lambda\rho} \,.$$

მაშასადამე,

$$\sum_{\nu=0}^{3} \nabla_\nu \frac{\partial}{\partial(\nabla_\nu A_\mu)}\left[F_{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right] = 4\sum_{\rho=0}^{3} \eta_{\mu\rho}\nabla_\lambda F_{\lambda\rho} \,.$$

ამგვარად, ვღებულობთ განტოლებათა სისტემას

$$-M^2\sum_{\rho}^{3}\eta_{\mu\rho}A_\rho + \sum_{\rho=0}^{3}\eta_{\mu\rho}\nabla_\lambda F_{\lambda\rho} = 0 \qquad \mu = 0,1,2,3,$$

საიდანაც გამომდინარებს განტოლებები

$$\nabla_\nu F_{\nu\mu} - M^2 A_\mu = 0$$

ან, რაც იგივეა,

$$\nabla_\nu \nabla_\nu A_\mu - M^2 A_\mu - \nabla_\mu (\nabla_\nu A_\nu) = 0.$$

ვიმოქმედოთ მიღებული განტოლების ორივე მხარეზე დიფერენციალური ოპერატორით ∇_μ. მუნჯი ინდექსების შეკვეცის შედეგად, ვღებულობთ განტოლებას

$$M^2 \nabla_\mu A_\mu = 0.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $M^2 \neq 0$, ავტომატურად კმაყოფილდება პირობა

$$\nabla_\nu A_\nu = 0$$

და ვექტორული ველის ყოველი ცალკეული კომპონენტი აკმაყოფილებს კლეინ-გორდონის განტოლებას

$$\nabla_\nu \nabla_\nu A_\mu - M^2 A_\mu = 0.$$

როდესაც პარამეტრი $M^2 = 0$, ვღებულობთ განტოლებებს

$$\nabla_\nu F_{\nu\mu} = 0.$$

ეს განტოლებები ელექტროდინამიკაში ცნობილია მაქსველის განტოლებების პირველი წყვილის სახელწოდებით.

მოვახდინოთ მაქსველის ლაგრანჟიანის მოდიფიცირება

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - J_\mu A_\mu ,$$

სადაც $J_\mu(x)$ გარეშე ვექტორული ველია, რომელსაც დენის სიმკვრივე ეწოდება. ამ შემთხვევაში ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\nabla_\nu F_{\nu\mu} = J_\mu.$$

ვიმოქმედოთ ამ ტოლობის ორივე მხარეზე ∇_μ ოპერატორით. ვღებულობთ

$$\nabla_\mu \nabla_\nu F_{\nu\mu} = \nabla_\mu J_\mu.$$

$F_{\nu\mu}$ ტენზორის ანტისიმეტრიის გამო, მარცხენა მხარე ნულის ტოლია. ამრიგად, განტოლებები თვითშეთანხმებულია, თუ $J_\mu(x)$ წარმოადგენს შენახვად ვექტორულ ველს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\nabla_\mu J_\mu(x) = 0.$$

III. ფურიეს გარდაქმნები

ლექცია 12

§12.1. პერიოდული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი

განვიხილოთ ერთი ნამდვილი ცვლადის პერიოდული ფუნქცია $f(x)$. ფუნქციას $f(x)$ აქვს პერიოდი L, თუ x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის

$$f(x+L)=f(x).$$

ამგვარი ფუნქციებია, მაგალითად,

$$u_k(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi}{L}kx},\quad k\in\mathbb{Z}\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\dots).$$

პერიოდული ფუნქციების თვისებების დასადგენად საკმარისია, განვიხილოთ ფუნქციის ყოფაქცევა დამოუკიდებელი ცვლადის ცვლილების სასრულ ინტერვალში

$$-\frac{L}{2}\le x\le\frac{L}{2}.$$

განვმარტოთ L-პერიოდული ფუნქციების სკალარული ნამრავლი

$$\langle f|g\rangle\equiv\int_{-L/2}^{L/2}dx\bar{f}(x)g(x),\qquad \bar{f}(x)\equiv f^*(x)\,.$$

მარტივი გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ

$$\langle u_k|u_l\rangle=\frac{1}{i2\pi(l-k)}\left[e^{i\frac{2\pi}{L}(l-k)\frac{L}{2}}-e^{-i\frac{2\pi}{L}(l-k)x\frac{L}{2}}\right]=\frac{1}{\pi(l-k)}\sin\pi(l-k)=\begin{cases}1, & l=k\\ 0, & l\neq k\end{cases}.$$

ამგვარად, ფუნქციებისათვის $u_k(x)$ მივიღეთ ორთონორმირების პირობა

$$\langle u_k|u_l\rangle=\delta_{lk}\,.$$

თუ ვისარგებლებთ ანალოგიით ევკლიდური სივრცის საბაზისო ვექტორების ორთონორმირების პირობასთან, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ინტერვალში $\left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]$ ფუნქციები

$$u_k(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi}{L}kx}$$

ქმნიან ორთონორმირებული ფუნქციების სისტემას.

პერიოდული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი განიმარტება გამოსახულებით

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi}{L}kx}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\frac{1}{\sqrt{L}}e^{ip_kx}\,,$$

სადაც ფურიე-კოეფიციენტები

$$c_k = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\frac{2\pi}{L}kx} f(x) \,.$$

ფურიეს მწკრივი წარმოადგენს უსასრულო რაოდენობის ბრტყელი ტალღების სუპერპოზიციას. თითოეული ტალღა ხასიათდება ე.წ. k-ური ჰარმონიკის ტალღური რიცხვით

$$p_k = \frac{2\pi}{L} k, \qquad k \in \mathbb{Z} \,,$$

რომელსაც აქვს დისკრეტული სპექტრი.

განვმარტოთ ფუნქცია

$$\delta_L(x - x') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x) \bar{u}_k(x') = \frac{1}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi}{L}(x - x')k} = \delta_L(x - x' + L) \,.$$

პერიოდული ფუნქციისათვის $f(x)$ სამართლიანია ტოლობა

$$\int_{-L/2}^{L/2} dy \delta_L(x - y) f(y) = \int_{-L/2}^{L/2} dy \sum_l u_l(x) \bar{u}_l(y) \sum_k u_k(y) c_k = f(x) \,.$$

შეიძლება ითქვს, რომ L-პერიოდული ფუნქციების კლასში ფუნქციას $\delta_L(x - x')$ აქვს ფილტრაციის თვისება. ამ ფუნქციას პერიოდულ δ-ფუნქციას უწოდებენ.

ამგვარად, ინტერვალში $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ ფუნქციები $u_l(x)$ ქმნიან სრულ ორთონორმირებულ სისტემას, ე.ი. შეგვიძლია, ეს ფუნქციები განვიხილოთ, როგორც ბაზისი უსასრულო განზომილების მქონე კომპლექსურ სივრცეში. ამ სივრცის ელემენტებია კომპლექსური L-პერიოდული ფუნქციები.

§12.2. ფურიეს ინტეგრალი

განვიხილოთ ფურიეს მწკრივის ზღვარი, როდესაც პერიოდი $L \to \infty$. ასეთ შემთხვევაში ტალღური რიცხვის ბიჯი

$$\Delta p_k = \frac{2\pi}{L} = \Delta p \to 0$$

და დასაშვები ტალღური რიცხვების სპექტრი ხდება უწყვეტი. ჩავატაროთ გარდაქმნები:

$$f(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L}kx} c_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{L}{2\pi} \sum_k \frac{2\pi}{L} e^{i\frac{2\pi}{L}kx} c_k =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \Delta p e^{ip_k x} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \Delta p e^{ip_k x} \ \tilde{f}(p_k).$$

აქ შემოღებულია აღნიშვნები:

$$p_k = \frac{2\pi}{L} k, \quad \Delta p = \frac{2\pi}{L}, \quad \tilde{f}(p_k) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} c_k \,.$$

ვინაიდან

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx e^{-ip_k x} f(x) \,,$$

ვღებულობთ, რომ

$$\tilde{f}(p_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx e^{-ip_k x} f(x)$$

გამოსახულება

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \Delta p e^{ip_k x} \tilde{f}(p_k)$$

წარმოადგენს რიმანის ჯამს, რომელიც ზღვარში $L \to \infty$ გვაძლევს $f(x)$ ფუნქციის ინტეგრალურ წარმოდგენას

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(p) \,,$$

სადაც

$$\tilde{f}(p) = \lim_{L\to\infty} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} c_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \,.$$

ამგვარად, მივიღეთ:

$f(x)$ ფუნქციის წარმოდგენა ფურიეს ინტეგრალის სახით

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(p) \,,$$

სადაც $f(x)$-ფუნქციის ფურიე-სახე

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \,.$$

ფუნქციის ფურიე-სახის არსებობისათვის აუცილებელა, რომ სრულდებოდეს პირობა:

$$f(x) \to 0 \text{ , როდესაც } x \to \pm\infty.$$

12.3. ფურიეს გარდაქმნის ძირითადი თვისებები

ქვემოთ ჩამოთვლილია შესაბამისობის წესები ფუნქციასა და მის ფურიე-სახეს შორის.

1. წრფივობა

$$g(x) = \alpha f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}(k) = \alpha \tilde{f}(k)$$

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{h}(k) = \tilde{f}(k) + \tilde{g}(k)\,;$$

2. მასშტაბური გარდაქმნა (α ნამდვილია)

$$g(x) = f(\alpha x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}(k) = \frac{1}{|\alpha|}\tilde{f}\left(\frac{k}{\alpha}\right);$$

3. ტრანსლაცია/ექსპონენტზე გამრავლება

$$g(x) = f(x-\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}(k) = e^{-ik\alpha}\tilde{f}(k)$$

$$g(x) = e^{i\alpha x}f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}(k) = \tilde{f}(k-\alpha);$$

4. დიფერენცირება/გამრავლება

$$g(x) = f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}(k) = ik\tilde{f}(k)$$

$$g(x) = xf(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}(k) = ik\tilde{f}'(k)\,;$$

5. დუალობა

$$g(x) = \tilde{f}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}(k) = f(-k)\,;$$

6. კომპლექსური შეუღლება

$$g(x) = [f(x)]^* \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}(k) = \left[\tilde{f}(-k)\right]^*;$$

7. ლუწობა

$$f(-x) = \pm f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}(-k) = \pm\tilde{f}(k).$$

§12.4. დირაკის δ-ფუნქციის ცნება

დირაკის δ-ფუნქცია არ წარმოადგენს ფუნქციას ამ ცნების სტანდარტული გაგებით და იგი მიეკუთვნება ე.წ. განზოგადებული ფუნქციების კლასს. ასეთ ფუნქციებს ასევე განაწილებებსაც უწოდებენ. δ-ფუნქცია იძენს შინაარსს ინტეგ-რალის ნიშანქვეშ.

დირაკის დელტა ფუნქციის განმსაზღვრელი თვისებებია

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x) = f(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) = 1,$$

სადაც $f(x)$ არის კარგი ყოფაქცევის (გლუვი, დიფერენცირებადი) ფუნქცია, ისეთი, რომ

$$f(\infty) = f(-\infty) = 0.$$

ამას გარდა, სასრული ინტერვალების შემთხვევებში, სამართლიანია ტოლობები:

$$\int_a^b dx f(x)\delta(x) = f(0), \qquad a < 0 < b$$

$$\int_a^b dx \delta(x) = 1, \qquad a < 0 < b\,.$$

ჩამოთვლი თვისებებიდან გამომდინარე, შეიძლება დავასკვნათ, რომ

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

ჩვეულებრივი აზრით, ასეთი ფუნქცია არ არსებობს.

§12.5. δ-ფუნქციის აპროქსიმაციები

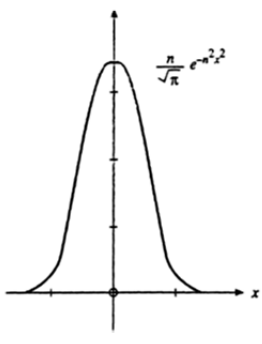
დირაკის δ-ფუნქცია შეიძლება განიმარტოს გარკვეული ზღვრული პროცედურის დახმარებით. დაუშვათ, რომ გვაქვს ფუნქციების მიმდევრობა $\delta_n(x)$, სადაც ინდექსი $n \in \mathbb{N}$. ეს ფუნქციები ისეა შერჩეული, რომ სრულდება პირობები:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = 0 \quad \forall\ x \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\, \delta_n(x) = f(0).$$

ამგვარი ფუნქციების მაგალითს წარმოადგენს გაუსის განაწილების ფუნქცია

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} exp(-n^2 x^2) :$$



შევამოწმოთ ამ დებულების სამართლიანობა. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{n}{\sqrt{\pi}} exp(-n^2 x^2) .$$

თუ $f(x) = 1,$ მაშინ გაუსის ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{n}{\sqrt{\pi}} exp(-n^2 x^2) = 1 .$$

როდესაც $n \gg 1$ ინტეგრალი უახლოვდება სიდიდეს

$$\bar{I}_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(0) \frac{n}{\sqrt{\pi}} exp(-n^2 x^2) = f(0).$$

ამასთან,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} exp(-n^2 x^2) = 0 \quad \forall \ x \neq 0 .$$

მაშასადამე, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{n}{\sqrt{\pi}} exp(-n^2 x^2) = f(0) .$$

ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ საინტეგრაციო ფუნქცია $f(x)$ უნდა იყოს კარგი ყოფაქცევის ფუნქცია, ე.ი. იგი არ უნდა ქმნიდეს პრობლემებს x-არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისას.

ამგვარად, დირაკის δ-ფუნქცია შეიძლება განიმარტოს ინტეგრალური ტოლობით

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_n(x) f(x) = f(0) .$$

δ_n-ფუნქციების მოყვანილი განმარტებიდან ვასკვნით, რომ δ-ფუნქცია არის ლუწი ფუნქცია: $\delta(-x) = \delta(x)$.

ამას გარდა, სამართლიანია ტოლობა:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x), \qquad a > 0 .$$

მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა $x' = ax$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(ax) f(x) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x') f\left(\frac{x'}{a}\right) = \frac{1}{a} f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{a} \delta(x) f(x) .$$

ამას გარდა, ვინაიდან

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-c)(x-c)f(x) = (x-c)_{x=c} f(c) = 0\,,$$

შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$(x-c)\cdot\delta(x-c) = 0.$$

δ-ფუნქციის წარმოებული განიმარტება ნაწილობითი ინტეგრების წესის გამოყენებით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta'(x)f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x)f'(x) = -f'(0)\,.$$

ბოლო შედეგი გამომდინარეობს ტოლობიდან:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{d}{dx}\big(\delta(x)f(x)\big) = \delta(\infty)f(\infty) - \delta(-\infty)f(-\infty) =$$

$$= \delta(\infty)[f(\infty) - f(-\infty)] = 0.$$

აქ ჩვენ გავითვალისწინეთ, რომ

$$f(\infty) = f(-\infty) = 0.$$

§12.6. δ-ფუნქციის ელემენტარული თვისებები

δ-ფუნქცია განმარტებულია ინტეგრალური ტოლობით

$$\int_a^b dx'\delta(x-x')f(x') = \begin{cases} f(x) & a < x < b, \\ 0 \quad x < a, & x > b. \end{cases}$$

δ-ფუნქციის ძირითადი თვისებებია:

1. ლუწობა

$$\delta(-x) = \delta(x);$$

2. δ ფუნქციის წარმოებული

$$\int_a^b dx\delta'(x-x')f(x) = \begin{cases} -f'(x') & a < x' < b \\ 0 \quad x' < a, & x' > b \end{cases}$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x);$$

3. δ-ფუნქცია რთული არგუმენტის შემთხვევაში

$$\delta[f(x)] = \sum_a \frac{1}{|f'(x_a)|}\delta(x-x_a); \qquad f(x_a) = 0\,,$$

მაგალითად,

$$\delta(\alpha x)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

$$\delta(x^2-\alpha^2)=\frac{1}{2|\alpha|}[\delta(x-\alpha)+\delta(x+\alpha)]\,;$$

4. ჰევისაიდის (კიბისებური) ფუნქცია განიმარტება ტოლობით

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

ჰევისაიდის ფუნქციის წარმოებული ემთხვევა დირაკის δ-ფუნქციას

$$\theta'(x)=\delta(x).$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}dxf(x)\frac{d\theta}{dx}=[f(x)\theta(x)]_{-\infty}^{+\infty}\ 11-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}dxf'(x)\theta(x)=f(+\infty)-\int_{0}^{+\infty}dxf'(x)=f(+\infty)-[f(+\infty)-f(0)]=f(0)$$

საინტერესოა, რომ ჰევისაიდის ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ინტეგრალი

$$\theta(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\frac{e^{ix\xi}}{\xi-i0^+}.$$

ეს ინტეგრალი გამოითვლება ნაშთთა თეორიის გამოყენებით (იხ. ლექცია 14).

§12.7. დირაკის δ-ფუნქცია $\mathbb{R}^3$ სივრცეში

სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში დირაკის δ-ფუნქცი გამოისახება ინტეგრალით:

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k}\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0).$$

ამ ფუნქციის განმსაზღვრელი თვისებაა ტოლობა

$$\iiint\limits_V d^3\boldsymbol{r}f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\begin{cases}f(\boldsymbol{r}_0) & \boldsymbol{r}_0\in V,\\ 0 & \boldsymbol{r}_0\notin V,\end{cases}$$

რომელიც არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე. მაგალითად, სფერულ პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{\delta(r-r_0)}{r^2}\cdot\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\sin\theta}\delta(\varphi-\varphi_0).$$

§12.8. სასარგებლო ფორმულები

$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k)$	$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} f(x)$
$f(x) = \delta(x)$	$F(k) = 1$
$f(x) = 1$	$F(k) = 2\pi\delta(k)$
$f(x) = e^{-a\|x\|}$	$F(k) = \frac{2a}{a^2 + k^2} \quad (a > 0)$
$f(x) = \frac{2a}{a^2 + x^2}$	$f(k) = 2\pi e^{-a\|k\|}$
$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$F(k) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}k^2}$
$f'(x)$	$ikF(k)$
$xf(x)$	$iF'(k)$
$\int_{-\infty}^{x} du f(u)$	$F(k)/ik$
$f(x-a)$	$e^{-ika}F(k)$
$e^{iax}f(x)$	$F(k-a)$
$f(ax)$	$F\left(\frac{k}{a}\right)/a$
$f(x)^* g(x)$	$F(k)G(k)$

ლექცია 13

§13.1.* დისკრეტული ფურიეს გარდაქმნა

როგორც დავადგინეთ, პერიოდული ფუნქცია, ე.ი. ისეთი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$f(x+L)=f(x),$$

შეიძლება გაიშალოს უსასრულო ფურიეს მწკრივად

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{2\pi}{L}k\cdot x}\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,u_k(x)\,,$$

სადაც ფურიე-კოეფიციენტები

$$c_k=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dx\,e^{-i\frac{2\pi}{L}k\cdot x}f(x).$$

ფუნქციები $u_k(x)$, $k\in\mathbb{Z}$ ქმნიან ორთონორმირებულ ბაზისს L-პერიოდული ფუნქციების წრფივ სივრცეში

$$\int_{-L/2}^{L/2}dx\bar{u}_k(x)u_l(x)=\delta_{kl}\,.$$

L სიგრძის ინტერვალი $\left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]$ დავყოთ a-სიგრძის N თანაბარ მონაკვეთად, ასე რომ,

$$L=Na.$$

სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ N ლუწია. გამოვყოთ წერტილები კოორდინატებით

$$x_n=na,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\left(\frac{N}{2}-1\right),\pm\frac{N}{2}.$$

უწყვეტ პერიოდულ ფუნქციას $f(x)$ შევუსაბამოთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა დისკრეტული სიმრავლე

$$f_n\equiv f(x_n);\quad f_{-N/2}=f_{N/2}.$$

ბოლო ტოლობა გვაძლევს იმის შესაძლებლობას, რომ გავაიგივოთ ინტერვალის კიდურა წერტილები

$$x_{-N/2}\sim x_{N/2}.$$

შემდგომისთვის მოსახერხებელია, შემოვიღოთ ინდექსების სიმრავლე

$$\{N\}=\left\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\left(\frac{N}{2}-1\right),\frac{N}{2}\right\}.$$

დავუბრუნდეთ კრონეკერის სიმბოლოს ინტეგრალურ წარმოდგენას:

$$\delta_{sr} = \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\frac{2\pi}{L}s\cdot x} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L}r\cdot x} \qquad s, r \in \mathbb{Z}\,.$$

ინტეგრალი შევცვალოთ რიმანის ჯამით:

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\frac{2\pi}{L}s\cdot x} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L}r\cdot x} \Longrightarrow \sum_{n=-\left(\frac{N}{2}-1\right)}^{\frac{N}{2}} \frac{a}{L} e^{-i\frac{2\pi}{L}s\cdot na} e^{i\frac{2\pi}{L}r\cdot na} \equiv$$

$$\equiv \sum_{n\in\{N\}} \frac{1}{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}s\cdot n} e^{i\frac{2\pi}{N}r\cdot n} = \frac{1}{N} \sum_{n\in\{N\}} e^{i\frac{2\pi}{N}(r-s)\cdot n}\,.$$

ამგვარად, ვღებულობთ კრონეკერის სიმბოლოს წარმოდგენას შემდეგი ჯამის სახით:

$$\delta_{rs} = \frac{1}{N} \sum_{n\in\{N\}} e^{i\frac{2\pi}{N}(r-s)\cdot n}, \qquad r, s \in \{N\}; \quad r - s \in \{N\}\, mod\, N\,.$$

კრონეკერის სიმბოლოს გამოყენებით შეგვიძლია შევამოწმოთ, რომ სამართლიანია დისკრეტული ფურიეს წარმოდგენა:

$$f_n \equiv f(na) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r\in\{N\}} \tilde{f}_r\, e^{i\frac{2\pi}{N}n\cdot r} = f_{n+N}$$

$$\tilde{f}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m\in\{N\}} f_m\, e^{-i\frac{2\pi}{N}r\cdot m} = \tilde{f}_{r+N}\,.$$

მართლაც,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r\in\{N\}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m\in\{N\}} f_m\, e^{-i\frac{2\pi}{N}r\cdot m} \right) e^{i\frac{2\pi}{N}n\cdot r} = \sum_{m\in\{N\}} f_m \left(\frac{1}{N} \sum_{r\in\{N\}} e^{i\frac{2\pi}{N}(n-m)\cdot r} \right) =$$

$$= \sum_{m\in\{N\}} f_m \delta_{nm} = f_n\,.$$

მოყვანილი ფორმულები, არსებითად, წარმოადგენენ გარდაქმნებს N-ელემენტიან ორ დისკრეტულ სიმრავლეს შორის:

$$f_m \leftrightarrow \tilde{f}_r\,.$$

უფრო ზუსტად, ეს არის წრფივი შებრუნებადი გარდაქმნები, რომლებიც ხორციელდება $N \times N$ უნიტარული მატრიცების დახმარებით:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r\in\{N\}} e^{i\frac{2\pi}{N}n\cdot r} \tilde{f}_r \equiv \sum_r \mathcal{F}_{nr} \tilde{f}_r$$

$$\tilde{f}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m\in\{N\}} f_m\, e^{-i\frac{2\pi}{N}m\cdot r} = \sum_{m\in\{N\}} f_m \mathcal{F}_{rm}{}^* = \sum_{m\in\{N\}} f_m (\mathcal{F}^\dagger)_{mr}\,.$$

გარდაქმნის მატრიცა მოიცემა გამოსახულებით

$$[\mathcal{F}_{nr}] = e^{i\frac{2\pi}{N}n\cdot r}.$$

ვინაიდან საქმე გვაქვს პერიოდულ სიდიდეებთან,

$$f_n = f_{n+N}; \qquad \tilde{f}_{r+N} = \tilde{f}_r$$

ჯამებში საკმარისია შემოვიფარგლოთ სიმრავლით $\{N\}$

$$n \in \{N\}; \quad r \in \{N\}.$$

განვიხილოთ სიდიდე

$$\frac{2\pi}{N} r \cdot n = \frac{2\pi}{Na} r \cdot na = \frac{2\pi}{L} r \cdot na = p_r \cdot x_n.$$

ვინაიდან

$$-\frac{N}{2} < n, r \leq \frac{N}{2},$$

ვღებულობთ, რომ

$$-\frac{\pi}{a} = -\frac{N}{2}\frac{2\pi}{L} < \frac{2\pi}{L} r \leq \frac{2\pi}{L}\frac{N}{2} = \frac{\pi}{a},$$

ე.ი. ტალღური ვექტორის ცვლილების არე განისაზღვრება პირობით

$$-\frac{\pi}{a} < p_r \leq \frac{\pi}{a}.$$

ტალღური ვექტორების სივრცეს ეწოდება იმპულსური სივრცე, ხოლო ინტერვალს

$$\left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$$

ეწოდება ბრილუენის პირველი ზონა. იგი აღინიშნება როგორც $\{G\} \equiv 1BZ$.

ფურიეს გაშლები შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \{G\}} \tilde{f}_k \, e^{ik\cdot na}$$

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \{N\}} f_n \, e^{-ik\cdot na}.$$

ვინაიდან r-ინდექსის ცვლილების ბიჯი $\Delta r = 1$, ტალღური ვექტორის ცვლილების ბიჯი იქნება

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}.$$

შესაბამისად, დიდი L-ისათვის ჯამი შეიძლება შეიცვალოს ინტეგრალით

$$f_n \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \{G\}} \tilde{f}_k \, e^{ik\cdot na} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{L}{2\pi} \sum_{k \in \{G\}} \frac{2\pi}{L} \tilde{f}_k \, e^{ik\cdot na} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \{G\}} \Delta k \left(a\sqrt{N}\tilde{f}_k\right) e^{ik\cdot na} \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dk \, \tilde{f}(k) e^{ik\cdot na}$$

$$\tilde{f}(k) = a\sqrt{N}\tilde{f}_k = \sum_{n\in\{N\}} af_n\, e^{-ik\cdot na}\,.$$

დავაფიქსიროთ ფარდობა $\frac{L}{N} = a$ და განვიხილოთ ზღვარი

$$L \to \infty, N \to \infty.$$

ამგვარ ზღვარს ფიზიკაში თერმოდინამიკული ზღვარი ეწოდება. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს ფურიეს გარდაქმნებს:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dk\, \tilde{f}(k) e^{ik\cdot na} \qquad \tilde{f}(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} af_n\, e^{-ik\cdot na}.$$

კრონეკერისა და დირაკის დელტებისათვის სამართლიანია წარმოდგენები:

$$\delta_{nm} = \frac{a}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dp e^{ip(n-m)a} \qquad \delta(p-p') = \frac{a}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i(p-p')na}\,.$$

გადასვლა დისკრეტული ჯამებიდან ინტეგრალებზე ხორციელდება შესაბამისობის წესების გამოყენებით:

$$k \leftrightarrow \frac{2\pi}{L}r; \quad -\frac{N}{2} < r \le \frac{N}{2}: \;\to\; -\frac{\pi}{a} < k \le \frac{\pi}{a}$$

$$\sum_{r\in\{N\}} \to \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk\,.$$

§13.2.* ფურიეს გარდაქმნების ძირითადი თვისებები

ჩვენ მივიღეთ ფურიეს გაშლებისა და გარდაქმნების რამდენიმე ვარიანტი:

1. პერიოდული ფუნქცია

$$f(x+L) = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{L}}\tilde{f}_k\, e^{ip_k x}; \quad p_k = \frac{2\pi}{L}k; \; -\infty \le k \le \infty$$

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \;\; e^{ip_k x} f(x)$$

$$\delta_L(x-x') = \frac{1}{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ip_k(x-x')}$$

$$\delta_{mn} = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \;\; e^{i(p_m-p_n)x}\,;$$

2. ზღვარი $L \to \infty$: $\Delta p_k = \frac{2\pi}{L} \to 0$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ip\cdot x} \tilde{f}(p) \qquad \tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip\cdot x} f(x)$$

$$\delta(x - x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{i(x-x')p} \qquad \delta(p - p') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{i(p-p')x} ;$$

3. დისკრეტული კოორდინატები: $L = aN$

$$x_n = an; \qquad f_n = f(x_n)$$

$$n \in \{N\}: \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\left(\frac{N}{2} - 1\right), \frac{N}{2}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r\in\{N\}} e^{i\frac{2\pi}{N}nr} \tilde{f}_r \qquad \tilde{f}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n\in\{N\}} e^{-i\frac{2\pi}{N}nr} f_n$$

$$\delta_{rs} = \frac{1}{N} \sum_{n\in\{N\}} e^{i\frac{2\pi}{N}n(r-s)}$$

$$p_r \in \left(-\frac{\pi}{a}, +\frac{\pi}{a}\right]: \quad \Delta p_r = \frac{2\pi}{L}; \quad \{G\} \equiv 1BZ ;$$

4. თერმოდინამიკური ზღვარი $L \to \infty$, $N \to \infty$: $\frac{L}{N} = a$

$$f_n = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dp}{2\pi} e^{ipna} \tilde{f}(p) \qquad \tilde{f}(p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a e^{-ipna} f_n$$

$$\delta_{mn} = a \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(m-n)a} \qquad \delta(p - p') = \frac{a}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i(p-p')na} .$$

§13.3.* პარსევალის ტოლობები

პარსევალის ტოლობები ანდა პარსევალის იგივეობები გამოიყენება ფუნქციებისგან შედგენილი კვადრატული ფორმების დიაგონალიზაციისათვის ფურიეს გარდაქმნების გამოყენებით.

სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

ა) უწყვეტი შემთხვევა (სასრული ინტერვალი $L < \infty$) პერიოდული ფუნქციებისათვის

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_k e^{i\frac{2\pi}{L}k\cdot x} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_k e^{i\frac{2\pi}{L}k\cdot x}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx [f(x)]^* g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\tilde{f}_k\right]^* \tilde{g}_k ;$$

ბ) უწყვეტი შემთხვევა (უსასრულო ინტერვალი $L \sim \infty$)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{ip\cdot x} \tilde{f}(p) \qquad \tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip\cdot x} f(x)$$

$$[f(x)]^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip\cdot x} \left[\tilde{f}(p)\right]^*;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x)]^* g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \left[\tilde{f}(p)\right]^* \tilde{g}(p).$$

გ) დისკრეტული შემთხვევა

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r\in\{N\}} e^{i\frac{2\pi}{N}nr} \tilde{f}_r , \qquad \tilde{f}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n\in\{N\}} e^{-i\frac{2\pi}{N}nr} f_n$$

$$[f_n]^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r\in\{N\}} e^{i\frac{2\pi}{N}nr} \left[\tilde{f}_{-r}\right]^*$$

$$\sum_{n\in\{N\}} [f_n]^* g_n = \sum_{r\in\{N\}} \left[\tilde{f}_r\right]^* \tilde{g}_r$$

$$\sum_{n\in\{N\}} [f_n]^* g_{n+1} = \sum_{r\in\{N\}} \left[\tilde{f}_r\right]^* g_r \, e^{i\frac{2\pi}{N}nr} .$$

განვიხილოთ მაგალითი: პარსევალის ტოლობის გამოყენების გავრცელებული მაგალითია კვადრატული ფორმის დიაგონალიზაცია. დაუშვათ, რომ გვაქვს არა-დიაგონალური კვადრატული ფორმა (ჰამილტონიანი):

$$H = t_1 \sum_{n\in\{N\}} [f_n]^* f_n + \frac{1}{2} t_2 \sum_{n\in\{N\}} \left([f_n]^* f_{n+1} + [f_{n+1}]^* f_n \right) .$$

პარსევალის ტოლობების გამოყენება გვაძლევს დიაგონალურ ფორმას:

$$H = t_1 \sum_{r\in\{N\}} \left[\tilde{f}_r\right]^* \tilde{f}_r + t_2 \sum_{r\in\{N\}} \left[\tilde{f}_r\right]^* \tilde{f}_r \cos(p_r \cdot a), \qquad p_r = \frac{2\pi}{L} r .$$

ზღვარში $L \to \infty$, $N \to \infty$: $\frac{L}{N} = a$ შეგვიძლია ჩავანაცვლოთ

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} [f_n]^* g_n \to \frac{1}{2\pi a} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dp \tilde{f}(p)^* \, g(p)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} [f_n]^* g_{n+1} \to \frac{1}{2\pi a} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dp \tilde{f}(p)^* \, g(p) e^{ipa}.$$

როგორც შედეგი, ვღებულობთ ჰამილტონიანის ინტეგრალურ წარმოდგენას:

$$H = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dp \ \left[\, t_1 \tilde{f}(p)^* f(p) + t_2 \tilde{f}(p)^* \tilde{f}(p) \cos(pa) \right] .$$

IV. ფურიეს გარდაქმნების გამოყენება გრინის ფუნქციების გამოსათვლელად

ლექცია 14

§14.1. ფურიეს გარდაქმნის გამოყენება დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნისათვის

დაუშვათ, რომ გვაქვს მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$\left[a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2}\right] f(x) = j(x),$$

სადაც $j(x)$ ცნობილი ფუნქციაა. გამოვიყენოთ ფურიეს გარდაქმნები

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-ipx} \tilde{f}(p) \qquad j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-ipx} \tilde{j}(p)$$

და შევიტანოთ დიფერენციალურ განტოლებაში. ვღებულობთ ტოლობას:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-ipx} [a_0 - ia_1 p - a_2 p^2] \tilde{f}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-ipx} \tilde{j}(p)\,.$$

მარჯვენა და მარცხენა მხარის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებების გატოლების შედეგად მივიღებთ ალგებრულ თანაფარდობას:

$$[a_0 - ia_1 p - a_2 p^2] \tilde{f}(p) = \tilde{j}(p).$$

ამ ბოლო განტოლების ამოხსნა არის

$$\tilde{f}(p) = \frac{\tilde{j}(p)}{[a_0 - ia_1 p - a_2 p^2]} + \tilde{f}_0(p)\,,$$

სადაც $\tilde{f}_0(p)$ აკმაყოფილებს ერთგვაროვან განტოლებას

$$[a_0 - ia_1 p - a_2 p^2] \tilde{f}_0(p) = 0.$$

როგორც შედეგი, დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა ჩაიწერება ფურიეს ინტეგრალის სახით:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-ipx} \frac{\tilde{j}(p)}{[a_0 - ia_1 p - a_2 p^2]} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-ipx}\, \tilde{f}_0(p).$$

ამით მოხერხდა დიფერენციალური განტოლების ალგებრაიზაცია და, შესაბამისად, ამოხსნის სირთულემ გადაინაცვლა ინტეგრალების გამოთვლაში.

საილუსტრაციო მაგალითის სახით, განვიხილოთ ჰარმონიული ოსცილატორი, რომელზედაც მოქმედებს დროზე დამოკიდებული გარეშე ძალა $f(t)$. მოძრაობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega^2 q(t) = f(t) \equiv \frac{1}{m}F(t)\,.$$

კოორდინატისა და გარეშე ძალისათვის გამოვიყენოთ ფურიე-წარმოდგენები

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iEt} \tilde{q}(E) \qquad\qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iEt} \tilde{f}(E),$$

სადაც ფურიე-სახეები განისაზღვრება შებრუნებული ფურიეს გარდაქმნებით

$$\tilde{q}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-iEt} q(t) \qquad\qquad \tilde{f}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-iEt} f(t).$$

შევიტანოთ ფურიეს გაშლები დინამიკურ განტოლებაში, სადაც გაწარმოებას ექვემდებარება ექსპონენტი e^{iEt}. როგორც შედეგი, მივიღებთ ინტეგრალურ თანაფარდობას:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iEt} (-E^2 + \omega^2)\, \tilde{q}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iEt}\, \tilde{f}(E)\,.$$

მაშასადამე, სამართლიანია განტოლება

$$(E^2 - \omega^2)\tilde{q}(E) = -\tilde{f}(E),$$

საიდანაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\tilde{q}(E) = -\frac{\tilde{f}(E)}{E^2 - \omega^2} + \tilde{q}_0(E)\,.$$

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, ფუნქცია $\tilde{q}_0(E)$ აკმაყოფილებს ერთგვაროვან განტოლებას

$$(E^2 - \omega^2)\tilde{q}_0(E) = 0.$$

გავიხსნოთ დირაკის δ-ფუნქციის თვისება:

$$(x - c)\delta(x - c) = 0.$$

ე.ი. თავისუფალი განტოლების ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\tilde{q}_0(E) = [a(E)\delta(E^2 - \omega^2)],$$

სადაც $a(E)$ არის რაიმე გლუვი ფუნქცია. ამგვარად, არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნის ფურიე-სახე არის ფუნქცია

$$\tilde{q}(E) = -\frac{\tilde{f}(E)}{(E^2 - \omega^2)} + a(E)\delta(E^2 - \omega^2)\,.$$

ეს შედეგი შეესაბამება იმ ფაქტს, რომ წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი წარმოადგენს ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი ამოცანის კერძო ამონახსნის ჯამს.

გავიხსენოთ, რომ რთული არგუმენტის მქონე δ-ფუნქციისათვის სამართლიანია თანაფარდობა

$$\delta[g(E)] = \sum_{\alpha} \frac{1}{|g'(E_\alpha)|} \delta(E - E_\alpha)\,,$$

სადაც E_α წარმოადგენს $g(E) = 0$ განტოლების ამონახსნს. ჩვენს შემთხვევაში, $g(E) = E^2 - \omega^2$ და, შესაბამისად, $E_\alpha = \pm\omega$. მაშასადამე,

$$\delta(E^2 - \omega^2) = \frac{1}{2\omega}[\delta(E - \omega) + \delta(E + \omega)]$$

და, როგორც შედეგი,

$$\tilde{q}(E) = -\frac{\tilde{f}(E)}{(E^2 - \omega^2)} + \frac{1}{2\omega}[a(E)\delta(E - \omega) + a(E)\delta(E + \omega)]$$

და საძიებელი ფუნქციისათვის ვღებულობთ ფურიე-წარმოდგენას

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iEt} \left[-\frac{\tilde{f}(E)}{(E^2 - \omega^2)}\right] + \frac{1}{4\pi\omega}[a(\omega)e^{i\omega t} + a(-\omega)e^{-i\omega t}]\,.$$

როგორც აღვნიშნეთ, მეორე წევრი არის თავისუფალი (ერთგვაროვანი) განტოლების ზოგადი ამონახსნი და შეიცავს ორ ნამდვილ მუდმივას.

პირველი წევრი არის არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი. ამონახსნის ეს ნაწილი ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iEt} \left[-\frac{\tilde{f}(E)}{(E^2 - \omega^2)}\right] = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{iEt}}{(E^2 - \omega^2)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e^{-iEt'} f(t')\right] =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G_{HO}(t - t') f(t'),$$

სადაც განმარტებულია ჰარმონიული ოსცილატორის ამოცანის გრინის ფუნქციის ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$G_{HO}(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE\, \frac{e^{iE(t - t')}}{E^2 - \omega^2}\,.$$

ეს გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right] G_{HO}(t - t') = -\delta(t - t')\,.$$

გრინის ფუნქციის ინტეგრალურ წარმოდგენაში საინტეგრაციო ფუნქციას ნამდვილ ღერძზე განლაგებულ წერტილებში $E = \pm\omega$ აქვს განსაკუთრებულობები. ამის გამო, ჩვეულებერივი აზრით, ეს ინტეგრალი არ არსებობს და შესაბამისი

ფურიეს გარდაქმნაც არ არის განმარტებული. ამიტომ ინტეგრაციის ჩასატარებლად საჭირო ხდება თვით ინტეგრალის განმარტების შეცვლა. ეს შესაძლებელია საინტეგრაციო არის ისეთი ცვლილებით, რომ განსაკუთრებული წერტილები თავიდან იქნეს აცილებული.

§14.2. ნაშთთა თეორემა და კოშის მთავარი მნიშვნელობა

საინტეგრაციო არის ცვლილება შეიძლება განხორციელდეს ინტეგრაციის ჩატარებით კომპლექსურ არეში სათანადოდ შერჩეული კონტურის გამოყენებით. აქ ძირითად როლს ასრულებს ნაშთთა თეორემა.

დაუშვათ, რომ კომპლექსურ სიბრტყეში გვაქვს დადებითად ორიენტირებული ჩაკეტილი კონტური C. კონტურის დადებითი ორიენტაცია ნიშნავს, რომ კონტურის გასწვრივ მოძრაობისას კონტურით შემოსაზღვრული არე რჩება ხელმარცხნივ.

განვიხილოთ კომპლექსური ცვლადის მერომორფული ფუნქცია $f(z)$, რომელსაც C-კონტურის შიგნით აქვს იზოლირებული განსაკუთრებული წერტილების (პოლუსების) სასრული რაოდენობა. აღვნიშნოთ ეს წერტილები როგორც $z_1, z_2, \dots, z_m$. მაშინ სამართლიანია

ნაშთთა თეორემა: ინტეგრალი ჩაკეტილ კონტურზე C

$$\oint_C dz\ f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res\ [f(z_k)]\,,$$

სადაც $Res\,[f(z_k)]$ არის $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი კომპლექსური სიბრტყის წერტილში z_k. თუ ფუნქციას საინტეგრაციო კონტურის შიგნით განთავსებულ წერტილში z_k აქვს m-ური რიგის პოლუსი, მაშინ

$$Res[f(z_k)] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_k)^m f(z)]$$

განვიხილოთ შემდეგი ტიპის ინტეგრალი:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{f(x)}{x-x_0}.$$

შემოვიყვანოთ კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია $f(z)$, ასე რომ ნამდვილ ღერძზე

$$f(z)|_{Im\,z=0} = f(x).$$

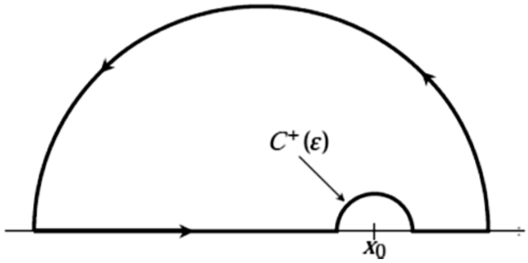
ნაშთთა თეორემის გამოყენება შესაძლებელია მაშინ, როდესაც ფუნქცია $f(z)$ საკმაოდ სწრაფად კლებულობს კოპლექსური სიბრტყის ან ზედა, ან ქვედა ნახევარსიბრტყეში, ე.ი. როდესაც

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0 \qquad |z| \to \infty \ , \quad Im\, z > 0$$

ან

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0 \quad |z| \to \infty \ , \quad Im\, z < 0.$$

თავდაპირველად შემოვიფარგლოთ ზედა ნახევარსიბრტყის შემთხვევით. განვიხილოთ შემდეგი სახის ჩაკეტილი კონტური γ^+ :



სიმბოლოთი $C^+(\varepsilon)$ აღნიშნულია ზედა ნახევარსიბრტყეში განლაგებული მცირე ε-რადიუსის ნახევარწრეწირი ცენტრით წერტილში x_0. გარე (დიდი) ნახევარწრეწირის რადიუსი მივასწრაფოთ უსასრულობისკენ და ჩავთვალოთ, რომ ამ ნახევარწრეწირზე $f(z)$-ფუნქცია ნულდება.

ინტეგრალი ჩაკეტილ კონტურზე γ^+

$$I_{\gamma^+} = \int_{\gamma^+} dz \frac{f(z)}{z - x_0}$$

შეიძლება დაიყოს ოთხი ინტეგრალის ჯამად

$$I_{\gamma^+} = \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} dx \frac{f(x)}{x - x_0} + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0} + \int_{C^+(\varepsilon)} dz \frac{f(z)}{z - x_0} + \int_{C_R} dz \frac{f(z)}{z - x_0}.$$

ბოლო ინტეგრალი შეესაბამება ინტეგრებას ზედა ნახევარსიბრტყეში განლაგებული დიდი რადიუსის წრეწირის გასწვრივ და ზღვარში $R = |z| \to \infty$ იგი ნულდება.

მცირე ε-რადიუსის კონტურზე $C^+(\varepsilon)$ ჩავსვათ

$$z = x_0 + \varepsilon e^{i\theta} \quad \to \quad dz = d\theta i\varepsilon e^{i\theta} .$$

შესაბამისად, ინტეგრალისათვის გვექნება:

$$\int_{C^+(\varepsilon)} dz \frac{f(z)}{z - x_0} = \int_{\pi}^{0} d\theta i\varepsilon e^{i\theta} \frac{f(x_0 + \varepsilon e^{i\vartheta})}{\varepsilon e^{i\vartheta}} = -i\pi f(x_0) + O(\varepsilon) .$$

ამრიგად, ზღვარში $\varepsilon \to 0$ ამ ინტეგრალის წვლილი არის

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C^+(\varepsilon)} dz \frac{f(z)}{z - x_0} = -i\pi f(x_0) .$$

შემოვიღოთ ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის ($Principal\ Value$) განმარტება:

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{f(x)}{x-x_0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} dx\frac{f(x)}{x-x_0} + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} dx\frac{f(x)}{x-x_0}\right].$$

ამგვარად, ზღვარში $\varepsilon \to 0,\ \ R \to \infty$

$$\int_{\gamma^+} dz\frac{f(z)}{z-x_0} = PV\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{f(x)}{x-x_0} - i\pi f(x_0)\,.$$

სხვა მხრივ, ნაშთთა თეორემის საფუძველზე, ინტეგრალი ჩაკეტილ კონტურზე

$$\int_{\gamma^+} dz\frac{f(z)}{z-x_0} = 2\pi i\sum_n Res\left[\frac{f(z)}{z-x_0}\right]_{z_n}\ ,$$

სადაც z_n ($Im\, z_n > 0$) არის

$$\frac{f(z)}{z-x_0}$$

(ფუნქციის პოლუსები ზედა ნახევარსიბრტყეში წერტილი $z = x_0$ აღარ ეკუთვნის საინტეგრაციო არეს).

მაშასადამე, ვღებულობთ, რომ ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{f(x)}{x-x_0} = 2\pi i\sum_n Res\left[\frac{f(z)}{z-x_0}\right]_{z_n} + i\pi f(x_0)\,,$$

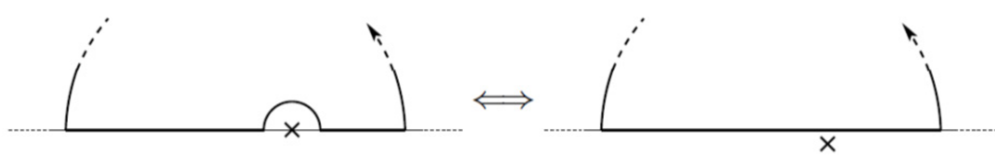
სადაც პოლუსები z_n განლაგებულია ზედა ნახევარსიბრტყეში და მათ შორის არ იგულისხმება წერტილი x_0.

აქედან გამომდინარე, ფორმალურად შეიძლება დავწეროთ:

$$2\pi i\sum_n Res\left[\frac{f(z)}{z-x_0}\right]_{z_n} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{f(x)}{x-x_0+i\epsilon},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ, კონტურის დეფორმაციის ნაცვლად, შეიძლება, განხორციელდეს ინტეგრალქვეშა ფუნქციაში პოლუსის მდებარეობის ცვლილება:

$$x_0 \to x_0 - i\epsilon.$$



ნახაზზე გამოსახულია კონტურის დეფორმაციისა და პოლუსის წანაცვლების სიმბოლური ეკვივალენტობა, გამოთვლების ჩატარების შემდგომ კი, შეიძლება განხორციელდეს გადასვლა ზღვარზე $\epsilon \to 0^+$.

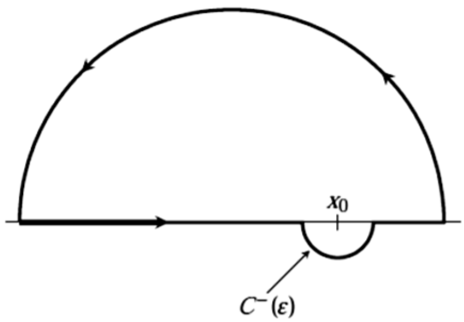
ყოველივე ამის გაერთიანებით მივდივართ დასკვანამდე, რომ ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობის გამოსათვლელად შეიძლება, გამოვიყენოთ ე.წ. სოხოცკი-პლემელის ფორმულა

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 + i\epsilon} + i\pi f(x_0) \,,$$

რომელსაც ხშირად გამოსახავენ ფორმალური ტოლობით:

$$\frac{1}{x - x_0 + i\epsilon} = PV \quad \frac{1}{x - x_0} - i\pi\delta(x - x_0).$$

ასევე დასაშვებია კონტურის ისეთი დეფორმაცია, როდესაც განსაკუთრებული წერტილი $z = x_0$ მოქცეულია კონტურის შიგნით:



ამ შემთხვევაში,

$$\int_{\gamma^-} dz \frac{f(z)}{z - x_0} = \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} dx \frac{f(x)}{x - x_0} + \int_{x_0 - \varepsilon}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0} + \int_{C^-(\varepsilon)} dz \frac{f(z)}{z - x_0} \,,$$

სადაც

$$\int_{C^-(\varepsilon)} dz \frac{f(z)}{z - x_0} = -\int_{\pi}^{0} d\theta i\varepsilon e^{i\theta} \frac{f\left(x_0 + \varepsilon e^{i\vartheta}\right)}{\varepsilon e^{i\vartheta}} = i\pi f(x_0) + O(\varepsilon) \,.$$

ამჯერად პოლუსი x_0 მოქცეულია γ^- ჩაკეტილი კონტურის შიგნით. ინტეგრალი

$$\int_{\gamma^-} dz \frac{f(z)}{z - x_0} = 2\pi i \sum_n Res \left[\frac{f(z)}{z - x_0}\right]_{z_n} + 2\pi i \, Res \left[\frac{f(z)}{z - x_0}\right]_{x_0} =$$

$$= 2\pi i \sum_n Res \left[\frac{f(z)}{z - x_0}\right]_{z_n} + 2\pi i \, f(x_0); \qquad Im \, z_n > 0 \,.$$

მასაშადამე, ვიღებთ იმავე შედეგს:

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0} = 2\pi i \sum_n Res \left[\frac{f(z)}{z - x_0}\right]_{z_n} - i\pi f(x_0); \qquad Im \, z_n > 0 \,.$$

ნახაზზე გამოსახულია პოლუსის ეკვივალენტური წანაცვლება $x_0 \to x_0 + i\epsilon$.

რაც შეეხება სოხოცკი-პლემელის ფორმულას, იგი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0-i\epsilon} = PV \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0} + i\pi f(x_0)\,.$$

ე.ი. სამართლიანია სიმბოლური ტოლობა:

$$\frac{1}{x-x_0-i\epsilon} = PV \quad \frac{1}{x-x_0} + i\pi\delta(x-x_0).$$

მიღებული ფორმალური ტოლობები ცნობილია, როგორც

სოხოცკი-პლემელის განზოგადებული ფორმულა

$$PV \quad \frac{1}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0 \pm i\epsilon} \pm i\pi\delta(x-x_0).$$

ამ ფორმულის შინაარსი მდგომარეობს შემდეგში: მოცემული გვაქვს არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0},$$

რომელსაც შეგვიძლია, მივანიჭოთ აზრი მთავარი მნიშვნელობის შინაარსით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0} \to PV \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0 \pm i\epsilon} \pm i\pi f(x_0)\,.$$

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0+i\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x-x_0-i\epsilon} - 2i\pi f(x_0)\,.$$

როგორც შემდეგი მაგალითი, განვიხილოთ კომპლექსური ცვლადის გამოყენება ფურიეს ტიპის ინტეგრალების გამოთვლისას.

დაუშვათ, რომ გვაქვს ინტეგრალი

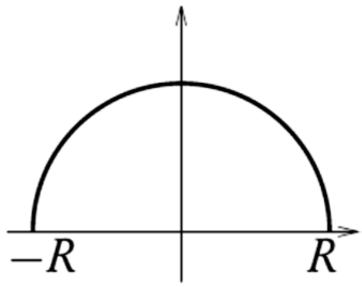
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f(x) \qquad k \in \mathbb{R}\,.$$

განვმარტოთ დამხმარე ინტეგრალი

$$I_{\Gamma_+} = \int_{\Gamma_+} dz e^{ikz} f(z)\,,$$

სადაც ჩაკეტილი კონტური Γ_+ შედგება ნამდვილი ღერძის ინტერვალისაგან $[-R, R]$ და ზედა ნახევარსიბრტყეში განლაგებული რკალისაგან

$$C^+ = \{Re^{i\theta}; \quad \theta \in [0, \pi]\}$$



განვიხილოთ ინტეგრალქვეშა ექსპონენტის

$$e^{ikz} = e^{-k\, Imz} e^{ik\, Re\, z}$$

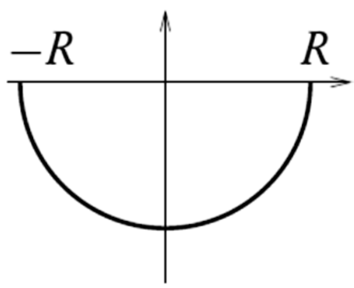
ყოფაქცევა. როდესაც $k > 0$, მაშინ რკალზე C^+

$$\lim_{|z|\to\infty} e^{ikz} = 0.$$

ამიტომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f(x) = \int_{\Gamma_-} dz e^{ikz} f(z) \qquad k < 0\,.$$

თუ $k < 0$, ინტეგრება ხორციელდება კონტურზე Γ_-



და, შესაბამისად,

$$\int_{\Gamma_\pm} dz e^{ikz} f(z) = \pm 2\pi i \sum_a Res\, [e^{ikz} f(z)]_{z=z_a}\,.$$

რაც შეეხება ინტეგრალებს ჩაკეტილ კონტურზე, შეგვიძლია, მათ გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ნაშთთა თეორემა

$$\int_{\Gamma_\pm} dz e^{ikz} f(z) = \pm 2\pi i \sum_a Res\, [e^{ikz} f(z)]_{z=z_a}\,,$$

სადაც z_a არის საინტეგრაციო ფუნქციის პოლუსები Γ-კონტურის შიგნით ($\pm$ ნიშნები განპირობებულია კონტურების ორიენტაციით).

ამგვარი სახის მსჯელობა ეყრდნობა ე.წ. ჟორდანის ლემას, რომლის თანახმადაც, გარკვეულ პირობებში დიდ რკალზე ინტეგრების წვლილი ნულდება.

როგორც მნიშვნელოვანი მაგალითი, განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I_- = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x - a + i\varepsilon}.$$

თუ $k > 0$, კონტური უნდა შევკრათ ზედა ნახევარსიბრტყეში და რადგანაც პოლუსი $a - i\varepsilon$ განლაგებულია ქვედა ნახევარსიბრტყეში – $I_- = 0$.

როდესაც $k < 0$, კონტური უნდა შეიკრას ქვედა ნახევარსიბრტყეში და, შესაბამისად,

$$I_- = -2\pi i e^{ik(a - i\varepsilon)}.$$

ამგვარად, ვღებულობთ ჰევისაიდის ფუნქციის ინტეგრალურ წარმოდგენას:

$$I_- = -2\pi i e^{ika}\theta(-k).$$

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც პოლუსი განლაგებულია ზედა ნახევარსიბრტყის წერტილში $z = a + i\varepsilon$. შესაბამისი ინტეგრალი არის

$$I_+ = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x - a - i\varepsilon} = 2\pi i e^{ika}\theta(k).$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ ფორმულები, როლებსაც გამოვიყენებთ გარკვეული ტიპის გრინის ფუნქციების გამოთვლისას. ეს ფორმულებია:

$$I_- = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x - a + i\varepsilon} = -2\pi i e^{ika}\theta(-k);$$

$$I_+ = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x - a - i\varepsilon} = 2\pi i e^{ika}\theta(k).$$

შევადგინოთ ბოლო ორი ინტეგრალის ჯამი და სხვაობა:

$$I_+ + I_- = 2\pi i e^{ika}[\theta(k) - \theta(-k)] \equiv 2\pi i e^{ika}\varepsilon(k);$$

$$I_+ - I_- = 2\pi i e^{ika}[\theta(k) + \theta(-k)] = 2\pi i e^{ika}.$$

ამასთან, ნახევარსხვაობა

$$\frac{1}{2}[I_+ - I_-] = PV \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x - a} = \pi i e^{ika}$$

წარმოადგენს ინტეგრალის მთავარ მნიშვნელობას.

§14.3. გრინის ფუნქცია სითბოგამტარობის (დიფუზიის) განტოლებისათვის $1D$ შემთხვევაში

განვიხილოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{\partial T(t,x)}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2} = 0\,.$$

ჩავთვალოთ, რომ საძიებელი ფუნქცია $T(t,x)$ წარმოადგენს ტემპერატურას დროის t მომენტსა და სივრცის x წერტილში. განტოლება ამოვხსნათ ფურიეს გარდაქმნის მეთოდის გამოყენებით.

განვიხილოთ არაერთგვაროვანი ამოცანის გრინის ფუნქცია

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(t,x) = \delta(t)\delta(x).$$

ამოვწეროთ გრინის ფუნქციის ფურიე-წარმოდგენა

$$G(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{ik_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{G}\,(k_0,k).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\delta(t)\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{ik_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\,,$$

მივიღებთ, რომ გრინის ფუნქციის ფურიე-სახე აკმაყოფილებს ალგებრულ განტოლებას

$$(ik_0 + \nu k^2)\tilde{G}(k_0,k) = 1.$$

მაშასადამე,

$$G(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 e^{ik_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{ik_0 + \nu k^2}\,.$$

თავაპირველად გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = -i \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{ik_0 t}}{k_0 - i\nu k^2}\,.$$

ჩავთვალოთ, რომ $t > 0$. მაშინ

$$I = I_\Gamma = -i \oint dz \frac{e^{izt}}{z - i\nu k^2} = 2\pi e^{-\nu k^2 t}\,,$$

სადაც ჩაკეტილი კონტური Γ შედგება ნამდვილი ღერძისა და კომპლექსურ ზედა ნახევარსიბრტყეში განლაგებული ნახევარწრეწირისაგან.

ამგვარად, ვღებულობთ

$$G(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\, e^{-\nu k^2 t}\,.$$

ინტეგრალქვეშა ექსპონენტის მაჩვენებელი შევავსოთ სრულ კვადრატამდე

$$-\nu^2tk^2 + ixk = -\nu^2t\left(k - i\frac{x}{2\nu^2t}\right)^2 - \frac{x^2}{4\nu^2t}$$

და შემოვიღოთ ცვლადი

$$p = k - i\frac{x}{2\nu^2t}.$$

მარტივი გამოთვლების ჩატარების შედეგად მივიღებთ

დიფუზიის განტოლების გრინის ფუნქციას

$$G(t,x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\nu^2t}}}{(4\pi\nu^2t)^{\frac{1}{2}}}.$$

§15.1. გრინის ფუნქციის გამოთვლა: ჰარმონიული ოსცილატორი

ჰარმონიული ოსცილატორის გრინის ფუნქციისათვის მიღებული გვაქვს ფორმალური გამოსახულება

$$G_{HO}(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{e^{iET}}{E^2-\omega^2} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dE e^{iET}\tilde{G}_{HO}(E)\,; \qquad T \equiv t - t'.$$

ეს ინტეგრალი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$G_{HO}(T) = \frac{1}{4\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{e^{iET}}{E-\omega} - \frac{1}{4\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{e^{iET}}{E+\omega}.$$

წერტილებში $E = \pm\omega$ ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას აქვს პოლუსის ტიპის სინგულარობები. სინგულარობების თავიდან აცილების მიზნით, განვმარტოთ ორი ტიპის გრინის ფუნქცია:

$$G^{(ret)}(T) = \frac{1}{4\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{e^{iET}}{E-\omega-i\varepsilon} - \frac{1}{4\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{e^{iET}}{E+\omega-i\varepsilon}$$

და

$$G^{(adv)}(T) = \frac{1}{4\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{e^{iET}}{E-\omega+i\varepsilon} - \frac{1}{4\pi\omega}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{e^{iET}}{E+\omega+i\varepsilon}.$$

აღვნიშნოთ, რომ ამგვარად შერჩეული გრინის ფუნქციები წარმოადგენენ ნამდვილ სიდიდეებს.

გამოვიყენოთ **§**14.2.-ში გამოთვლილი ინტეგრალები:

$$I_- = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{e^{ikx}}{x-a+i\varepsilon} = -2\pi i e^{ika}\theta(-k)$$

$$I_+ = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{e^{ikx}}{x-a-i\varepsilon} = 2\pi i e^{ika}\theta(k).$$

მარტივი გარდაქმნების ჩატარების შემდეგ მივიღებთ გრინის ორ არატრივიალურ ფუნქციას. ეს ფუნქციებია:

ა) დაგვიანებული ($Retarded$) გრინის ფუნქცია

$$G^{(ret)}(T) = -\frac{1}{\omega}\sin\omega T\cdot\theta(T);$$

ბ) წინმსწრები ($Advanced$) გრინის ფუნქცია

$$G^{(adv)}(T) = \frac{1}{\omega}\sin\omega T\cdot\theta(-T).$$

გრინის ამ ორი ფუნქციის სხვაობა

$$G^{Ret}(T) - G^{Adv}(T) = -\frac{\theta(T)+\theta(-T)}{\omega}\sin\omega T = -\frac{1}{\omega}\sin\omega T = G_0(T)$$

აკმაყოფილებს ერთგვაროვან განტოლებას

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right]G_0(t-t') = 0\,.$$

არაერთგვაროვანი ამოცანის დაგვიანებული ამოხსნა არის

$$q_{ret}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, G^{Ret}(t-t')f(t') = -\int\limits_{-\infty}^{t} dt'\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-t')f(t')\,.$$

როგორც ვხედავთ, ამ გამოსახულებაში წვლილი შეაქვს გარეშე ძალას დროის ინტერვალში $(-\infty, t)$, სრული ამოხსნა კი იქნება

$$q_f(t) = q_0(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} dt'\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-t')f(t')\,.$$

§15.2 ფურიეს გარდაქმნა 3D სივრცეში

ჩვენ აქამდე ვიხილავდით ერთგანზომილებიან ფურიეს გარდაქმნებს. განზოგადება $\mathbb{R}^N$ სივრცისათვის არ წარმოადგენს რაიმე სირთულეს. მაგალითისათვის, ასე გამოიყურება სკალარული ფუნქციის სამგანზომილებიანი ფურიეს გარდაქმნა:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^3} d^3p e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\tilde{f}(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} dp_1dp_2dp_3\, e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\tilde{f}(\boldsymbol{p})$$

$$\tilde{f}(\boldsymbol{p}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}) \equiv \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1dx_2dx_3\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}).$$

აქ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} = p_i x_i$ სკალარული ნამრავლია, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ – კოორდინატული სივრცის რადიუს-ვექტორი, ხოლო $\boldsymbol{p}\in\widetilde{\mathbb{R}}^3$ ეკუთვნის შესაბამის იმპულსურ სივრცეს.

განვიხილოთ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ ვექტორული ველის ფურიეს გარდაქმნა. გარდაქმნას ექვემდებარება ველის ყველა კომპონენტი

$$\tilde{A}_i(\boldsymbol{p}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}A_i(\boldsymbol{x})\,,$$

რაც კომპაქტურად ასე ჩაიწერება:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{p}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\,.$$

$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{p})$ წარმოადგენს იმპულსურ სივრცეში განმარტებულ ვექტორული ველს. შევადგინოთ ვექტორული ველი

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}^L(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{p})}{|\boldsymbol{p}|^2}\cdot\boldsymbol{p}\,.$$

ამ ველის ფურიე-სახეს ეწოდება ვექტორული ველის გრძივი მდგენელი

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^3} d^3p e^{\boldsymbol{ip\cdot x}}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}^L(\boldsymbol{p})\,.$$

იმავე ვექტორული ველის განივი მდგენელი წარმოადგენს სხვაობას

$$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{x}).$$

გამოვიყენოთ ფურიეს გარდაქმნა

$$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^3} d^3p e^{\boldsymbol{ip\cdot x}}\left[\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{p}) - \widetilde{\boldsymbol{A}}^L(\boldsymbol{p})\right] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}^3} d^3p e^{\boldsymbol{ip\cdot x}}\,\widetilde{\boldsymbol{A}}^T(\boldsymbol{p})\,.$$

კომპონენტური ჩაწერა მოგვცემს:

$$\tilde{A}_k^T(\boldsymbol{p}) = \tilde{A}_k(\boldsymbol{p}) - \frac{\boldsymbol{p}\cdot\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{p})}{|\boldsymbol{p}|^2}p_k = \left[\delta_{kl} - \frac{p_k p_l}{|\boldsymbol{p}|^2}\right]\tilde{A}_l(\boldsymbol{p})\,.$$

ვინაიდან

$$p_k\tilde{A}_k^T(\boldsymbol{p}) = 0\,,$$

ვექტორული ველის განივი კომპონენტის დივერგენცია ნულის ტოლია

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{x}) = 0.$$

ეს ფაქტი ფართოდ გამოიყენება ელექტროდინამიკაში.

§15.3. გრინის ფუნქციის გამოთვლა: პუასონის განტოლება

$3D$ ევკლიდურ სივრცეში განვიხილოთ განტოლება

$$(\Delta - m^2)G(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}).$$

გამოვიყენოთ ფურიეს გარდაქმნები:

$$G(\boldsymbol{x}) = \int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{\boldsymbol{ikr}}\tilde{G}(\boldsymbol{k})$$

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{\boldsymbol{ikr}}\,.$$

ვღებულობთ განტოლებას

$$\int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{\boldsymbol{ikr}}(-\boldsymbol{k}^2 - m^2)\tilde{G}(\boldsymbol{k}) = \int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{\boldsymbol{ikr}}\,,$$

საიდანაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\tilde{G}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$$

და, შესაბამისად,

$$G(\boldsymbol{x}) = -\int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{ikr}}{\boldsymbol{k}^2 + m^2}.$$

იმპულსურ სივრცეში შემოვიღოთ პოლარული სფერული კოორდინატები $(k \equiv \sqrt{\boldsymbol{k}^2}, \vartheta, \varphi)$, ასე რომ $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = kr\cos\vartheta$. მაშინ

$$G(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dk\, k^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \frac{e^{ikr\cos\vartheta}}{k^2 + m^2}.$$

გამოვიყენოთ აღნიშვნა $z = \cos\vartheta \ \rightarrow dz = -\sin\vartheta\, d\vartheta$,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta\, e^{ikr\cos\vartheta} = 2\pi \int_{-1}^{1} dz\, e^{ikrz} \frac{1}{ikr}[e^{ikr} - e^{-ikr}]$$

$$G(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dk\, k^2 \frac{1}{k^2 + m^2} \frac{1}{ikr}[e^{ikr} - e^{-ikr}]$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, k \frac{1}{k^2 + m^2} e^{ikr}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{\frac{1}{k + im} + \frac{1}{k - im}\right\} e^{ikr}.$$

ინტეგრება ჩავატაროთ კომპლექსურ k სიბრტყეში. რადგანაც $r > 0$, კონტური უნდა ჩაიკეტოს ზედა ნახევარსიბრტყეში. მაშინ წვლილს იძლევა პოლუსი $k = im$. როგორც შედეგს, მივიღებთ

გრინის ფუნქციას პუასონის განტოლებისათვის

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \frac{1}{2} 2\pi i e^{-mr} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}.$$

ამგვარი გრინის ფუნქციის დახმარებით, შეგვიძლია, ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$(\Delta - m^2)\varphi(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}'\, G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int d\boldsymbol{r}' \frac{e^{-m|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \rho(\boldsymbol{r}').$$

სივრცის რაიმე $\boldsymbol{r}_0$ წერტილში ლოკალიზებული წერტილოვანი მუხტის შემთხვევაში, მუხტის სიმკვრივე

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

და შესაბამისი პოტენციალი

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{4\pi} \frac{e^{-m|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$$

ცნობილია იუკავას პოტენციალის სახელით.

ზღვარში, როდესაც $m \to 0$, ვღებულობთ პოტენციალს

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{r}'\,\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\rho(\boldsymbol{r}')\,.$$

წერტილოვანი q-მუხტის შემთხვევაში

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

მივიღებთ კულონის პოტენციალს

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\,.$$

§15.4.* გრინის ფუნქცია ტალღური განტოლებისათვის

განვიხილოთ ტალღური განტოლება

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi(t,\boldsymbol{r})}{\partial t^2}+\Delta\varphi(t,\boldsymbol{r})\right) = \rho(t,\boldsymbol{r}).$$

აქ t დროითი ცვლადია, ხოლო $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{x}$-სივრცული. შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $x_0 = ct$. ამგვარად, გვაქვს ოთხგანზომილებიანი სივრცე კოორდინატებით $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. შეგვიძლია, ამ ოთხი კოორდინატის ფუნქციებისათვის ვიხმაროთ გამარტივებული აღნიშვნა

$$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(x).$$

როგორც ვიცით, კოორდინატები x_μ აღწერენ მინკოვსკის სივრცეს. ამ სივრცეში ორი 4-ვექტორის სკალარული ნამრავლი მოიცემა ფორმულით

$$A\cdot B = -A_0B_0 + A_iB_i \equiv A_\mu B_\mu;\quad \mu = 0,1,2,3;\ \ i = 1,2,3\quad .$$

კერძო წარმოებულებისათვის გამოვიყენოთ აღნიშვნები

$$\nabla_0 = -\frac{\partial}{\partial x_0}\qquad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\ .$$

მაშინ ტალღური განტოლება მიიღებს სახეს

$$\nabla_\mu\nabla_\mu\varphi(x) = \rho(x).$$

ტალღური განტოლების გრინის ფუნქცია განიმარტება ტოლობით

$$\nabla_\mu\nabla_\mu G(x-x') = \delta^{(4)}(x-x'),$$

სადაც

$$\delta^{(4)}(x-x') = \delta(x_0-x'_0)\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \delta(x_0-x'_0)\delta(x_1-x'_1)\delta(x_2-x'_2)\delta(x_3-x'_3).$$

ტალღური განტოლების ზოგადი ამოხსნა მოიცემა გამოსახულებით

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \int dyG(x-x')\rho(x')\,,$$

სადაც $\varphi_0(x)$ არის ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი.

გრინის ფუნქცია წარმოვადგინოთ ოთხგანზომილებიანი ფურიეს ინტეგრალის დახმარებით

$$G(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-x')}\tilde{G}(k)\,,$$

სადაც

$$k\cdot(x-x') = k_\nu(x-x')_\nu = -k_0(x-x')_0 + k_i(x-x')_i$$

$$\tilde{G}(k) = \tilde{G}(k_0,\boldsymbol{k}).$$

რადგანაც

$$\nabla_\mu\nabla_\mu G(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-x')}\left(-k_\mu k_\mu\right)\tilde{G}(k)$$

და

$$\delta^{(4)}(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-x')},$$

ვღებულობთ ალგებრულ განტოლებას:

$$[k_0^2 - \boldsymbol{k}^2]\tilde{G}(k) = 1.$$

ბოლო განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\tilde{G}(k_0,\boldsymbol{k}) = \frac{1}{k_0^2 - \boldsymbol{k}^2}\,.$$

ამგვარად, შეიძლება, გრინის ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი ინტეგრალის სახით:

$$G(x-x') = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}dk_0}{(2\pi)^4} e^{ik_0(x-x')_0 - i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\frac{1}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2} = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\int \frac{dk_0}{2\pi}\frac{e^{ik_0(x-x')_0}}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2}\,.$$

ინტეგრალი

$$G(\tau;\boldsymbol{k}^2) = \int \frac{dk_0}{2\pi}\frac{e^{ik_0(x-x')_0}}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2}\,, \qquad \tau = (x-x')_0$$

ემთხვევა ჰარმონიული ოსცილატორის გრინის ფუნქციას

$$G_{HO}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi}\frac{e^{iET}}{E^2-\omega^2}$$

$$(T \leftrightarrow (x-x')_0 = \tau,\ E \leftrightarrow k_0,\ \omega^2 \leftrightarrow \boldsymbol{k}^2)\,.$$

ისევე, როგორც ოსცილატორის შემთხვევაში, ახლაც შეგვიძლია ინტეგრაცია ჩავატაროთ კომპლექსურ სიბრტყეში.

პოლუსების შემოვლის წესის არჩევის მიხედვით, ვღებულობთ შემდეგი ტიპის პასუხებს:

$$G^{(Adv)}(\tau;\boldsymbol{k}^2) = \int \frac{dk_0}{2\pi}\frac{e^{ik_0(x-x')_0}}{(k_0+i\epsilon)-\boldsymbol{k}^2} = \frac{\theta(-\tau)}{|\boldsymbol{k}|}\sin(|\boldsymbol{k}|\tau)$$

და

$$G^{(Ret)}(\tau;\boldsymbol{k}^2)=\int\frac{dk_0}{2\pi}\frac{e^{ik_0(x-x')_0}}{(k_0-i\epsilon)-\boldsymbol{k}^2}=-\frac{\theta(\tau)}{|\boldsymbol{k}|}\sin(|\boldsymbol{k}|\tau)\,.$$

განვიხილოთ რეტარდირებული (დაგვიანებული) გრინის ფუნქცია:

$$G^{Ret}(x-x')=-\theta(x_0-x'_0)\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\frac{\sin(|\boldsymbol{k}|\tau)}{|\boldsymbol{k}|}.$$

$\boldsymbol{k}$-სივრცეში შემოვიღოთ სფერული კოორდინატები

$$k_1=k\sin\vartheta\cos\varphi;\quad k_2=k\sin\vartheta\sin\varphi\,;\quad k_3=k\cos\vartheta,$$

ასე რომ, $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=kr\cos\vartheta;\quad r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}'|$. მაშინ ინტეგრალი

$$I(\tau)=\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\frac{\sin|\boldsymbol{k}|\tau}{|\boldsymbol{k}|}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk k^2\int_0^\pi d\vartheta\sin\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi e^{-ikr\cos\vartheta}\frac{\sin k\tau}{k}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\,k\sin k\tau\int_{-1}^{1}d\xi e^{-ikr\xi}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\,k\sin k\tau\frac{1}{ikr}[e^{-ikr}-e^{ikr}]=$$

$$=-\frac{2}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty dk\ \sin(k\tau)\sin(kr)=-\frac{1}{(2\pi)^2r}\int_0^\infty dk[\cos(k\tau-kr)-\cos(k\tau+kr)]\,.$$

ვინაიდან

$$\int_0^\infty dk\cos kX=-\int_0^{-\infty}dk\cos kX=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}dk[e^{ikX}+e^{-ikX}]=\pi\delta(X)\,,$$

ვღებულობთ

$$I(\tau)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}[\delta(\tau-r)-\delta(\tau+r)]\,.$$

ამგვარად, ტალღური განტოლების დაგვიანებულ გრინის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$G^{Ret}(x-x')=\theta(\tau)\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}[\delta(\tau-r)-\delta(\tau+r)].$$

რადგანაც $r>0$, ნამრავლი

$$\theta(\tau)\delta(\tau+r)=0\qquad\tau=x_0-x'_0=c(t-t').$$

ამით ჩვენ მივიღეთ:

ტალღური განტოლების დაგვიანებული გრინის ფუნქცია

$$G^{Ret}(x-x')=\frac{1}{4\pi}\frac{\theta(t-t')\delta[c(t-t')-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$

და არაერთგვაროვანი ამოცანის დაგვიანებული ამოხსნა

$$\varphi^{Ret}(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{t} dt' \int d\boldsymbol{x}' \frac{\delta[c(t-t') - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|]}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\rho(t', \boldsymbol{x}') =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int d\boldsymbol{x}' \frac{\rho\left(t - \frac{1}{c}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|, \boldsymbol{x}'\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}.$$

ამოხსნას $\varphi^{Ret}(x)$ ელექტროდინამიკაში ეწოდება ლიენარ-ვიხერტის პოტენციალი. ანალოგიურად გამოითვლება წინმსწრები ამოხსნაც.

გამომცემლობის რედაქტორი მარიკა ერქომაიშვილი
კომპ. უზრუნველყოფა ლალი კურდღელაშვილი
გარეკანის დიზაინერი ნინო ებრალიძე

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel: 995(32) 225 14 32
www.press.tsu.edu.ge