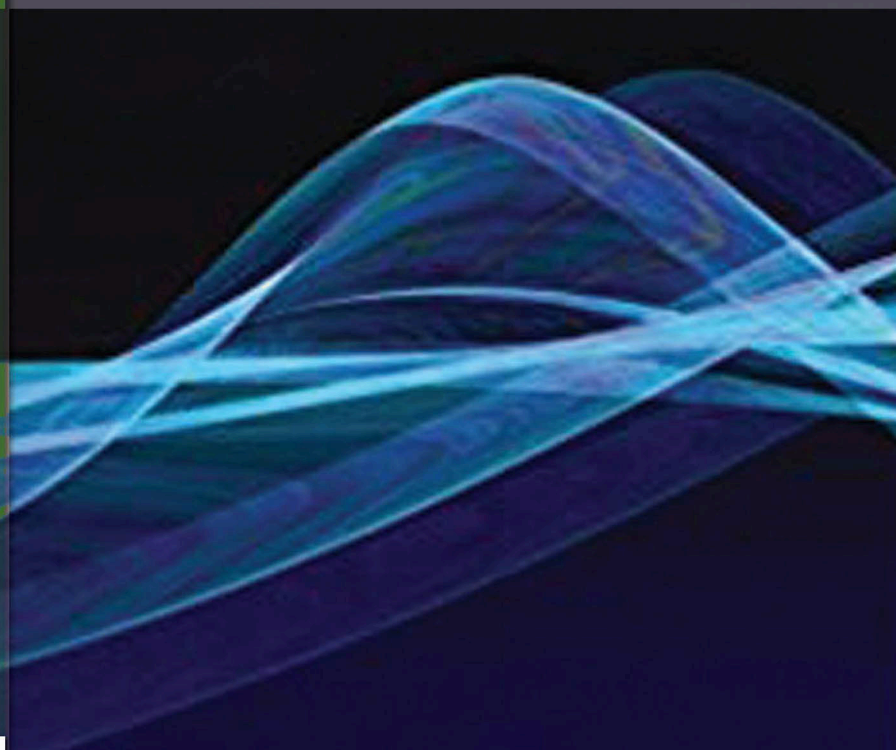
გია გიორგაძე

დიფერენციალური განტოლებები



სალექციო კურსების ელექტრონული ბიბლიოთეკა

დიფერენციალური განტოლებები

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტი

გია გიორგაძე

დიფერენციალური განტოლებები

ფიზიკის მიმართულების სტუდენტებისათვის

უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

კურსი გათვალისწინებულია ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მესამე სემესტრის ფიზიკის მიმართულების ბაკალავრებისათვის და შეიცავს დიფერენციალური განტოლებების (რაც გულისხმობს ჩვეულებრივ და კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებს) პროგრამით გათვალისწინებულ ყველა საკითხს. სისრულისათვის კურსში ასევე შესულია რამდენიმე საკითხი (მათ შორის ინტეგრალური განტოლებები), რომელიც არაა სილაბუსში ასახული; ამოხსნილია თითქმის ყველა ტიპიური ამოცანა და მოცემულია სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. სავარჯიშოები ძირითადი ტექსტის განუყოფელი ნაწილია, რომლებიც შემდგომ გამოყენებულია. დიფერენციალური განტოლებების თეორიის ფუნდამენტური და ძირითადი ფაქტები მოყვანილია თეორემებისა და დებულებების სახით, რომლებიც ზოგჯერ დამტკიცებული არ არის, რადგან ვერცერთი მოცულობის კურსი მათ სრულად ვერ დაიტევს. ამ ნაპრალს ავსებს სავარჯიშოები. პირველი თავის ბოლოს მოცემულია დამატებითი ამოცანები, რომლითაც ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ძირითადი საკითხები ამოწურულია. ასეთი სავარჯიშოების მოყვანისაგან კურსის მეორე და მესამე ნაწილების ბოლოს თავი შევიკავეთ, რადგან ჩავთვალეთ, რომ იმავე მიზნის მიღწევა შეუძლებელი იქნებოდა. არ გვინდოდა, რომ ამოცანები მხოლოდ შრომატევად სავარჯიშოებად დარჩენილიყო. ამის საკომპენსაციოდ დამატებაში მოვიყვანეთ კომპიუტერული ალგებრის სისტემა Maple-ზე რეალიზებული ტიპიური ამოცანების ამოხსნები. ისინი შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს კურსში მოცემული ყველა სავარჯიშოსათვის, რასაც მიმართავს კიდეც ზოგიერთი საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოს ავტორი.

კურსის შედგენისას მაქსიმალურად ვცდილობდით, რომ მასალა დაძლევადი ყოფილიყო თხუთმეტ სალექციო საათში ყველა დონის სტუდენტისათვის, რაც მარტივად გადასაწყვეტი საკითხი არ აღმოჩნდა.

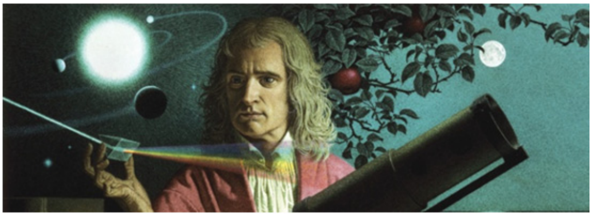
რედაქტორი თამაზ თადუმაძე – ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი, პროფესორი

რეცენზენტები: რომან კოპლატაძე – ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი, პროფესორი
ილია თავხელიძე – ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი, პროფესორი
დაზმირ შულაია – ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი, პროფესორი

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადაწყვეტილებით.

ISBN 978-9941-13-844-7 (pdf)

სარჩევი



ისააკ ნიუტონი (1643 – 1727)

გოტფრიდ ლაიბნიცი
(1646 – 1716)

დანიელ ბერნული
(1700 – 1782)

ლეონარდ ეილერი
(1707-1783)

ოგიუსტენ ლუი კოში
(1789-1857)

ჟოზეფ ლიუვილი
(1809 – 1882)

ანრი პუანკარე
(1854-1912)

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების თეორიის წარმოშობის დრო თითქმის ემთხვევა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის აღმოჩენის პერიოდს ისააკ ნიუტონის (1643-1727) და გოტფრიდ ლაიბნიცის (1646-1716) მიერ. მე-18 საუკუნის დასაწყისის ეს ორი უდიდესი მოაზროვნე, საუკეთესო ევროპულ, მაგრამ განსხვავებულ საგანმანათლებლო ტრადიციებზე გაზრდილი მეცნიერები, ერთმანეთის დამოუკიდებლად მივიდნენ ,,უსასრულოდ მცირეთა" აღრიცხვის (კალკულუსის) კანონიზაციამდე, რაც თავის თავში აერთიანებდა მათემატიკური სიმკაცრის და მისი კონტრასტული – განუყოფელის, უსუსრულოდ მცირე სიდიდის პარადიგმებს. მათ მიერ შექმნილმა აღრიცხვამ საუკუნეებს გაუძლო, ხოლო მათ მიერ შემოღებული ტერმინები: *ინტეგრალი, წარმოებული, დიფერენციალი,* მათი აღნიშვნები, დიფერენციალისა და ინტეგრალის თვისებები დღევანდელი მათემატიკის ფუნდამენტური ცნებები და თეორემებია.

დიფერენციალური განტოლებების თანამედროვე თეორიის საფუძვლები ლეონარდ ეილერისაგან იღებს სათავეს. მან პირველმა გამოიკვლია მუდმივკოეფიციენტებიანი მაღალი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის მეთოდი მახასიათებელი განტოლების საშუალებით, შემოიტანა ინტეგრალური მამრავლი და ა.შ., თუმცა ლაიბნიცის მოსწავლემ, დანიელ ბერნულიმ უკვე იცოდა პირველი რიგის საკმაოდ ზოგადი სახის განტოლებების ამოხსნის გზები. გარდა ამისა, დიფერენციალური განტოლებების თეორიაში, ეილერის ნაშრომამდე, ალგებრულ წირებს დეკარტე სპეციალური სახის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნით იკვლევდა. გალილეი, ნეპერი, ტორიჩელი, ფერმა, ჰიუგენსი აგრეთვე იყენებდნენ დიფერენციალურ განტოლებებს და უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს არაცხადი სახით – დაფუძნების გარეშე, მექანიკის და მათემატიკის სხვადასხვა ამოცანის ანალიზის დროს. მას შემდეგ, რაც რიცხვითი მიმდევრობების და მწკრივების კრებადობა დააფუძნა ფრანგმა მათემატიკოსმა კოშიმ, დიფერენციალური განტოლებები გახდა მათემატიკის და ფიზიკური პროცესების აღწერის ადეკვატური ენა და ასეა დღემდე. მე-19 საუკუნის დასაწყისიდან, მთელი საუკუნის განმავლობაში დიფერენციალური განტოლებები იყო თითქმის ყველა მათემატიკოსის კვლევის საგანი. იმ სახით, რა სახითაც დიფერენციალური განტოლებები, როგორც მათემატიკის დამოუკიდებელი დარგი, დღეს არსებობს, მრავალი მათემატიკოსის, ფიზიკოსის და ინჟინრის კვლევის შედეგია.

ცოდნის დაგროვებასთან ერთად, ფართოვდება დიფერენციალური განტოლებების გამოყენების არეალი მეცნიერების სხვადასხვა დარგში, რაც იწვევს ახალი ტიპის დიფერენციალური განტოლებების წარმოშობას ან განტოლების ამონახსნთა სივრცის სხვადასხვა ასპექტის გამოვლენის აუცილებლობას. არსებობს აგრეთვე ამოუხსნელი ამოცანების, პრობლემების ნუსხა, რომლებზეც სრული პასუხი მომიჯნავე დარგებში იწვევს გარკვეულ პროგრესს.

წინამდებარე კურსის პირველი ნაწილი ამ ფართო და სწრაფად განვითარებადი მეცნიერების შესავალია.

ნაწილი I

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

შესავალი

განმარტებები და მაგალითები

ელემენტარული *დიფერენციალური განტოლების* მაგალითია ისეთი ფუნქციის პოვნის ამოცანა, რომლის წარმოებული მოცემული ცნობილი ფუნქციაა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამოცანა მდგომარეობს ისეთი $x(t)$ ფუნქციის პოვნაში, რომლის წარმოებული მოცემული $a(t)$ ფუნქციაა: $x'(t) = a(t)$. ეს ამოცანა, როგორც ანალიზის კურსიდან ვიცით, იხსნება ცნობილი $a(t)$ ფუნქციიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალის აღებით: $x(t) = \int a(t)dt$, ანუ ჩვენი ამოცანის ამონახსნი, ე.ი. საძიებელი ფუნქციაა, $a(t)$-ს პირველყოფილი ფუნქცია (რომელიც მუდმივის სიზუსტით განისაზღვრება). შემდეგი ელემენტარული დიფერენციალური განტოლების მაგალითია ისეთი $x(t)$ ფუნქციის პოვნა, რომლის წარმოებული თვით ეს ფუნქციაა: $x'(t) = x(t)$. ანალიზიდან ცნობილია, რომ ფუნქცია, რომელიც გაწარმოების შედეგად არ იცვლება (ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ფუნქცია ინვარიანტულია გაწარმოების მიმართ), არის ექსპონენციალური ფუნქცია, ანუ, უნდა ველოდოთ, რომ დასმული ამოცანის ამონახსნია $x(t) = e^t$ ფუნქცია. ეს მართლაც ასეა! ამაში უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით. მაგრამ ისიც ნათელია, რომ $x(t) = ce^t$ ფუნქციაც აკმაყოფილებს $x'(t) = x(t)$ დიფერენციალურ განტოლებას, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. ამ განტოლების კონტექსტში ჩნდება შემდეგი კითხვაც: ამოვწურეთ თუ არა ce^t ფუნქციით $x'(t) = x(t)$ განტოლების ყველა ამონახსნი? ამ კითხვას პასუხი გაეცემა მოგვიანებით, რადგან მიღებული ცოდნიდან მასზე პასუხი არ გვაქვს, ისევე, როგორც ინტუიცია ვერ გვიკარნახებს $x'(t) = 2x(t)$ დიფერენციალური განტოლების ყველა ამონახსნს.

საყოველთაოდ მიღებულია, რომ ბუნების მრავალი მოვლენის შესწავლისათვის ეფექტურია ამ მოვლენის მათემატიკური მოდელის აგება და მისი გამოკვლევა. ხშირად ვერ ხერხდება განსახილველი პროცესის დინამიკური პარამეტრების ცხადად ერთმანეთთან დაკავშირება. ფუნქციონალური დამოკიდებულების მიღება კი უმრავლეს შემთხვევაში შესაძლებელია. თუმცა გამოსაკ-

ვლევი პროცესის აღმწერი ფუნქცია შესაძლებელია მიღებულ გამოსახულებაში შედიოდეს მის წარმოებულებთან ერთად. უხეშად რომ ვთქვათ, მიღებული გამოსახულება დიფერენციალური განტოლებაა. ამ კონტექსტში დიფერენციალური განტოლების ელემენტარული მაგალითია მატერიალური წერტილის მოძრაობის კანონი. თუ $S(t)$ მატერიალური წერტილის მიერ დროის t ინტერვალში გავლილი საძიებელი გზაა, ხოლო $v(t)$ კი ცნობილი სიჩქარეა დროის t მომენტისათვის, მაშინ მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dS(t)}{dt} = v(t), \tag{1}$$

ანუ $S^{/}(t) = v(t)$. ანალიზის კურსიდან ცნობილია, რომ, როდესაც $v(t)$, $t \geq 0$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციაა, (1) განტოლების ყველა ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$S(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + C, \tag{2}$$

სადაც C ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია. მაგალითად, თუ მატერიალური წერტილის სიჩქარისა და დროის დამოკიდებულება წრფივი ფუნქციაა, ე.ი. თუ $v(t) = at + b$, სადაც a, b ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ (2)-ის თანახმად:

$$S(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + C. \tag{3}$$

მარტივი დიფერენციალური განტოლებით აღიწერება აგრეთვე ბიოლოგიური უჯრედის ფუნქციონირების დარღვევა დიდი ინტენსივობის ულტრაბგერის ზემოქმედებით:

$$\frac{dN(t)}{dt} = -RN(t), \tag{4}$$

სადაც t, ისევე როგორც ზედა მაგალითში, დროს აღნიშნავს, $N(t)$ არის ცოცხალი უჯრედების კონცენტრაცია და სწორედ ამ ფუნქციის პოვნა გვაინტერესებს. (4) განტოლებაში R მუდმივაა, რომელიც დროის ერთეულში უჯრედის ფუნქციონირების დარღვევის ალბათობას განსაზღვრავს. თუკი (1) განტოლებიდან უცნობი $S(t)$ ფუნქციის საპოვნელად ანალიზის თეორემის გამოყენება იყო საკმარისი, (4) განტოლების ამოხსნას თავისი მეთოდი სჭირდება. ამ მეთოდს ცოტა მოგვიანებით განვიხილავთ, მანამდე კი პირდაპირ დავწერთ შედეგს:

$$N(t) = Ce^{-Rt}, \tag{5}$$

სადაც C კვლავ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. (5) გამოსახულებით მოცემული $N(t)$ ფუნქცია რომ მართლაც არის (4) განტოლების ამონახსნი, ამაში უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით!

დიფერენციალური განტოლების კიდევ ერთ მაგალითს მივიღებთ, თუ განვიხილავთ ზამბარაზე დაკიდებული წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოყვანილი ბურთულას დინამიკის განტოლებას. თუ წონასწორობის მდგომარეობიდან ბურთულას გადახრას დროის t მომენტისათვის აღვნიშნავთ $x(t)$-თი და გამოვიყენებთ ნიუტონის მეორე კანონს, ბურთულას მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0, \tag{6}$$

სადაც $\omega > 0$ რაიმე მოცემული პარამეტრია. (1) განტოლების ანალოგიურად, (6) განტოლებაც შეიძლება ჩაიწეროს მისი ეკვივალენტური $x^{//}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ ფორმით.

(6) სახის დიფერენციალურ განტოლებას *ჰარმონიული რხევის* ანუ *წრფივი ოსცილატორის* განტოლება ეწოდება. სულ მალე ჩვენ ვნახავთ, რომ მისი ამონახსნი არის:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

ფუნქცია, სადაც A და φ ნებისმიერი მუდმივებია.

გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ, თავიანთი შინაარსით, სხვადასხვა ფიზიკური ამოცანა აღიწერება ერთი და იმავე დიფერენციალური განტოლებებით. ბუნებაში მიმდინარე პროცესის აღსაწერად დიფერენციალური განტოლების გამოყენების შესაძლებლობა ხელსაყრელია იმ თვალსაზრისით, რომ ეს განტოლებები აღწერენ დროში პროცესის ევოლუციას.

თუ დიფერენციალურ განტოლებაში უცნობი ფუნქცია არის ერთი ცვლადის, მაშინ განტოლებას *ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება, ხოლო თუ დიფერენციალურ განტოლებაში შემავალი ფუნქცია ორი ან ორზე მეტი ცვლადისაა, მაშინ განტოლებას *კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება.

თუ t დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო $y = y(t)$ კი – უცნობი ფუნქცია, მაშინ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, საზოგადოდ, შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0\,, \qquad (8)$$

სადაც F თავისი არგუმენტების რაიმე მოცემული ფუნქციაა. სხვა სიტყვებით, F გამოხატავს იმ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას, რომელიც არსებობს დამოუკიდებელ t ცვლადს, $y = y(t)$ ფუნქციასა და მის წარმოებულებს შორის. (8) გამოსახულებაში შემავალ y-ის უდიდეს წარმოებულს ეწოდება *დიფერენციალური განტოლების რიგი.* მაგალითად, ზემოთ მოყვანილი (1) და (4) განტოლებები პირველი რიგისაა, (6) განტოლება კი მე-2 რიგის, ხოლო (8) გამოსახულებით მოცემული დიფერენციალური განტოლება არის n-ური რიგის.

(8) დიფერენციალური განტოლების *ამონახსნი* ეწოდება ისეთ $y(t)$ ფუნქციას, რომლის F ფუნქციაში ჩასმით (8) გამოსახულება იგივეობად გადაიქცევა. $y(t)$ ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება (8) განტოლების *ინტეგრალური წირი.* მომდევნო პარაგრაფებში (8) სახით ჩაწერილი განტოლება სხვადასხვა კონტექსტში შეგვხვდება. მაგალითად, იგი შეიძლება იყოს „ამოხსნილი" $y(t)$-ს უმაღლესი წარმოებულის მიმართ, მაშინ წერენ:

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})\,.$$

ამგვარ დიფერენციალურ განტოლებას *ნორმალური* ეწოდება.

ვნახავთ, რომ F ფუნქციის თვისებებზე (წრფივობა, უწყვეტობა და სხვა) მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული (8) განტოლების ამონახსნის არსებობა და ამოხსნის მეთოდები. ამ პრობლემებს ეძღვნება წიგნის პირველი თავი.

აღნიშვნების შესახებ

როგორც ვთქვით, დიფერენციალური განტოლება შეიცავს უცნობ ფუნქციას და მის წარმოებულს (ან წარმოებულებს). უცნობი ფუნქციის აღსანიშნავად გამოვიყენებთ ნებისმიერ დასაშვებ სიმბოლოებს $x, y, z, f, g, \ldots$ და ა.შ. ჩანაწერში ვიგულისხმებთ, რომ ეს ფუნქციები „თავიანთი არგუმენტის" – დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციებია. ეს დამოუკიდებელი ცვლადები, კონტექსტიდან გამომდინარე, შეიძლება იყვნენ $t, x, y, z, \ldots$ და ა.შ. ამასთან, ზოგჯერ ცხადად არ მივუთითებთ ცვლადს, თუ ეს ორაზროვნებას არ იწვევს. მაგალითად:

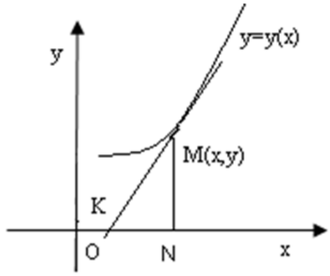
$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big),\ x' = f(t, x),\ \dot{x} = f(t, x), \ldots$$

ერთმანეთის ეკვივალენტური ჩანაწერებია. ყველა მათგანი არის პირველი რიგის ნორმალური განტოლება, სადაც x არის t დამოუკიდებელი ცვლადის უცნობი ფუნქცია. ანალოგიურ აღნიშვნას გამოვიყენებთ n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლებების ჩასაწერად. ასევე, დიფერენციალური განტოლება უცნობის სახით შეიძლება შეიცავდეს ფუნქციას, რომელიც x სიმბოლოთია აღნიშნული, ამასთან, სხვა განტოლებაში x შესაძლებელია შეგვხვდეს როგორც დამოუკიდებელი ცვლადი, საძიებელი ფუნქცია კი იყოს აღნიშნული სხვა, მაგალითად, f სიმბოლოთი. აღნიშვნათა ამ მრავალნაირობას შეგნებულად ვირჩევთ, რითაც ყურადღება გვინდა გავამახვილოთ ცალკეული დიფერენციალური განტოლების შინაარსობრივ მხარეზე. დიფერენციალური განტოლება, როგორც „ჩანაწერი“, გარკვეული შინაარსის მატარებელია მასში შემავალი უცნობი ფუნქციით, მისი წარმოებულით (წარმოებულებით) და დამოუკიდებელი ცვლადით.

ნატურალური, მთელი, რაციონალური, ნამდვილი და კომპლექსური რიცხვებისათვის ყოველთვის ვიხმართ მათთვის საყოველთაოდ მიღებულ აღნიშვნებს: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ და $\mathbf{C}$. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის აღსანიშნავად გამოვიყენებთ აგრეთვე $\mathbf{R}^1$-ს, საჭიროების შემთხვევაში ამით ხაზს გავუსვამთ იმ გარემოებას, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე არის ერთგანზომილებიანი ვექტორული სივრცე.

გეომეტრიული ამოცანები, რომლებიც დიფერენციალურ განტოლებებზე დაიყვანებიან

1. დაწერეთ ისეთი წირების განტოლება, რომლის ნებისმიერი მხები აბსცისთა ღერძს კვეთს წერტილში, რომლის აბსცისა ორჯერ ნაკლებია შეხების წერტილის აბსცისაზე.



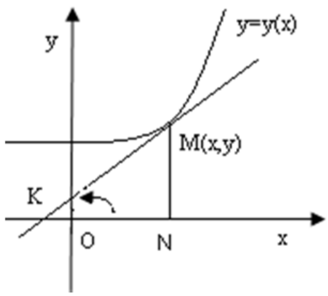
ნახ. 1

დავუშვათ საძიებელი წირია $y(x)$. ნახაზ 1-ზე მოცემული სამკუთხედი OMN მართკუთხაა, სადაც $MN = y$ და $tg\angle MKN = y'$, ამასთან, ამოცანის პირობის თანახმად, $|OK| = \frac{1}{2}|ON|$, რაც ნიშნავს, რომ ON მონაკვეთისათვის K წერტილი შუა წერტილია და $|KN| = \frac{1}{2}|ON| = \frac{x}{2}$. მეორე მხრივ, OMN მართკუთხა სამკუთხედიდან $|KN| = \frac{|MN|}{tg\angle MKN} = \frac{y}{y'}$. ამ ორი უკანასკნელი გამოსახულების გატოლებით მივიღებთ:

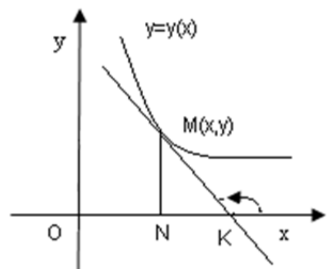
$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \Rightarrow xy' = 2y. \qquad (1)$$

მიღებული გამოსახულება შეიცავს საძიებელ ფუნქციას თავის წარმოებულთან ერთად.

2. იპოვეთ წირები, რომლებისთვისაც სამკუთხედის ფართობი, რომელიც მიიღება ამ წირების მხებით, შეხების წერტილის ორდინატით და აბსცისთა ღერძით მუდმივია და a^2-ის ტოლია.



ნახ. 2 ($y' > 0$)



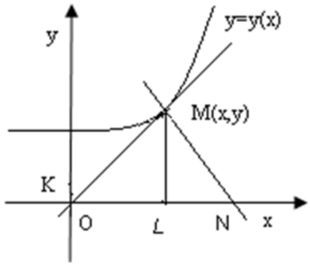
ნახ. 3 ($y' < 0$)

როგორც მე-2 ნახაზიდან ჩანს, მიღებული სამკუთხედის ფართობი ტოლია $S = \frac{1}{2}|KN|y$. რადგან $tg\angle MKO = y'$ და $\frac{y}{|KN|} = tg\angle MKO$, ამიტომ $S = \frac{y^2}{2y'}$, როდესაც $y' > 0$. ამრიგად, ვიღებთ:

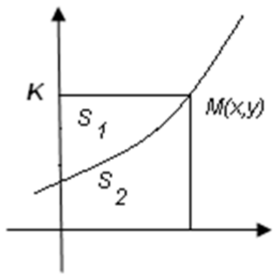
$$\frac{y^2}{2} = a^2 y'. \qquad (2)$$

ანალოგიურ განტოლებას მივიღებთ, როდესაც $y' < 0$. კერძოდ, განტოლებას ექნება სახე: $\frac{y^2}{2} = -a^2 y'$. იხილეთ ნახაზი 3.

3. იპოვეთ წირები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს: აბსცისთა ღერძის მონაკვეთის სიგრძე, რომელსაც წირის ნებისმიერი წერტილიდან გავლებული მხები და ნორმალი მოკვეთს x ღერძს, $2a$-ს ტოლია, ამასთან, ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხები კოორდინატთა სათავეში გადის.



ნახ. 4



ნახ. 5

ნახაზ 4-დან ჩანს, რომ $\frac{|ML|}{|KL|} = tg\angle MKL$ და $\frac{|ML|}{|LN|} = tg\angle MNL$. რადგან KMN სამკუთხედი მართკუთხაა, ამიტომ $tg\angle MNL = tg\left(\frac{\pi}{2} - \angle MKL\right) =$ $= ctg\angle MKL = \frac{1}{y'}$. ამასთან, $|KL| = \frac{y}{y'}$ და $|LN| = yy'$. ამოცანის პირობის თანახმად, $|KL| + |LN| = 2a$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{y}{y'} + yy' = 2a. \qquad (3)$$

მიღებული გამოსახულებიდან თუ შევძლებთ ვიპოვოთ y როგორც x-ის ფუნქცია, მივიღებთ საძიებელი წირების განტოლებას.

4. იპოვეთ შემდეგი თვისების მქონე წირები: თუ საძიებელი წირის ნებისმიერი წერტილიდან გავავლებთ საკოორდინატო ღერძების პარალელურ წრფეებს ღერძების გადაკვეთამდე, მიღებული მართკუთხედის ფართობს წირი გაყოფს შეფარდებით 1:2.

ინტეგრალის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის თანახმად, $S_2 = \int_0^x y(t)dt$ (იხილეთ ნახ. 5), ამასთან, $S_1 + S_2 = xy$ და ამოცანის პირობის თანახმად, $S_2 = 2S_1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $S_2 = \frac{2}{3}xy = \int_0^x y(t)dt$ ანუ $\frac{2}{3}xy =$ $= \int_0^x y(t)dt$. ამ გამოსახულების x-ით გაწარმოების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{2}{3}(xy' + y) = y(x). \qquad (4)$$

(1), (2), (3) და (4) განტოლებებში ჩვენი ინტერესის საგანია $y(x)$ ფუნქცია, რომელიც აღწერს საძიებელ წირებს. ეს განტოლებები $y(x)$ ფუნქციის გარდა შეიცავენ აგრეთვე მის წარმოებულ ფუნქციებსაც. ასეთი ტიპის განტოლებებს ეწოდებათ *დიფერენციალური განტოლებები*. მომდევნო თავებში მოვახდენთ დიფერენციალური განტოლებების კლასიფიკაციას და შევისწავლით მათი ამოხსნის მეთოდებს.

1. ძირითადი ფუნქციონალური სივრცეები

1.1. მეტრიკული, ნორმირებული და ბანახის სივრცე

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, ჩვეულებრივ, გარკვეულ ფუნქციათა კლასში იძებნება. განტოლების ამოხსნის სტრატეგია განისაზღვრება იმის შესაბამისად, თუ რა თვისებების მქონე ამონახსნი გვაინტერესებს. ამის გამო აუცილებელია ვიცოდეთ სხვადასხვა კლასის ფუნქციების სიმრავლეთა ანალიზური, ალგებრული და გეომეტრიული თვისებები. ფუნქციათა სიმრავლეს, რომელშიც რაიმე ალგებრული სტრუქტურაა განსაზღვრული, ვუწოდოთ *ფუნქციონალური სივრცე*. ამ ტერმინით ხაზს ვუსვამთ იმ გარემოებას, რომ სიმრავლის ელემენტები ფუნქციებია.

დავუშვათ, M ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა. მისი ელემენტები აღვნიშნოთ $x, y, z, \dots$ სიმბოლოებით და ვუწოდოთ მათ წერტილები იმის მიუხედავად, რა ბუნების არიან ისინი: ფუნქციები, ვექტორები თუ რიცხვები. ამ სიმრავლეს ეწოდება *მეტრიკული სივრცე*, თუ ნებისმიერ (x, y) წყვილს შეესაბამება ნამდვილი $\rho(x, y)$ რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს (აქსიომებს):

1) $\rho(x, x) = 0$ და $\rho(x, y) > 0$, თუ $x \neq y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (სიმეტრიულობა);
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (სამკუთხედის აქსიომა).

ამრიგად, გვაქვს ზემოთ მოყვანილი 1)-3) პირობების დამაკმაყოფილებელი $\rho: M \times M \to [0, \infty[$ ასახვა (ფუნქცია), რომელიც M სიმრავლეს აღჭურავს დამატებითი თვისებით და აქცევს მას მეტრიკულ სივრცედ. ρ ასახვას ეწოდება *მეტრიკა*. M სიმრავლეში შესაძლებელია არსებობდეს რამდენიმე სხვადასხვა მეტრიკა. იმის აღსანიშნავად, რომ M მეტრიკული სიმრავლეა ρ მეტრიკით, იხმარება აღნიშვნა (M, ρ). თუ საჭირო არ არის ცხადად მივუთითოთ, რომელ მეტრიკაზეა ლაპარაკი, მაშინ, ჩვეულებრივ, ამბობენ, რომ მოცემულია მეტრიკული სივრცე

1. $\rho(x, y) = |x - y|$ ფუნქცია ნამდვილ რიცხვთა ღერძს აქცევს მეტრიკულ სივრცედ. იმის საილუსტრაციოდ, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული ფუნქცია მართლაც არის მეტრიკა, საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ ρ 1)-3) პირობებს აკმაყოფილებს. 1) და 2) ცხადია. 3) პირობა კი ნიშნავს, რომ, როგორი z რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა ღერძიდან, უნდა შესრულდეს

$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ უტოლობა. ეს მართლაც ასეა, რადგან, თუ z მოთავსებულია x და y შორის, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი უტოლობის სამართლიანობა ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე ამ წერტილების განლაგებიდან გამომდინარეობს, რადგან $|x-y|$ არის მანძილი x და y წერტილებს შორის

2. $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეზე ρ მეტრიკა განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2},$$

სადაც $x=(x_1,x_2)$ და $y=(y_1,y_2)$ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილებია. მეტრიკის 1) და 2) აქსიომები ჩვენ მიერ შემოტანილი მეტრიკისათვის ადვილად მოწმდება. რაც შეეხება 3) პირობას, იგი ნიშნავს, რომ სამკუთხედის ორი გვერდის ჯამი მესამე გვერდზე მეტია. ამის გამო მეტრიკის 3) აქსიომას, საზოგადოდ, *სამკუთხედის აქსიომა* ეწოდება.

3. $\mathbf{R}^n = \{x | x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbf{R}^1\}$-ში მეტრიკა ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურად შემოვიტანოთ:

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}.$$

მეტრიკის 1) და 2) აქსიომების შემოწმება უშუალო ჩასმით შეიძლება, ხოლო, რაც შეეხება 3) პირობას, მის დასამტკიცებლად საჭიროა შევნიშნოთ, რომ $\mathbf{R}^n$-ის ნებისმიერ სამ წერტილზე გაივლება ერთადერთი სიბრტყე – $\mathbf{R}^2$, სადაც სამართლიანია სამკუთხედის აქსიომა.

4. ნამდვილ რიცხვთა $x=(x_1,x_2,\ldots)$ უსასრულო მიმდევრობათა (უსასრულო რაოდენობის კოორდინატების მქონე ვექტორები) სიმრავლიდან, აღვნიშნოთ მიღებული სიმრავლე l_1-ით, გამოვყოთ ისეთები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$l_2 = \{x | \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}.$$

l_2 მეტრიკული სივრცეა

$$\rho(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| < \infty\}$$

მეტრიკით. ეს მეტრიკული სივრცე უსასრულო განზომილებიანია, რადგან ის შეიცავს $(1,0,0,\ldots)$, $(0,1,0,\ldots)$,... სახის წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტების უსასრულო რაოდენობას.

5. $C[a,b]$-თი აღვნიშნოთ ნამდვილ რიცხვთა $[a,b] \subset \mathbf{R}^1$ ინტერვალზე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. ამრიგად, $x(t), y(t), \ldots$ ფუნქციები $C[a,b]$-ს ელემენტებია, თუ ისინი უწყვეტებია $[a,b]$-ზე. მეტრიკა ამ სიმრავლეზე განისაზღვრება თანადობით: $\rho(x,y) = max_{a \le t \le b}|x(t) - y(t)|$. ეს სივრცეც უსასრულო განზომილებიანია, რადგან იგი შეიცავს $t, t^2, t^3, \ldots$სახის ფუნქციების უსასრულო რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელ სიმრავლეს.

ზემოთ მოყვანილ ყველა მაგალითში სიმრავლე, რომელზედაც მეტრიკა განვმარტეთ, ვექტორული სივრცეებია, ანუ ისინი „მდიდარი" ალგებრული სტრუქტურის მქონე სიმრავლეებია; ისინი ჩაკეტილია შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ. თუმცა მეტრიკის განსამარტავად ეს აუცილებელი არ არის. მაგალითად, ნებისმიერ სიმრავლეზე არსებობს ეგრეთ წოდებული „ტრივიალური" მეტრიკა, მაგალითად, ასეთი: $\rho(x,x) = 0$ და $\rho(x,y) = 1$, თუ $x \neq y$. ამიტომ, მეტრიკა ყოველთვის შეგვიძლია სიმრავლეში შემოვიტანოთ. მეორე საკითხია, რამდენად მოსახერხებელი და მოცემული სიმრავლის უნიკალური თვისების გამომხატველია იგი. ზემოთ მოტანილ მეორე მაგალითში მეტრიკა არის მანძილი სიბრტყის ორ წერტილს შორის, რომელიც, როგორც ვიცით, ამ ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძის ტოლია. სიბრტყიდან თუ კოორდინატთა სათავეს ამოვაგდებთ, მიღებული სიმრავლე ვექტორული სივრცე აღარ იქნება. მიუხედავად ამისა, ამ სიმრავლეში იმავე გამოსახულებით მოცემული მეტრიკა კვლავ გვაქვს, მაგრამ მისი ინტერპრეტაცია, როგორც ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძისა, უკვე აღარ შეიძლება, რადგან ნებისმიერ ორ წერტილს, მაგალითად, $x = (1,1)$ და $y = (-1,-1)$-ს, მონაკვეთით ვერ შევაერთებთ.

დავუშვათ, M მეტრიკული სივრცეა. $x_n \in M, n = 1,2, \ldots$ მიმდევრობას ეწოდება *ფუნდამენტური*, თუ $\rho(x_n, y_m) \to 0$, როდესაც $n, m \to \infty$. რიცხვითი მიმდევრობებისათვის (ე.ი. $x_n \in \mathbf{R}^1$), მიმდევრობის კრებადობიდან, ამ მიმდევრობის ფუნდამენტურობის თვისება გამომდინარეობს და სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია. ნებისმიერი მეტრიკული სივრცისათვის ეს ასე არ არის. კერძოდ, კრებადობიდან გამომდინარეობს მიმდევრობის ფუნდამენტურობა, შებრუნებული დებულება კი შესაძლებელია სამართლიანი არ იყოს. თუ $x_n \in M$, ფუნდამენტურია, შესაძლებელია აღმოჩნდეს, რომ $lim_{n \to \infty} x_n = x$ არ ეკუთვნოდეს M. მაგალითად, $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ სიმრავლე (რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $[-1,1]$-დან) მეტრიკული სივრცეა. ადვილად აიგება რაციონალურ რიცხვთა ფუნდამენტური მიმდევრობა $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$-დან, რომელიც ირაციონალური რიცხვისაკენ არის კრებადი.

მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება *სრული*, თუ ნებისმიერ ფუნდამენტურ მიმდევრობას აქვს ზღვარი.

სამართლიანია შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა 1 (ფ. ჰაუსდორფი). *დავუშვათ, M მეტრიკული სივრცეა (არააუცილებლად სრული). მაშინ არსებობს სრული $\overline{M}$ მეტრიკული სივრცე, რომელსაც ეწოდება M-ის გასრულება, ისეთი, რომ $M \subset \overline{M}$ და M ყველგან მკვრივია $\overline{M}$.*

გავიხსენოთ, რომ B სიმრავლის A ქვესიმრავლეს ეწოდება *ყველგან მკვრივი* B-ში, თუ B-ს ნებისმიერი წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს ერთ წერტილს მაინც A-დან. მაგალითად, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არ არის სრული. მისი გასრულება მიიღება ყველა ფუნდამენტური მიმდევრობის ზღვრის მიკუთვნებით ახალი, გასრულებული სიმრავლისათვის. ეს სიმრავლე კი ნამდვილ რიცხვთა სივრცეა.

L არაცარიელ სიმრავლეს ეწოდება *წრფივი სივრცე* ან *ვექტორული სივრცე*, თუ იგი ჩაკეტილია შეკრების და „გარე გამრავლების" ოპერაციების მიმართ. ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ორი $x, y \in L$ ელემენტისათვის $x+y$ აგრეთვე L-ის ელემენტია და $\lambda x \in L$, სადაც λ ნებისმიერი ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვია. ამასთან, შეკრების ოპერაცია უნდა აკმაყოფილებდეს კომუტაციორობის – $x+y=y+x$ და ასოციაციურობის – $(x+y)+z=$ $=x+(y+z)$ პირობებს, ნებისმიერი $x, y, z \in L$ ელემენტებისათვის. თუ გამრავლების λx ოპერაცია განმარტებულია λ ნამდვილი რიცხვისათვის, მაშინ ამბობენ, რომ L ვექტორული სივრცეა $\mathbf{R}^1$ ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, ხოლო, თუ λ კომპლექსური რიცხვია, მაშინ L წრფივ სივრცეს ეწოდება ვექტორული სივრცე $\mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ.

წრფივი სივრცის მოყვანილი განმარტებიდან გამოდის, რომ იგი აუცილებლად შეიცავს 0-ოვან ელემენტს და ნებისმიერი არანულოვანი $x \in L$ არსებობს მის მოპირდაპირე ელემენტ L-ში, რომელიც, ჩვეულებრივ, $-x$-ით აღინიშნება.

წრფივი სივრცის მაგალითია $\mathbf{R}^n$. კერძო შემთხვევებში, როდესაც $n=1,2,3,$ მიიღება ჩვენთვის კარგად ცნობილი ობიექტები: ნამდვილ რიცხვთა ღერძი, სიბრტყე და სივრცე. წრფივი სივრცეებია აგრეთვე $C[a,b]$ და l_2 მეტრიკული სივრცეები.

L წრფივ სივრცეს ეწოდება ნორმირებული. მის ნებისმიერ $x \in L$ ელემენტს შეესაბამება არაუარყოფითი $\|x\|$ ნამდვილი რიცხვი, რომელსაც ეწოდება x-ის ნორმა და რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს (აქსიომებს):

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \lambda \in \mathbf{R}$; (წრფივობა);

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (სამკუთხედის უტოლობა).

ნორმირებული წრფივი სივრცის მაგალითებია:

1. $L = \mathbf{R}$. ნორმა განიმარტება ფორმულით: $\|x\| = |x|$. მე-3 აქსიომას აქვს სახე: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
2. $\mathrm{L} = \mathbf{R}^n$. ამ შემთხვევაში $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$. მას ევკლიდური ნორმა ეწოდება.
3. $L = C[a, b]$. ამ მეტრიკულ სივრცეში ნორმა განმარტებით არის $\|x\| = max_{a \leq t \leq b}|x(t)|$ სიდიდე.
4. $L = l_2$ სივრცე $\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2}$ ფორმულით განმარტებული ნორმის მიმართ არის ნორმირებული.

მეტრიკულ და ნორმირებულ სივრცეებს (მეტრიკასა და ნორმას შორის თანადობა) შორის კავშირი მოყვანილია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2. *ყოველი წრფივი ნორმირებული სივრცე მეტრიკულია და* $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნორმა ყოველთვის განსაზღვრავს მეტრიკას წრფივ სივრცეში, რის გამოც შესაძლებელია განვიხილოთ ისეთი წრფივი სივრცეები, რომლებსაც სისრულის თვისება გააჩნიათ. სრულ ნორმირებულ სივრცეს ეწოდება *ბანახის* (მისი აღმომჩენის, პოლონელი მათემატიკოსის – სტეფან ბანახის პატივსაცემად) სივრცე. ამრიგად, ბანახის სივრცეში ნებისმიერი ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია.

ფუნქციონალურ სივრცეებში კრებად ფუნქციათა მიმდევრობის მნიშვნელოვანი კლასია *თანაბრად კრებადი ფუნქციათა მიმდევრობები.* მიმედვრობათა ასეთი კლასის გამოყოფა განპირობებულია იმით, რომ, საზოგადოდ, კრებად უწყვეტ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარი არ არის უწყვეტი ფუნქცია.

ფუნქციათა $x_n(t), n = 1,2, \ldots$ მიმდევრობას ეწოდება *თანაბრად კრებადი* $x(t)$ ფუნქციისაკენ, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $N = N(\varepsilon)$ ნატურალური რიცხვი, რომ, როდესაც $n > N$, სრულდება $|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ უტოლობა ნებისმიერი t-სათვის ფუნქციათა განსაზღვრის არედან.

თანაბრად კრებადობის გეომეტრიული აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ, თუ ფუნქციათა მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $x(t)$-საკენ, მაშინ, საკმაოდ დიდი

N-სათვის, ყველა $x_n(t)$ ფუნქციის გრაფიკი საკმაოდ ახლოს იქნება $x(t)$-ს გრაფიკთან ნებისმიერი t-სათვის.

თეორემა 3. *უწყვეტ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარი უწყვეტი ფუნქციაა.*

ამ თეორემიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციის აპროქსიმაცია შესაძლებელია პოლინომებით ან ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით (ან ნებისმიერი ხელსაყრელი უწყვეტ ფუნქციათა თანაბარი მიმდევრობის ზღვარით).

1.2. ოპერატორი და ფუნქციონალი

დავუშვათ, L ბანახის სივრცეა და $A: L \to L$ ნებისმიერი ასახვაა, მოცემული თანადობით $x \mapsto Ax$, ე.ი. L-ის ნებისმიერ ელემენტს შეესაბამება რაიმე $y = Ax$ ელემენტი L-დან. ამ ასახვას ეწოდება ოპერატორი. ამრიგად, ოპერატორი საკმაოდ ზოგადი ცნებაა. იმისათვის, რომ გარკვეულწილად „შინაარსიანი“ და ჩვენი მიზნებისათვის გამოსაყენებელი თეორია მივიღოთ, შემოვიფარგლოთ წრფივი ოპერატორებით. რადგან ბანახის სივრცე წრფივი სივრცეა, ამიტომ x და y ელემენტებთან ერთად L აგრეთვე შეიცავს $x + y$ და λx ელემენტებს. $A: L \to L$ ოპერატორს ეწოდება *წრფივი ოპერატორი*, თუ სრულდება შემდეგი ტოლობები: $A(x + y) = Ax + Ay$ და $A(\lambda x) = \lambda Ax$, ნებისმიერი $x, y \in L$ და ნებისმიერი λ რიცხვისათვის.

წრფივი ოპერატორების მაგალითები

1. $Ax = 0$ ოპერატორი L-ის ნებისმიერ ელემენტს გადაიყვანს 0-ოვან ელემენტში. მას *ნულოვანი ოპერატორი* ეწოდება.
2. $Ax = 1$, ე.ი. L-ის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ერთეულოვანი ელემენტი L-ში. ასეთ ოპერატორს *ერთეულოვანი ოპერატორი* ეწოდება.
3. ნებისმიერი $\mathrm{A}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ წრფივი ოპერატორი არის $n \times n$-კვადრატული მატრიცი და $y = Ax$ ტოლობა წარმოადგენს $\mathbf{R}^n$-ში ვექტორების ტოლობას. Ax ჩანაწერი კი ნიშნავს A მატრიცისა და x ვექტორის ნამრავლს.
4. ვთქვათ, $L = C[a, b]$ უწყვეტ ფუნქციათა ბანახის სივრცეა. განვსაზღვროთ მასზე $A: C[a, b] \to C[a, b]$ ოპერატორი თანადობით:
$$Ax = \int_a^b K(s,t)x(s)ds,$$
სადაც $K(s,t)$ ორი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციაა – $K: [a, b] \times [a, b] \to \mathbf{R}$. მას *ოპერატორის გული* ეწოდება. $\int_a^b K(s,t)x(s)ds$ გამოსახულება წარ-

მოადგენს ორი უწყვეტი ფუნქციის ნამრავლის ინტეგრალს s ცვლადით. შედეგად მიიღება t ცვლადის უწყვეეტი $y(t)$ ფუნქცია: $y(t) = Ax$. განხილული ოპერატორი არის წრფივი. ეს გამომდინარეობს ინტეგრების თვისებიდან.

$\int_a^b K(s,t)x(s)ds$ სახის წრფივ ოპერატორებს *ინტეგრალური ოპერატორი* ეწოდება.

A წრფივი *ოპერატორის ნორმა* აღინიშნება $\|A\|$ სიმბოლოთი და განიმარტება შემდეგი თანადობით: $\|A\| = sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. სუპრემუმის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$, ამ უტოლობიდან კი ვიღებთ $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ შეფასებას. პირიქით, დავუშვათ, ნებისმიერი $x \in L$-სათვის არსებობს C მუდმივი ნამდვილი რიცხვი, რომ სამართლიანია შეფასება $\|Ax\| \leq C\|x\|$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\|A\| = sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C$, ე.ი. $\|A\| \leq C$.

წრფივ ოპერატორს ეწოდება *შემოსაზღვრული*, თუ მას აქვს სასრული ნორმა.

თეორემა 1. *თუ A წრფივი ოპერატორია სასრული ნორმით, მაშინ სამართლიანია $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ უტოლობა. პირიქით, თუ A აკმაყოფილებს $\|Ax\| \leq C\|x\|$ უტოლობას ნებისმიერი $x \in L$-სათვის, მაშინ ეს ოპერატორი შემოსაზღვრულია და $\|A\| \leq C$.*

ოპერატორის ნორმის გამოთვლა

1. ნულოვანი ოპერატორის ნორმა 0-ის ტოლია. მართლაც,

$$Ax = 0 \Longrightarrow \|Ax\| \equiv \|0\| = 0 \Longrightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \equiv \|0\| \Longrightarrow \|A\| = 0.$$

2. ერთეულოვანი ოპერატორის ნორმა ერთის ტოლია:

$$Ex = x \Longrightarrow \|Ex\| \equiv \|x\| = 0 \Longrightarrow \frac{\|Ex\|}{\|x\|} \equiv 1 \Longrightarrow \|E\| = 1.$$

3. $Ax = \int_a^b K(s,t)x(s)ds$ ინტეგრალური ოპერატორის ნორმის გამოსათვლელად გავითვალისწინოთ ის ფაქტი, რომ ოპერატორის $K(s,t)$ ბირთვი უწყვეტია $[a,b] \times [a,b]$ კომპაქტურ სიმრავლეზე, ე.ი. არსებობს ისეთი $M > 0$ რიცხვი, რომ $|K(s,t)| \leq M$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი უტოლობები:

$$\leq \int_a^b |K(s,t)| \cdot |x(s)| ds \leq M \int_a^b |x(s)| ds \Longrightarrow \|Ax\| = max_t |Ax| \leq$$

$$\leq M \int_a^b |x(s)| ds \leq M \int_a^b max_s |x(s)| ds = M(b-a)\|x\| \equiv C\|x\|.$$

ამ უტოლობებიდან და ზემოთ მოყვანილი ბოლო თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $\|A\| \leq C$. *წრფივი ინტეგრალური ოპერატორი უწყვეტი ბირთვით შემოსაზღვრულია* $C[a,b]$ *ბანახის სივრცეში.*

წრფივ ოპერატორს ეწოდება *უწყვეტი*, თუ $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის კრებადობიდან x-საკენ, გამომდინარეობს $(Ax_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის კრებადობა Ax-საკენ.

შემდეგი თეორემა არის წრფივი ოპერატორის უწყვეტობის კრიტერიუმი.

თეორემა 2. წრფივი ოპერატორი უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის შემოსაზღვრულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს ზემოთ განხილული ოპერატორების უწყვეტობა, რადგან მათი შემოსაზღვრულობა ვაჩვენეთ.

ვთქვათ, A წრფივი ოპერატორია. განვიხილოთ $Ax = y$ სახის განტოლება, სადაც y მოცემული სიდიდეა, x – კი – უცნობი. ნათელია, რომ, თუ A ოპერატორს აქვს შებრუნებული, ე.ი. თუ აზრი აქვს A^{-1} სიდიდეს, მაშინ ამ განტოლების ამონახსნი $x = A^{-1}y$ გამოსახულებით მოიცემა. მაგალითად, თუ $A: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ წრფივი ოპერატორია, მაშინ, როგორც აღვნიშნეთ, ასეთი წრფივი ოპერატორი მატრიცია და ამრიგად, $Ax = y$ გამოსახულება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემაა, რომლის ამონახსნი $x = A^{-1}y$ ფორმულით მოიცემა, როდესაც A შებრუნებადი მატრიცია, ანუ როდესაც $detA \neq 0$. ანალოგიურად, ყოველთვის არ არსებობს ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი და როდესაც ის არსებობს, მისი აგება მარტივი ამოცანა არ არის. ამოცანას გარკვეულწილად ამარტივებს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3 (ბანახის თეორემა შებრუნებული ოპერატორის შესახებ). ვთქვათ, A წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორი L ბანახის სივრცეს ურთიერთცალსახად ასახავს თავის თავზე. მაშინ არსებობს მისი შებრუნებული A^{-1} და იგი შემოსაზღვრულია.

წრფივი ოპერატორი განისაზღვრება აგრეთვე ორი – V_1 და V_2 განსხვავებული ბანახის სივრცეებისათვის: $A: V_1 \to V_2$. ზემოთ მოყვანილი ყველა მსჯელობა გამოდგება ამ შემთხვევაშიც. მხოლოდ უნდა გვახსოვდეს: V_1 და V_2 სივრცეები ნორმირებულია თავიანთი ნორმით.

$J: V_1 \to V_2$ ურთიერთცალსახა წრფივ ოპერატორს წრფივ სივრცეებს შორის ეწოდება *იზომორფიზმი*. იზომორფული სივრცეები ჩვეულებრივ გაიგება როგორც ერთი და იმავე ობიექტის ორი სხვადასხვა რეალიზაცია. მაგალითად, კომპლექსურ რიცხვთა $z = x + iy$ წრფივი სივრცე და $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლე (რომელიც წრფივი სივრცეა) ერთმანეთის იზომორფულია. ისინი ორგანზომილებიანი ვექტორული სივრცის ორი სხვადასხვა რეალიზაციაა.

დავუშვათ, V_1 და V_2 ბანახის სივრცეებია, მაშინ J ახორციელებს იზომორფიზმს მათ შორის, თუ ის არის იზომორფიზმი როგორც წრფივი სივრცეების და, გარდა ამისა, არის *იზომეტრია*: ე.ი. $x \in V_1$ ელემენტის ნორმა, რომელსაც აღვნიშნავთ $\|x\|_{V_1}$-ით, ტოლია მისი Jx ანასახის $\|Jx\|_{V_2}$ ნორმის. ამ აღნიშვნებში ნორმის ინდექსი მიუთითებს იმ სივრცეს, რომელშიც განიხილება ელემენტის ნორმა.

განვიხილოთ სპეციალური სახის ისეთი ოპერატორი, რომელიც მიიღება ზემოთ განხილული შემთხვევიდან V_2 მნიშვნელობათა არის შეცვლით $\mathbf{R}$-ით. ამგვარ ოპერატორს ეწოდება *ფუნქციონალი.* ე.ი. $f: L \to R$ ფუნქციონალი ისეთი ოპერატორია, რომელიც მნიშვნელობებს იღებს ნამდვილ რიცხვთა წრფივ სივრცეში. რადგან ფუნქციონალი სპეციალური სახის ოპერატორია, მასზე ვრცელდება ოპერატორების ყველა ზემოთ მოყვანილი თვისებები, მათ შორის წრფივობის თვისება.

განსაზღვრული ინტეგრალი $\int_a^b : C[a,b] \to \mathbf{R}$ არის წრფივი ფუნქციონალის მაგალითი. მართლაც, ნებისმიერი $x(t) \in C[a,b]$-სათვის $\int_a^b x(t)dt$ არის ნამდვილი რიცხვი, ე.ი. ინტეგრალი არის ფუნქციონალი. ამ ფუნქციონალის წრფივობა კი გამომდინარეობს განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებებიდან.

ფუნქციონალის ნორმა განიმარტება თანადობით:

$$\|f\| = sup_{x \in L} \frac{\|f(x)\|_{\mathbf{R}}}{\|x\|_L} = sup_{x \in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

მაგალითისათვის ვიპოვოთ $f(x) = \int_a^b x(t)dt$, $x(t) \xrightarrow{f} \int_a^b x(t)dt$ ფუნქციონალის ნორმა.

$$|f(x)| \leq \int_a^b |x(t)|dt \leq \int_a^b max_t |x(t)|dt = max_t |x(t)| \int_a^b dt = (b-a)\|x\|.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq b - a \Rightarrow \|f\| = sup_{x \in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq b - a.$$

მივიღეთ ნორმის ზემოდან შეფასება, რაც ჯერ კიდევ არ ნიშნავს იმას, რომ ნორმა მივიღეთ. საჩვენებელი დარჩა, რომ არსებობს ისეთი $x(t)$ ფუნქცია $C[a,b]$-დან, რომელზედაც მიღებული შეფასების $b-a$ ზედა საზღვარი მიიღწევა. ამისათვის კი საკმარისია ავიღოთ ერთეულოვანი $x(t)\equiv 1$ ფუნქცია. მაშინ $\|x\| = \max|x(t)| = 1$ და $f(x) = \int_a^b 1dt = b-a$, ე.ი. $\|f\| \geq b-a$. ეს უტოლობა ზემოთ მოყვანილ უტოლობასთან ერთად გვაძლევს: $\|f\| = b-a$.

თეორემა 2-დან გამომდინარეობს, რომ წრფივი ფუნქციონალის უწყვეტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა მისი შემოსაზღვრულობა.

L ბანახის სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალების სიმრავლეს ეწოდება L-ის *შეუღლებული სივრცე* და აღინიშნება L^*-ით.

თუ $f,g \in L^*$, მაშინ $f+g$ ფუნქციონალების ჯამი და სკალარზე αf ნამრავლი განიმარტება თანადობებიდან:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

L^* ამ ოპერაციების მიმართ არის წრფივი სივრცე, ის ნორმირებული სივრცეცაა

$$\|f\| = sup_{\|x\|=1}|f(x)|$$

ნორმით. L^* არის აგრეთვე სრული სივრცე.

თეორემა 4. *L ბანახის სივრცის შეუღლებული L^* სივრცე არის ბანახის სივრცე.*

1.3. ჰილბერტის სივრცე

დავუშვათ, H წრფივი სივრცეა და მის ყოველ ელემენტთა $x,y \in H$ წყვილს ეთანადება $(x,y) \in \mathbf{R}$ ნამდვილი რიცხვი. ვუწოდოთ მას x,y *ვექტორების სკალარული ნამრავლი,* თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს (აქსიომებს):

1) $(0,0) = 0$ და $(x,y) > 0$ ნებისმიერი $x \neq 0$-სათვის;
2) $(x+y,z) = (x,z)+(y,z), (\lambda x,y) = \lambda(x,y)$ (წრფივობის აქსიომა);
3) $(x,y) = (y,x) -$ სიმეტრიულობა.

მაგალითები. ა) $H = \mathbf{R}$, მაშინ $(x,y) = xy$. ბ) $H = \mathbf{R}^n$ – სკალარული ნამრავლი განვმარტოთ შემდეგი თანადობით $(x,y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. გ) $H = l_2$ – $(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j\, y_j$.

სკალარული ნამრავლის პირველი აქსიომა საშუალებას გვაძლევს ყოველ $x \in H$ ვექტორს შევუსაბამოთ არაუარყოფითი $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს ნორმის აქსიომებს. პირველი და მეორე პირობების შემოწმება ადვილია, მესამე, სამკუთხედის აქსიომა კი გამომდინარეობს შემდეგი თეორემიდან.

თეორემა 1. $x, y \in H$ *ვექტორების სკალარული ნამრავლი აკმაყოფილებს*

$$||(x,y)|| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

უტოლობას.

ზემოთ მოყვანილი უტოლობა *კოში-ბინიაკოვსკის უტოლობის* სახელწოდებითაა ცნობილი. მის დასამტკიცებლად ავირჩიოთ ნებისმიერი λ პარამეტრი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან და განვიხილოთ $(\lambda x + y, \lambda x + y)$ სკალარული ნამრავლი:

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y) =$$
$$= \lambda^2 ||x||^2 + 2\lambda(x,y) + ||y||^2.$$

რადგან სკალარული ნამრავლისათვის გვაქვს

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0,$$

ამიტომ, ნებისმიერი λ-სათვის უნდა შესრულდეს

$$\lambda^2 ||x||^2 + 2\lambda(x,y) + ||y||^2 \geq 0$$

უტოლობა. ამისათვის კი საკმარისია, რომ ამ კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი არ აღემატებოდეს 0-ს:

$$D = |(x,y)|^2 - ||x||^2 ||y||^2 \leq 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი უტოლობა.

სკალარული ნამრავლის საშუალებით შემოტანილი ნორმისათვის სამკუთხედის აქსიომის შესამოწმებლად გამოვიყენოთ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა:

$$||x + y|| = \sqrt{||x||^2 + 2(x,y) + ||y||^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2} = ||x|| + ||y||.$$

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა ამტკიცებს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2. *ვექტორული სივრცე, რომელშიც არსებობს სკალარული ნამრავლი, არის ნორმირებული ვექტორული სივრცე ნორმით* $||x|| = \sqrt{(x,x)}$.

ამრიგად, ნებისმიერი წრფივი სივრცე, რომელშიც შემოტანილია სკალარული ნამრავლი, არის ნორმირებული სივრცე, ეს უკანასკნელი კი შეიძლება იყოს სრული ან არასრული. სრულ ვექტორულ სივრცეს, რომელშიც ნორმა განმარტებულია სკალარული ნამრავლის საშუალებით, ეწოდება *ჰილბერტის სივრცე*.

ზემოთ განხილული $\mathbf{R}, \mathbf{R}^n$ და l_2 სივრცეები ჰილბერტის სივრცის მაგალითებია.

ორ, x და y ვექტორს ჰილბერტის სივრცეში ეწოდება *ორთოგონალური*, თუ $(x, y) = 0$. $e_1, e_2, \dots$ ელემენტთა სისტემას H ჰილბერტის სივრციდან ეწოდება *ორთონორმირებული*, თუ ისინი წყვილ-წყვილად ორთოგონალურებია და მათი ნორმა ერთის ტოლია: $(e_i, e_j) = 0, i \neq j$ და $||e_i|| = 1, i = 1,2, \dots$

მაგალითად, l_2 ჰილბერტის სივრცეში ორთონორმირებულ ელემენტთა სისტემაა $e_1 = (1,0, \dots.), e_2 = (0,1, \dots.), \dots, e_j = (0,0, \dots, 0,1,0, \dots)$. მათი რაოდენობა უსასრულოა, ისევე, როგორც მათი კოორდინატების რაოდენობა, ხოლო $\mathbf{R}^n$-ში ორთონორმირებულ ვექტორთა სისტემაა

$$e_1 = (1,0, \dots, 0),\ e_1 = (0,1, \dots, 0),\ \dots\ , e_n = (0,0, \dots, 1)$$

ვექტორები, რომელთა „სიგრძე“ – კოორდინატების რაოდენობა, სასრულია და n-ის ტოლია.

ელემენტთა $h_1, h_2, \dots$ სისტემას ჰილბერტის სივრციდან ეწოდება წრფივად *დამოუკიდებელი*, თუ არცერთი ვექტორი ამ სისტემიდან არ შეიძლება გამოისახოს დანარჩენების საშუალებით. ეს ეკვივალენტურია იმისა, რომ $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots = 0$ ტოლობა უნდა შესრულდეს მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყველა $\alpha_j, j = 1,2, \dots$ 0-ის ტოლია.

ნათელია, რომ, თუ რომელიმე ვექტორს ჰილბერტის სივრციდან გავყოფთ მის ნორმაზე, მიიღება ახალი ვექტორი, რომლის ნორმაც ერთის ტოლი იქნება. ამ პროცესს *ნორმირება* ეწოდება.

$h_1, h_2, \dots$ *წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა ყოველთვის შევიძლია გავხადოთ ორთონორმირებული.*

ამისათვის ავიღოთ h_1 ვექტორი და H სივრცის ერთ-ერთი საკოორდინატო ღერძი დავამთხვიოთ ამ ვექტორს. იმისათვის, რომ მისი სიგრძე გახდეს 1-ის ტოლი, გავყოთ იგი $||h_1||$-ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $e_1 = \frac{h_1}{||h_1||}$.

ავიღოთ მეორე h_2 ვექტორი და განვიხილოთ მისი პროექცია e_1-ზე: $prh_2 = (e_1, h_2)e_1$. ამის შემდეგ h_2 ვექტორს გამოვაკლოთ $(e_1, h_2)e_1$ ვექტორი და მოვახდინოთ მისი ნორმირება. მიღებული შედეგი აღვნიშნოთ e_2-ით: $e_2 = \frac{h_2-(e_1,h_2)e_1}{||h_2-(e_1,h_2)e_1||}$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $(e_1, e_2) = 0$ და $||e_2|| = 1$. ანალოგიური პროცედურა გავიმეოროთ ვექტორთა სისტემაში შემავალი ყველა დანარჩენი $h_2, h_3, \dots$ ვექტორებისათვის და საბოლოოდ მივიღებთ ერთმანეთის წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ ვექტორთა $e_1, e_2, \dots$ სისტემას, რომელთა ნორმა 1-ის ტოლია. ამასთან, ზოგადი წევრისათვის გვაქვს ფორმულა: $e_n = \frac{h_n-\sum_j^{n-1}(e_j,h_n)e_j}{||h_n-\sum_j^{n-1}(e_j,h_n)e_j||}$. ეს, თავის მხრივ, იმას ნიშნავს, რომ მივიღეთ ორთონორმირებულ ვექტორთა სისტემა.

ვექტორთა სისტემის ორთოგონალიზაციის ამ პროცედურას (პროცესს) *შმიდტის* ან *გრამ-შმიდტის* (ერჰარდ შმიდტი (1876-1959) – გერმანელი მათემატიკოსი; იორგენ პედერსენ გრამი (1850-1916) – დანიელი მათემატიკოსი) *ორთოგონალიზაცია* ეწოდება.

H ჰილბერტის სივრცეში ბაზისი ეწოდება ვექტორთა $\{e_j\}_{j\geq 1}$ სისტემას, რომლის საშუალებით ნებისმიერი $h \in H$ ვექტორი წარმოიდგინება

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \tag{1}$$

სახით.

შევნიშნოთ, რომ ბაზისი, საზოგადოდ, სავალდებულო არ არის იყოს ორთონორმირებული, მაგრამ მოსახერხებელია, რადგან ასეთ ბაზისში ადვილად გამოითვლება $\{c_j\}_{j\geq 1}$ რიცხვები. ამისათვის $h = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ გამოსახულება სკალარულად გავამრავლოთ ფიქსირებული k ნომრის მქონე e_k ვექტორზე ბაზისიდან: $(h, e_k) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j (e_j\,, e_k)$. იმის გათვალისწინებით, რომ ბაზისი ორთონორმირებულია, მივიღებთ ტოლობას:

$$c_k = (h, e_k), k = 1,2, \dots \tag{2}$$

ამ რიცხვებს ეწოდებათ *ფურიეს კოეფიციენტები.* ისინი არიან $\{e_j\}_{j\geq 1}$ ორთონორმირებული ბაზისის მიმართ h ვექტორის კოორდინატები. თუ h ვექტორს თავის თავზე სკალარულად გავამრავლებთ, მივიღებთ ამ ვექტორის ნორმის კვადრატს:

$$||h||^2 = (h, h) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j\,, \sum_{l=1}^{\infty} c_l e_l\right) = \sum_{j,l=1}^{\infty} c_j c_l (e_j\,, c_l) =$$
$$= \sum_{j=k=1}^{\infty} {c_j}^2 (e_j, e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} {c_j}^2 \;\Rightarrow\; ||h||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} {c_j}^2. \tag{3}$$

უკანასკნელ გამოსახულებას ეწოდება *პარსევალის* (მარკ-ანტუან პარსევალი (1755-1836) – ფრანგი მათემატიკოსი) *ტოლობა* (პარსევალის ტოლობა არის პითაგორას თეორემის განზოგადება $n > 2$ განზომილებიან სივრცეში).

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. *H ჰილბერტის სივრცის ორთონორმირებული $\{e_j\}_{j\geq 1}$ ბაზისის საშუალებით ნებისმიერი $h \in H$ ვექტორი წარმოიდგინება (1) მწკრივის სახით, სადაც $c_j, j = 1,2, \dots$ კოეფიციენტები გამოითვლება (2) გამოსახულებიდან და ისინი აკმაყოფილებენ პარსევალის (3) ტოლობას.*

n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში არსებობს ორთონორმირებული ბაზისი და ამ ბაზისის მიმართ ნებისმიერ წრფივ ოპერატორს აქვს მარტივი სახე: იგი წარმოიდგინება მატრიცის სახით, ხოლო მისი მოქმედება ნებისმიერ ვექტორზე ამ სივრციდან არის მატრიცის გამრავლება ვექტორზე. წრფივი ალგებრის ეს მნიშვნელოვანი ფაქტი გამომდინარეობს რისის შემდეგი თეორემიდან (ფრიდეშ რისი (1880-1956) – უნგრელი მათემატიკოსი), რომელიც განსაზღვრავს ნებისმიერი წრფივი უწყვეტი ოპერატორის სახეს ჰილბერტის სივრცეში.

თეორემა 4 (ფ. რისი). *დავუშვათ, $L: H \to H$ წრფივი უწყვეტი ოპერატორია. მაშინ არსებობს ერთადერთი $h \in H$ ელემენტი, რომ ნებისმიერი $g \in H$-სათვის L-ის მნიშვნელობა g-ში მოიცემა*

$$L(g) = (g, h)$$

სკალარული ნამრავლით.

მაგალითი. დავუშვათ, $U \subset \mathbf{R^n}$ ღია და ბმული ქვესიმრავლეა. ასეთ სიმრავლეს ჩვეულებრივ *არეს* უწოდებენ. გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ U არე *შემოსაზღვრულია*, ე.ი. არსებობს სასრული რადიუსის მქონე ბირთვი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, რომელიც შეიცავს U-ს. თუ U-ს დავუმატებთ საზღვრის წერტილებს, რასაც U-ს *ჩაკეტვა* ეწოდება, მივიღებთ ჩაკეტილ სიმრავლეს, რომელიც $\overline{U}$-თი აღინიშნება. ∂U სიმბოლოთი აღინიშნება U არის საზღვარი და ეს სიმრავლე არის $\partial U = \overline{U} - U$ ორი სიმრავლის სხვაობა. გვაინტერესებს U არეზე განსაზღვრული სხვადასხვა თვისების მქონე ფუნქციათა სივრცეები, რომლებიც, საზოგადოდ, დამოკიდებულია U არის საზღვარზე. იმისათვის, რომ არ ვიზრუნოთ საზღვრის ბუნებაზე, განვიხილოთ U-ზე უწყვეტ ისეთ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელიც 0-ის ტოლი

ხდება საზღვრის რაიმე მიდამოში. ამასთან, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ საზღვრის ეს მიდამო დამოკიდებულია თვით ფუნქციაზე. ფუნქციათა ეს სიმრავლე აღვნიშნოთ $C^0(U)$-თი. ეს სიმრავლე არის ვექტორული სივრცე, რომელშიც სკალარული ნამრავლი

$$(u, v) = \int_U u(x)v(x)dx \tag{4}$$

ფორმულით განისაზღვრება. ამ სივრცეში ნორმა (4) სკალარული ნამრავლის საშუალებით განიმარტება:

$$||u|| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\int_U u^2(x)dx}\ .$$

მიღებული სივრცე არ არის სრული, გასრულების პროცედურის გამოყენების შემდეგ მიიღება ჰილბერტის სივრცე, რომელიც $L^2(U)$-თი აღინიშნება და ეწოდება კვადრატში ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე.

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას $u, v \in L^2(U)$ ფუნქციებისათვის აქვს სახე:

$$\left|\int_U u(x)v(x)dx\right| \leq \left|\sqrt{\int_U u^2(x)dx}\right| \cdot \left|\sqrt{\int_U v^2(x)dx}\right|,$$

ხოლო $u, v \in L^2(U)$ ფუნქციების ორთოგონალურობის ფაქტი

$$\int_U u(x)v(x)dx = 0$$

ტოლობით მოიცემა.

რისის თეორემის თანახმად, ნებისმიერ $L: L^2(U) \to L^2(U)$ უწყვეტ წრფივ ოპერატორს აქვს სახე:

$$Lu = \int_U u(x)f_L(x)dx, \tag{5}$$

სადაც $u \in L^2(U)$ ნებისმიერი ფუნქციაა. ანუ, სხვა სიტყვებით, ნებისმიერი L წრფივი, უწყვეტი ოპერატორისათვის არსებობს ერთადერთი $f_L \in L^2(U)$ ფუნქცია, რომ L-ს აქვს (5) სახე. ეს კი, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ

$$L \leftrightarrow f_L$$

თანადობა არის ურთიერთცალსახა და, ამრიგად, $L^2(U)$-ის შეუღლებული $L^2(U)^*$ სივრცე ემთხვევა $L^2(U)$-ს.

2. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა

მომდევნო პარაგრაფებში განვიხილავთ ისეთ დიფერენციალურ განტოლებებს, რომელთათვისაც ამონახსნი ცალსახად იწერება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ისინი ამოხსნადები არიან კვადრატურებში. ვნახავთ აგრეთვე, რომ იმ განტოლებათა რაოდენობა, რომელთა ამოხსნაც კვადრატურებშია შესაძლებელი, საკმაოდ შეზღუდულია, რის გამოც მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, საერთოდ როდის აქვს დიფერენციალურ განტოლებას ამონახსნი. აქ შეგვიძლია აღვნიშნოთ ის ანალოგია, რომელიც ამ მიმართულებით დიფერენციალურ განტოლებებსა და პოლინომიალურ (ალგებრულ) განტოლებებს შორის არსებობს. ცნობილია, რომ n ხარისხის პოლინომიალურ განტოლებას აქვს n ფესვი ჯერადობის გათვალისწინებით. ეს ფაქტი, რა თქმა უნდა, იმას არ ნიშნავს, რომ ყველა ფესვისათვის გვაქვს ფორმულა, რომელიც გამოსახავს ამ ფესვებს განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით. ამრიგად, ვიცით მხოლოდ *ფესვების არსებობა*. ანალოგიური თეორემა სამართლიანია დიფერენციალურ განტოლებათა საკმაოდ ფართო კლასისათვის (ამ კლასის აღწერას ეძღვნება მომდევნო პარაგრაფები) და იგი ცნობილია დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის *არსებობისა და ერთადერთობის* თეორემის სახელწოდებით. ამასთან, ამონახსნის ერთადერთობას ადგილი აქვს საწყისი ანუ კოშის ამოცანისათვის. რაც გულისხმობს

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

n-ური რიგის განტოლების ისეთი $y(t)$ ამონახსნის პოვნას, რომელიც დიფერენციალური განტოლების გარდა აკმაყოფილებს აგრეთვე შემდეგ n ტოლობას:

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \ \ldots \ y^{(n-1)}(t_0) = y_n,$$

სადაც t_0 ნებისმიერი წერტილია ფუნქციის განსაზღვრის არიდან, ხოლო y_0, $y_1, \ldots, y_n$ წინასწარ მოცემული ნებისმიერი რიცხვებია.

უკანასკნელ ტოლობებს ეწოდება *საწყისი პირობები*, ხოლო დიფერენციალურ განტოლებას ამ საწყის პირობებთან ერთად ეწოდება *კოშის ამოცანა.*

კოშის ამოცანა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ერთ-ერთი ცენტრალური საკითხია. მომდევნო პარაგრაფები ეძღვნება ამ ამოცანის ანალიზს. ვნახავთ, რომ ამოცანის ამონასხნის არსებობა და ერთადერთობა არსებითადაა დამოკიდებული g ფუნქციაზე.

2.1. კუმშვადი ასახვის პრინციპი

დავუშვათ V სრული მეტრიკული სივრცეა ρ მეტრიკით და A ამ სივრცის თავის თავზე ასახვაა. თუ $x \in V$, ის ფაქტი, რომ A მოქმედებს x-ზე, აღინიშნება Ax სიმბოლოთი. როდესაც V სასრულგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეა, ხოლო A კი – წრფივი ოპერატორი, მაშინ Ax არის მატრიცის და ვექტორის ნამრავლი. ყველა სხვა შემთხვევაში Ax არის V მეტრიკული სივრცის რაიმე, საზოგადოდ, x-საგან განსხვავებილი ელემენტი. x წერტილს ეწოდება A ასახვის *უძრავი წერტილი*, თუ $Ax = x$. A-ს კომპოზიციას თავის თავთან ეწოდება A ასახვის კვადრატი და აღინიშნება A^2 სიმბოლოთი. ამრიგად, $A^2 = A(Ax)$. ინდუქციით განიმარტება A-ს ნებისმიერი ნატურალური ხარისხი: $A^n = A(\dots(Ax))$.

A-ს ეწოდება *კუმშვადი ასახვა*, თუ არსებობს ისეთი $\alpha < 1$ დადებითი რიცხვი, რომ

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y) \tag{1}$$

ნებისმიერი x, y წყვილისთვის V-დან.

კუმშვადი ასახვა უწყვეტია (აჩვენეთ!)

თეორემა (*კუმშვადი ასახვის პრინციპი*). *V სრული მეტრიკული სივრცის თავის თავში კუმშვად A ასახვას აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი.*

დამტკიცება. ავიღოთ A-დან ნებისმიერი x_0 წერტილი და განვიხილოთ მიმდევრობა:

$$x_0, x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1 = A^2x_0, \dots, x_n = A^nx_0, \dots$$

დავუშვათ $m \ge n$. ვაჩვენოთ, რომ $(x_n)_{n\ge0}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია. მართლაც,

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^nx_0, A^mx_0) \le \alpha\rho(A^{n-1}x_0, A^{m-1}x_0) \le$$
$$\le \alpha^2\rho(A^{n-2}x_0, A^{m-2}x_0) \le \dots \le \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}).$$

სამკუთხედის უტოლობის გამო გვაქვს შეფასება:

$$\rho(x_0, x_{m-n}) \le \rho(x_0, x_{m-n-1}) + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}).$$

ამ უტოლობაში $\rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})$ შევცვალოთ $\alpha^{m-n-1}\rho(x_0, x_1)$ გამოსახულებით და მივიღებთ:

$$\rho(x_0, x_{m-n}) \le \rho(x_0, x_{m-n-1}) + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0, x_1). \tag{2}$$

$\rho(x_0, x_{m-n-1})$-ის მიმართ კვლავ სამკუთხედის უტოლობა გამოვიყენოთ:

$$\rho(x_0, x_{m-n-1}) \leq \rho(x_0, x_{m-n-2}) + \rho(x_{m-n-2}, x_{m-n-1}).$$

შევცვალოთ უკანასკნელ უტოლობაში $\rho(x_{m-n-2}, x_{m-n-1})$ გამოსახულება მასზე მეტი $\alpha^{m-n-2}\rho(x_0, x_1)$ სიდიდით, მივიღებთ:

$$\rho(x_0, x_{m-n-1}) \leq \alpha^{m-n-2}\rho(x_0, x_1) + \rho(x_{m-n-2}, x_{m-n-1}).$$

(2) უტოლობა ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით მიიღებს სახეს:

$$\rho(x_0, x_{m-n}) \leq \rho(x_{m-n-2}, x_{m-n-1}) + \alpha^{m-n-2}\rho(x_0, x_1) + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0, x_1).$$

$\rho(x_{m-n-2}, x_{m-n-1})$ შესაკრების მიმართ კიდევ ერთხელ გამოვიყენოთ სამკუთხედის უტოლობა და ასე გავაგრძელოთ მანამ, სანამ m არ გაუტოლდება $n-1$-ს. ბოლოდან მეორე ნაბიჯზე გვექნება უტოლობა:

$$\rho(x_0, x_{m-n}) \leq \rho(x_0, x) + \alpha^2\rho(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{m-n-2}\rho(x_0, x_1) +$$
$$+\alpha^{m-n-1}\rho(x_0, x_1). \tag{3}$$

$\rho(x_0, x_2)$-ის მიმართ სამკუთხედის უტოლობა მოგვცემს:

$$\rho(x_0, x_2) \leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) \Rightarrow \rho(x_1, x_2) = \rho(Ax_0, Ax_1) \leq \alpha\rho(x_0, x_1).$$

უკანასკნელი უტოლობა (3)-თან ერთად გვაძლევს:

$$\rho(x_0, x_{m-n}) \leq \rho(x_0, x_2) + \alpha^2\rho(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{m-n-2}\rho(x_0, x_1) +$$
$$+\alpha^{m-n-1}\rho(x_0, x_1).$$

ამრიგად, მივიღეთ უტოლობა:

$$\rho(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n\rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}) \leq \alpha^n \frac{1}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

რადგან $\alpha < 1$, ამიტომ $\alpha^n \frac{1}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1)$ რაგინდ მცირე სიდიდეა, ე.ი. მიმდევრობა ფუნდამენტურია. R სივრცე სრულია, რის გამოც $(x_n)_{n\geq 0}$ მიმდევრობის ზღვარი, რომელსაც x-ით აღვნიშნავთ, ეკუთვნის R-ს. A ასახვის უწყვეტობიდან გამოდის, რომ:

$$Ax = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

ამით უძრავი წერტილის არსებობა დამტკიცებულია. ახლა ვაჩვენოთ მისი ერთადერთობა. დავუშვათ $Ax = x$ და $Ay = y$, მაშინ (1) უტოლობიდან გვექნება, რომ:

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y),$$

რადგან $\alpha < 1$, უკანასკნელი ტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\rho(x,y) = 0$, რაც ნიშნავს, რომ $x = y$. ამით თეორემა სრულადაა დამტკიცებული.

2.2. განმარტებები და დამხმარე დებულებები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, დიფერენციალური განტოლება ეწოდება თანაფარდობას, რომელიც, საზოგადოდ, შეიცავს ერთ ან რამდენიმე დამოუკიდებელ ცვლადს, ამ ცვლადებზე დამოკიდებულ უცნობ ფუნქციებს და მათ წარმოებულებს. ამ პარაგრაფში ჩვენი მიზანია საკმაოდ ზოგადი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების შესწავლა და ჩავთვლით, რომ ისინი მოცემულია

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (1)$$

სახით, სადაც t დამოუკიდებელი ცვლადია, x მასზე დამოკიდებული უცნობი ფუნქციაა, f მოცემული ფუნქციაა. როგორც ვიცით, (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ეწოდება $t \in]r_1, r_2[\subset \mathbf{R}$ ინტერვალზე განმარტებულ უწყვეტ $x = \varphi(t)$ ფუნქციას, რომლის ჩასმა დასაშვებია განტოლებაში და ჩასმის შედეგად განტოლება გადაიქცევა

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(t,\varphi(t)), t \in I$$

იგივეობად.

I ინტერვალს ეწოდება $\varphi(t)$ *ამონახსნის არსებობის ინტერვალი.*

ტერმინი „ჩასმა დასაშვებია" ნიშნავს, რომ ყოველი მათემატიკური ოპერაცია, რომელიც $x = \varphi(t)$ ჩასმასთან არის დაკავშირებული, კორექტულია. განხილულ შემთხვევაში კი ეს ნიშნავს, რომ არსებობს $\frac{d\varphi}{dt}$, $t \in I$ და $f(t,\varphi(t))$ კორექტული გამოსახულება.

განვიხილოთ მარტივი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

ამ განტოლების ამონახსნია ნებისმიერი მუდმივი $x(t) \equiv c, -\infty < t < \infty$ ფუნქცია. ე.ი ამონახსნთა ეს სიმრავლე უსასრულოა. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა სრულ ერთობლიობას ეწოდება ამ განტოლების *ზოგადი ამონახსნი*, ე.ი *დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი არის კონ-*

კრეტული უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ჩასმა დასაშვებია დიფერენციალურ განტოლებაში, რის შედეგადაც იგი გადაიქცევა იგივეობად.

კერძოდ, ამონახსნის გამოყოფა ზოგადი ამონახსნისაგან შესაძლებელია ე.წ. საწყისი პირობით, რომელსაც აქვს სახე: $x(t_0) = x_0$, სადაც t_0 და x_0 მოცემული რიცხვებია, რომელთაც *საწყისი მნიშვნელობები* ეწოდება. თუ განხილულ მაგალითში საწყის მნიშვნელობად ავიღებთ $\forall t_0, x_0 = 1$, მივიღებთ კერძო ამონახსნს $x(t) \equiv 1$, $-\infty < t < +\infty$. ეს არის ზოგადი ამონახსნის ერთადერთი წარმომადგენელი, რომელიც დააკმაყოფილებს $x(t_0) = 1$ საწყის პირობას.

ამგვარად, დიფერენციალური განტოლებების შესწავლისას ბუნებრივად წარმოიშობა მისი ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხი, რაც ამ თავის შესწავლის საგანია.

ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემების დასამტკიცებლად დაგვჭირდება დამხმარე ცნებები და დებულებები, რომლებიც ქვემოთ არის მოყვანილი.

ლიფშიცის პირობა. ვთქვათ, $f(t,x)$ განმარტებულია და უწყვეტი $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ სიბრტყის ღია $D \subset \mathbf{R}^2$ არეში. ვიტყვით, რომ $f(t,x)$ ფუნქცია D არეში x ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს *ლიფშიცის პირობას,* თუ არსებობს $k > 0$ ისეთი რიცხვი, რომ ნებისმიერი $(t,x_1), (t,x_2)$ წერტილებისათვის D არიდან სრულდება უტოლობა:

$$\left|f(t,x_1) - f(t,x_2)\right| \le k\left|x_1 - x_2\right|.$$

მაგალითად, დიფერენცირებადი ფუნქციები ლიფშიცის პირობას ყოველთვის აკმაყოფილებენ. მართლაც, თუ $|f'(y)| \le k$, მაშინ ლაგრანჟის თეორემის თანახმად გვაქვს:

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f'(y)||y_1 - y_2| \le k|y_1 - y_2|.$$

ამასთან, თუ ფუნქცია ლიფშიცის პირობას აკმაყოფილებს, შესაძლებელია იგი დიფერენცირებადი არ იყოს. მაგალითად, $|y|$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $(-\infty,+\infty)$-ზე:

$$||y_1| - |y_2|| \le |y_1 - y_2|, \quad |y_1| \le |y_1 - y_2| + |y_2|,$$

მაგრამ $(-\infty,+\infty)$-ზე ყველგან (კერძოდ 0-ში) დიფერენცირებადი არ არის.

რაც შეეხება უწყვეტ ფუნქციებს, ისინი, ზოგადად, ლიფშიცის პირობას არ აკმაყოფილებენ. მაგალითად, $\sqrt{y}$ უწყვეტი ფუნქცია [0,1] სეგმენტზე ლიფშიცის პირობას არ აკმაყოფილებს. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს განმარტებაში მითითებული k მუდმივი, ისეთი, რომ:

$$|\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}|\leq k\,|y_1-y_2|.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $y_2=0, y_1>0$. მივიღებთ $|\sqrt{y_1}|\leq k\,|y_1|$, $\dfrac{1}{|\sqrt{y_1}|}\leq k$, როდესაც $y_1\to 0$. უკანასკნელი უტოლობის მარცხენა მხარე შემოსაზღვრული არ არის, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება და ამტკიცებს ჩვენს ჰიპოთეზას.

ამრიგად, *ფუნქციონალური სივრცე, რომელიც შედგება D არეზე ლიფშიცის პირობის დამაკმაყოფილებელი ფუნქციებისაგან, მოიცავს ამავე არეზე განსაზღვრულ დიფერენცირებად ფუნქციათა სივრცეს და შედის უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში.*

ინტეგრალური ოპერატორი. განვიხილოთ $r_1\leq \mathrm{t}\leq r_2$ სეგმენტზე უწყვეტ $\varphi(\mathrm{t})$ ფუნქციათა Φ სიმრავლე, რომელთა გრაფიკები შედის D არეში, ანუ სრულდება პირობა: $(t,\varphi(t))\in D,\ \forall t\in[r_1,r_2]$. ვთქვათ, $f(t,x)$ განმარტებულია და უწყვეტია D არეში და t_0 წერტილი ეკუთვნის $]r_1,r_2[$ ღია ინტერვალს.

გამოსახულება

$$A\varphi=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau,\ r_1\leq \mathrm{t}\leq r_2,$$

სადაც x_0 – მოცემული ნებისმიერი მუდმივია, არის *ინტეგრალური ოპერატორი*, რომელიც Φ სიმრავლის ნებისმიერ $\varphi=\varphi(t)$ ელემენტს შეუსაბამებს $A\varphi=\widetilde{\varphi}(t)$ ელემენტს ზემოთ მოყვანილი ფორმულით:

$$\widetilde{\varphi}(\mathrm{t})=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau,\ r_1\leq \mathrm{t}\leq r_2.$$

ცხადია, რომ $\widetilde{\varphi}(\mathrm{t})$ არის $r_1\leq \mathrm{t}\leq r_2$ სეგმენტზე განმარტებული უწყვეტი და უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია და აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$\frac{d\widetilde{\varphi}(t)}{dt}=f(t,\varphi(t)),\ \ r_1\leq \mathrm{t}\leq r_2.$$

2.3. ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა პირველი რიგის ნორმალური განტოლებისათვის

დიფერენციალური განტოლების რიგი ეწოდება განტოლებაში შემავალი უცნობი ფუნქციის წარმოებულის უმაღლეს რიგს.

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება *ნორმალური,* თუ ამოხსნილია უცნობი ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულის მიმართ და არ შეიცავს სხვა რიგის წარმოებულებს.

განვიხილოთ

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

ნორმალური განტოლება.

თეორემა 1. *ვთქვათ, ფუნქცია $f(t,x)$ განმარტებულია და უწყვეტია D არეში და აკმაყოფილებს x ცვლადის მიმართ ლიპშიცის პირობას ამ არეში. ვთქვათ, (t_0, x_0) არის D-ს ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილი. მაშინ არსებობს (1) განტოლების $\varphi(t)$ ამონახსნი, განმარტებული: t_0 წერტილის შემცველ რაიმე I ინტერვალზე, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას:*

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

და ეს ამონახსნი ერთადერთია შემდეგი აზრით: თუ არსებობს (1) განტოლების რომელიმე სხვა ამონახსნი $\psi(t)$ განმარტებული J ინტერვალზე და არსებობს ისეთი $t^* \in I \cap J$, რომ $\psi(t^*) = \varphi(t^*)$, მაშინ $\psi(t) \equiv \varphi(t)$, ნებისმიერი t-სათვის $I \cap J$ თანაკვეთიდან.

ლემა 1. *განვიხილოთ ისეთი უწყვეტი $\varphi(t), t \in I$ ფუნქცია, რომლის გრაფიკი შედის D არეში, ე.ი $(t, \varphi(t)) \in D, \forall t \in I$. თუ შესრულებულია იგივეობა*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau, \ t \in I \tag{3}$$

მაშინ (3) ინტეგრალური ოპერატორით მოცემული $\varphi(t)$ ფუნქცია არის (1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (2) საწყის პირობას.

დამტკიცება. რადგან (3) იგივეობის მარჯვენა მხარე უწყვეტად წარმოებადია t ცვლადით, ამიტომ არსებობს $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ და იგი ტოლია $f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)$-ის, გარდა ამისა, $\varphi(t_0) = x_0$. ამით ლემა დამტკიცებულია.

ნათელია, რომ სამართლიანია ამ ლემის შებრუნებული დებულებაც.

შენიშვნა. აღვნიშნოთ $\varphi = \varphi(t), t \in I$. A ოპერატორის გამოყენებით იგივეობა (3) ჩაიწერება ეკვივალენტური ფორმით შემდეგნაირად $\tilde{\varphi} = A\varphi$.

საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ (3) ინტეგრალური ოპერატორი არის კუმშვადი ასახვა. f ფუნქციის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ (t_0, x_0) წერტილის შემცველ $D_1 \subset D$ არეზე (რომელიც შეგვიძლია ჩაკეტილად და შემოსაზღვრულად ჩავთვალოთ) სამართლიანია $|f(t, \varphi(t)| \leq M$ უტოლობა. რადგან f აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას მეორე არგუმენტის მიმართ, ამიტომ არსებობს ისეთი k, რომ $|f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| \leq k|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|, (t, \varphi_1(t)), (t, \varphi_2(t)) \in D$. ავირჩიოთ t_0 წერტილის $]t_0 - d, t_0 + d[$ მიდამო ისეთნაირად, რომ: 1) როდესაც $|t - t_0| \leq d$, სამართლიანი იყოს ჩართვა $(t, \varphi(t)) \epsilon D_1$ და $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq Md$ უტოლობა და 2) გარდა ამ პირობებისა, d-მ დააკმაყოფილოს უტოლობა $kd < 1$.

აღვნიშნოთ $C^*[t_0 - d, t_0 + d]$-თი $|t - t_0| \leq d$ სეგმენტზე იმ φ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = max_t|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$ მეტრიკით, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|\varphi(t) - x_0| \leq Md$.

$C^*[t_0 - d, t_0 + d]$ სრულია, როგორც $[t_0 - d, t_0 + d]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა სრული სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. განვიხილოთ $\tilde{\varphi} = A\varphi$ ფორმულით განსაზღვრული ასახვა:

$$A\varphi = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau = \tilde{\varphi},$$

სადაც $|t - t_0| \leq d$. ვაჩვენოთ, რომ A ასახვა $C^*[t_0 - d, t_0 + d]$ სივრცეს ასახავს თავის თავში:

$$A: C^*[t_0 - d, t_0 + d] \to C^*[t_0 - d, t_0 + d]$$

და არის კუმშვადი ასახვა. მართლაც, ვთქვათ, $\varphi \in C^*[t_0 - d, t_0 + d]$, მაშინ:

$$|\tilde{\varphi}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau \right| \leq Md$$

და, ამრიგად, $A(C^*[t_0 - d, t_0 + d]) \subset C^*[t_0 - d, t_0 + d]$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ იგი კუმშვადი ასახვაა.

$$|\widetilde{\varphi_1}(t) - \widetilde{\varphi_2}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_2(\tau))| d\tau \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} k|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)|d\tau \leq k\rho(\varphi_1, \varphi_2)|t - t_0| \leq kd\rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

რადგან $kd < 1$, ამიტომ A არის კუმშვადი ასახვა. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\varphi = A\varphi$ განტოლებას და ამრიგად:

$$\varphi = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, \varphi(\tau)\big) d\tau$$

ინტეგრალურ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $C^*[t_0 - d, t_0 + d]$ სივრცეში.

ამით არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ კოშის ამოცანა, რომლის მარჯვენა მხარე არ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას და რომელსაც არ აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$x' = 2\sqrt{|x|},\ x(t_0) = 0.$$

განტოლების მარჯვენა მხარე $f(x) = 2\sqrt{|x|}$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაგრამ არ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას. მართლაც, ვთქვათ, x და y ორი განსხვავებული ელემენტია f-ის განსაზღვრის არიდან. მაშინ:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{2(\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|})}{|x - y|}$$

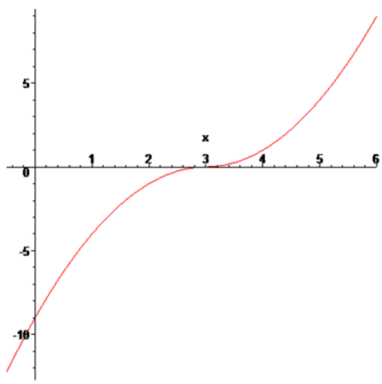
და როდესაც $y = 0$ და $x \to 0$ გვაქვს:

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} = \frac{2}{\sqrt{|x|}} \to +\infty.$$

უშუალო ჩასმით შეიძლება შევამოწმოთ, რომ:

$$x_1(t) = \begin{cases} (t - t_0)^2, & t \geq t_0, \\ -(t - t_0)^2, & t < t_0 \end{cases}$$

კოშის ამოცანის ამონახსნია. ამასთან, კოშის ამოცანის ამონახსნია აგრეთვე $x(t) \equiv 0$ ფუნქცია.



$$\boldsymbol{x_1(t) = \begin{cases} (t - 3)^2, & t \geq 3, \\ -(t - 3)^2, & t < 3 \end{cases}}$$ **ფუნქციის გრაფიკი**

2.4. დიფერენციალური განტოლებების ანალიზი არსებობისა და ერთადერთობის თეორემების გამოყენებით

არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, თუ

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(t, x(t)\big), x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

კოშის ამოცანაში f ფუნქცია უწყვეტია სიბრტყის გარკვეულ არეში, მაგალითად,

$$\Pi = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \le a, |x - x_0| \le b\}$$

მართკუთხედზე და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას მეორე x არგუმენტის მიმართ ამ არეზე, ეს ნიშნავს, რომ:

$$\exists K > 0 : \forall(x_1, x_2 \in [-b + x_0, b + x_0]), \forall(t \in [-a + t_0, a + t_0])$$
$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \le K|x_1 - x_2|.$$

ასეთ პირობებში $t_0 - d \le t \le t_0 + d$ სეგმენტზე, სადაც:

$$d = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \ \ M = max_{(t,x)\in\Pi}|f(t, x)|.$$

არსებობს (1) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x(t)$, რომლისკენაც თანაბრად კრებადია

$$x(t_0) = x_0, \ \ x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))d\tau, \ \ n = 0,1,2, \dots \qquad (2)$$

რეკურსიული სახით მოცემულ ფუნქციათა მიმდევრობა, როდესაც $n \to \infty$.

ამრიგად, (2) მიმდევრობა საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ *კოშის ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი.* დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ამ მეთოდს *მიმდევრობითი მიახლოების* (ან *პიკარის*) მეთოდი ეწოდება.

ამოცანა 1. ამოხსენით მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით $x^{/}(t) = x(t)$, $x(0) = x_0$ კოშის ამოცანა.

ამოხსნა. (2)-ის თანახმად გვაქვს:

$$x_0(t) = x_0, \ x_1(t) = x_0 + \int_0^t x_0 d\tau = x_0(1 + t),$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t x_0(1 + \tau)d\tau = x_0\left(1 + t + \frac{t^2}{2!}\right),$$

$$\dots$$

ნებისმიერი ნატურალური k-სათვის გვექნება:

$$x_k(t)=x_0\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^k}{k!}\right).$$

როდესაც $k\to\infty$ ფუნქციათა $(x_k(t))_{n\geq1}$ მიმდევრობა ნებისმიერი $t\in\mathbf{R}^1$-სათვის თანაბრად კრებადია $x(t)=x_0e^t$ ფუნქციისაკენ ნებისმიერ $[-a,a]\subset\mathbf{R}^1$ ჩაკეტილ მონაკვეთზე, ეს ნიშნავს, რომ კოშის ამოცანის ამონახსნია $x(t)=x_0e^t$ ფუნქცია (ამ ამონახსნის მიღება სხვა მეთოდებითაც შეგვიძლია).

ზემოთ მოყვანილი (1) კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობის კიდევ რამდენიმე საკმარისი პირობაა ცნობილი. ერთ-ერთი ასეთია ქვემოთ მოყვანილი თეორემა.

თეორემა (ჯ. პეანო). *თუ f ფუნქცია უწყვეტია Π-ზე, მაშინ $t_0-d\leq$ $\leq t\leq t_0+d$ სეგმენტზე არსებობს (1) ამოცანის ერთი ამონახსნი მაინც.*

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ f ფუნქციის უწყვეტობა უზრუნველყოფს ამონახსნის მხოლოდ არსებობას და იგი ვერ უზრუნველყოფს ამონახსნის ერთადერთობას, მაშინ, როდესაც, ქვემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად, გარკვეულ პირობებში შესაძლებელია ამონახსნის ერთადერთობის დამტკიცება, თუ ამონახსნი არსებობს.

თეორემა 2 (უ. ოსგუდი). *ვთქვათ, არსებობს ისეთი $\omega=\omega(\xi)$ ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია, როდესაც $\xi\geq0,\omega(0)=0$ და $\omega(\xi)>0$, როდესაც $\xi>0$. გარდა ამისა, დავუშვათ $\int_0^{2b}\frac{d\xi}{\omega(\xi)}=+\infty$ და Π-ზე სრულდება უტოლობა $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leq\omega(|x_1-x_2|)$, მაშინ t_0-ის მიდამოში არსებობს (1) ამოცანის არაუმეტეს ერთი ამონახსნი.*

ამოცანა 2. ვიპოვოთ რომელიმე სეგმენტი, რომელზედაც $x'(t)=t+$ $+x^3(t)$, $x(0)=0$ კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

ვისარგებლოთ არსებობის თეორემით. ჩვენს ამოცანაში $t_0=x_0=0$, $f(t,x)=t+x^3$. f უწყვეტია ნებისმიერ $\Pi=\{(t,x)\in R^2:|t|\leq a,|x|\leq b\}$ მართკუთხედზე და აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას, რადგან $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2$ შემოსაზღვრულია $3b^2$ რიცხვით. მაშასადამე, $[-d.d]$ სეგმენტზე, სადაც $d=\min(a,\frac{b}{M})$, $M=max_{(t,x)\in\Pi}|f(t,x)|=a+b^3$ არსებობს ჩვენი ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.

ამრიგად, საჭიროა ვიპოვოთ d, რომელიც დააკმაყოფილებს ტოლობას $d=\min(a,\frac{b}{a+b^3})$. ნათელია, რომ, თუ რომელიმე I სეგმენტზე ერთადერთი ამონახსნი არსებობს, მაშინ ასეთი ამონახსნი იარსებებს I-ში შემავალ ნებისმიერ სეგმენტზე. აქედან ცხადია, რომ უნდა შევეცადოთ ვიპოვოთ რაც შეიძლება „დიდი" სეგმენტი. ამის გამო ვეძებთ $\max\min(a,\frac{b}{a+b^3})$. რადგან $\psi(a)=a$ ფუნქცია ზრდადია, როდესაც $a\geq 0$, ხოლო $\varphi(a)=\frac{b}{a+b^3}$ ამ დროს კლებადია, ამიტომ მაქსიმუმი მიიღწევა, როდესაც $\psi(a)=\varphi(a)$, ე.ი. როდესაც სრულდება ტოლობა $a=\frac{b}{a+b^3}$. მაგრამ a-ს მაქსიმუმი (როგორც b-ს ფუნქციის) მიიღწევა, როდესაც $\frac{b}{a+b^3}$ გამოსახულების წარმოებული b-თი 0-ის ტოლია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $b^3=\frac{a}{2}$. $a=\frac{b}{a+b^3}$ გამოსახულებაში $2b^3=a$-ს ჩასმით მივიღებთ, რომ $b=\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ და $a=\frac{2}{\sqrt[5]{256}}=$ $=\frac{1}{3}\sqrt[5]{36}\approx 0{,}66$. ამრიგად, მოცემული კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნის არსებობა გარანტირებულია $-0{,}66\leq t\leq 0{,}66$ სეგმენტზე.

ზემოთ მოყვანილი ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენეთ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა და მივიღეთ სეგმენტი, რომელზედაც არსებობს კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი. ამასთან, შევეცადეთ რაც შეიძლება დიდი ინტერვალი მიგვეღო. ახლა დავსვათ ასეთი კითხვა: შესაძლებელია თუ არა მიღებული სეგმენტის გაზრდა? ამ კითხვაზე პასუხი დადებითია და ჩვენ დავამტკიცებთ $[-0.66,0.66]$-ს შემცველი I სეგმენტის არსებობას, სადაც მოცემულ კოშის ამოცანას ექნება ერთადერთი ამონახსნი. ამისათვის გამოვიყენებთ შემდეგ ლემას.

ლემა (ჯ.ბიჰარი) *დავუშვათ, სრულდება უტოლობა:*

$$x(t)\leq C+\int_{t_0}^{t}v(\tau)g\big(x(\tau)\big)d\tau,\ t_0\leq t\leq a,$$

სადაც $C=const>0$, $x(t)$ და $v(t)$ არაუარყოფითი და უწყვეტი ფუნქციებია, ხოლო $g(x)$ კი უწყვეტი, არაუარყოფითი და ზრდადი ფუნქციაა (არააუცილებლად მკაცრად ზრდადი). ამასთან, $g(x)>0$, როდესაც $x>0$. მაშინ $x(t)\leq G^{-1}\left(G(C)+\int_{t_0}^{t}v(\tau)d\tau\right)$, სადაც $G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{d\tau}{g(\tau)}$, $u_0>0$, ყოველი $t\in[t_0,a]$, რომელთათვისაც $G(G)+\int_{u_0}^{u}v(\tau)d\tau$ ეკუთვნის G^{-1}-ს განსაზღვრის არეს.

ამ ლემის გამოყენებით საგრძნობლად შეგვიძლია გავაფართოვოთ სეგ-მენტი, სადაც კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი არსებობს. მართლაც,

$$x(t) = \int_0^t (\tau + x^3(\tau))d\tau = \frac{t^2}{2} + \int_0^t x^3(\tau)\, d\tau.$$

აქედან $|x(t)| \le \frac{a^2}{2} + \int_0^t |x(\tau)|^3\, d\tau, \quad 0 \le t \le a.$ ამრიგად, $C = \frac{a^2}{2}$, $v(t) \equiv 1,\ g(x) = x^3$. ამიტომ:

$$G(u) = \int_{u_0}^u \frac{d\tau}{\tau^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{u^2}\right),\ u \ge u_0 > 0,$$

$$G^{-1}(t) = \frac{u_0}{\sqrt{1-2u_0^2\tau}},\ G(C) + \int_0^t d\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_0^2} - \frac{1}{C^2}\right) + t.$$

მაშასადამე, $G^{-1}\left(G(C) + \int_0^t v(\tau)d\tau\right) = \frac{C}{\sqrt{1-2C^2t}}$, $|x(t)| \le \frac{C}{\sqrt{1-2C^2t}}$, სა-დაც $t \in \left[0, \frac{1}{2C^2}\right[$. $a = \frac{1}{2C^2}$ განტოლებიდან ვპოულობთ $max a = \sqrt[5]{2} \approx 1{,}15$. ახლა შევცვალოთ t ცვლადი $-t$-თი და ჩავატაროთ იგივე გამოთვლები. მი-ვიღებთ უტოლობას:

$$|x(t)| \le \frac{C}{\sqrt{1+2C^2t}},\ t \le 0,$$

რაც გვიჩვენებს, რომ ჩვენი ამოცანის ამონახსნი არსებობს, როდესაც $-\sqrt[5]{2} \le t \le 0$. ამგვარად, მოცემული კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამო-ნახსნი $[-1.15, 1.15]$ სეგმენტზე.

ამოცანა 3. ვიპოვოთ რაიმე სეგმენტი, რომელზედაც არსებობს $x'(t) = 2x^2(t) - t, x(1) = 1$ კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.

გამოვიყენოთ არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა. ამ ამოცანისათ-ვის $t_0 = x_0 = 1$, $f(t,x) = 2x^2 - t$. ეს ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ $\Pi = \{(t,x) \in R^2 : |t-1| \le a, |x-1| \le b\}$ მართკუთხედზე და აქვს x-ის მიმართ შემოსაზღვრული კერძო წარმოებული: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = |4x| \le$ $\le 4|b+1|$. ამიტომ $|t-1| \le d = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ სეგმენტზე, სადაც $M = max_{(t,x)\in\Pi}|2x^2 - t| \le 2(1+b)^2 + 1 + a$, არსებობს ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი. ისევე, როგორც ამოცანა 1-ში, a და b პარამეტრებს ვპოულობთ ტოლობებიდან:

$$a = \frac{b}{2(1+b)^2 + a + 1} \text{ და } \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b}{2(1+b)^2 + a + 1}\right) = 0. \qquad (*)$$

მაშასადამე, $a=\frac{1}{4(1+b)}, 2b^2-3=\frac{1}{4(1+b)}$. უკანასკნელი ტოლობიდან გამოდის, რომ $b>\sqrt{\frac{3}{2}}>1{,}2$, მაშინ $a<\frac{1}{4(1+1{,}2)}=0{,}11$. მაგრამ d-ს შეფასება შესაძლებელია გაუმჯობესდეს, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $a<1$. მაშინ $M=2(1+b)^2-1+a$ და (*)-ის ანალოგიური ტოლობებიდან ვპოულობთ:

$$a=\frac{1}{4(1+b)}, 2b^2-1=\frac{1}{4(1+b)}<\frac{1}{4} \Rightarrow b<\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

მაშასადამე, $a=\frac{1}{4(1+b)}>\frac{1}{4\left(1+\sqrt{\frac{5}{8}}\right)}\approx 0{,}13$. ამგვარად, $0{,}87\le t\le 1{,}13$ სეგმენტზე არსებობს ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი. აქვე შევნიშნოთ, რომ ბიხარის ლემის გამოყენებით შესაძლებელია $[0.87, 1.13]$ შემცველი I სეგმენტის პოვნა, რომელზედაც გარანტირებული იქნება ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა.

ამოცანა 4. ვიპოვოთ $x'(t)=t-x^2(t), x(0)=0$ კოშის ამოცანის ამონახსნის მესამე მიახლოება და შევაფასოთ ცდომილება, როდესაც $0\le t\le 0.5$.

პიკარის მიახლოებითი მეთოდით ვპოულობთ:

$$x_0=0;\ x_1(t)=\int_0^t(\tau-x_0^2)d\tau=\frac{t^2}{2};\ x_2(t)=\int_0^t\left(\tau-\frac{\tau^4}{4}\right)d\tau=\frac{t^2}{2}-\frac{t^5}{20};$$
$$x_3(t)=\int_0^t\left(\tau-\left(\frac{\tau^2}{2}-\frac{\tau^5}{20}\right)^2\right)d\tau=\frac{t^2}{2}-\frac{t^5}{20}+\frac{t^8}{160}-\frac{t^{11}}{4400}.$$

ახლა შევაფასოთ მიღებული მიახლოების ცდომილება. პირველ რიგში ვიპოვოთ სეგმენტი, სადაც ამონახსნის ერთადერთობაა გარანტირებული. მსჯელობა ჩავატაროთ წინა ამოცანების ანალოგიურად და მივიღებთ, რომ $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\le t\le\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. ამ სეგმენტზე ფუნქციათა მიმდევრობა:

$$x_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^t f\big(\tau, x_n(\tau)\big)d\tau \tag{1}$$

თანაბრად კრებადია

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^t f\big(\tau, x(\tau)\big)d\tau \tag{2}$$

ინტეგრალური განტოლების ამონახსნისაკენ. (2) გამოსახულებას წევრობრივად გამოვაკლოთ (1) და სხვაობა შევაფასოთ ყოველი $n=0,1,2,\ldots$-სათვის:

$$|x(t)-x_0| \le \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, x(\tau)\big)d\tau = \int_{t_0}^{t} |\psi(\tau)|d\tau, \quad \psi(\tau) = \big|f\big(\tau, x(\tau)\big)\big|,$$

$$|x(t)-x_1(t)| \le \int_{t_0}^{t} \big|f\big(\tau, x(\tau)\big) - f(\tau, x_0)\big|d\tau \le k\int_{t_0}^{t} d\xi \int_{t_0}^{\xi} \psi(\tau)d\tau =$$

$$= k\int_{t_0}^{t} (t-u)\psi(u)du$$

... ...

$$|x(t)-x_n(t)| \le \int_{t_0}^{t} \big|f\big(\tau, x(\tau)\big) - f\big(\tau, x_{n-1}(\tau)\big)\big|d\tau \le$$

$$\le \frac{K^n}{n!}\int_{t_0}^{t} (t-u)^n \psi(u)du,$$

სადაც K ლიპშიცის პირობაში მითითებული რიცხვია $\Pi = \{(t,x) \in R^2 : |t-t_0| \le a, |x-x_0| \le b\}$ მართკუთხედზე, რომლისთვისაც სამართლიანია შეფასება $K \le max_{(t,x)\in\Pi}|2x(t)| = 2\big||y|\big|$. გარდა ამისა, $\psi(u) = |u - x^2(u)| \le |u| + ||x||^2$, $n = 3$, $t_0 = 0$. ამიტომ ზემოთ მოყვანილი უტოლობებიდან მივიღებთ:

$$||x - x_3|| \le \frac{4}{3}||x||^3 \int_{t_0}^{t} (t-u)^3(u + ||x||^2)du \le$$

$$\le \frac{4}{3}\big||x|\big|^3 \int_0^{0,5}(0,5-u)^3\left(u + \big||x|\big|^2\right)du = \frac{\big||x|\big|^3}{48}\left(0,1 + \big||x|\big|^3\right). \qquad (*)$$

დაგვრჩა შესაფასებელი $0 \le t \le 0,5$ სეგმენტზე, რომელიც შედის $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right]$-ში, $||x||$სიდიდე. ბიხარის ლემიდან გამომდინარეობს, რომ $|x| \le \frac{C}{1-Cx}$, სადაც $C = max_{0\le t\le 0,5}\frac{t^2}{2} = 0,125$, ამიტომ $\big||x|\big| \le \frac{0.125}{1-0,125\times 0,5} \le 0,134$. (*)-ის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\big||x - x_3|\big| \le 0,6 \times 10^{-5}.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. პიკარის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ მართკუთხეში ამოხსენით კოშის ამოცანა:
$$y'(x) = x^2 + y^2(x), \; y(0) = 0.$$

პასუხი: $M = 2, d = \frac{1}{2}; y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} + \cdots$

2. იპოვეთ მიახლოებითი მიმდევრობის პირველი სამი წევრი:

   1) $y'(x) = x^2 - y^2(x),\ y(-1) = 0.$

   პასუხი: $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{1+x^3}{3},$

   $$y_2(x) = \frac{1}{126}(33 - 14x + 42x^3 - 7x^4 - 2x^7).$$

   2) $y'(x) = x + y^2(x),\ y(0) = 0.$

   პასუხი: $y_0(x) = 0, y_1(x) = \frac{x^2}{2}, y_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}.$

   3) $y'(x) = x + y(x),\ y(0) = 1.$

   პასუხი: $y_0(x) = 1, y_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$

   $$y_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}.$$

3. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია $y = x^2$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას $[a, b]$ მონაკვეთზე, მაგრამ არ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას მთელ R ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე.

3. პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები

3.1. განცალებადცვლადებიანი განტოლება

როგორც უკვე აღვნიშნეთ,

$$x^{/} = f(t) \qquad (1)$$

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის პოვნა, სადაც $f(t)$ ცნობილი ფუნქციაა, სიძნელეს არ წარმოადგენს. $x(t)$ უცნობი ფუნქციის მოძებნა ხდება ინტეგრების ოპერაციის საშუალებით:

$$x(t) = \int_0^t f(s)ds + C\,,\ x(t) = \int f(s)ds + C \qquad (2)$$

ან, თუ $F(t)$-თი $f(t)$ ფუნქციის პირველყოფილს აღვნიშნავთ, მაშინ:

$$x(t) = F(t) + C\,.$$

ახლა განვიხილოთ განტოლება:

$$x^{/} = g(x)\,, \qquad (3)$$

სადაც $g(x)$ უცნობი ფუნქციაა. ამ განტოლების ამოხსნა ზემოთ მოყვანილი გზით უკვე შეუძლებელია. ამაში ხელს გვიშლის $g(x)$! გავიხსენოთ მათემატიკაში მიღებული მეთოდები რაიმე სირთულის გადასალახად. ხშირად გამოსახულებას მისი ეკვივალენტური ფორმით გარდავქმნით ხოლმე. ამისათვის გამოსახულებას ვუმატებთ და ვაკლებთ ან ვამრავლებთ და ვყოფთ ერთსა და იმავე გამოსახულებაზე, ან ვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას (მარტივად რომ ვთქვათ, რთულ გამოსახულებას რაიმე სიმბოლოთი აღვნიშნავთ). (3) განტოლების ანალიზისათვის მისი მარჯვენა და მარცხენა მხარეები გავყოთ $g(x)$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{x^{/}}{g(x)} = 1\,. \qquad (4)$$

ამის შემდეგ ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარე ვაინტეგროთ t-თი. ამასთან, უკვე შესაძლებელია მარცხენა მხარის ინტეგრებაც, რადგან $\int \frac{x^{/}}{g(x)}dt = \int \frac{dx}{g(x)}$. შევნიშნოთ, რომ ამ ტოლობას ადგილი აქვს იმისგან

დამოუკიდებლად, როგორია $x(t)$. თუ ახლა $G(x)$-ით აღვნიშნავთ $\dfrac{1}{g(x)}$ ფუნქციის პირველყოფილს, (4)-ის ინტეგრებით t-თი მივიღებთ:

$$G(x) = t + C \, , \tag{5}$$

საიდანაც

$$x = G^{-1}(t + C), \tag{6}$$

აქ G^{-1} აღნიშნავს G-ს შექცეულ ფუნქციას.

ახლა განვიხილოთ განტოლება:

$$x^{/} = g(x)f(t) \, . \tag{7}$$

ამ განტოლების ამონახსნის პოვნა ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურად ხდება. $g(x)$-ზე განტოლების ორივე მხარის გაყოფის შემდეგ შესაძლებელია მიღებული გამოსახულების ორივე მხარის ინტეგრება. აღვნიშნოთ $F(t)$-თი და $G(x)$-ით, შესაბამისად, $f(t)$ და $\dfrac{1}{g(x)}$ ფუნქციების პირველყოფილები, მივიღებთ:

$$G(x) = F(t) + C \, ,$$

საიდანაც:

$$x(t) = G^{-1}(F(t) + C) \, . \tag{8}$$

ვიტყვით, რომ მოცემულია *განტოლება განცალებადი ცვლადებით* (ან გვაქვს განცალებადცვლადებიანი განტოლება), თუ მას აქვს სახე:

$$x^{/} = g(x)f(t) \, ,$$

ან:

$$g_1(x)f_1(t)dx + g_2(x)f_2(t)dt = 0 \, . \tag{9}$$

ამ განტოლებების სახელწოდება შეიცავს მათი ამოხსნის პრინციპსაც! განტოლების ამოსახსნელად საჭიროა ცვლადების განცალება. ყველა წევრი, რომელიც დამოკიდებულია x-ზე, საჭიროა გადავიტანოთ ერთ მხარეს, ხოლო მეორე მხარეს დავტოვოთ t-ზე დამოკიდებული წევრები. ამის შემდეგ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\varphi(x)x^{/} = \psi(t)$$

ან:

$$\varphi(x)dx = \psi(t)dt\,.$$

ახლა კი საჭიროა მიღებული გამოსახულების ინტეგრება. ინტეგრების დროს საკმარისია განტოლების ორივე მხარეს ინტეგრების ნიშნები მივაწეროთ და პირველყოფილი ვიპოვოთ, არ ვიზრუნოთ იმაზე, თუ რომელი ცვლადების მიმართ ხდება ინტეგრება. ასეთი პროცედურის ჩატარება მათემატიკურად კორექტულია, რადგან სამართლიანია განსაზღვრულ და განუსაზღვრელ ინტეგრალში ცვლადის გარდაქმნის შემდეგი ტოლობა:

$$\int \varphi(x(t))x^{/}(t)dt = \int \varphi(x)dx\,|_{x=x(t)}$$

$x(t)$ ფუნქციათა საკმაოდ ფართო კლასისათვის.

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ სამი ტიპის განცალებადცვლადებიანი განტოლება. ამოვწეროთ მათი ამონახსნები. ბუნებრივია, დაისვას კითხვა: ნაპოვნია ყველა ამონახსნი? ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამონახსნთა ზემოთ მოყვანილი ფორმულებით მოცემული ფუნქციები არიან თუ არა *ზოგადი ამონახსნები.* ქვემოთ მოყვანილი მსჯელობა ამ კითხვის პასუხია.

დავიწყოთ (1) განტოლებით. თუ $x(t)$ (1) განტოლების ამონახსნია, მაშინ $(x(t)-F(t))^{/} = f(t)-f(t)\equiv 0$, ამიტომ ლაგრანჟის თეორემიდან სასრული ნაზრდის შესახებ, გამომდინარეობს, რომ $x(t)-F(t)$ სხვაობა შესაძლებელია იყოს მხოლოდ მუდმივი და სხვა არაფერი! ეს კი ნიშნავს, რომ (2) ამოწურავს (1) დიფერენციალური განტოლების ყველა ამონახსნს.

(3) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი კი (6) გამოსახულებით მხოლოდ მაშინ მოიცემა, როდესაც $g(x)$ განსხვავებულია ნულისაგან. თუ $g(x)$ ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ $x^{/}(t)\neq 0$ და, ამრიგად, იგი ნიშანს არ იცვლის, ე.ი. მკაცრად მონოტონურიცაა. ასეთ პირობებში შესაძლებელია გამოვიყენოთ თეორემა შექცეული ფუნქციის არსებობის შესახებ, რაც ჩვენს შემთხვევაში ნიშნავს, რომ $x^{/}(t) = g(x(t))$ განტოლებიდან შეგვიძლია ვიპოვოთ t, როგორც x-ის ფუნქცია -$t(x)$, ამასთან, $t^{/}(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

ეს უკანასკნელი კი (1) ტიპის განტოლებაა, ამიტომ მისი ამონახსნი (5) ფორმულით მოიცემა, ხოლო საძიებელი ფუნქცია კი (6) გამოსახულებით. აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ფაქტი, რომ $G(x)$ ფუნქცია არის უწყვეტი და მონოტო-

ნური (რადგან მისი წარმოებული $-\dfrac{1}{g(x)}$ ნიშანს არ იცვლის), რის გამოც (5) და (6) გამოსახულებები ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

იმ შემთხვევაში, როდესაც $g(x)$ ნულის ტოლი ხდება, სიტუაცია შედარებით რთულდება. მაგალითისათვის განვიხილოთ განტოლება:

$$x^{/}(t)=x(t).$$

ცვლადების განცალების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{x^{/}}{x}=1,$$

რომლის ინტეგრება გვაძლევს:

$$\ln|x|=t+C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა, რომელიც შესაძლებელია გადაიწეროს ეკვივალენტური ფორმით:

$$|x(x)|=e^{t+C},$$

ანუ $x(t)=\pm e^{t+C}\Rightarrow x(t)=(\pm e^{C})e^{t}$. ე.ი. ამონახსნისათვის მივიღეთ გამოსახულება $x(t)=\widetilde{C}e^{t}$, სადაც $\widetilde{C}$ ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული მუდმივაა. ამრიგად, განტოლებისათვის 0-ოვან, ანუ ტრივიალურ ამონახსნს ვერ ვღებულობთ, მაშინ, როდესაც ასეთი ფუნქცია მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს. ეს ნიშნავს, რომ $x(t)=\widetilde{C}e^{t}$ არ არის $x^{/}(t)=x(t)$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ამიტომ, ამონახსნთა სიმრავლეს საჭიროა დავუმატოთ $x(t)\equiv 0$ ტრივიალური ამონახსნი. ტრივიალური ამონახსნის „დაკარგვა" გამოიწვია $g(x)\neq 0$ დაშვებამ. $g(x)=0$ განტოლების ამონახსნები, რომლებიც არიან ნულისაგან განსხვავებული მუდმივები, $\widetilde{C}$-ის შერჩევის ხარჯზე ხვდებიან ზოგად ამონახსნში, მაგრამ ზოგჯერ შესაძლებელია მათი დამატება მოგვიხდეს.

(3) სახის განტოლების ამონახსნების განსაკუთრებულობათა აღწერა ამით არ დამთავრებულა. ამაში დავრწმუნდებით შემდეგ კლასიკურ მაგალითზე:

$$x^{/}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^{2}}\quad. \tag{10}$$

ამ განტოლების ამონახსნები ზემოთ მოყვანილი ფორმულების შესაბამისად არიან $x(t)=(t-C)^3$ და $x(t)\equiv 0$ ფუნქციები. მაგრამ, ამათ გარდა, (10) განტოლების ამონახსნებია აგრეთვე ფუნქციები:

$$x_1(t)=\begin{cases} 0, & t<t_0, \\ (t-t_0)^3, & t\ge t_0 \end{cases}$$

ან:

$$x_2(t)=\begin{cases} (t-t_0)^3, & t<t_0, \\ 0, & t_0\le t<t_1, \\ (t-t_1)^3, & t\ge t_1. \end{cases}$$

ამაში უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით. ამონახსნთა ასეთი მრავალფეროვნება გამოწვეულია $g(x)$ ფუნქციისაგან. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1. *დავუშვათ, $g(x)$ დიფერენცირებადია და მისი წარმოებული შემოსაზღვრულია. მაშინ (3) განტოლების ამონახსნები მოიცემა (6) ფორმულითა და $g(x)=0$ განტოლებების ამონახსნებით.*

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ „საკმაოდ კარგი“ $g(x)$-სათვის იმ ანომალიას, რომელიც (10) განტოლებისათვის გვქონდა, ადგილი არ ექნება. (10) განტოლებაში $g(x)$-ის როლს ასრულებს $\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$, რომლის წარმოებული ფუნქციაა $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$ და იგი არ არის შემოსაზღვრული.

ზოგადი (7) და (9) განტოლებებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2. *დავუშვათ, $g(x)$ დიფერენცირებადია და მისი წარმოებული შემოსაზღვრულია, ხოლო $f(t)$ ფუნქცია კი უწყვეტია. მაშინ (7) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა (8) გამოსახულებით და იმ მუდმივათა ერთობლიობით, რომლებიც $g(x)=0$ განტოლების ამოხსნით მიიღება.*

თუ განტოლება მოცემულია (9) სახით, მაშინ მისი ამონახსნებია (8) გამოსახულებით მოცემული ფუნქციები, $x\equiv const$ მუდმივები, სადაც ეს მუდმივები $g_2(x)=0$ განტოლების ამონახსნებია და აგრეთვე $t\equiv const$ მუდმივები, რომლებიც $f_1(t)=0$ განტოლების ამონახსნებია.

ზოგჯერ დიფერენციალური განტოლება არ არის განცალებადცვლადებიანი, მაგრამ, გარკვეული გარდაქმნების შემდეგ, ის შესაძლებელია მიყვანილ იქნეს ასეთ განტოლებამდე. ამგვარი კონკრეტული განტოლებების ამოხსნის მეთოდს განვიხილავთ ტიპიურ მაგალითებზე. აქ ახლა ამ სახის განტოლებათა შედარებით ფართო კლასს შევეხებით. კერძოდ, განვიხილოთ:

$$y' = f(x, y) \tag{11}$$

სახის განტოლება, სადაც f თავისი არგუმენტების *ერთგვაროვანი ფუნქციაა.* მანამ, სანამ ერთგვაროვან ფუნქციას განვმარტავდეთ, შემოვიტანოთ m*-ერთგვაროვანი* (ან m*-ხარისხის ერთგვაროვანი*) ფუნქციის ცნება. ორი ცვლადის $f(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება m-ერთგვაროვანი (ან m-ხარისხის ერთგვაროვანი), თუ $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$. მაგალითად, ორი ცვლადის ერთგვაროვანი ფუნქციებია $ax + by$, $ax^2 + bxy + cy^2, x^2 cos\frac{y}{x}$, $y + \sqrt{x^2 - y^2}$. თუ $m = 0$, მაშინ უბრალოდ ვიტყვით, რომ *ფუნქცია ერთგვაროვანია.* ნებისმიერი m-ერთგვაროვანი $f(x, y)$ ფუნქცია წარმოიდგინება $f(x, y) = x^m g\left(\frac{y}{x}\right)$ სახით, სადაც g ერთი ცვლადის ფუნქციაა, რომელიც სრულად განისაზღვრება f-დან. მართლაც, შემოვიტანოთ აღნიშვნა $t = \frac{1}{x}$. მაშინ, $f(x, y) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ არის ერთი $\frac{y}{x}$ ცვლადის ფუნქცია, რომელიც აღვნიშნოთ g-თი და მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას (ანალოგიური მსჯელობით ვაჩვენებთ, რომ $f(x, y) = y^m h\left(1, \frac{x}{y}\right)$, სადაც h, ისევე როგორც g, ცალსახად განისაზღვრება).

დავუბრუნდეთ (11) განტოლებას. რადგან $m = 0$, ამიტომ (11) მიიღებს სახეს:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

$u = \frac{y}{x}$ ჩასმით განტოლება მიიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე. მართლაც, რადგან $y = ux$ და $y' = u + x\frac{du}{dx}$, მივიღებთ განტოლებას:

$$xdu = (g(u) - u)dx.$$

დავუშვათ, $g(u) \neq u$. თუ $\int \frac{du}{g(u) - u}$-ს აღვნიშნავთ Φ-თი, მივიღებთ განტოლების ამონახსნს:

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c.$$

ხოლო, თუ $g(u) = u$, მაშინ (11) განტოლება მიიყვანება $y' = \frac{y}{x}$ განტოლებაზე, რომელიც, თავის მხრივ, განცალებადცვლადებიანი განტოლებაა.

განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე მიიყვანება აგრეთვე

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{12}$$

სახის განტოლება, სადაც $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. მართლაც, განვიხილოთ გარდაქმნა $x = \tau + \alpha, y = \eta + \beta$ და α,β მუდმივები იმგვარად შევარჩიოთ, რომ (12) განტოლების მარჯვენა მხარემ მიიღოს სახე:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = f\left(\frac{a_1\tau + b_1\eta}{a_2\tau + b_2\eta}\right). \tag{13}$$

α და β განისაზღვრებიან წრფივ განტოლებათა შემდეგი არაერთგვაროვანი სისტემიდან:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$$

რომელსაც ერთადერთი ამონახსნი აქვს, რადგან სისტემის მთავარი დეტერმინანტი 0-საგან განსხვავებულია. (13) განტოლების მარჯვენა მხარე ერთგვაროვანი ფუნქციაა და, ამრიგად, (13) და, მაშასადამე, (12) მიიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე. ახლა, ვთქვათ, $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, მაშინ $a_1x + b_1y = l(a_2x + b_2y)$, სადაც l რაიმე არანულოვანი მუდმივია. შემოვიტანოთ აღნიშვნა $z = a_2x + b_2y$, მაშინ:

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx}.$$

ამის შემდეგ (12) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{z + c_1}{lz + c_2}\right).$$

ეს უკანასკნელი კი – განცალებადცვლადებიანი განტოლებაა.

3.2. ტიპიური ამოცანები. განცალებადცვლადებიანი განტოლებები

1. $\sqrt{y^2 + 1}\, dx = xydy$

განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $\sqrt{y^2 + 1}\, x$. იმისათვის, რომ ეს ოპერაცია შევასრულოთ, საჭიროა დავუშვათ, რომ $\sqrt{y^2 + 1}\, x \neq 0$, საიდანაც გა-

მომდინარეობს, რომ $x \neq 0$. გაყოფის შემდეგ მივიღებთ: $\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$, $x \neq 0$. ახლა ვაინტეგროთ განტოლების ორივე მხარე:

$$\int dx/x = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} + C. \tag{1}$$

ამ გამოსახულების მარცხენა მხარეს ე.წ. ცხრილის ინტეგრალია და მისი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int dx/x = \ln|x|.$$

მარჯვენა მხარე $\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$ მივიყვანოთ ცხრილის ინტეგრალზე. ამისათვის შემოვიღოთ ახალი ცვლადი $t = \sqrt{y^2+1}$, საიდანაც $y = \sqrt{t^2-1}$, ხოლო $dy = \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}$. ჩავსვათ $\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$ გამოსახულებაში y-სა და dy-ის ახლახან მიღებული გამოსახულებები:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{\sqrt{t^2-1}\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}}{t} = \int dt = t \Rightarrow \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1}.$$

ამრიგად, (1) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C,$$

რაც ამოსავალი განტოლების ამონახსნია, როდესაც $x \neq 0$. ახლა შევამოწმოთ, არის თუ არა $x = 0$ განტოლების ამონახსნი. x-ის ნაცვლად განტოლების ორივე მხარეს 0-ის ჩასმით გამოსახულება იგივეობად გადაიქცევა, რაც იმას ნიშნავს, რომ $x = 0$ განტოლების ამონახსნია.

აქედან, განტოლების ყველა ამონახსნია $\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C$, $x = 0$.

2. ამოხსენით კოშის ამოცანა $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1$.

პირველ რიგში განტოლების ყველა ამონახსნი ვიპოვოთ. გადავწეროთ განტოლება მისი ეკვივალენტური სახით:

$$(x^2-1)dy + 2xy^2dx = 0 \tag{2}$$

და განვაცალოთ x და y ცვლადები, რისთვისაც გამოსახულება გავყოთ $(x^2-1)y^2$-ზე და დავუშვათ, რომ $(x^2-1)y^2 \neq 0$, საიდანაც მივიღებთ: $x \neq \pm 1$ და $y \neq 0$. გაყოფის შემდეგ (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2xdx}{x^2-1} = 0.$$

მოვახდინოთ მიღებული გამოსახულების ინტეგრება:

$$\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{2xdx}{x^2 - 1} = C$$

მიღებული ინტეგრალების აღება სიძნელეს არ წარმოადგენს. მართლაც, $\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით $-\frac{1}{y}$-ის გაწარმოებით: $(-\frac{1}{y})' = \frac{1}{y^2}$. რაც შეეხება $\int \frac{2xdx}{x^2-1}$ ინტეგრალს, იგი გავამარტივოთ შემდეგნაირად: $\int \frac{2xdx}{x^2-1} = \int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1}$, ეს უკანასკნელი კი უკვე ცხრილის ინტეგრალია. თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $t = x^2 - 1$, მივიღებთ:

$$\int \frac{d(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| \Longrightarrow \int \frac{d(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \ln|x^2 - 1|.$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{2xdx}{x^2 - 1} = C \Rightarrow -\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| = C.$$

გამოსავალი განტოლების ამონახსნთა ოჯახია, როდესაც $x \neq \pm 1$ და $y \neq 0$. ამასთან, $x = \pm 1$, განტოლების ამონახსნი არ არის, ხოლო $y = 0$ ფუნქცია განტოლებას აკმაყოფილებს, ამიტომ $-\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| = C$-თან ერთად იგი განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია. აქედან, $-\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| = C$ და $y = 0$ ფუნქციები ამოწურავენ ჩვენი განტოლების ყველა ამონახსნს. ახლა შევუდგეთ კოშის ამოცანის ანალიზს, რომლის თანახმად საჭიროა $(0,1)$ წერტილზე გამავალი ინტეგრალური წირის ამორჩევა ინტეგრალურ წირთა უკვე მიღებული ოჯახიდან. $y = 0$ (იგივურად ნულოვანი ფუნქცია), ნათელია, კოშის ამოცანის ამონახსნი ვერ იქნება, ამიტომ ამონახსნი, რომელიც $y(0) = 1$ პირობას დააკმაყოფილებს, უნდა ვეძებოთ $-\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| = C$ ფუნქციათა ოჯახში. ამ გამოსახულებაში $x = 0$ ჩასმით მივიღებთ, რომ $-\frac{1}{y(0)} = C$. რადგან $y(0) = 1$, ამიტომ $C = -1$. ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ $-\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| = C$ გამოსახულებაში და ცხადი სახით ამოვწეროთ $y(x)$ ფუნქცია. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $y(x) = \frac{1}{1+\ln|x^2-1|}$ არის კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.

3. ამოხსენით კოშის ამოცანა: $xy' + y = y^2, y(1) = 0{,}5$.

$$xy' + y = y^2 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \Rightarrow xdy + (y - y^2)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y-y^2} + \frac{dx}{x} = 0, \ y \neq 0{,}1; x \neq 0.$$

მოვახდინოთ $\frac{dy}{y-y^2} + \frac{dx}{x} = 0$ გამოსახულების ინტეგრება:

$$\int \frac{dy}{y - y^2} + \int \frac{dx}{x} = C.$$

დაწვრილებით განვიხილოთ პირველი შესაკრები:

$$\int \frac{dy}{y - y^2} = \int \frac{dy}{y(1 - y)} =$$

(მრიცხველს დავუმატოთ და გამოვაკლოთ y)

$$= \int \frac{dy}{y(1 - y)} = \int \frac{(y - y + 1)dy}{y(1 - y)} =$$

$$= \int \frac{ydy + (1 - y)dy}{y(1 - y)} = \int \frac{ydy}{y(1 - y)} + \int \frac{(1 - y)dy}{y(1 - y)} =$$

$$= -\int \frac{d(1 - y)}{(1 - y)} + \ln|y| = -\ln|1 - y| + \ln|y| = \ln\left|\frac{y}{1 - y}\right|.$$

მეორე შესაკრები $\int \frac{dx}{x}$ ცხრილის ინტეგრალია და $\int \frac{dx}{x} = \ln|\mathrm{x}|$. ამრიგად,

$$\int \frac{dy}{y - y^2} + \int \frac{dx}{x} = C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{1 - y}\right| + \ln|x| = C \ \Rightarrow xy(1 - y) = C$$

არის მოცემული განტოლების ამონახსნთა ერთობლიობა. აქვე შევნიშნოთ, რომ $y = 0{,}1; x = 0$ განტოლების ამონახსნებია და ისინი არ დაკარგულა, რადგან სამივე $xy(1 - y) = C$ ამონახსნების კერძო შემთხვევაა. $y(1) = 0{,}5$ პირობის $xy(1 - y) = C$ გამოსახულებაში ჩასმით ვპოულობთ $C = \frac{1}{4}$, რაც ნიშნავს, რომ კოშის ამოცანის ამონახსნია $4xy(1 - y) - 1 = 0$ ფუნქცია.

4. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$.

განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ e^s-ზე და მიღებული გამოსახულება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{ds}{dt} = e^s - 1.$$

მოვახდინოთ t და s ცვლადების განცალება:

$$\frac{ds}{e^s - 1} = dt,$$

ახლა ორივე მხარე ვაინტეგროთ:

$$\int \frac{ds}{e^s - 1} = \int dt\,.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარის ინტეგრება სიძნელეს არ წარმოადგენს. განვიხილოთ მარცხენა მხარე დაწვრილებით:

$$\int \frac{ds}{e^s - 1} =$$

(მრიცხველს დავუმატოთ და გამოვაკლოთ e^s)

$$\int \frac{(e^s - e^s + 1)ds}{e^s - 1} = \int \frac{e^s ds - (e^s - 1)ds}{e^s - 1}$$

$$\int \frac{e^s ds}{e^s - 1} - \int \frac{(e^s - 1)ds}{e^s - 1} = -\int \frac{d(e^s - 1)}{e^s - 1} - \int ds =$$

$$= -\ln|e^s - 1| - s = \ln\left|\frac{e^s - 1}{e^s}\right|.$$

ამრიგად, $\int \frac{ds}{e^s - 1} = \int dt$ გამოსახულება შესაძლებელია შეიცვალოს მისი ტოლი $\ln\left|\frac{e^s-1}{e^s}\right| = t + lnC$, $C > 0$ გამოსახულებით. აქ lnC ნებისმიერი რიცხვია, მისი შემოტანა ზოგადობას არ არღვევს და, ამასთან, გვეხმარება $\ln\left|\frac{e^s-1}{e^s}\right| = t + lnC$ გამოსახულებიდან განვსაზღვროთ ცხადად $s(t)$ ფუნქცია. მართლაც, $t + lnC = \ln(Ce^t)$, ამიტომ:

$$\frac{e^s - 1}{e^s} = Ce^t \Rightarrow \frac{1}{e^s} = 1 - Ce^t \Rightarrow e^s = \frac{1}{1 - Ce^t} \Rightarrow s = -\ln(1 - Ce^t).$$

ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნებია $s = -\ln(1 - Ce^t)$ ფუნქციათა ოჯახი.

5. $y' = \cos(y - x)$.

იმისათვის, რომ განტოლება მიყვანილ იქნეს განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე, საჭიროა შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი z, რომელიც ძველ x, y ცვლადებს უკავშირდება თანადობით: $z = y - x$. მაშინ $dz = dy - dx$ და განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$dy = coszdx \Longrightarrow dz + dx = coszdx \Longrightarrow dz = (cosz - 1)dx \Longrightarrow \frac{dz}{cosz - 1} = dx.$$

მივიღეთ განტოლება, რომელშიც x, z ცვლადები განცალებულია. ახლა მოვახდინოთ მისი ამოხსნა. როგორც უკვე ვიცით, საჭიროა განტოლების ორივე მხარე ვაინტეგროთ (შესაბამისი ცვლადებით):

$$\int \frac{dz}{cosz - 1} = \int dx \Longrightarrow$$

(გამოვიყენოთ ფორმულები: $cos^2\frac{z}{2} - sin^2\frac{z}{2} = cosz$ და $cos^2\frac{z}{2} + sin^2\frac{z}{2} = 1$, მაშინ $cosz - 1 = -2sin^2\frac{z}{2}$)

$$\int \frac{dz}{-2sin^2\frac{z}{2}} = x + C \Longrightarrow -\int \frac{2d(\frac{z}{2})}{2sin^2\frac{z}{2}} = x + C$$

(უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეს უკვე ცხრილის ინტეგრალი გვაქვს)

$$\Longrightarrow ctg\frac{z}{2} = x + C \Longrightarrow \; ctg\frac{z}{2} = x + C$$

ანუ:

$$ctg\frac{y - x}{2} = x + C \Longrightarrow \frac{y - x}{2} = arcctg(C + x) \Longrightarrow y = x + 2arcctg(C + x).$$

განტოლების ამ ამონახსნებს საჭიროა დავუმატოთ „დაკარგული ამონახსნები“, კერძოდ, ისინი, რომლებისთვისაც სრულდება ტოლობა $cosz = 1$, ანუ $z = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

6. $y' - y = 2x - 3$

გადავწეროთ მოცემული განტოლება მისი ეკვივალენტური ფორმით:

$$\frac{dy}{dx} = y + 2x - 3 \Rightarrow dy = (y + 2x - 3)dx.$$

შემოვიტანოთ ახალი $z = y + 2x - 3$ ცვლადი, მაშინ $dy = dz - 2dx$. ორივეს გათვალისწინებით $dy = (y + 2x - 3)dx$ გამოსახულება ჩაიწერება შემდეგი სახით: $dz - 2dx = zdx$, რომელიც $z \neq 2$ უტოლობის გათვალისწინებით გადაიწერება შემდეგნაირად: $dz = (z + 2)dx \Longrightarrow \frac{dz}{z+2} = dx$. უკანასკნელ განტოლებაში x, z ცვლადები განცალებულია, ამიტომ ვაინტეგროთ დამოუკიდებლად განტოლების ორივე მხარე:

$$\int \frac{dz}{z + 2} = \int dx \Rightarrow \ln|z + 2| = x + \ln C \; \Rightarrow z + 2 = Ce^x \Rightarrow z = Ce^x - 2.$$

ამის შემდეგ დავუბრუნდეთ ძველ x, y ცვლადებს და მივიღებთ: $y = Ce^x - 2x + 1$. ჩვენ დავუშვით, რომ $z \neq 2$, რაც ნიშნავს, რომ ამონახსნებიდან ამოვიღეთ $y = 1 - 2x$ წრფივი ფუნქცია, რომელიც მოცემული განტოლების ამონახსნია (ამაში უშუალო ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით). ამის გამო, მოგვიწევს $y = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციათა ოჯახს დავუმატოთ ეს ამონახსნიც, მაგრამ ამის საჭიროება არ არის, რადგან $y = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციათა ერთობლიობა $y = 1 - 2x$ ფუნქციას შეიცავს და იგი მიიღება $y = Ce^x - 2x + 1$-დან, როდესაც $C = 0$. ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციათა ოჯახი.

7. ვიპოვოთ განტოლების $x^2y' - cos2y = 1$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $y(+\infty) = \frac{9}{4}\pi$.

დავიწყოთ $x^2y' - cos2y = 1$ განტოლების ანალიზი.

$$x^2y' - cos2y = 1 \Rightarrow x^2\frac{dy}{dx} - cos^2y + sin^2y - cos^2y - sin^2y = 0 \Rightarrow$$

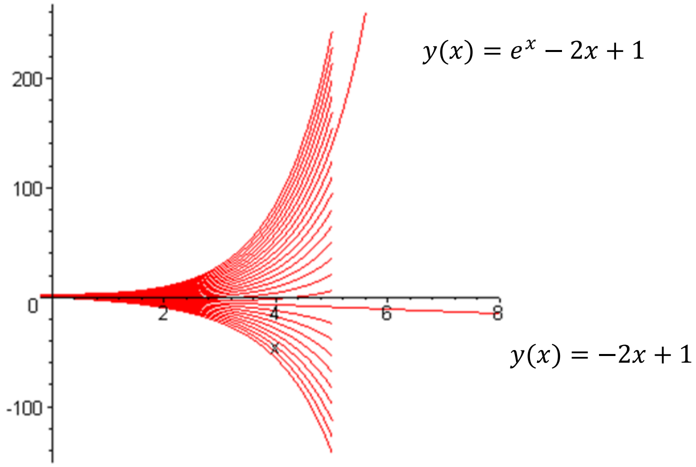
$$\Rightarrow \frac{dy}{2cos^2y} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2}tgy = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = arctg\left(2C - \frac{2}{x}\right) + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}.$$

ახლა ამ ამონახსნებიდან ვიპოვოთ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $y(+\infty) = \frac{9}{4}\pi$. განვიხილოთ $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(arctg\left(2C - \frac{2}{x}\right) + 2\pi k\right) = arctg2C + 2\pi k$. რადგან $|arctg2C| < \frac{\pi}{2}$, ამიტომ $k = 1$ და $\frac{9}{4} = 2\pi + arctg2C \Rightarrow \frac{\pi}{4} = arctg2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. ამრიგად, განტოლების ამონახსნი, რომელიც ზემოთ მოყვანილ პირობას აკმაყოფილებს, არის $y(x) = arctg\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 2\pi$ ფუნქცია.

8. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა $y' - y = 2x - 3, y(0) = 2$.

განტოლების ზოგადი ამონახსნი წინა ამოცანიდან უკვე ცნობილია და ის არის $y(x) = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციების სიმრავლე, რომელიც დამოკიდებულია C ნამდვილ რიცხვზე. $y(0) = 2$ პირობიდან ადვილად ვპოულობთ $C = 1$. ამრიგად, კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნია $y(x) = e^x - 2x + 1$ ფუნქცია (იხილეთ ქვემოთ მოყვანილი ნახაზი).



ნახაზზე მოყვანილია $y = Ce^x - 2x + 1$ ფუნქციათა გრაფიკები (განტოლების ინტეგრალური წირები), როდესაც C ნამდვილი რიცხვი იცვლება – 0.9-დან 1.7-მდე ბიჯით 0.1, ხოლო $x \in [-0.2, 5]$. როგორც აღვნიშნეთ, როდესაც $C = 0$, განტოლების ამონახსნია $y = -2x + 1$ წრფივი ფუნქცია, მისი გრაფიკი მონიშნულია ნახაზზე. ეს ფუნქცია არის კოშის ამოცანის ამონახსნი პირობით $y(0) = 1$.

9. ვიპოვოთ $3y^2y' + 16x = 2xy^3$ განტოლების ისეთი $y(x)$ ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია, როდესაც $x \longrightarrow \infty$.

პირველ რიგში ვიპოვოთ განტოლების ყველა ამონახსნი. რისთვისაც განვაცალოთ x, y ცვლადები:

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3 \Longrightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} + 16x = 2xy^3 \Longrightarrow 3y^2dy = 2x(y^3 - 8)dx.$$

დავუშვათ, $y \neq 2$ და გამოსახულების ორივე მხარე გავყოთ $y^3 - 8$. მივიღებთ:

$$\int \frac{3y^2}{y^3 - 8}dy = \int 2xdx \Longrightarrow \int \frac{d(y^3 - 8)}{y^3 - 8} = x^2 + C \ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln|y^3 - 8| = x^2 + C \Longrightarrow |y^3 - 8| = Ce^{x^2}.$$

$|y^3 - 8| = Ce^{x^2}$ ფუნქცია განტოლების ამონახსნია, როდესაც $y \neq 2$, მაგრამ $y(x) = 2$ ფუნქცია მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს, ამიტომ ამონახსნთა სიმრავლეში ეს ფუნქციაც შევა. $|y^3 - 8| = Ce^{x^2}$ გამოსახულების მარცხენა მხარე ყოველთვის არაუარყოფითი უნდა იყოს, ამიტომ $C \geq 0$. $|y^3 - 8| = Ce^{x^2}$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, როდესაც $x \longrightarrow \infty$, მხოლოდ

მაშინ, როდესაც $C = 0$. ეს კი შეესაბამება $y(x) = 2$ ამონახსნს. ამრიგად, ამოცანის ამონახსნია $y(x) = 2$ მუდმივი ფუნქცია.

10. $y' = \frac{x+2y}{x}$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $z = \frac{y}{x}$, მაშინ $y = xz$ და $y' = xz' + z$. y და y'-ის ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ მოცემულ განტოლებაში და მივიღებთ: $xz' + z = 1 + 2z \Longrightarrow xz' = 1 + z$, ეს უკანასკნელი კი არის განტოლება განცალებად ცვლადებში. მართლაც, $x\frac{dz}{dx} = 1 + z \Longrightarrow \frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}, z \neq 1, x \neq 0$. ვაინტეგროთ მიღებული გამოსახულების ორივე მხარე:

$$\int \frac{dz}{1+z} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln|z+1| = \ln|x| + C \Longrightarrow z + 1 = Cx \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z = Cx - 1 \Longrightarrow y = Cx^2 - x \ .$$

11. განტოლება $xy - x^2y' = x^2 + \frac{1}{9}y^2$ ცვლადის გარდაქმნით დაიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე. გავყოთ განტოლების ყველა წევრი x^2-ზე და მივიღებთ:

$$\frac{y}{x} - y' = 1 + \frac{y^2}{9x^2}. \qquad (1)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $z = \frac{y}{x}$, მაშინ $y = zx$ და $y' = z'x + z$. შევიტანოთ y და y'-ის ეს მნიშვნელობები (1)-ში, მივიღებთ: $z - z'x - z = 1 + \frac{1}{9}z^2$. ეს უკანასკნელი გადავწეროთ მისი ეკვივალენტური სახით: $-\frac{dz}{dx}x = 1 + \frac{1}{9}z^2$, ანუ $\frac{dz}{1+\frac{1}{9}z^2} = -\frac{dx}{x}$, ეს კი არის განტოლება განცალებად ცვლადებში. განტოლების ორივე მხარის ცალ-ცალკე ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int \frac{dz}{1+\frac{1}{9}z^2} = \int \frac{dz}{1+\left(\frac{z}{3}\right)^2} = 3\int \frac{d\left(\frac{z}{3}\right)}{1+\left(\frac{z}{3}\right)^2} = arctg\frac{z}{3},$$

$$\int -\frac{dx}{x} = -\int \frac{dx}{x} = -lnx - C.$$

ამრიგად, $3arctg\frac{z}{3} = -lnx - C \ \Longrightarrow \ z = -3tg(\frac{1}{3}lnx + \frac{1}{3}C)$. დავუბრუნდეთ აღნიშვნას და მივიღებთ:

$$y = -3xtg(\frac{1}{3}lnx + \frac{1}{3}C).$$

შენიშვნა: ამ მაგალითში ჩვენ გამოვიყენეთ ცხრილის ინტეგრალი $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$. ამ ტოლობიდან ადვილად მიიღება $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ სახის ინტეგრალის ანალიზური სახე, მართლაც:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \int \frac{\frac{1}{a^2}dx}{\frac{a^2+b^2x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{a}{b}d\left(\frac{bx}{a}\right)}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab}arctg\left(\frac{bx}{a}\right) + C.$$

12. ამოვხსნათ ერთგვაროვანი განტოლება $xy' = y(1 + lny - lnx)$. გადავწეროთ ეს განტოლება შემდეგი სახით:

$$xdy - y\left(1 + ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx = 0, x > 0, y > 0.$$

ამრიგად, $M(x,y) = -y\left(1 + ln\frac{y}{x}\right)$ და $N(x,y) = x$ ერთგვაროვანი ფუნქციებია $(m = 1)$. მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $y = xz$, მაშინ $dy = xdz + zdx$ და მივიღებთ:

$$x^2dz + xzdx - xz(1 + lnz)dx = 0 \Rightarrow xdz - zlnzdx = 0.$$

ცვლადების განცალების და ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$lnx - \ln|\ln|z|| = lnc, z \neq 1 \Rightarrow y = xe^{cx}.$$

3.3. გეომეტრიული ამოცანების ანალიზი

მას შემდეგ, რაც გამოვიმუშავეთ განცალებადცვლადებიანი განტოლებების ამოხსნის ტექნიკა, შესაძლებელია მოვახდინოთ თავის დასაწყისში მიღებული განტოლებების სრული ანალიზი.

1. ამოვხსნათ განტოლება: $xy' = 2y$.

დავუშვათ, $x \neq 0$ და $y \neq 0$ და მოცემული განტოლება გადავწეროთ მისი ეკვივალენტური სახით: $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + c \Rightarrow y(x) = cx^2$. ამრიგად, მივიღეთ საძიებელი წირის განტოლება. იგი პარაბოლაა, თუ $c \neq 0$. როდესაც $c = 0$, ვღებულობთ, რომ $y = 0$, რომელიც განტოლების ამონახსნია, მაგრამ ჩვენი ამოცანის პირობებს არ აკმაყოფილებს.

2. ამოვხსნათ განტოლება: $\frac{y^2}{2} = a^2 y'$.

ჩავთვალოთ, რომ $y \neq 0$. გავყოთ გამოსახულების ორივე მხარე y-ზე და ცვლადების განცალების შემდეგ მივიღებთ: $\frac{2dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2}$, საიდანაც:

$$-\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C \Rightarrow y = \frac{2a^2}{Ca^2 + x}.$$

თუ $y' < 0$, მაშინ $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$, რომლის ინტეგრებითაც მივიღებთ $y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}$. აღვნიშნოთ $Ca^2 = -\tilde{C}$, რის შემდეგაც ორივე ამონახსნი ჩაიწერება სახით: $y = \frac{2a^2}{\tilde{C} \pm x}$. ამრიგად, წირები, რომლებიც ამოცანა 1-ის პირობებს აკმაყოფილებენ, მოიცემიან ანალიზურად $y(x) = \frac{2a^2}{\tilde{C} \pm x}$ ფუნქციებით.

3. ამოვხსნათ განტოლება: $\frac{y}{y'} + yy' = 2a$.

გადავწეროთ ეს განტოლება მისი ეკვივალენტური სახით:

$$y + yy'^2 = 2ay' \Rightarrow y' = \frac{a}{y} \pm \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{ydy}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = dx \Rightarrow \frac{d(a^2 - y^2)}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = -2dx$$

საბოლოოდ ვღებულობთ ამონახსნს:

$$\sqrt{a^2 - y^2} - aln\left(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}\right) \pm x = c.$$

4. ამოვხსნათ განტოლება $\frac{2}{3}(xy' + y) = y$. გადავწეროთ განტოლება მისი ეკვივალენტური $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$ სახით. მივიღეთ განტოლება განცალებად ცვლადებში, რომლის თითოეული მხარის ინტეგრებით მივიღებთ ტოლობას $\ln|y| = \frac{1}{2}(\ln|x| + c) \Rightarrow y(x) = \sqrt{x}c$.

3.4. განტოლება სრულ დიფერენციალებში

განტოლებები განცალებად ცვლადებში არის უფრო ზოგადი, ე.წ. *განტოლებები სრულ დიფერენციალებში* განტოლებათა კლასის კერძო შემთხვევაა. ამ პარაგრაფში განტოლებათა ამ კლასის ამოხსნის მეთოდს განვიხილავთ.

სანამ განსახილველი განტოლების ანალიზზე გადავალთ, განვიხილოთ რამდენიმე ფაქტი ორი ცვლადის ფუნქციის სრულ დიფერენციალზე.

დავუშვათ, $F(x,y)$ ორი ცვლადის უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. შეგახსენებთ, რომ $F(x,y)$-ის სრული დიფერენციალი – $dF(x,y)$, განმარტებით არის შემდეგი გამოსახულება:

$$dF(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy\,.$$

განვიხილოთ $F(x,y)$ ფუნქცია არა ყველა x,y-სათვის, არამედ მხოლოდ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ წირზე მდებარე წერტილებისათვის. მაშინ:

$$dF(\varphi(t),\psi(t))=\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\frac{d\varphi(t)}{dt}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\frac{d\psi(t)}{dt}\right)dt=$$

$$=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}d\varphi(t)+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}d\psi(t)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy.$$

უკანასკნელ გამოსახულებას ეწოდება $F(x,y)$-ის დიფერენციალი $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ წირის გასწვრივ.

ახლა განვიხილოთ შებრუნებული პროცედურა. დავუშვათ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ წირის გასწვრივ $F(x,y)$ ფუნქციის დიფერენციალი 0-ის ტოლია:

$$dF(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy\equiv 0\,,$$

მაშინ ამ წირზე $F(x,y)$ მუდმივია: $F(x,y)\equiv const$. ანუ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ წირი (საზოგადოდ, მისი ნაწილი მაინც) განისაზღვრება $F(x,y)\equiv const$ არაცხადი განტოლებით.

განვიხილოთ:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

გამოსახულება, სადაც $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ და $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ უწყვეტი ფუნქციებია $\mathbf{R}^2$-ის ისეთ $U\subset\mathbf{R}^2$ არეში, რომელიც არ შეიცავს (1) განტოლების განსაკუთრებულ წერტილებს.

(1) განტოლებას ეწოდება *განტოლება სრულ დიფერენციალებში*, თუ არსებობს ისეთი უწყვეტად დიფერენცირებადი $u(x,y)$ ფუნქცია U-ში, რომ

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

ტოლობა სრულდება U-ზე. ამ დროს $u(x,y) = C$ ფუნქციას ეწოდება განტოლების ამონახსნი.

დავუშვათ, (1) არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში. თუ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$, მაშინ $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები იძლევიან (1)-ის პარამეტრულ ამონახსნს. მართლაც,

$$du(\varphi(t),\psi(t)) = P(\varphi(t),\psi(t))d\varphi(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))d\psi(t) = 0 ,$$

ე.ი. $u(\varphi(t),\psi(t)) = C$ ნებისმიერი $t \in I$-სათვის. ნათელია, რომ სამართლიანია პირიქითაც: თუ $u(\varphi(t),\psi(t)) = C$ ყოველი $t \in I$-სათვის, მაშინ $x = \varphi(t)$ და $y = \psi(t)$ ფუნქციები არიან პარამეტრული ამონახსნები.

ამრიგად, $u(x,y) = C$ განტოლება, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, შეიცავს (1) განტოლების ყველა ამონახსნს. სრულ დიფერენციალებში მოცემული განტოლების ინტეგრალური წირი, რომელიც გადის (x_0, y_0) წერტილზე, ცალსახად განისაზღვრება $u(x,y) = u(x_0, y_0)$ განტოლებიდან.

სანამ ზემოთ თქმულს დავაზუსტებთ შესაბამისი დებულების სახით, გავარკვიოთ, რა შემთხვევაშია (1) გამოსახულება, განტოლება სრულ დიფერენციალებში.

თეორემა 1. *თუ U არე ცალადბმულია, მაშინ იმისათვის, რომ (1) განტოლება იყოს განტოლება სრულ დიფერენციალებში, აუცილებელი და საკმარისია*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{2}$$

ტოლობის შესრულება ყოველი $(x,y) \in U$-სათვის.

აუცილებლობა. ვთქვათ, (1) არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, მაშინ არსებობს $u(x,y)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომ:

$$P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\ Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \tag{3}$$

იგივეობები სრულდება U-ზე. აქედან:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y},$$

საიდანაც $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ ყველა (x,y)-სათვის U-დან. აქ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ $u(x,y)$ ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა, რის გამოც $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x}$.

საკმარისობა. თუ U ცალად ბმულია, მაშინ ანალიზის კურსიდან ცნობილ თეორემას გამოვიყენებთ, რომლის თანახმად, (3) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი $u(x,y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალიც არის $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ ფორმა. იგი აიგება (3) განტოლებათა სისტემიდან. ის ფაქტი, რომ (1) განტოლება არის სრულ დიფერენციალებში, ნიშნავს, რომ $(P(x,y),Q(x,y))$ ვექტორული ველი *პოტენციალურია* U არეზე. $X=(P(x,y),Q(x,y))$ ვექტორულ ველს ეწოდება პოტენციალური, თუ არსებობს ისეთი $u(x,y)$ ფუნქცია, რომ $P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$ და $Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$. ამ შემთხვევაში $u(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება (1) განტოლების შესაბამისი *პოტენციალი.*

დავუშვათ, თეორემის (2) პირობა შესრულებულია. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს x და y ცვლადების $u(x,y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალია მოცემული $Pdx+Qdy$ ფორმა. თუ ასეთი ფუნქცია არსებობს, მაშინ მისი კერძო წარმოებულები x-ით და y-ით ტოლი უნდა იყოს, შესაბამისად, $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქციების, ე.ი. უნდა შესრულდეს (3) ტოლობები. (3)-ის პირველი განტოლებიდან გამოდის, რომ:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+c(y), \tag{4}$$

სადაც x_0 ორი ცვლადის $P(x,y)$ და $Q(x,y)$ ფუნქციების განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი წერტილია. $c(y)$ უკანასკნელ გამოსახულებაში ნებისმიერი დიფერენცირებადი მხოლოდ y ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციაა და შევეცადოთ, იგი იმგვარად შევარჩიოთ, რომ დაკმაყოფილდეს (3)-ის მეორე ტოლობა:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+c(y)\right)=Q(x,y).$$

ამრიგად,

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+c'(y)=Q(x,y).$$

გავითვალისწინოთ (2) ტოლობა და ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უკანასკნელ ტოლობაში შევცვალოთ მისი ტოლი სიდიდით. მაშინ გვექნება:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + c'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx + c'(y) = Q(x_0, y) - Q(x_0, y) + c'(y).$$

აქედან ჩანს, რომ $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ ტოლობის შესასრულებლად საჭიროა $c'(y) = Q(x_0, y)$. ამ ტოლობას კი ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც:

$$c(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y) dy,$$

სადაც y_0, ისევე როგორც x_0, P და Q ფუნქციების განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი წერტილია. y_0-ის არჩევა აქ მიუთითებს იმაზე, რომ $c(y)$ არის y ცვლადის $Q(x_0, y)$ ფუნქციის პირველყოფილი, რომელიც y_0 წერტილში y-ის ტოლია. ჩავსვათ $c(y)$-ის მიღებული მნიშვნელობა (4)-ში და გვექნება:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y) dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y) dy = c,$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია. ამით არა მარტო საჭირო თვისებების მქონე $u(x, y)$ ფუნქციის არსებობა დავამტკიცეთ, არამედ, უფრო მეტიც, ვიპოვეთ ეს ფუნქცია.

ამრიგად, დავამტკიცეთ თეორემა:

თეორემა 2. *(1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:*

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y) dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y) dy = c, \qquad (5)$$

სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

ეს თეორემა არის (1) დიფერენციალური ფორმის (სრული დიფერენციალის) ინტეგრების ან პირველყოფილის პოვნის მეთოდი. (5) გამოსახულება დამოკიდებულია c მუდმივზე და ამრიგად, (5) ფორმულით მოცემულია (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ფუნქციები, რომლებსაც ტოლი სრული დიფერენციალი აქვთ, ერთმანეთისაგან მუდმივით განსხვავდებიან, ამიტომ განტოლების ზოგადი ამონახსნის დასაწერად მნიშვნელობა არ აქვს რომელ პირველყოფილს ავირჩევთ, რადგან ყველა შემთხვევაში განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება სახე $u(x, y) = c$. თეორემა (2)-ში პირველყოფილად არჩეულია ისეთი $u(x, y)$ ფუნქცია, რომ სრულდება $u(x_0, y_0) = 0$ ტოლობა.

თუ P და Q ფუნქციების განსაზღვრის არეში შედის $(0,0)$ წერტილი და ამ წერტილში თვით ეს ფუნქციები და მათი $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ კერძო წარმოებულები უწყვეტებია, მაშინ გამოთვლების წარმოების გასამარტივებლად შესაძლებელია ჩავთვალოთ, რომ $(x_0, y_0) = (0,0)$.

როგორც ვხედავთ, (5) ფორმულა სიმეტრიული არ არის იმ თვალსაზრისით, რომ პირველი ინტეგრალქვეშა ორი ცვლადის, ხოლო მეორე კი ერთი y ცვლადის ფუნქციებია. ეს გამოწვეულია მხოლოდ იმით, რომ ამონახსნის აგება (3) ფორმულის პირველი ტოლობიდან დავიწყეთ. თუ საწყის გამოსახულებად ჩავთვლით (3)-ის მეორე ტოლობას და ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას გავიმეორებთ, მივიღებთ (1) განტოლების

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = c \qquad (6)$$

ზოგად ამონახსნს. ამრიგად, (5) და (6) ეკვივალენტური ფორმულებია და თითოეული მათგანი წარმოადგენს (1)-ის ზოგად ამონახსნს.

ახლა დავამტკიცოთ არსებობის თეორემა.

თეორემა 3. *ვთქვათ, (1) არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში და* (x_0, y_0) *განტოლების განსაზღვრის არიდან აღებული ისეთი წერტილია, რომ* $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ *უწყვეტი ფუნქციებია და* P *და* Q *ფუნქციებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან ამ წერტილში. მაშინ (1) განტოლებას სრულ დიფერენციალებში აქვს ერთი ამონახსნი მაინც.*

ამასთან*:*

1) თუ $P(x_0, y_0) = 0$ *და* $Q(x_0, y_0) \neq 0$, *მაშინ* $y = \varphi(x)$ *ცხადად გამოისახება* $u(x, y) = c$ *ზოგადი ამონახსნიდან და აკმაყოფილებს პირობას* $y_0 = \varphi(x_0)$*;*

2) თუ $P(x_0, y_0) \neq 0$ *და* $Q(x_0, y_0) = 0$, *მაშინ* $x = \psi(y)$ *ამონახსნი აკმაყოფილებს* $y_0 = \varphi(x_0)$ *პირობას.*

დამტკიცება. დავუშვათ $Q(x_0, y_0) \neq 0$. რადგან, $u(x_0, y_0) = 0$, $u(x, y)$ და $\frac{\partial u}{\partial y}$ უწყვეტი ფუნქციებია და $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0} = Q(x_0, y_0) \neq 0$ პირობა შესრულებულია, ეს ნიშნავს, რომ სრულდება ყველა პირობა არაცხადი ფუნქციის არსებობისათვის. ამიტომ ვასკვნით, რომ არსებობს $u(x, y) = 0$ განტოლების ერთადერთი $y = \varphi(x)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $y_0 = \varphi(x_0)$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ამ საწყისი პირობის დამაკმაყოფილებელი

სხვა ამონახსნი დიფერენციალურ განტოლებას არ აქვს. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $y = f(x)$ (1) განტოლების ისეთი ამონახსნია, რომ $y_0 = f(x_0)$. (1) განტოლება გადავწეროთ მისი ეკვივალენტური $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ სახით. ამრიგად, ამონახსნის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$P(x, f(x)) + Q\big(x, f(x)\big)f'(x) = 0.$$

ჩავსვათ $u(x,y)$-ში $y = f(x)$, მივიღებთ x-ზე დამოკიდებულ $u(x, f(x))$ ფუნქციას და ვიპოვოთ მისი წარმოებული:

$$\frac{d}{dx}u\big(x, f(x)\big) = \frac{\partial}{\partial x}u\big(x, f(x)\big) + \frac{\partial}{\partial y}u\big(x, f(x)\big)f'(x) =$$

$$= P\big(x, f(x)\big) + Q(x, f(x))f'(x) \equiv 0.$$

რადგან $u(x, f(x))$-ის წარმოებული იგივურად 0-ია, ამიტომ ის ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას, ანუ ყველგან მიიღებს იმ მნიშვნელობას, რაც ჰქონდა $x = x_0$ წერტილში:

$$u\big(x_0, f(x_0)\big) = u(x_0, y_0) = 0.$$

ე.ი. $y = f(x)$ აკმაყოფილებს $u(x,y) = 0$ განტოლებას, მაგრამ $y = \varphi(x)$ აგრეთვე აკმაყოფილებს ამ განტოლებას და $f(x_0) = \varphi(x_0) = y_0$ პირობას, რაც ნიშნავს, რომ $y = f(x)$ და $y = \varphi(x)$ ფუნქციები ტოლი უნდა იყოს. ამრიგად, $y = \varphi(x)$ ამონახსნი ერთადერთია.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თუ (x_0, y_0) წერტილი ისეთია, რომ $P\,(x_0, y_0) = Q\,(x_0, y_0) = 0$, მაშინ (x_0, y_0) იქნება (1) განტოლების *განსაკუთრებული წერტილი.*

$h(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება (1) განტოლების *მაინტეგრირებელი მამრავლი,* თუ მასზე გამრავლებით (1) ხდება დიფერენციალური განტოლება სრულ დიფერენციალებში. საზოგადოდ, მაინტეგრირებელი მამრავლის პოვნის ალგორითმი არ არსებობს. ერთადერთი, რითაც მაინტეგრირებელი მამრავლის პოვნისას შეგვიძლია ვისარგებლოთ, არის თეორემა 1-ის (2) ტოლობა, რომელიც განტოლების $h(x,y)$-ზე გამრავლების შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$P\frac{\partial h}{\partial y} + h\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (7)$$

ეს უკანასკნელი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებაა, რომლის ამოხსნაც (1)-ის ამოხსნის ეკვივალენტურია. ამრიგად, მაინტეგრი-

რებელი მამრავლის პოვნა მხოლოდ ინტუიციასა და ტექნიკაზეა დამოკიდებული.

არსებობს რამდენიმე კერძო შემთხვევა, როდესაც (7) განტოლებიდან შესაძლებელია კვადრატურებში $h(x,y)$ მაინტეგრირებელი მამრავლის პოვნა. ეს ის შემთხვევებია, როდესაც $h(x,y)$ დამოკიდებულია მხოლოდ x-ზე ან მხოლოდ y-ზე. დავუშვათ, $h(x,y)=h(x)$, მაშინ (7) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$h\frac{\partial P}{\partial y}=Q\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow h\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\frac{dh}{dx} \Rightarrow \frac{dh}{h}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx.$$

რადგან, ჩვენი დაშვებით, h მხოლოდ x-ზეა დამოკიდებული, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე მხოლოდ x-ზეა დამოკიდებული. აღვნიშნოთ იგი $\varphi(x)$-ით. მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{dy}{h}=\varphi(x)dx,$$

საიდანაც $h(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$, სადაც $\varphi(x)=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$. აქ ავიღეთ $h(x)$-ის მხოლოდ ერთი კონკრეტული $ce^{\int\varphi(x)dx}$ მნიშვნელობა ყველა შესაძლო ამონახსნებიდან, რაც საკმარისია ჩვენი მიზნებისათვის.

დებულება 1. *იმისათვის, რომ (1) სახის განტოლებას ჰქონდეს მხოლოდ x-ზე დამოკიდებული მაინტეგრირებელი მამრავლი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ გამოსახულება იყოს დამოკიდებული მხოლოდ x-ზე. ამ შემთხვევაში მაინტეგრირებელ მამრავლს აქვს სახე:*

$$h(x)=e^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}. \tag{8}$$

დამტკიცება: თუ მაინტეგრირებელი მამრავლი მხოლოდ x-ზეა დამოკიდებული, მაშინ, როგორც უკვე ვაჩვენეთ, $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ გამოსახულებაც მხოლოდ x-ზეა დამოკიდებული და მაინტეგრირებელი მამრავლი მოიცემა (8) ფორმულით. ახლა ვაჩვენოთ პირიქით. ვთქვათ, $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ დამოკიდებულია მხოლოდ x-ზე და დავამტკიცოთ, რომ მაინტეგრირებელ მამრავლს აქვს (8) სახე. ამის საჩვენებლად (1) გატოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $h(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$-ზე და შევამოწმოთ თეორემაში მოყვანილი (2) პირობის სამართლიანობა:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\int \varphi(x)dx}\,P\right) = e^{\int \varphi(x)dx}\frac{\partial P}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int \varphi(x)dx}\,Q\right) = e^{\int \varphi(x)dx}\varphi(x)Q + e^{\int \varphi(x)dx}\frac{\partial}{\partial x} =$$

$$= e^{\int \varphi(x)dx}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + e^{\int \varphi(x)dx}\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{\int \varphi(x)dx}\frac{\partial P}{\partial y}.$$

როგორც ვხედავთ, მიღებული შედეგები ერთმანეთს ემთხვევა, რითაც დებულება დამტკიცებულია. ანალოგიური დებულება სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც მაინტეგრირებელი მამრავლი მხოლოდ y ცვლადზეა დამოკიდებული. მაშინ, (8) ფორმულის მსგავსად, მაინტეგრირებელი მამრავლი მოიცემა ფორმულით:

$$h(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}. \tag{9}$$

ამასთან, პირობა იმისა, რომ მაინტეგრირებელი მამრავლი დამოკიდებული იყოს მხოლოდ y ცვლადზე, მოყვანილია შემდეგ დებულებაში:

დებულება 2. *იმისათვის, რომ (1) განტოლებას ჰქონდეს მაინტეგრირებელი მამრავლი, დამოკიდებული მხოლოდ y-ზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \psi(y)$ გამოსახულება დამოკიდებული იყოს მხოლოდ y ცვლადზე. ამ დროს განტოლების მაინტეგრირებელი მამრავლი მოიცემა (9) ფორმულით.*

დამტკიცება: ისევე, როგორც ზემოთ, ამ დებულების დასამტკიცებლად საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ სრულდება თეორემის (2) ტოლობა, რომელსაც ჩვენს შემთხვევაში აქვს სახე:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\int \psi(y)dy}\,P\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int \psi(y)dy}Q\right).$$

განვიხილოთ (1) სახის განტოლება m-ერთგვაროვანი კოეფიციენტებით:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

ამრიგად, $M(x,y)$ და $N(x,y)\,m$ −ერთგვაროვანი ფუნქციებია. როგორც ვიცით, ეს ნიშნავს, რომ $M(x,y) = x^m M_1\left(\frac{y}{x}\right)$ და $N(x,y) = x^m N_1\left(\frac{y}{x}\right)$. მაშინ $y = xz(x)$ *გარდაქმნით (9) განტოლება მიიყვანება განცალებადცვლადებიან განტოლებაზე.* მართლაც,

$$dy = zdx + xdz \;\Rightarrow x^m M_1(z)dx + x^m N_1(z)zdx + x^{m+1}N_1(z)dz = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M_1(z) + N_1(z)z)dx = -xN_1(z)dz \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{N_1(z)dz}{M_1(z) + N_1(z)z}.$$

უკანასკნელი განტოლება კი განცალებადცვლადებიანი განტოლებაა.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ განტოლება:

$$2(x - y^4)dy = ydx\ . \tag{10}$$

ეს არ არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში, რადგან $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = 2(y^4 - x)$ და $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -2$. ვიპოვოთ ამ განტოლების მაინტეგრირებელი მამრავლი. გამოვიყენოთ დებულება 2. $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = -\frac{3}{y}$. შევნიშნოთ, რომ $y = 0$ არის განტოლების ამონახსნი და ვეძებოთ ახლა მხოლოდ 0-საგან განსხვავებული ამონახსნი. ამრიგად, დავუშვათ, რომ $y \neq 0$. (9) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $h(y) = \frac{1}{y^3}$. (10) განტოლების მასზე გამრავლებით მივიღებთ განტოლებას სრულ დიფერენციალებში:

$$\frac{1}{y^2}dx + 2\left(y - \frac{x}{y^3}\right)dy = 0,$$

საიდანაც $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$ და $\frac{\partial u}{\partial y} = 2\left(y - \frac{x}{y^3}\right)$. პირველი განტოლებიდან გვაქვს:

$$u(x,y) = \frac{x}{y^2} + \varphi(y)\ .$$

ჩავსვათ ეს მეორე განტოლებაში: $\varphi(y) = y^2 - C$. ამრიგად, (10) განტოლების ამონახსნებია: $y = 0$ და $\frac{x}{y^2} + y^2 = C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა.

განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლებები არის *განტოლებები სრულ დიფერენციალებში* – კლასის კერძო შემთხვევა (ეს უკვე აღვნიშნეთ პარაგრაფის დასაწყისში) იმ თვალსაზრისით, რომ განცალებადცვლადებიანი განტოლება მაინტეგრირებელი მამრავლის საშუალებით ყოველთვის შეგვიძლია მივიყვანოთ განტოლებაზე სრულ დიფერენციალებში.

დებულება 3.

$$f_1(x)g_1(t)dx + f_2(x)g_2(t)dt = 0 \qquad (11)$$

სახის განცალებადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლების მაინტეგრირებელი მამრავლია $h(x,t) = \frac{1}{g_1(t)f_2(x)}$ *ფუნქცია.*

დებულების დამტკიცებამდე შევნიშნოთ, რომ (11) განტოლება არ არის განტოლება სრულ დიფერენციალებში. მისთვის თეორემა 1-ის (2) პირობა ნებისმიერი f_1, g_1, f_2, g_2 ფუნქციებისათვის სავალდებულო არ არის შესრულდეს.

დამტკიცება: (11) განტოლების $h(x,y)$-ზე გამრავლების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(t)}{g_1(t)}dt = 0$$

განტოლებას, რომლისთვისაც თეორემა 1-ის (2) პირობა სამართლიანია.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლება:

$$2xy^3dx + 3(x^2y^2 + y^2 - 1)dy = 0\,. \qquad (12)$$

$P(x,y) = 2xy^3$, $Q(x,y) = 3(x^2y^2 + y^2 - 1)$ და ისინი უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციები არიან $\mathbf{R}^2$-ში. იმის გასარკვევად, არის თუ არა (12) განტოლება სრულ დიფერენციალებში, საჭიროა შევამოწმოთ თეორემა 1-ის (2) პირობა. ჩვენს შემთხვევაში იგი დაკმაყოფილებულია, რადგან:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,.$$

ახლა საჭიროა (12)-ის შესაბამისი პოტენციალის პოვნა. ამისათვის კი ვხსნით შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy^3,\ \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 3(x^2y^2 + y^2 - 1)\,.$$

ამ სისტემის პირველი განტოლებიდან ვიღებთ:

$$u(x,y) = x^2y^3 + \varphi(y)\,, \qquad (13)$$

სადაც $\varphi(y)$ უწყვეტად წარმოებადია y-ის მიმართ. მის საპოვნელად (13) ფორმულით განსაზღვრული $u(x,y)$ ფუნქცია ჩავსვათ სისტემის მეორე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$3x^2y^2 + \varphi'(y) = 3(x^2y^2 + y^2 - 1) \Rightarrow \varphi'(y) = 3(y^2 - 1) \Rightarrow \varphi(y) = y^3 - 3y - C\,.$$

ამრიგად, (12)-ის ყველა ამონახსნი განისაზღვრება $x^2y^3 + y^3 - 3y = C$ ტოლობიდან, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ $x^2y^3 + y^2 - y^3 = C$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც y-ის მიმართ განტოლება და მისი ამონახსნი ვიპოვოთ მე-2 და მე-3 თეორემების გამოყენებით.

3.5. პირველი რიგის წრფივი განტოლება

შეგახსენებთ, რომ $y = f(x)$ ერთი ცვლადის ფუნქციას ეწოდება წრფივი, თუ მას აქვს სახე $f(x) = ax + b$, ხოლო, თუ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ მრავალი ცვლადის ფუნქციაა, მაშინ ის შესაძლებელია მრავალი სხვადასხვა ფორმით იყოს წრფივი, მაგალითად:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

ან კიდევ

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1(x_2, ..., a_n)x_1 + b(x_2, ..., x_n)$$

მრავალი ცვლადის წრფივი ფუნქციების მაგალითებია. ამასთან, პირველი განტოლება წრფივია ყველა ცვლადის მიმართ, ხოლო მეორე კი – x_1-ის მიმართ.

$x' = f(t, x)$ დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება *წრფივი*, თუ მისი მარჯვენა მხარე წრფივია x ცვლადის მიმართ. ე.ი. განტოლებას აქვს სახე:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

განტოლებას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ $b(t) \equiv 0$.

წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება. განვიხილოთ წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$x'(t) = a(t)x(t). \qquad (1)$$

(1) არის განტოლება განცალებადი ცვლადებით. მისი ამონახსნის პოვნა ხდება შემდეგნაირად:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a(t) \Rightarrow (\ln|x(t)|)' = a(t) \Rightarrow \ln|x(t)| = \int a(t)dt + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \pm e^C e^{\int a(t)dt} \Rightarrow x(t) = Ce^{\int a(t)dt}, \qquad (2)$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

კოშის ამოცანას (1) განტოლებისათვის აქვს სახე:

$$x(t_0) = x_0,$$

ხოლო მის ამონახსნს კი (2) ფორმულის გათვალისწინებით

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $x(t_0) = C$. პირიქით, თუ საჭიროა ამონახსნთა (2) სიმრავლიდან ავარჩიოთ ისეთი, რომ

$$x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

ანუ, როგორც ამ შემთხვევაში ამბობენ, მოცემული (3) საწყისი პირობით ვიპოვოთ (1)-ის ამონახსნი, მაშინ ნათელია, რომ ასეთი ამონახსნი იქნება:

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}. \tag{4}$$

შენიშვნა. (1) განტოლებას ყოველთვის აქვს $x(t) \equiv 0$ იგივურად 0-ის ტოლი ამონახსნი, რომელსაც *ტრივიალური ამონახსნი* ეწოდება. ამიტომ, (1)-დან (2)-ზე გადასვლის დროს ჩვენ ვუშვებთ, რომ $x(t) \not\equiv 0$. ზოგადი ამონახსნი, რომელიც (2) ფორმულით მოიცემა, ამ ამონახსნს შეიცავს. კერძოდ, (1) განტოლებას, $x(t_0) = 0$ საწყისი პირობის შემთხვევაში, აქვს ტრივიალური ამონახსნი.

წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება. პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{5}$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \left[\int_{t_0}^{t} b(s) e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds + C \right]. \tag{6}$$

ქვემოთ მოყვანილია (6) ფორმულის დამტკიცება. ამ მიზნის მისაღწევად გავაანალიზოთ (5) გამოსახულება. პირველ რიგში იგი გადავწეროთ შემდეგი ეკვივალენტური ფორმით:

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t). \tag{7}$$

უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეს მოთავსებულია უცნობი ფუნქციის წარმოებული ფუნქცია, რომელსაც აკლდება ეს ფუნქცია გამრავლებული ნებისმიერ წინასწარ მოცემულ ფუნქციაზე. მიღებული შედეგი გატოლებულია ცნობილ ფუნქციასთან. ამრიგად, (7) არის ფუნქციათა ტოლობა.

აღვნიშნოთ E-თი ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე, ხოლო F-ით კი იმ დიფერენცირებად ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთა წარმოებული უწყვეტია. ეს სიმრავლეები ვექტორული სივრცეებია, ამასთან, $F \subset E$. მათ *ფუნქციონალურ* სივრცეებსაც უწოდებენ. ავიღოთ F-დან ნებისმიერი $x(t)$ ფუნქცია და მას შევუსაბამოთ მისი წარმოებული ფუნქცია $x'(t)$. მივიღებთ ასახვას F სივრციდან E-ში. ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის ასახვას სპეციალური სახელი აქვს და მას *ოპერატორი* ეწოდება, ხოლო იმ ოპერატორს კი, რომელიც $x(t) \mapsto x'(t)$ შესაბამისობის წესით არის მოცემული, – დიფერენციალური ოპერატორი და $\frac{d}{dt}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად:

$$\frac{d}{dt}: F \to E, \quad \frac{d}{dt} x(t) = x'(t). \tag{8}$$

ოპერატორის მაგალითია აგრეთვე $x(t) \mapsto a(t)x(t)$ შესაბამისობით მოცემული ასახვა ზემოთ აღწერილ ფუნქციონალურ სივრცეთა შორის, სადაც $a(t)$ ფიქსირებული ფუნქციაა. ამ ოპერატორს *ფუნქციაზე გამრავლების ოპერატორი* ჰქვია.

ახლა დავუბრუნდეთ (7) განტოლებას. მის მარცხენა მხარეს დგას $\frac{d}{dt} - a(t)$ ოპერატორი (დიფერენციალური და ფუნქციაზე გამრავლების ოპერატორების სხვაობა) და (6) შესაძლებელია გადაიწეროს

$$\left(\frac{d}{dt} - a(t)\right) x(t) = b(t)$$

ოპერატორული ფორმით. თუ $b(t) \equiv 0$, მაშინ (7) გადაიქცევა ერთგვაროვან განტოლებად და მისი ამონახსნი მოიცემა (2) ფორმულით, ანუ $x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ ფუნქცია $\frac{d}{dt} - a(t)$ ოპერატორის მოქმედებით გადავა იგივურად 0-ის ტოლ ფუნქციაში. ხოლო, თუ დავუშვებთ, რომ $Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ გამოსახულებაში C მუდმივი კი არა, არამედ ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა და $\frac{d}{dt} - a(t)$ ოპერატორით ვიმოქმედებთ $C(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ ფუნქციაზე, მაშინ

$$\left(\frac{d}{dt}-a(t)\right)C(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}=C^{/}(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}+C(t)a(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}-a(t)C(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}=$$

$$=C'(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau} \tag{9}$$

ფუნქცია $C(t)$-ს შერჩევის ხარჯზე ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციის ტოლი შეიძლება აღმოჩნდეს. ამის გამო, ბუნებრივია, (6) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ

$$x(t)=C(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau} \tag{10}$$

სახის ფუნქციათა შორის. განტოლების ამოხსნის ამ მეთოდს *მუდმივთა ვარიაციის* ან *ლაგრანჟის მეთოდი* ეწოდება. ამრიგად, მუდმივთა ვარიაციის მეთოდის თანახმად ვუშვებთ, რომ (7) განტოლების ამონახსნს აქვს (10) სახე და ვარჩევთ $C(t)$ ფუნქციას ისე, რომ (7) განტოლებაში $x(t)$-ს ჩასმის შემდეგ იგი გადაიქცევა იგივეობად. (10) გამოსახულების ჩასმით (7)-ში და (9) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$C^{/}(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}+C(t)a(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}-a(t)C(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}=b(t)\Rightarrow$$

$$C^{/}(t)e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}=b(t)\Rightarrow C^{/}(t)=b(t)e^{-\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}\quad\Rightarrow \tag{11}$$

$$C(t)=\int_{t_0}^{t}b(s)e^{-\int_{t_0}^{s}a(\tau)d\tau}ds+C\,.$$

ამრიგად, $C(t)$ ფუნქცია გამოვსახეთ (7) განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით. შევიტანოთ $C(t)$ ეს მნიშვნელობა (10)-ში და მივიღებთ (7) განტოლების ამონახსნს:

$$x(t)=e^{\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau}\left[\int_{t_0}^{t}b(s)e^{-\int_{t_0}^{s}a(\tau)d\tau}ds+C\right]. \tag{12}$$

მაგალითი. რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის კანონი. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებით აღიწერება რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის დინამიკა. კერძოდ, *რადიოაქტიური ნივთიერების დაშლის*

კანონი მდგომარეობს შემდეგში: *ფიქსირებული მცირე დროის მანძილზე დაშლილი ატომების რიცხვის ფარდობა ატომების საერთო რიცხვთან* (პროცესის დაწყების მომენტში) *დამოკიდებული არ არის ატომების საერთო რიცხვზე* (ჩავთვალოთ, რომ ატომების ეს რიცხვი საკმაოდ დიდია). ამის მიზეზი ისაა, რომ რადიოაქტიური დაშლა ნიშნავს ბირთვის დაშლას, ხოლო ბირთვები ერთმანეთთან არ ურთიერთქმედებენ ნივთიერების ჩვეულებრივი მდგომარეობის დროს, ურთიერთქმედებას ადგილი აქვს ელექტრონების გარსებს შორის. ამიტომ კონკრეტული ატომის დაშლის ალბათობა დამოკიდებული არ არის ატომების (საერთო) რაოდენობაზე. დაშლილი ატომების რაოდენობა დროის Δt მონაკვეთში პროპორციულია Δt-სი. აღვნიშნოთ $y(t)$-თი დაშლილი ნივთიერების მასა დროის t მომენტში. Δt დროის მონაკვეთში დაშლილი ნივთიერების მასა იქნება $y(t)-y(t+\Delta t)$. ამრიგად, რადიოაქტიური დაშლის კანონი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{y(t)-y(t+\Delta t)}{y(t)} \approx k\Delta t\,, \tag{1}$$

სადაც უტოლობა მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა Δt. აქ k მუდმივი კოეფიციენტია და ახასიათებს მოცემულ ნივთიერებას: იგი ტოლია ინდივიდუალური ატომის დაშლის ალბათობისა დროის ერთეულის განმავლობაში იმ პირობებში, როდესაც დროის ეს ერთეული საკმაოდ მცირეა. (1) თანადობა შესაძლებელია გავყოთ $-\Delta t$, გავამრავლოთ $y(t)$-ზე და გადავწეროთ სახით:

$$\frac{y(t)-y(t+\Delta t)}{\Delta t} \approx ky(t)\,. \tag{2}$$

(2) უტოლობის სიზუსტე იზრდება, როდესაც $\Delta t \to 0$, ამიტომ გადავალთ რა ზღვარზე, მივალთ ტოლობამდე:

$$y'(t) = -ky(t)\,, \tag{3}$$

რომელსაც ეწოდება *რადიოაქტიური დაშლის დიფერენციალური განტოლება.* შესაძლებელია აგრეთვე ავიღოთ ნივთიერების საწყისი ნებისმიერი რაოდენობა

$$y(0) = y_0\,, \tag{4}$$

რომელიც, ჩვეულებრივ, ითვლება (3) განტოლების საწყის პირობად.

თუ აღმოჩნდა, რომ (3), (4) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ იგი სწორად ასახავს განსახილველ პროცესს.

როგორც ვიცით, (3),(4) კოშის ამოცანას მართლაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$y(t) = y_0 e^{-kt} . \tag{5}$$

ახლა, უკვე მიღებული ფორმულებიდან, განვსაზღვროთ k კოეფიციენტის არსი. ამისათვის შემოვიტანოთ *ნახევრად დაშლის პერიოდი* T, რომელიც ტოლია იმ დროისა, რომელშიც დაიშალა თავიდან აღებული ნივთიერების ნახევარი. მივიღებთ $y_0 e^{-kT} = \dfrac{y_0}{2}$, ანუ $e^{kT} = 2$, საიდანაც $T = \dfrac{\ln 2}{k}$ და ე.ი. $k = \dfrac{\ln 2}{T}$. (3) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის (4) ფორმულა გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$y(t) = y_0 e^{-kt} = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = y_0 e^{\ln 2 (-\frac{t}{T})} = y_0 (e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T}} = y_0 2^{-\frac{t}{T}} .$$

ამრიგად, $y(t) = y_0 2^{-\frac{t}{T}}$, სადაც T ნახევრად დაშლის პერიოდია. აქვე მოვიყვანოთ ზოგიერთი ნივთიერების დახევრად დაშლის პერიოდი. ურანის ყველაზე გავრცელებული იზოტოპის ^{238}U -ისათვის $T = 4{,}5 \times 10^9$ წელიწადს, რადიუმისათვის ნახევრად დაშლის პერიოდი ტოლია 1600 წელიწადის: $T_{Ra} = 1600$. ნახშირბადის რადიოაქტიური იზოტოპისათვის, ^{14}C -სათვის, ნახევრად დაშლის პერიოდი 5700 წელიწადია. ეს იზოტოპი გამოიყენება არქეოლოგიაში ნამარხების წლოვანების დადგენის დროს. ნამარხის დატარიღების ამ მეთოდს *რადიონახშირბადის მეთოდი* ეწოდება. რადიონახშირბადის მეთოდი ემყარება იმ ფაქტს, რომ ^{14}C ორგანიზმში ხვდება მხოლოდ სიცოცხლის პერიოდში, ხოლო სიკვდილის შემდეგ იგი გამოიდევნება ორგანიზმიდან რადიოაქტიური დაშლის კანონით. შედარდება რა ცოცხალ ორგანიზმში ^{14}C -ის რაოდენობა ნამარხში დარჩენილს, დგინდება ნამარხის ასაკი.

3.6. ტიპიური ამოცანები. წრფივი განტოლებები და განტოლებები, რომლებიც წრფივზე დაიყვანებიან

პირველი რიგის განტოლებების ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ კოშის ფორმულა, ან გავიმეოროთ ყველა ის ნაბიჯი, რომლითაც (12) ფორმულა მივიღეთ.

1. $xy' = 2y - x^4$.

პირველ რიგში ამოვხსნათ მოცემული განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება $xy' = 2y$. ამისათვის კი მოვახდინოთ ცვლადების განცალება და მიღებული განტოლება ვაინტეგროთ:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} dx + c \Longrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + c \Longrightarrow y = cx^2.$$

ახლა ვეძებოთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი $y = c(x)x^2$ სახის ფუნქციათა შორის, რაც ნიშნავს, რომ, თუ $y = c(x)x^2$, ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს მოცემული განტოლება. ჩავსვათ განტოლებაში $y = c(x)x^2$. მივიღებთ:

$$x^3c' + 2x^2c = 2cx^2 - x^4 \Longrightarrow c' = -x \Longrightarrow (x) = -\frac{1}{2}x^2 + c.$$

ჩავსვათ $c(x)$ ფუნქციის ეს მნიშვნელობა $y = c(x)x^2$ ფუნქციაში და მივიღებთ: $y(x) = -\frac{1}{2}x^4 + cx^2$.

2. $xy' - 2y = 2x^4$

ნაბიჯი 1. ვხსნით ერთგვაროვან განტოლებას:

$$xy' - 2y = 0 \;\Longrightarrow\; y = cx^2.$$

ნაბიჯი 2. $y = c(x)x^2$ ფუნქცია შეგვაქვს განტოლებაში და ვპოულობთ $c(x)$:

$$x^3c' + 2x^2c - 2cx^2 = 2x^4 \;\Longrightarrow\; c(x) = x^2 + c.$$

ნაბიჯი 3. $c(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას ვსვამთ $y(x)$-ში: $y(x) = x^4 + cx^2$.

3. $y' + ytgx = secx$

$$y' + ytgx = 0 \Longrightarrow \frac{y'}{y} = -tgx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int tgx\,dx \Longrightarrow \ln|y| = -\int \frac{sinx}{cosx} dx$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალი $-\int \frac{sinx}{cosx}dx = \int \frac{dcosx}{cosx}dx = \ln|\cos(x)| + c$. ამრიგად, $\ln|y| = \ln|\cos(x)| + c \Rightarrow y(x) = c\cos(x)$. ჩავსვათ $y(x) = c(x)\cos(x)$ განტოლებაში:

$$c'\cos(x) - \sin(x)c(x) + c(x)cosx\frac{sinx}{cosx} = \sec(x) \Rightarrow$$

$$c'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} \Rightarrow c(x) = \int \frac{dx}{cos^2(x)} \Rightarrow c(x) = tg(x) + c.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ $y(x) = \sin(x) + c\,cos(x)$.

4. $(2x+1)y' = 4x + 2y$

$$(2x+1)y' = 2y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{2x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln(2x+1) + c \Rightarrow\ y = c(2x+1).$$

$y(x) = c(x)(2x+1)$-ის ჩასმით განტოლებაში მივიღებთ:

$$(c'(x)(2x+1) + 2c)(2x+1) = 4x + 2c(2x+1)\ \Rightarrow\ (2x+1)^2c' = 4x$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2c' = 4x \Rightarrow c' = \frac{4x}{(2x+1)^2} \Rightarrow c(x) = \int \frac{4xdx}{(2x+1)^2} + c.$$

გამოვთვალოთ ეს ინტეგრალი:

$$\int \frac{4xdx}{(2x+1)^2} = \int \frac{(4x+2-2)dx}{(2x+1)^2} = \int \frac{2(2x+1)dx}{(2x+1)^2} - \int \frac{2dx}{(2x+1)^2} =$$

$$= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + c.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$y(x) = (2x+1)\ln|2x+1| + c(2x+1) + 1.$$

5. $y(x) = \int_0^x y(t)dt + x + 1,\ y(0) = 1.$

გავაწარმოოთ განტოლების ორივე მხარე: $y' = y + 1$, საიდანაც $y(x) = Ce^x - 1$. სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ: $c = 2$. საბოლოოდ გვექნება: $y(x) = 2e^x - 1$.

6. $(e^y - y')x = 2$

აღვნიშნოთ $e^y = z(x)$ და განვსაზღვროთ აქედან $y(x) = \ln|z(x)|$, მაშ-ინ $y'(x) = \frac{z'(x)}{z(x)}$. გამოსავალ განტოლებაში $y(x)$ ფუნქცია შევცვალოთ

$z(x)$ და მივიღებთ: $\left(z(x)-\frac{z'(x)}{z(x)}\right)x=2$. შესაბამისი გადალაგებით მივიღებთ ბერნულის განტოლებას $z'+\frac{2}{x}z=z^2$. კიდევ ერთი აღნიშვნა შემოვიტანოთ: $f(x)=\frac{1}{z(x)}$. ბერნულის განტოლება $f(x)$-ის მიმართ გადაიქცევა $-f'+\frac{2}{x}f=1$ წრფივ განტოლებად, რომლის ზოგად ამონახსნს (ამ ამონახსნს ვპოულობთ კოშის ფორმულიდან) აქვს სახე $f(x)=x(1+Cx)$, საიდანაც, ჩვენი აღნიშვნის თანახმად, $z(x)=\frac{1}{x(1+Cx)}$ და $y(x)=\ln|z(x)|$, ამიტომ გამოსავალი განტოლების ამონახსნი იქნება $y(x)=-\ln(x+Cx^2)$.

7. $y'x^3\sin(y)=xy'-2y$

გავყოთ განტოლების ორივე მხარე y'-ზე:

$$x^3\sin(y)=x-2\frac{y}{y'}\Longrightarrow x^3\sin(y)=x-2y\frac{dx}{dy}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2y\frac{dx}{dy}-x=-x^3\sin(y).$$

განვიხილოთ x, როგორც y-ის ფუნქცია, გავყოთ მიღებული გამოსახულების ორივე მხარე x^3-ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნა $x^{-2}=z(y)$. მივიღებთ წრფივ განტოლებას: $yz'+z=\sin(y)$, რომლის ზოგადი ამონახსნია $z=\frac{C}{y}-\frac{\cos(y)}{y}$. საბოლოოდ გამოსავალი განტოლების ყველა ამონახსნია $y=0$; $\frac{1}{x^2}=\frac{c}{y}-\frac{\cos(y)}{y}$ ანუ $y^2+xcos(y)-cx^2=0$.

8. ამოვხსნათ განტოლება $y'-\frac{2y}{x}-2y^3=0$. განტოლების ყველა წევრი გავყოთ y^3-ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნა $z=\frac{1}{y^2}$. მაშინ განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{2}z'+\frac{2}{x}z=-2\Rightarrow z'+\frac{4}{x}z=-4.$$

მივიღეთ წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება, რომლის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ კოშის ფორმულას:

$$z=e^{-\int\frac{4}{x}dx}(C-\int 4\,e^{\int\frac{4}{x}dx}dx)\Rightarrow z=e^{-4lnx}(C-\int 4\,e^{4lnx}dx)\Rightarrow$$
$$z=x^{-4}\left(C-\int 4\,x^4dx\right)\Rightarrow z=x^{-4}\left(C-4\frac{x^5}{5}\right)\Rightarrow\frac{C}{x^4}-\frac{4}{5}x.$$

რადგან $=\frac{1}{\sqrt{z}}$, ამიტომ $y=\pm\frac{\sqrt{5}x^2}{\sqrt{5C-4x^5}}$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ამოხსენით წრფივი განტოლებები კოშის ფორმულის გამოყენებით:
   1) $xy' = 2y + x^3$ (პასუხი: $y(x) = (x+c)x^2$)
   2) $xy' - 3y = -x^2$ (პასუხი: $y(x) = (\frac{1}{x}+c)x^3$)
   3) $xy' = -y + 2x^3$ (პასუხი: $y(x) = \frac{x^4+2c}{2x}$)
   4) $xy' - 2y = 3x^2$ (პასუხი: $y(x) = (3\ln(x)+c)x^2$)
   5) $tx'(t) + x(t) = t^2$ (პასუხი: $x(t) = \frac{t^2}{3}+\frac{c}{t}$)
2. დაიყვანეთ წრფივ განტოლებაზე და ამოხსენით შემდეგი განტოლებები:
   1) $y' - \frac{5y(1-2y^2x)}{x} = 0$ (პასუხი: $y(x) = \frac{\sqrt{11}x^5}{\sqrt{20x^{11}+11c}}$)
   2) $y' - \frac{3y(1-2y^2x)}{x} = 0$ (პასუხი: $y(x) = \pm\frac{\sqrt{7}x^3}{\sqrt{12x^7+7c}}$)
   3) $y' - \frac{2y(1-2y^3x)}{x} = 0$ (პასუხი: $y(x) = \frac{\sqrt[3]{7}x^2}{\sqrt[3]{12x^7+7c}}$)
   4) $y' + \frac{2y-4y^4x}{x} = 0$ (პასუხი: $y(x) = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12x+5x^6c}}$)
   5) $y' + \frac{3y(1-y^2x)}{x} = 0$ (პასუხი: $y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}x+x^6c}}$)
3. ამოხსენით შემდეგი განცალებადცვლადებიანი განტოლებები:
   1) $x^2y' + x^2 + \frac{1}{49}y^2 = xy$ (პასუხი: $y(x) = -7xtg(\frac{1}{7}\ln(x)+\frac{1}{7}c)$)
   2) $\frac{1}{64}y^2 + x^2y' = xy - x^2$ (პასუხი: $y(x) = -8xtg(\frac{1}{8}\ln(x)+\frac{1}{8}c)$)
   3) $x^2 + xy + \frac{1}{16}y^2 - x^2y' = 0$ (პასუხი: $y(x) = 4xtg(\frac{1}{4}\ln(x)+\frac{1}{4}c)$)
   4) $xy - x^2y' = x^2 + \frac{1}{25}y^2$ (პასუხი: $y(x) = -5xtg(\frac{1}{5}\ln(x)+\frac{1}{5}c)$)

5) $x^2y' + x^2 + \frac{1}{36}y^2 = xy$ (პასუხი: $y(x) = -6xtg(\frac{1}{6}\ln(x) + \frac{1}{6}c)$)

6) $(x+1)y' = -xy$ (პასუხი: $y(x) = c(xe^{-x} - e^{-x})$)

7) $y' + tgx\cdot(y-2) = 0$ (პასუხი: $y(x) = 2 + cos(x)c$)

8) $(x-1)y' = xy$ (პასუხი: $y(x) = c(xe^{x} - e^{x})$)

9) $y' + ctgx\cdot(y+2) = 0$ (პასუხი: $y(x) = -2 + \frac{c}{\sin(x)}$)

4. ცვლადის $z = \frac{y}{x}$ გარდაქმნით ამოხსენით განტოლებები:

ა) $y' = \frac{x-2y}{x}$, ბ) $y' = \frac{3x+y}{x}$, გ) $y' = \frac{-x+3y}{x}$.

(პასუხი: ა) $y(x) = \frac{x}{3} + \frac{c_1}{x^2}$; ბ) $y(x) = (3\ln x + c_1)x$; გ) $y(x) = \frac{x}{2} + c_1x^3$).

5. ამოხსენით შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლებები:

1) $(6x + y - 1)dx + (4x + y - x)dy = 0$ (პასუხი: $(2x + y - 3)^2 = c(3x + y - \frac{5}{2})$). $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 4$; ცვლადების $x = u - \frac{1}{2}, y = v + 4$ გარდაქმნა გვაძლევს განტოლებას $(6u + v)du + (4u + v)dv = 0$.

2) $(5x - 7y + 1)dy + (x + y - 1)dx = 0$ (პასუხი: $(x - y)(x + 7y - 4)^3 = c$). $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$; $x = u + \frac{1}{2}$, $y = v + \frac{1}{2}$ ცვლადების გარდაქმნის შემდეგ განტოლება მიიყვანება $(5u - 7v)dv + (u + v)du = 0$ განტოლებაზე.

6. იპოვეთ ინტეგრალური მამრავლი და ამოხსენით განტოლებები:

1) $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ პასუხი: ინტეგრალური მამრავლი $h(x,y) = \frac{1}{y^2}$, განტოლების ზოგადი ამონახსნი $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c$.

2) $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$ პასუხი: ინტეგრალური მამრავლი $h(x,y) = e^x$, განტოლების ზოგადი ამონახსნი $(x^2 + y^2)e^x = c$.

3) $(3x + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 2xy)dy = 0$. პასუხი: ინტეგრალური მამრავლი $h(x,y) = x$, ზოგადი ამონახსნი $x^3 + 2x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 = c$.

7. ამოხსენით სრულ დიფერენციალებში მოცემული შემდეგი განტოლებები:

1) $(y - six)dx + (x + 1)dy = 0$ (პასუხი: $(x + 1)y + cosy = c$).

2) $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ (პასუხი: $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$).

3) $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ (პასუხი: $x^2 + xy + y^2 = c$).

8. ამოხსენით კოშის ამოცანა:

$$x(x-1)y'(x)+y(x)=x^2(2x-1), y(2)=4.$$ პასუხი: $y(x)=x^2$.

9. ამოხსენით განტოლება: $x\int_0^x y(t)dt=(x+1)\int_0^x ty(t)dt, x>0$. მითითება: ორივე მხარე ორჯერ გააწარმოეთ x-ით. მიიღება წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება $y(x)$-ის მიმართ. პასუხი: $y(x)=c\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$.

10. იპოვეთ სარკის ფორმა, რომელსაც აქვს თვისება: მასზე დაცემული პარალელური სხივები ერთ წერტილში იკრიბებიან.

მითითება: სარკე ჩათვალეთ წირად, პარალელური სხივები OX ღერძის პარალელურად, ხოლო სხივების შეკრების წერტილი იყოს კოორდინატთა სათავე. საძიებელი წირის განტოლება არის $\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2}$, რომელიც გადაიწერება $ydx-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=0$ სახით. ეს ერთგვაროვანი განტოლებაა. გამოიყენეთ ჩასმა $x=zy$. საძიებელ წირთა ოჯახია $y^2=\frac{2}{c}x+\frac{1}{c^2}$. ამრიგად, სარკეს პარაბოლის ფორმა უნდა ჰქონდეს.

4. n-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები

4.1. მუდმივკოეფიციენტებიანი ერთგვაროვანი განტოლება

ამ პარაგრაფით დავიწყებთ ისეთი დიფერენციალური განტოლებების შეს-წავლას, რომელთა ამოხსნაც კვადრატურებშია შესაძლებელი. პირველ რიგში განვიხილავთ *ნორმალურ* განტოლებას:

$$f^{(n)}(t)+a_1 f^{(n-1)}(t)+\dots+a_{n-1}f^{'}(t)+a_n f(t)=0 \qquad (1)$$

ასეთ დიფერენციალურ განტოლებას, სადაც t ნამდვილი ცვლადია და $a_1,a_2,\dots,a_n$ მოცემული ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია, ეწოდება წრფივი ერთგვაროვანი n რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტო-ლება $f(t)$ უცნობი ფუნქციის მიმართ. $a_1,a_2,\dots,a_n$ რიცხვებს ეწოდებათ *გან-ტოლების კოეფიციენტები.*

$$L(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_{n-1}D+a_n\,,$$

სადაც D აღნიშნავს $\dfrac{d}{dt}$ დიფერენციალურ ოპერატორს, *დიფერენციალური მრავალწევრის* გამოყენებით (1) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$L(D)f(t)=0\,. \qquad (2)$$

შემდეგ ლემას უწოდებენ სუპერპოზიციის პრინციპს (1) განტოლებისათვის.

ლემა 1. *დავუშვათ,* $f_1(t),f_2(t)$ *(1) განტოლების რაიმე ამონახსნებია და* C_1,C_2 *ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია. მაშინ* $f(t)=C_1f_1(t)+C_2f_2(t)$ *ფუნქცია აგრეთვე არის (1) განტოლების ამონახსნი.*

დამტკიცება: ლემის დასამტკიცებლად, (2)-ის თანახმად, საჭიროა ვაჩვე-ნოთ, რომ:

$$L(D)\big(C_1f_1(t)+C_2f_2(t)\big)=0\,.$$

უკანასკნელი ტოლობა ფრჩხილების გახსნისა და მუდმივების დიფერენ-ცირების ოპერატორის გარეთ გატანის შემდეგ მიიღებს სახეს:

$$C_1L(D)f_1(t)+C_2L(D)f_2(t)=0\,. \qquad (3)$$

რადგან $f_1(t), f_2(t)$ ფუნქციები (1) განტოლების ამონახსნებია, ამიტომ თითოეულისათვის სრულდება (2) ტოლობა, რაც ნიშნავს, რომ (3) ტოლობის თითოეული შესაკრები 0-ის ტოლია. ამით ლემა დამტკიცებულია.

სხვა სიტყვებით, ლემა 1 გვეუბნება, რომ ორი ამონახსნის წრფივი კომბინაცია აგრეთვე ამონახსნია. ქვემოთ მოყვანილი თეორემა განსაზღვრავს (1) დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობას. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა 1. *n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნების სიმრავლე ქმნის n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს.*

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ (1)-ს აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი. (1) განტოლების n წრფივად დამოუკიდებელ კერძო ამონახსნების ერთობლიობას (1) დიფერენციალური განტოლების *ამონახსნთა ფუნდამენტური* სისტემა ეწოდება. ამრიგად, ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა არის (1) განტოლების ამონახსნთა სივრცის ბაზისი. (1) დიფერენციალური განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი, რომელსაც *კერძო ამონახსნი* ეწოდება, არის საბაზისო ამონახსნების წრფივი კომბინაცია. ამრიგად, კერძო ამონახსნი არის განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი.

უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის აგება. ახლა სწორედ ამ ამოცანის გადაჭრას შევუდგებით.

$L(D)$ დიფერენციალური მრავალწევრის პარალელურად განვიხილოთ მრავალწევრი

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

რომელსაც (1) დიფერენციალური განტოლების *მახასიათებელი მრავალწევრი* ეწოდება, სადაც λ (რიცხვითი) ცვლადია.

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (4)$$

n-ური ხარისხის განტოლებას კი (1)-ის *მახასიათებელი განტოლება* ეწოდება.

როგორც ცნობილია, (4) განტოლებას აქვს n ფესვი (ამონახსნი) ჯერადობების გათვალისწინებით. ამ რიცხვებს (ნამდვილს ან კომპლექსურს) (1) დიფერენციალური განტოლების *მახასიათებელი ფესვები* ეწოდებათ.

თეორემა 2. *დავუშვათ, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ (1) დიფერენციალური განტოლების ერთმანეთისაგან წყვილ-წყვილად განსხვავებული მახასიათებელი ფესვებია: $\lambda_i \neq \lambda_j$, როდესაც $i \neq j$. მაშინ განტოლების კერძო ამონახსნებია $f_1(t)=e^{\lambda_1 t}$, $f_2(t)=e^{\lambda_2 t}$,..., $f_n(t)=e^{\lambda_n t}$ ფუნქციები. ხოლო ზოგადი ამონახსნია $f(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\ldots+C_ne^{\lambda_n t}$ ფუნქცია, სადაც $C_1, C_2,\ldots,C_n$ ნებისმიერი მუდმივებია.*

$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ მახასიათებელ ფესვებს შორის შესაძლებელია იყოს კომპლექსური რიცხვები. დავუშვათ მათი რაოდენობაა $2l$ (განტოლების კომპლექსური ფესვების რაოდენობა ლუწია, რადგან კომპლექსურ $\alpha+i\beta$ რიცხვთან ერთად მისი $\alpha-i\beta$ შეუღლებულიც განტოლების ამონახსნია). აღვნიშნოთ ნამდვილი ფესვები $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$-თი, ხოლო კომპლექსური ფესვები კი – $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2,\ldots, \alpha_l \pm i\beta_l$. კერძო ამონახსნები, რომლებიც შეესაბამებიან $\alpha_j \pm i\beta_j$ მახასიათებელ ფესვებს, არიან $f_j(t)=e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)t}$. წარმოვადგინოთ იგი ტრიგონომეტრიული ფორმით, ანუ გამოვიყენოთ *კომპლექსური ექსპონენტის* შემდეგი განმარტება $e^{it}=\cos t + i\sin t$ (*ეილერის ფორმულა*):

$$e^{(\alpha_j \pm i\beta_j)t}=e^{\alpha_j t}e^{\pm i\beta_j t} \Rightarrow e^{\alpha_j t}e^{\pm i\beta_j t}=e^{\alpha_j t}(\cos\beta_j t \pm i\sin\beta_j t) \Rightarrow$$
$$f_j(t)=e^{\alpha_j t}(\cos\beta_j t \pm i\sin\beta_j t).$$

ლემა 2. *თუ $\psi(t)=\phi(t)+i\varphi(t)$ ფუნქცია არის (1) დიფერენციალური განტოლების კომპლექსური ამონახსნი, მაშინ $\phi(t)$ და $\varphi(t)$ ნამდვილი ფუნქციები აგრეთვე (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებია.*

დამტკიცება: ლემა მტკიცდება $\psi(t)=\phi(t)+i\varphi(t)$ ფუნქციის ჩასმით (1) დიფერენციალურ განტოლებაში. მიღებული გამოსახულების გამარტივების შემდეგ საჭიროა გავითვალისწინოთ, რომ კომპლექსური ფუნქცია ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი ნამდვილი და კომპლექსური ნაწილი 0-ის ტოლია. შედეგად, $\phi(t)$ და $\varphi(t)$ ნამდვილი ფუნქციები (1) განტოლების ამონახსნებია.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ (1) განტოლების მახასიათებელი ფესვები წყვილ-წყვილად განსხვავებულია და მათ შორის არის კომპლექსური რიცხვები, მაშინ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა:

$$e^{\lambda_1 t}\ ,\ e^{\lambda_2 t}\ \ ,\ \dots\ ,\ e^{\lambda_k t}\ ,$$

$$e^{\alpha_1 t}(\cos\beta_1 t \pm i\sin\beta_1 t)\ ,\ \dots\ ,\ e^{\alpha_l t}(\cos\beta_l t \pm i\sin\beta_l t) \qquad (5)$$

ფუნქციები. ამ შემთხვევაშიც ცხადია, (5) კერძო ამონახსნების წრფივი კომბინაცია არის (1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ლემა 3. *სიმრავლე, რომელიც მიიღება*

$$Ae^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + Be^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

წრფივი კომბინაციით, ემთხვევა $ae^{\alpha t}\cos\beta t + be^{\alpha t}\sin\beta t$ *წრფივი კომბინაციების სიმრავლეს, სადაც* A, B *და* a, b *კომპლექსური რიცხვებია.*

დამტკიცება: ვაჩვენებთ, რომ ლემაში მოყვანილ ორ სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა. რადგან:

$$Ae^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + Be^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) =$$

$$= e^{\alpha t}[(A+B)\cos\beta t + (A-B)i\sin\beta t] =$$

$$= e^{\alpha t}[a\cos\beta t + b\sin\beta t]\,,$$

ამიტომ

$$a = A + B\ ,\ \ b = i(A - B)$$

ტოლობა, ან

$$A = \frac{a - ib}{2}\,,\qquad B = \frac{a + ib}{2}$$

ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას ლემაში მოყვანილ სიმრავლეებს შორის.

(5) ფუნდამენტური სისტემის და ლემა 3-ის გამოყენებით მიღებული შედეგი ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით, რომელსაც ვუწოდოთ თეორემა *ნამდვილი ზოგადი ამონახსნის* შესახებ.

თეორემა 3. დავუშვათ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *(1) დიფერენციალური განტოლების ერთმანეთისაგან წყვილ-წყვილად განსხვავებული მახასიათებელი ფესვებია:* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *, როდესაც* $i \neq j$ *, რომელთა შორის არის* $2l$ *კომპლექსური ფესვი. ამ შემთხვევაში განტოლების კერძო ამონახსნებია* $e^{\lambda_1 t}$ *,* $e^{\lambda_2 t}$ *,...,* $e^{\lambda_k t}$ *,* $e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t$ *,* $e^{\alpha_2 t}\cos\beta_2 t, \dots, e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t$ *,* $e^{\alpha_2 t}\sin\beta_2 t, \dots, e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t$ *ფუნქციები, ხოლო ზოგადი ამონახსნია ამ ფუნქციების წრფივი კომბინაცია ნამდვილი კოეფიციენტებით.*

განტოლება (1)-ის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია. ბუნებრივია, მისი ამონახსნი ნამდვილ ფუნქციათა კლასში ვეძებოთ. ნამდვილი ამონახსნის პოვნის ერთ-ერთ გზას ვაჩვენებთ ე.წ. *ჰარმონიული ოსცილატორის* მაგალითზე.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y''(t)+\omega^2 y=0$, სადაც ω ნამდვილი რიცხვია, განტოლების ნამდვილი ამონახსნი.

ამოხსნა: მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$, ხოლო განტოლების ზოგად ამონახსნს კი აქვს სახე $y(t)=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}$, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. გამოვიყენოთ ეილერის ფორმულა:

$$e^{i\omega t}=\cos(\omega t)+i\sin(\omega t),$$

საიდანაც მივიღებთ ნამდვილ ამონახსნს:

$$y(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t),$$

რომელსაც ზოგჯერ სხვა სახითაც წერენ. კერძოდ, უკანასკნელი ტოლობა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}cos\omega t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}sin\omega t\right).$$

რადგან $\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2+\left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right)^2=1$ და $\left|\frac{c_j}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\right|<1,\ j=1{,}2,$ ამიტომ შეგვიძლია შემოვიტანოთ შემდეგი ტოლობებით განსაზღვრული $A>0$ და φ პარამეტრები:

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\ \sin\varphi=-\frac{C_2}{A},\ cos\varphi=\frac{c_1}{A},$$

მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(t) = A\cos(\omega t+\varphi).$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც (1) დიფერენციალურ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები. ზოგადი ამონახსნის მიღების პროცედურა ზემოთ მოყვანილი შემთხვევისაგან არ განსხვავდება და ჯერადი ფესვების შემთხვევაშიც სამართლიანია თეორემა 1. ჩვენ მოვიყვანთ თეორემა 2-ის ანალოგს.

თეორემა 4. *დავუშვათ,* $\lambda_1,...,\lambda_p$ *(1) დიფერენციალური განტოლების ერთმანეთისაგან წყვილ-წყვილად განსხვავებული მახასიათებელი ფესვებია:* $\lambda_i \neq \lambda_j$, *როდესაც* $i \neq j$, *რომელთა ჯერადობებია, შესაბამისად,* $k_1, k_2,...,k_p$. *მაშინ განტოლების კერძო ამონახსნებია:*

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ t^2 e^{\lambda_1 t},...,t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t},$$
$$e^{\lambda_2 t},\ te^{\lambda_2 t},\ t^2 e^{\lambda_2 t},...,t^{k_2-1}e^{\lambda_{21} t},$$
$$...\ ...\ ...\ ...$$
$$e^{\lambda_p t},\ te^{\lambda_p t},\ t^2 e^{\lambda_p t},...,t^{k_p-1}e^{\lambda_p t}$$

ფუნქციები, ხოლო ზოგადი ამონახსნი მიიღება ზემოთ მოყვანილ ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემაში შემავალი ფუნქციების წრფივი კომბინაციით კომპლექსური კოეფიციენტებით.

ნამდვილი ფესვების გამოყოფა ხდება ისევე, როგორც მარტივი მახასიათებელი ფესვების შემთხვევაში.

ამ პარაგრაფში მოყვანილი ყველა დებულება ვრცელდება

$$a_0 f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} f^{'}(t) + a_n f(t) = 0 \tag{6}$$

სახის მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებებზე. ნათელია, რომ (6)-ის ყველა წევრის $a_0 \neq 0$-ზე გაყოფით მიიღება (1) განტოლება.

ვთქვათ, $f_1, f_2, ..., f_n$ (1) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა.

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & ... & f_n(t) \\ f_1'(t) & ... & f_n'(t) \\ ... & ... & ... \\ f_1^{(n-1)}(t) & ... & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

მატრიცის დეტერმინანტს ეწოდება *ვრონსკის დეტერმინანტი* და აღინიშნება $W(t)$ სიმბოლოთი. სამართლიანია შემდეგი დებულება:

დებულება 1. $W(t) \neq 0$.

სამართლიანია უფრო ზოგადი ფაქტი. დიფერენციალური განტოლებისგან დამოუკიდებლად განვიხილოთ $g_1, g_2, ..., g_n$ ფუნქციათა ერთობლიობა განხილულ $[a, b]$ ნამდვილ რიცხვთა მონაკვეთზე. თუ ისინი წრფივად *დამოკიდებულები* არიან (**R**-ის ან **C**-ს მიმართ), მაშინ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი,

რომელიც (7) სახის მატრიცის დეტერმინანტია, იგივურად 0-ის ტოლია ამ მონაკვეთზე. ვრონსკის დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა არის აუცილებელი პირობა იმისა, რომ ფუნქციათა რაიმე ერთობლიობა წრფივად დამოკიდებულია. შებრუნებული დებულება სამართლიანი არ არის. კერძოდ, ფუნქციათა ერთობლიობის ვრონსკის დეტერმინანტი შესაძლებელია იყოს იგივურად ნულის ტოლი, მაგრამ ფუნქციათა ეს ერთობლიობა აღმოჩნდეს წრფივად დამოუკიდებელი. ხოლო, თუ ფუნქციათა სიმრავლე დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებია, მაშინ დებულება 1-ში მოყვანილი პირობა ვრონსკის დეტერმინანტისათვის არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ფუნქციათა ეს ერთობლიობა იყოს წრფივად დამოუკიდებელი.

4.2. ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლება

ახლა უფრო ზოგადი განტოლების ანალიზზე გადავიდეთ.

$$a_0(t)f^{(n)}(t)+a_1(t)f^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}(t)f^{'}(t)+a_n(t)f(t)=0 \qquad (1)$$

ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება არის ზოგადი

$$F(t,f^{(n)},f^{(n-1)},\ldots,f^{/},f)=0$$

n -ური რიგის დიფერენციალური განტოლების კერძო შემთხვევა. ამ უკანასკნელ ჩანაწერში გაერთიანებულია როგორც ცვლადკოეფიციენტებიანი, ისე მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი განტოლებები, ამასთანავე, არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებიც.

დავუშვათ, $f_1(t),f_2(t),\ldots,f_{n-1}(t),f_n(t)$ ფუნქციები (1) განტოლების ნებისმიერ n წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემაა, მას (ისევე, როგორც მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლების შემთხვევაში) *ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა* ეწოდება. ვთქვათ,

$$f(t)=C_1f_1(t)+C_2f_2(t)+\ldots+C_{n-1}f_{n-1}(t)+C_nf_n(t)$$

(1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია. განვიხილოთ

$$a_0(t)f^{(n)}(t)+a_1(t)f^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}(t)f^{'}(t)+a_n(t)f(t)=b(t) \qquad (2)$$

არაერთგვაროვანი განტოლება და მისი ამონახსნი, ვეძებოთ

$$\widetilde{f}(t)=C_1(t)f_1(t)+C_2(t)f_2(t)+\ldots+C_{n-1}(t)f_{n-1}(t)+C_n(t)f_n(t)$$

სახის ფუნქციათა შორის. პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნის საპოვნელად ანალოგიური მეთოდი უკვე გამოვიყენეთ. განტოლების ამოხსნის ამ მეთოდს მუდმივთა *ვარიაციის მეთოდი* ეწოდება. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. *დავუშვათ,* $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_{n-1}(t), f_n(t)$ *ფუნქციები (1) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა. თუ* $C_j(t)$ *ფუნქციები აკმაყოფილებენ განტოლებათა შემდეგ:*

$$C_1^{/}(t)f_1(t) + C_2^{/}(t)f_2(t) + \ldots + C_{n-1}^{/}(t)f_{n-1}(t) + C_n^{/}(t)f_n(t) = 0 \qquad (3)$$

$$C_1^{/}(t)f_1^{/}(t) + C_2^{/}(t)f_2^{/}(t) + \ldots + C_{n-1}^{/}(t)f_{n-1}^{/}(t) + C_n^{/}(t)f_n^{/}(t) = 0 \qquad (4)$$

$$\ldots \ \ldots \ \ldots$$

$$C_1^{/}(t)f_1^{(n-2)}(t) + C_2^{/}(t)f_2^{(n-2)}(t) + \ldots + C_{n-1}^{/}(t)f_{n-1}^{(n-2)}(t) + C_n^{/}(t)f_n^{(n-2)}(t) = 0 \qquad (5)$$

$$C_1^{/}(t)f_1^{(n-1)}(t) + C_2^{/}(t)f_2^{(n-1)}(t) + \ldots + C_{n-1}^{/}(t)f_{n-1}^{(n-1)}(t) + C_n^{/}(t)f_n^{(n-1)}(t) = \frac{b(t)}{a_0(t)} \qquad (6)$$

სისტემას, მაშინ

$$\widetilde{f}(t) = C_1(t)f_1(t) + C_2(t)f_2(t) + \ldots + C_{n-1}(t)f_{n-1}(t) + C_n(t)f_n(t) \qquad (7)$$

ფუნქცია არის (2) არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი.

დამტკიცება: დავუშვათ, $C_j(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (3)-(6) განტოლებათა სისტემას. ავიღოთ (7) ფუნქცია და გავაწარმოოთ იგი, ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ ნამრავლს ვაწარმოებთ და შედეგი დავაჯგუფოდ ისე, რომ ერთად იყოს მოთავსებული პირველი თანამამრავლის ყველა წარმოებული, შემდეგ მეორე თანამამრავლის:

$$\widetilde{f}^{/}(t) = [C_1^{/}(t)f_1(t) + C_2^{/}(t)f_2(t) + \ldots + C_{n-1}^{/}(t)f_{n-1}(t) + C_n^{/}(t)f_n(t)] +$$

$$+ [C_1(t)f_1^{/}(t) + C_2(t)f_2^{/}(t) + \ldots + C_{n-1}(t)f_{n-1}^{/}(t) + C_n(t)f_n^{/}(t)].$$

პირველი შესაკრები (3)-ის თანახმად 0-ის ტოლია, ამიტომ:

$$\widetilde{f}^{/}(t) = C_1(t)f_1^{/}(t) + C_2(t)f_2^{/}(t) + \ldots + C_{n-1}(t)f_{n-1}^{/}(t) + C_n(t)f_n^{/}(t).$$

ეს უკანასკნელი კვლავ გავაწარმოოთ და შესაკრებების დაჯგუფება ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურად მოვახდინოთ. მივიღებთ:

$$\widetilde{f}^{//}(t)=[C_1^/(t)f_1^/(t)+C_2^/(t)f_2^/(t)+\ldots+C_{n-1}^/(t)f_{n-1}^/(t)+C_n^/(t)f_n^/(t)]+$$
$$+[C_1(t)f_1^{//}(t)+C_2(t)f_2^{//}(t)+\ldots+C_{n-1}(t)f_{n-1}^{//}(t)+C_n(t)f_n^{//}(t)].$$

აქ პირველი კვადრატული ფრჩხილი (4) ტოლობის გამო 0-ის ტოლია. გაწარმოების ეს პროცედურა $n-1$ რიგამდე გავაგრძელოთ. i-ური წარმოებულისათვის გვექნება:

$$\widetilde{f}^{(i)}(t)=C_1(t)f_1^{(i)}(t)+C_2(t)f_2^{(i)}(t)+\ldots+C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(i)}(t)+C_n(t)f_n^{(i)}(t).$$

უკანასკნელი n-ური წარმოებული გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$\tilde{f}^{(n)}(t)=[C_1^/(t)f_1^{(n-1)}(t)+C_2^/(t)f_2^{(n-1)}(t)+\ldots+C_{n-1}^/(t)f_{n-1}^{(n-1)}(t)+C_n^/(t)f_n^{(n-1)}(t)]+$$
$$+[C_1(t)f_1^{(n)}(t)+C_2(t)f_2^{(n)}(t)+\ldots+C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(n)}(t)+C_n(t)f_n^{(n)}(t)].$$

პირველ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება (6) ტოლობის გამო $\dfrac{b(t)}{a_0(t)}$-ის ტოლია, ამიტომ:

$$\tilde{f}^{(n)}(t)=C_1(t)f_1^{(n)}(t)+C_2(t)f_2^{(n)}(t)+\ldots+C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(n)}(t)+C_n(t)f_n^{(n)}(t)+\frac{b(t)}{a_0(t)}.$$

ამის შემდეგ $\widetilde{f}^{(i)}(t)$-სათვის მიღებული გამოსახულება გავამრავლოთ $a_{n-i}(t)$-ზე და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ:

$$a_0(t)f^{(n)}(t)+a_1(t)f^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}(t)f^{'}(t)+a_n(t)f(t)=$$
$$=a_0(t)[C_1(t)f_1^{(n)}(t)+C_2(t)f_2^{(n)}(t)+\ldots+C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(n)}(t)+C_n(t)f_n^{(n)}(t)+\frac{b(t)}{a_0(t)}]+$$
$$+a_1(t)[C_1(t)f_1^{(n-1)}(t)+C_2(t)f_2^{(n-1)}(t)+\ldots+C_{n-1}(t)f_{n-1}^{(n-1)}(t)+C_n(t)f_n^{(n-1)}(t)]+$$
$$+\ldots+a_n(t)[C_1(t)f_1(t)+C_2(t)f_2(t)+\ldots+C_{n-1}(t)f_{n-1}(t)+C_n(t)f_n(t)].$$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარე ჩვენთვის მოსახერხებელი ფორმით დავაჯგუფოთ და $b(t)$-ს გავუტოლოთ (რადგან მარცხენა მხარე $b(t)$-ს ტოლია):

$$C_1(t)[a_0(t)f_1^{(n)}(t)+a_1(t)f_1^{(n-1)}(t)+...+a_n(t)f_1(t)]+$$

$$+C_2(t)[a_0(t)f_2^{(n)}(t)+a_1(t)f_2^{(n-1)}(t)+...+a_n(t)f_2(t)]+$$

$$+...+C_N(t)[a_0(t)f_n^{(n)}(t)+a_1(t)f_n^{(n-1)}(t)+...+a_n(t)f_n(t)]+b(t)=b(t),$$

აქ თითოეული სტრიქონი 0-ის ტოლია, რაც იმას ამტკიცებს, რომ (7) გამოსახულებით მოცემული ფუნქცია (2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია.

მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლების ანალოგიურად განიხილება ცვლადკოეფიციენტებიანი განტოლების ვრონსკის დეტერმინანტი და, ამრიგად, იგი არის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური $f_1, f_2, \dots, f_n$ სისტემისაგან შედგენილი (7) მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც პარაგრაფ 3.1-ის დებულება 1-ის თანახმად, ნულისაგან განსხვავებულია.

(3)-(6) არის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა $C_1^/(t),...,C_n^/(t)$ ფუნქციების მიმართ. გადავწეროთ იგი მატრიცული ფორმით:

$$\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & ... & f_{n-1}(t) & f_n(t) \\ f_1^/(t) & f_2^/(t) & ... & f_{n-1}^/(t) & f_n^/(t) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ f_1^{(n-2)}(t) & f_2^{(n-2)}(t) & ... & f_{n-1}^{(n-2)}(t) & f_n^{(n-2)}(t) \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & ... & f_{n-1}^{(n-1)}(t) & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^/(t) \\ C_2^/(t) \\ ... \\ C_{n-1}^/(t) \\ C_n^/(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ \dfrac{b(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

ცხადია, რომ განტოლებათა ამ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს, რადგან სისტემა გადაუგვარებელია. მართლაც,

$$W(t)=\det\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & ... & f_{n-1}(t) & f_n(t) \\ f_1^/(t) & f_2^/(t) & ... & f_{n-1}^/(t) & f_n^/(t) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ f_1^{(n-2)}(t) & f_2^{(n-2)}(t) & ... & f_{n-1}^{(n-2)}(t) & f_n^{(n-2)}(t) \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & ... & f_{n-1}^{(n-1)}(t) & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

არის (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი, რომელიც არანულოვანია. (8) სისტემიდან განისაზღვრება ცალსახად $C_j^/(t)$, $j=1,...,n$ ფუნქციები კრამერის ფორმულის

გამოყენებით, ხოლო მათთვის მიღებული გამოსახულებების ინტეგრებით კი მივიღებთ $\widetilde{f}(t)$ ზოგადი ამონახსნის $C_j(t)$ განუსაზღვრელ კოეფიციენტებს:

$$C_j(t) = \int \frac{\Delta_j(t)}{W(t)} dt, \qquad (9)$$

სადაც $\Delta_j(t),\ j = 1, \dots, n$ (8) სისტემასთან მიკავშირებული სისტემის დეტერმინანტებია.

(2) არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა სივრცე არ არის წრფივი სივრცე (იგი არ შეიცავს 0-ს), მაგრამ არის აფინური სივრცე და მისი განზომილებაა n, რის გამოც, (2) არაერთგვაროვანი განტოლების f ზოგადი ამონახსნი მიიღება (2)-ს შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების $\tilde{f}$ ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების რომელიმე ერთი კონკრეტული $\hat{f}$ ამონახსნის შეკრებით: $f = \tilde{f} + \hat{f}$.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მუდმივკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის (9) ფორმულით შეგვიძლია ვიპოვოთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რის გამოც ასეთი სახის განტოლებებისათვის *მუდმივთა ვარიაციის მეთოდი* არის უნივერსალური, თუმცა გარკვეული სახის განტოლებებისათვის არსებობს ამონახსნის პოვნის უფრო ეფექტური მეთოდები. განტოლებათა ერთ-ერთ ასეთ კლასს, ამონახსნის აგების განსხვავებული გზით, განვიხილავთ შემდეგ პარაგრაფში.

n-ური რიგის წრფივი ერთგვაროვანი (1) განტოლებისათვის კოშის ამოცანა არის პირობა ზოგად f ამონახსნზე, რომელიც ცალსახად გამოყოფს ამონახსნთა n-განზომილებიანი სივრციდან ერთადერთ ამონახსნს რაიმე წინასწარ დასახელებულ t_0 წერტილში საძიებელი ფუნქციის $f(t_0) = f_0$ და მისი წარმოებულების $f^{(j)}(t_0) = f_j, j = 1, \dots, n-1$ მნიშვნელობის საშუალებით. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

დებულება 1.

$$\begin{cases} a_0(t)f^{(n)}(t) + a_1(t)f^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)f'(t) + a_n(t)f(t) = 0 \\ f(t_0) = f_0, f'(t_0) = f_1, f''(t_0) = f_2, \dots, f^{(n-1)}(t_0) = f_{n-1} \end{cases}$$

კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

დებულება ტრივიალურია ზემოთ მოყვანილი თეორემების შემდეგ, რადგან ზოგადი ამონახსნი შეიცავს n მუდმივს, რომელთა განსაზღვრაც შესაძლებელია n საწყისი პირობით. ამრიგად, მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას n უცნობით. ამასთან, განტოლებათა სისტემის მთავარი დეტე-

რმინანტი 0-საგან განსხვავებულია, რის გამოც სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მაგალითი. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა

$$y''(x) + 7y'(x) + 10y(x) = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

დავწეროთ მახასიათებელი განტოლება და ვიპოვოთ მისი ფესვები:

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5 \ \Rightarrow$$

განტოლების კერძო ამონახსნები იქნება $y_1(x) = e^{-2x}$ და $y_2(x) = e^{-5x}$, ხოლო ზოგად ამონახსნს კი ექნება სახე – $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \ \Rightarrow$ $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-5x}$. პირველი საწყისი პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $y(0) = 2 \ \Rightarrow$ (ზოგად ამონახსნში ვსვამთ $x = 0$ და $y(x)$ ფუნქციის მიღებულ მნიშვნელობას ვუტოლებთ 2-ს) $c_1 + c_2 = 2$.

მეორე საწყისი პირობის თანახმად, $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-5x}$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა $x = 0$ წერტილში 1-ის ტოლია, ამიტომ ვპოულობთ $y(x)$ ფუნქციის წარმოებულს: $y'(x) = -2c_1 e^{-2x} - 5c_2 e^{-5x}$, შემდეგ ვსვამთ მიღებულ გამოსახულებაში $x = 0$ და ვუტოლებთ 1: $-2c_1 - 5c_2 = 1$.

c_1, c_2 რიცხვების საპოვნელად მივიღეთ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$c_1 + c_2 = 2, \ -2c_1 - 5c_2 = 1 \ \Rightarrow \ c_1 = 2 - c_2,$$

$$-4 + 2c_2 - 5c_2 = 1 \ \Rightarrow c_2 = -5/3, \ c_1 = 11/3.$$

c_1, c_2-ის მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ განტოლების ზოგად ამონახსნში და მივიღებთ ამონახსნს:

$$y(x) = \frac{11}{3} e^{-2x} - \frac{5}{3} e^{-5x},$$

რომელიც დააკმაყოფილებს $y(0) = 2, y'(0) = 1$ საწყის პირობებს.

4.3. მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება კვაზიპოლინომიალური არაერთგვაროვანი წევრით

$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$ სახის გამოსახულებას, სადაც $P_m(x)$ m-ხარისხის მრავალწევრია, ეწოდება *კვაზიმრავალწევრი.*

დებულება 1. *დავუშვათ,*

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x) \qquad (1)$$

განტოლებაში $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$ *კვაზიმრავალწევრია. მაშინ (1) განტოლების კერძო ამონახსნს აქვს სახე:*

$$\tilde{y}(x) = x^s Q_m(x)e^{\alpha x}, \qquad (2)$$

სადაც: ა) $s = 0$, *თუ* α *არ ემთხვევა (1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელ ფესვთაგან არცერთს; ბ)* $s = l$, *თუ* l *არის იმ მახასიათებელი ფესვის ჯერადობა, რომელიც* α*-ს ტოლია.* $Q_m(x)$ *კი* m*-ხარისხის მრავალწევრია.*

$Q_m(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტების საპოვნელად საჭიროა (2) გამოსახულება ჩავსვათ (1) და შესაბამისი კოეფიციენტები ერთმანეთს გავუტოლოთ.

თუ $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_p(x)$, მაშინ (1)-ის კერძო ამონახსნები იქნება

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = f_i(x),\ i = 1, \dots, p$$

განტოლებების $\widetilde{y_i}(x)$ კერძო ამონახსნების ჯამი, ხოლო თითოეული $\widetilde{y_i}(x)$ ამონახსნის პოვნა შესაძლებელია ზემოთ მოყვანილი ალგორითმით.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y''(x) - y = 2e^x - x^2$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელი ფესვებია -1 და 1. ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

რადგან განტოლების მარჯვენა მხარე არის ორი $-f_1(x), f_2(x)$ ფუნქციების ჯამი, სადაც $f_1(x) = 2e^x$, $f_2(x) = -x^2$, ამიტომ ჩვენი განტოლება გაიხლიჩება ორ განტოლებად:

$$y''(x) - y = 2e^x; \qquad (1)$$

$$y''(x) - y = -x^2. \qquad (2)$$

თითოეული მათგანის მარჯვენა მხარე არის კვაზიმრავალწევრი. ამიტომ არაერთგვაროვანი განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნი შესაძლებელია ვიპოვოთ ზემოთ მოყვანილი წესით. დავიწყოთ პირველი განტოლებით. მის ამონახსნს ვეძებთ $x^s Q_m(x)e^{\alpha x}$ სახით, სადაც $m = 0$, $\alpha = 1$. ეს უკანასკნელი ემთხვევა ერთ-ერთ მარტივ მახასიათებელ ფესვს, ამიტომ $s = 1$. ჩავსვამთ რა შესაბამის მნიშვნელობებს $x^s Q_m(x)e^{\alpha x}$ გამოსახულებაში, მივიღებთ, რომ საძიებელ ფუნქციას აქვს სახე: xa_0e^x, რომელშიც a_0 უცნობი რიცხვი გასა-

საზღვრება a_0xe^x-ის ჩასმით (1) განტოლებაში. მივიღებთ $a_0e^x + a_0e^x + +a_0xe^x - a_0xe^x = 2e^x$, საიდანაც $a_0 = 1$. ამრიგად, $\widetilde{y_1}(x) = xe^x$.

ახლა დავიწყოთ (2) განტოლების ანალიზი. ამ შემთხვევაში $m = 2$, $\alpha = 0$. რადგან 0 არ არის მახასიათებელი ფესვი, ამიტომ $s = 0$ და, ამრიგად, განტოლების ამონახსნს ვეძებთ $b_0 + b_1x + b_2x^2$ სახის მრავალწევრებს შორის. ჩავსვათ ეს ფუნქცია (2)-ში და მივიღებთ: $2b_2 - b_0 - b_1x - b_2x^2 = -x^2$, საიდანაც $b_2 = -1$, $b_1 = 0$, $b_0 = 2$, ამრიგად (2) განტოლების კერძო ამონახსნია $x^2 + 2$. ე.ი. $\widetilde{y_2}(x) = x^2 + 2$.

ამრიგად, საძიებელი განტოლების კერძო ამონახსნია $\tilde{y}(x) = \widetilde{y_1}(x) + +\widetilde{y_2}(x) = xe^x + x^2 + 2$, ხოლო ზოგადი ამონახსნი კი, როგორც ცნობილია, ტოლია ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის ჯამის, საიდანაც გამოდის, რომ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x) = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + +xe^x + x^2 + 2$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$y''(x) - 10y'(x) + 25y(x) = -3e^{5x}.$$

$P_m(x)e^{\alpha x}$ კვაზიმრავალწევრი ჩვენი განტოლებისათვის ასეთია: $-3e^{5x}$. $m = 0$, $\alpha = 5$, ხოლო $P_m(x) = -3$. დავწეროთ ერთგვაროვანი განტოლების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება და ვიპოვოთ მისი ფესვები:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 5.$$

ამრიგად, 5 არის ორჯერადი მახასიათებელი ფესვი, რომელიც ემთხვევა $-3e^{5x}$ კვაზიმრავალწევრის $\alpha = 5$ მაჩვენებელს. ამიტომ არაერთგვაროვანი განტოლების სავარაუდო კერძო ამონახსნს $x^sQ_m(x)e^{\alpha x}$-ის შესაბამისად ექნება სახე: $x^2a_0e^{5x}$, სადაც $a_0 = Q_0(x)$ არის $m = 0$ ხარისხის საძიებელი მრავალწევრი (ანუ მუდმივი, რომელიც აღვნიშნეთ a_0-ით). რადგან $\tilde{y}(x) = x^2a_0e^{5x}$ ჩვენი განტოლების სავარაუდო კერძო ამონახსნია, ამიტომ მისი ჩასმით განტოლება უნდა გადაიქცეს იგივეობად:

$$\tilde{y}'(x) = 2xa_0e^{5x} + 5x^2a_0e^{5x},$$
$$\tilde{y}''(x) = 2a_0e^{5x} + 10xa_0e^{5x} + 10xa_0e^{5x} + 25x^2a_0e^{5x};$$

განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$2a_0e^{5x} + 10xa_0e^{5x} + 10xa_0e^{5x} + 25x^2a_0e^{5x} -$$
$$-10(2xa_0e^{5x} + 5x^2a_0e^{5x}) + 25x^2a_0e^{5x} = -3e^{5x} \Rightarrow$$

გამოსახულების მარცხენა მხარეს მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ მივიღებთ ტოლობას: $2a_0e^{5x} = -3e^{5x} \Rightarrow a_0 = -3/2$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნია $\tilde{y}(x) = -3/2x^2e^{5x}$.

რადგან მახასიათებელი ფესვები უკვე ვიპოვეთ, ამიტომ ვწერთ ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს: $\hat{y}(x) = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}$ (რადგან მახასიათებელ განტოლებას ჯერადი ფესვები აქვს, ამიტომ ერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნები იქნება e^{5x} და xe^{5x}). საბოლოოდ, ჩვენი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება: $y(x) = \hat{y}(x) + \tilde{y}(x) \Rightarrow y(x) = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} - \frac{3}{2}x^2e^{5x}$.

4.4. ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლების შესახებ, რომელიც ცვლადის გარდაქმნით მიიყვანება წრფივ ერთგვაროვან მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებამდე

უნივერსალური მეთოდი, თუ ცვლადის რა გარდაქმნა გამოდგება ამა თუ იმ განტოლების ამოსახსნელად, არ არსებობს. მოსახერხებელი ცვლადის გარდაქმნის არჩევა გარკვეული ტიპის ხელოვნებაა, მაგრამ დიფერენციალური განტოლებების თეორიაში არსებობს სტანდარტული სიტუაციები, სადაც ცნობილია ამა თუ იმ ცვლადის გარდაქმნას სადამდე მივყავართ. ჩვენ ცვლადის გარდაქმნის მეთოდს, როგორც დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის საშუალებას, იმისთვის კი არ მოვიყვანთ, რომ ზეპირადაა დასამახსოვრებელი, არამედ იმისათვის, რომ განტოლებისადმი მიდგომის მრავალფეროვნება გაჩვენოთ.

განვიხილოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება:

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0\ , \qquad (1)$$

სადაც $p(t)\,,q(t)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია $\mathbf{R}$-ის რომელიმე I ინტერვალზე.

დებულება 1 (აუცილებელი პირობა). *თუ (1) განტოლება დაიყვანება მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე $\tau = \varphi(t)$ ცვლადის გარდაქმნით, მაშინ:*

$$\tau = C\int\sqrt{q(t)}dt,$$

სადაც C რაიმე მუდმივია, ხოლო ინტეგრალი უნდა გავიგოთ, როგორც რომელიმე პირველყოფილი.

დამტკიცება: $\varphi(t)$ ჩავთვალოთ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადად და დავუშვათ, რომ $\varphi'(t) \neq 0$ ნებისმიერი t-სათვის I-დან. მაშინ:

$$y'(t) = \frac{dy}{d\tau} \cdot \varphi'(t), \quad y''(t) = \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \varphi'^2(t) + \frac{dy}{d\tau} \cdot \varphi''(t).$$

ჩავსვათ y' და y'' ზემოთ მიღებული მნიშვნელობები (1)-ში და მივიღებთ:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\varphi''(t) + p(t)\varphi'(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{dy}{d\tau} + \frac{q(t)}{\varphi'^2(t)} y = 0.$$

გვინდა, რომ ამ განტოლების კოეფიციენტები მუდმივები იყოს, ამისათვის კი აუცილებელია, რომ $C^2 q(t) = \varphi'^2(t)$. აქედან, $\tau = \varphi(t) = C\int \sqrt{q(t)}dt$.

მაგალითი 1. $t^2 y''(t) + a_1 t y'(t) + a_2 y(t) = 0$, $t > 0$ სახის განტოლებას, სადაც a_1, a_2 მოცემული რიცხვებია, ეწოდება *მეორე რიგის ეილერის განტოლება.* ცვლადის $\tau = \ln t$ გარდაქმნით ეს განტოლება მიიყვანება

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + (a_1 - 1) \cdot \frac{dy}{d\tau} + a_2 y = 0$$

მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებაზე. მართლაც:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{1}{\tau};$$

$$y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{1}{\tau}\right) = \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{1}{\tau} - \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{1}{\tau^2} =$$

$$= \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \frac{1}{\tau^2} - \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{1}{\tau^2};$$

შევიტანოთ $y'(t), y''(t)$-ის ეს მნიშვნელობები მოცემულ განტოლებაში და მივიღებთ მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებას.

ანალოგიურად, თუ n *-ური რიგის ეილერის განტოლებაში*

$$\tau^n y^{(n)}(\tau) + a_1 \tau^{n-1} y^{(n-1)}(\tau) + \ldots + a_{n-1} \tau y'(\tau) + a_n y(\tau) = 0$$

მოვახდენთ $\tau = \ln t$ ცვლადის გარდაქმნას, მივიღებთ მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებას:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0.$$

მაგალითი 2. $(1-t^2)y''(t)-ty'(t)+n^2y(t)=0$, სადაც $|t|<1$, n – ნამდვილი პარამეტრია, ეწოდება *ჩებიშევის განტოლება*. ცვლადის $t=\cos(\tau)$ გარდაქმნით ჩებიშევის განტოლება მიიყვანება

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+n^2y=0$$

განტოლებამდე, რომლის ამონახსნია $y(t)=A\cos(n\cdot\arccos(t)+\varphi)$, სადაც A და φ ნებისმიერი მუდმივებია. თუ n მთელია, მაშინ $T_n(t)=\cos(n\cdot\arccos(t))$ არის n ხარისხის მრავალწევრი, რომელსაც *ჩებიშევის მრავალწევრი* ეწოდება.

აქვე გავაკეთოთ შენიშვნა: დებულებაში მოყვანილი $\tau=\varphi(t)$ ცვლადის გარდაქმნის როლს მაგალით 1-ში თამაშობს $\tau=\ln t$ ფუნქცია. ამ მაგალითში $q(t)=\dfrac{a_2}{t^2}$ და, მართლაც, $\tau=\ln(t)=C\int\dfrac{\sqrt{a_2}}{t}dt$. ხოლო მაგალით 2-ში კი გვაქვს გარდაქმნა $t=\cos(\tau)$, საიდანაც გამოდის, რომ $\tau=\arccos(t)$. გარდა ამისა, $q(t)=\dfrac{n^2}{1-t^2}$ და ამრიგად: $\tau=\arccos(t)=C\int\dfrac{n}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

მაგალითი 3. (1) განტოლება მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებამდე ზოგჯერ უცნობი ფუნქციის გარდაქმნის საშუალებით მიიყვანება. მაგალითად,

$$t^2y''+ty'+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)y=0,\ \ t>0, \qquad (2)$$

ბესელის განტოლება $y=\dfrac{z}{\sqrt{t}}$ გარდაქმნით შესაძლებელია მიყვანილ იქნეს განტოლებამდე

$$z''+z=0. \qquad (3)$$

ვაჩვენოთ (2) და (3) განტოლებების ეკვივალენტურობა. რადგან $z(t)=y(t)\sqrt{t}$, ამიტომ:

$$z'(t)=y'(t)\sqrt{t}+\frac{y(t)}{2\sqrt{t}},\quad z''(t)=y''(t)\sqrt{t}+\frac{y'(t)}{2\sqrt{t}}+\frac{y'(t)}{2\sqrt{t}}-\frac{y(t)}{4t\sqrt{t}}.$$

თუ სრულდება (3), მაშინ სამართლიანია ტოლობა:

$$(y''(t)\sqrt{t}+\frac{y'(t)}{2\sqrt{t}}+\frac{y'(t)}{2\sqrt{t}}-\frac{y(t)}{4t\sqrt{t}})+\ y(t)\sqrt{t}=0,$$

რომლის გამარტივების შემდეგ მივიღებთ (2) განტოლებას. ამრიგად, ბესელის განტოლების ამონახსნი მოიცემა სახით:

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{t}} \sin(t+\varphi),$$

სადაც A და φ ნებისმიერი მუდმივებია. კერძოდ, $y(t) = \frac{sint}{\sqrt{t}}$ ბესელის განტოლების ერთ-ერთი კერძო ამონახსნია.

მაგალითი 4. (1) განტოლება მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებამდე შესაძლებელია აგრეთვე მიყვანილ იქნეს ერთდროულად ცვლადის და უცნობი ფუნქციების გარდაქმნით. მაგალითად, სტოქსის

$$y'' = \frac{Ay}{(t-a)^2(t-b)^2}, \quad t \in (a,b)$$

განტოლება გარდაქმნით:

$$\frac{t-a}{b-t} = e^{\tau}, \quad \frac{y}{t-b} = u, \quad u = u(\tau)$$

მიიყვანება მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებამდე.

მართლაც, თანმიმდევრულად ვპოულობთ:

$$t = \frac{a+be^{\tau}}{1+e^{\tau}}, \quad y = \frac{(a-b)u}{1+e^{\tau}}, \quad y' = \frac{dy}{d\tau} : \frac{dt}{d\tau} = u - u'(1+e^{-\tau}),$$

$$y'' = \frac{u''-u'}{a-b} \frac{(1+e^{-\tau})(1+e^{\tau})^2}{e^{\tau}}.$$

თუ t, y, y''-ის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ სტოქსის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$u'' - u' = \frac{Au}{(b-a)^2}.$$

4.5. ბერნულის განტოლება

როგორც უკვე ვიცით,

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{1}$$

განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\tau)d\tau} b(s)ds. \tag{2}$$

განვიხილოთ (1)-ის „მცირე“ განზოგადება:

$$x'(t)+a(t)x(t)=b(t)x^{\alpha}(t). \tag{3}$$

ეს დიფერენციალური განტოლება *ბერნულის განტოლების* სახელწოდებითაა ცნობილი. თუ $\alpha=0$, მაშინ (3) განტოლება წრფივი არაერთგვაროვანია, ხოლო თუ $\alpha=1$, მაშინ – წრფივი ერთგვაროვანი, ამიტომ მისი ამონახსნი (2) ფორმულით მოიცემა. განვიხილოთ არატრივიალური შემთხვევა: $\alpha\neq 0$ და $\alpha\neq 1$, გავყოთ (3) x^{α}-ზე და მოვახდინოთ გარდაქმნა:

$$y(t)=x(t)^{1-\alpha},$$

მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{1}{1-\alpha}y'(t)+a(t)y(t)=b(t),$$

რომელიც (2) ფორმულის საშუალებით იხსნება. როდესაც $\alpha>0$, x^{α}-ზე (3) განტოლების ორივე მხარის გაყოფით იკარგება (3)-ის ტრივიალური ამონახსნი $x\equiv 0$, რომელსაც ამონახსნთა სიმრავლეს დავუმატებთ. ამის გაკეთება მოგვიწევს იმის გამო, რომ ზოგადი ფორმულით იგი არ მიიღება.

მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება $(x+1)(y'+y^2)=-y$.

დავუშვათ, რომ $x\neq -1$. გავყოთ განტოლების ორივე მხარე $x+1$-ზე და გადავწეროთ განტოლება შემდეგი სახით: $y'+\frac{y}{x+1}=-y^2$, რომელიც ბერნულის განტოლებაა. მის ამოსახსნელად ორივე მხარე გავყოთ y^2-ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნა $y^{-1}=z(x)$. მივიღებთ:

$$z'(x)=-y^{-2}y' \implies z'(x)-\frac{z(x)}{x+1}=1.$$

ეს არის წრფივი განტოლება, რომლის ამონახსნია $z(x)=(\ln|x+1|+c)(x+1)$. დავუბრუნდეთ აღნიშვნებს და მივიღებთ: $y(x)=\frac{1}{(\ln|x+1|+c)(x+1)}$.

4.6. რიკატის განტოლება

პირველი რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ინტეგრება კვადრატურებში საზოგადოდ შეუძლებელია, *რიკატის* (იაკოპა ფრანჩესკა რიკატი – 1676-1754, იტალიელი მათემატიკოსი)

$$x'(t)+a(t)x(t)+b(t)x^2(t)=c(t) \tag{1}$$

განტოლებაა, სადაც $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ მოცემული ფუნქციებია.

(1)-ის პარალელურად განვიხილოთ *რიკატის სპეციალური განტოლება*:

$$x'(t)+ax^2(t)=bt^{\alpha}, \tag{2}$$

სადაც a და b მუდმივებია.

როდესაც $\alpha=0$, მიიღება განცალებადცვლადებიანი განტოლება. მართლაც, (2) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dx}{dt}+ax^2=b \Rightarrow dx=(b-ax^2)dt \Rightarrow \frac{dx}{b-ax^2}=dt,$$

რომლის ინტეგრებაც სიძნელეს არ წარმოადგენს.

როდესაც $\alpha=-2$, გვექნება დიფერენციალური განტოლება, რომელიც გადაიქცევა არაერთგვაროვან განტოლებად, უცნობის $y(t)=\dfrac{1}{x(t)}$ გარდაქმნით. მართლაც, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას $-\frac{y'(t)}{y^2(t)}+\frac{a(t)}{y^2(t)}=bt^2$.

დანიელ ბერნულმა მოახდინა სპეციალური რიკატის განტოლების დეტალური ანალიზი და აჩვენა, რომ $x(t)=\dfrac{1}{x_1(t)t^2}+\dfrac{1}{at}$, $t=t_1^{\frac{1}{\alpha+3}}$ ცვლადების გარდაქმნით (2) განტოლება მიიყვანება განტოლებაზე:

$$\frac{dx_1(t_1)}{dt_1}+\frac{b}{\alpha+3}x_1^2(t_1)=\frac{a}{\alpha+3}t_1^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}. \tag{3}$$

გარდა ამისა, ბერნულმა დაამტკიცა, რომ (2) განტოლება კვადრატურებში ინტეგრებადია, თუ $\alpha=-\dfrac{4k}{2k+1}$, $k\in Z$. ამრიგად, (3) კვლავ არის რიკატის სპეციალური განტოლება მაჩვენებლით $\alpha'=-\dfrac{\alpha+4}{\alpha+3}$. ეს ნიშნავს, რომ, თუ ცნობილია რიკატის სპეციალური განტოლების ამონახსნი მაჩვენებლით α, მაშინ შესაძლებელია ამონახსნის ანალიზური ჩაწერა რიკატის სპეციალური განტოლებისთვის მაჩვენებლით $-\dfrac{\alpha+4}{\alpha+3}$ და პირიქით. ჩვენ ვიცით ამონახსნის პოვნის ფორმულები, როდესაც $\alpha=0,-2$. $\alpha=-2$ მაჩვენებლიდან ზემოთ მოყვანილი გარდაქმნის საშუალებით მივიღებთ განტოლებას მაჩვენებლით $\alpha'=-2$. ასე რომ, ახალს ვერაფერს გავიგებთ. ხოლო, როცა $\alpha=0$,

მაშინ $\alpha' = -\frac{4}{3}$. თუ იმავე პროცედურებს ჩავატარებთ α'-თვის, საზოგადოდ, მივიღებთ ყველა ამონახსნს $\alpha = -\frac{4k}{2k+1}$ მაჩვენებლისთვის.

თეორემა 1. (ჯ. ლიუვილი) *(2) არაწრფივი განტოლება კვადრატურებ-ში ინტეგრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც* $\alpha = -\frac{4k}{2k+1}$.

დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას. რადგან სპეციალური რიკატის განტოლება კვადრატურებში ინტეგრებადია მხოლოდ მაჩვენებლის ზემოთ მოყვანილი მნიშვნელობისთვის, უნდა ველოდოთ, რომ (1) განტოლების ინტეგრება კვადრატურებში თითქმის ყოველთვის შეუძლებელია. მაგრამ ეს ასე არ არის. უცნობის სპეციალური გარდაქმნით რიკატის განტოლება კვლავ რიკატის განტოლებაში გადადის. ამ ფაქტს გამოვიყენებთ რიკატის განტოლების ჩვენთვის საინტერესო ამონახსნის პოვნისთვის. განვიხილოთ უცნობის შემდეგი გარდაქმნა

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \varphi(t)\,, \tag{4}$$

სადაც $\varphi(t)$ რაიმე ფიქსირებული ფუნქციაა. მართლაც, (4)-ის ჩასმა (1)-ში გვაძლევს:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}'(t) + (a(t) + 2b(t)\phi(t))\tilde{x}(t) + b(t)\tilde{x}^2(t) = \\ &= c(t) - \phi'(t) - a(t)\phi(t) - b(t)\phi^2(t) \end{aligned} \tag{5}$$

რომელიც (1) გამოსავალი განტოლებისაგან განსხვავებულია, შეიცვალა კოეფიციენტები $a(t)$ და $c(t)$. ისმის კითხვა, შესაძლებელია თუ არა შევარჩიოთ $\varphi(t)$ ისე, რომ გარდაქმნის შემდეგ გაქრეს განტოლების მარჯვენა მხარე. ასეთ პირობებში აღნიშნული განტოლება ბერნულის განტოლებად გადაიქცევა (რომლის ინტეგრებაც შესაძლებელია). ასეთი რამ მართლაც შესაძლებელია. ამისთვის საჭიროა განტოლების მარჯვენა მხარემ დააკმაყოფილოს პირობა:

$$c(t) - \varphi'(t) - a(t)\varphi(t) - b(t)\varphi^2(t) = 0\,.$$

ამრიგად, $\varphi(t)$ უნდა იყოს იმავე (1) რიკატის განტოლების ამონახსნი.

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი დასკვნა: თუ ცნობილია რიკატის განტოლების ერთი ამონახსნი მაინც, მაშინ (4) გარდაქმნით შესაძლებელია (1) განტოლების მიყვანა ბერნულის განტოლებამდე, რომელიც უკვე ინტეგრებადია კვადრატურებში.

თეორემა 2. *ნებისმიერი ერთგვაროვანი წრფივი მეორე რიგის დიფერენციალური*

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = 0 \tag{6}$$

განტოლება ეკვივალენტურია რიკატის განტოლების.

დამტკიცება: განვიხილოთ გარდაქმნა:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = y(t),$$

მაშინ

$$x'(t) = y(t)x(t) \;\Rightarrow\; x''(t) = y'(t)x(t) + y(t)x'(t) = y'(t)x(t) + y^2(t)x(t),$$

ამ უკანასკნელის (6)-ში ჩასმით გვექნება:

$$(y'(t) + y^2(t))x(t) + a_1(t)y(t)x(t) + a_2(t)x(t) = 0,$$

რომლის $x(t)$-ზე გაყოფის შემდეგ მივიღებთ რიკატის განტოლებას $y(t)$-ს მიმართ:

$$y'(t) + a_1(t)y(t) + y^2(t) + a_2(t) = 0.$$

თეორემა 3. *განვიხილოთ მეორე რიგის ერთგვაროვანი განტოლება:*

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0, \tag{7}$$

სადაც $a(x), b(x)$ *მოცემული ნამდვილი ფუნქციაა რაიმე* $I \subset \mathbf{R}$ *ინტერვალზე, ამასთან,* $a(x)$ *არის უწყვეტად დიფერენცირებადი,* $b(x)$ *კი – უწყვეტი* I*-ზე.* $y(x)$ *ფუნქციის გარდაქმნით (7) ყოველთვის შესაძლებელია*

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0 \tag{8}$$

სახის განტოლებაზე მივიყვანოთ.

დამტკიცება: დავუშვათ, $y(x) = u(x)z(x)$ და ავარჩიოთ $u(x)$ ისე, რომ $z'(x)$-ის წინ მდგომი კოეფიციენტი განულდეს $z(x)$-ის მიმართ. დიფერენციალურ განტოლებაში გვაქვს:

$$y'(x) = u'(x)z(x) + u(x)z'(x),$$
$$y''(x) = u''(x)z(x) + 2u'(x)z'(x) + u(x)z''(x).$$

შევიტანოთ (7)-ში, მივიღებთ:

$$u(x)z''(x)+(2u'(x)+a(x)u(x))z'(x)+(u''(x)+a(x)u'(x)+b(x)u(x))z(x)=0\,. \quad (9)$$

ამრიგად, ჩვენი მიზნის მისაღწევად საჭიროა ავიღოთ $u(x)$, რომელიც

$$2u'(x)+a(x)u(x)=0 \qquad (10)$$

განტოლების ამონახსნია. (10)-ის ამონახსნს აქვს სახე:

$$u(x)=e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}\,, \quad x_0\in I\,.$$

თუ ეს ასეა, მაშინ:

$$u'(x)=-\frac{1}{2}a(x)u(x)\,,$$

$$u''(x)=-\frac{1}{2}(a'(x)u(x)+a(x)u'(x))=-\frac{1}{2}(a'(x)-\frac{1}{2}a^2(x))u(x)\,.$$

ჩავსვათ $u(x)\,,u'(x)\,,u''(x)$ მნიშვნელობები (9)-ში იმის გათვალისწინებით, რომ $z'(x)$-ის კოეფიციენტი 0-ია. მივიღებთ (8) განტოლებას, სადაც

$$q(x)=b(x)-\frac{1}{4}a^2(x)-\frac{1}{2}a'(x)\,,$$

ამასთან, $q(x)$ უწყვეტი იქნება I-ზე.

შენიშვნა: თუ $q(x)\equiv const$, ან $q(x)=C(x-\alpha)^{-2}$, $x>\alpha$, მაშინ (8) განტოლება და, აქედან გამომდინარე (7), ინტეგრებადი იქნება კვადრატურებში.

(8) განტოლება, გადაწერილი შემდეგი სახით:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)z(x)=0,$$

არის შრიოდინგერის (ერვინ შრიოდინგერი – 1887-1961, ავსტრიელი ფიზიკოსი) სტაციონარული განტოლება (კვანტური მექანიკის ძირითადი განტოლება), ამიტომ თეორემა 2 და 3-დან გამომდინარე, რიკატის განტოლების ამოხსნის მეთოდების და ამონახსნის თვისებების ცოდნა მნიშვნელოვანია. აქ მოვიყვანთ რამდენიმე მათგანს.

რიკატის განტოლების ზოგიერთი თვისება. 1. რიკატის განტოლება $t = \varphi(t_1)$ დამოუკიდებელი ცვლადის გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტულია (რაც ნიშნავს იმას, რომ, ცვლადის გარდაქმნის შემთხვევაში, რიკატის განტოლება კვლავ რიკატის განტოლებაში გადავა: შეიცვლება მხოლოდ განტოლების კოეფიციენტები).

2. რიკატის განტოლება ინვარიანტულია დამოუკიდებული ცვლადის (უცნობი ფუნქციის) წილად-წრფივი $x(t) = \frac{\alpha x_1(t)+\beta}{\gamma x_1(t)+\delta}$ გარდაქმნის მიმართ.

3. რიკატის განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$x(t) = \frac{c y_1(t) + y_2(t)}{c z_1(t) + z_2(t)}$$

წილად-წრფივი ფუნქციის სახით წარმოიდგინება და, პირიქით, (9) სახის ნებისმიერი ფუნქცია რომელიმე რიკატის განტოლების ამონახსნია, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია და $y_1(t)z_2(t) - y_2(t)z_1(t) \neq 0$.

4. $x(t) = x_1(t) + \frac{1}{y(t)}$ გარდაქმნით, სადაც $x_1(t)$ რიკატის განტოლების ცნობილი ამონახსნია, (1) მიიყვანება $y'(t) - \big(2b(t) + a(t)\big)y(t) = a(t)$ წრფივ განტოლებაზე.

5. თუ $x_1(t)$ და $x_2(t)$ რიკატის განტოლების ცნობილი ამონახსნებია, მაშინ $y(t) = \frac{1}{x_1(t)-x_2(t)}$ კვლავ რიკატის განტოლების ამონახსნია.

6. თუ $x_1(t)$, $x_2(t)$ და $x_3(t)$ რიკატის განტოლების სამი ამონახსნია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი განისაზღვრება შემდეგი

$$\frac{x(t) - x_2(t)}{x(t) - x_1(t)} : \frac{x_3(t) - x_2(t)}{x_3(t) - x_1(t)} = c$$

ანჰარმონიული თანადობიდან, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

7. თუ $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ და $x_4(t)$, რიკატის განტოლების ოთხი ამონახსნია, მაშინ:

$$\frac{x_2(t) - x_1(t)}{x_4(t) - x_1(t)} : \frac{x_3(t) - x_2(t)}{x_4(t) - x_2(t)}$$

ანჰარმონიული თანადობა მუდმივია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ამოხსენით შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლებები:
1) $y'' - 4y' + 5y = 0$ (პასუხი: $y = e^{2x}(c_1 cosx + c_2 sinx)$)
2) $y'' + 2y' + 10y = 0$ (პასუხი: $y = e^{-x}(c_1 cos3x + c_2 sinx)$)
3) $y'' + 4y = 0$ (პასუხი: $y = c_1 cos2x + c_2 sin2x$)
4) $y''' - 8y = 0$ (პასუხი: $y = c_1 e^{2x} + e^{-x}\left(c_2 cos\sqrt{3}x + c_3 sin\sqrt{3}x\right)$)
5) $y^{(4)} - y = 0$ (პასუხი: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 cosx + c_4 sinx$)
6) $y''' + 3y'' + 3y' - 7y = 0$
(პასუხი: $y = c_1 e^{x} + e^{-2x}\left(c_2 cos\sqrt{3}x + c_3 sin\sqrt{3}x\right)$)
2. იპოვეთ შემდეგი არაერთგვაროვანი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:
1) $y'' + 8y' + 16y = 2e^{-4x}$ (პასუხი: $y(x) = c_1 x e^{-4x} + c_2 e^{-4x} + x^2 e^{-4x}$)
2) $y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x}$ (პასუხი: $y(x) = c_1 x e^{4x} + c_2 e^{4x} + x^2 e^{4x}$)
3) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$ (პასუხი: $y(x) = c_1 x e^{3x} + c_2 e^{3x} + 2x^2 e^{3x}$)
4) $y'' + 10y' + 25y = 3e^{-5x}$ (პასუხი: $y(x) = c_1 x e^{-5x} + c_2 e^{-5x} + \frac{3}{2} x^2 e^{3x}$)
3. ამოხსენით კოშის ამოცანა:
1) $y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ (პასუხი: $y(x) = -e^{3x} + 3e^{2x}$)
2) $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ (პასუხი: $y(x) = -7e^{-3x} + 9e^{-2x}$)
3) $y'' + 6y' + 5y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ (პასუხი: $y(x) = -\frac{5}{4} e^{-5x} + \frac{13}{4} e^{-x}$)
4) $y'' - 6y' + 5y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$ (პასუხი: $y(x) = \frac{7}{4} e^{x} + \frac{1}{4} e^{5x}$)
5) $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$ (პასუხი: $y(x) = 2e^{3x} - e^{4x}$)
4. ამოხსენით ბერნულის განტოლება:
1) $y' - 3y = y^2 e^{x}$ (პასუხი: $y(x) = \frac{4}{-e^{x} + 4ce^{-3x}}$)
2) $y' = -y + 3y^2 e^{-2x}$ (პასუხი: $y(x) = \frac{1}{e^{-2x} + ce^{x}}$)
3) $y' - 2y = -y^2 e^{2x}$ (პასუხი: $y(x) = \frac{4}{e^{2x} + 4ce^{-2x}}$)
4) $y' + 2y = 2y^2 e^{2x}$ (პასუხი: $y(x) = -\frac{e^{2x}}{2x - c}$)
5. ამოხსენით რიკატის განტოლება, თუ ცნობილია მისი ერთი კერძო ამონახსნი:
1) $y' e^{-x} + y^2 - 2ye^{x} = 1 - e^{2x},\ y_1 = e^{x}$ პასუხი: $e^{x} + \frac{1}{c + e^{x}}$
2) $y' + y^2 - 2ysinx + sin^2 x - cosx = 0,\ y_1 = sinx$ პასუხი: $y = sinx + \frac{1}{c + x}$
3) $xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x,\ y_1 = x$ პასუხი: $y = x + \frac{1}{cx + 1}$
4) $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1,\ y_1 = -\frac{1}{x}$ პასუხი: $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{(c - lnx)x}$

5. ზოგიერთი სპეციალური სახის დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის მეთოდი

5.1. განსაკუთრებული (სინგულარული) ამონახსნი

განტოლებებს, რომლებიც უცნობი ფუნქციის წარმოებულს ცხადად არ შეიცავენ, საზოგადოდ, ასეთი სახე აქვთ:

$$F(t, x, x') = 0 \tag{1}$$

და მათი თვისებები აქამდე განხილული $x' = f(t, x)$ განტოლებების თვისებისაგან არსებითად განსხვავდება. ამ სახის განტოლებებისათვის კოშის ამოცანის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა ყალიბდება შემდეგნაირად.

თეორემა 1. *დავუშვათ, F უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა U არეში და $(t_0, x_0, x_0') \in U$ წერტილში $F = 0$ და $\frac{\partial F}{\partial x'} \neq 0$. მაშინ რიცხვითი ღერძის საკმაოდ მცირე $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ მონაკვეთზე არსებობს (1) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0'$ პირობებს აკმაყოფილებს.*

შედეგი 1. *ვთქვათ, $F(t_0, x_0, p) = 0$ განტოლებას (t_0, x_0) წერტილში აქვს m განსხვავებული $p_1, p_2, \dots, p_m$ ფესვი და ყოველი მათგანისათვის სრულდება უტოლობა $\frac{\partial F(t_0, x_0, p_i)}{\partial p_i} \neq 0$. მაშინ (t_0, x_0) წერტილის მიდამოში (1) განტოლების m ამონახსნი არსებობს, რომლებიც (t_0, x_0) წერტილზე გადიან. გარდა ამისა, ამ ამონახსნების პირველი წარმოებულები t_0 წერტილში $x'(t_0) = p_i, i = 1, \dots, m$ ერთმანეთისაგან განსხვავებულებია.*

თუ (t_0, x_0) წერტილზე გადის (1) განტოლების ერთზე მეტი ამონახსნი და ორ მათგანს მაინც t_0 წერტილში აქვს ერთი და იგივე წარმოებული $x'(t_0)$, ამბობენ, რომ ამ წერტილში (ირღვევა) *არ სრულდება ერთადერთობის პირობა.* თუ ერთადერთობის პირობა დარღვეულია, მაშინ რომელიმე x_0'-სათვის სრულდება პირობები:

$$F(t_0, x_0, x_0') = 0, \quad \frac{\partial F(t_0, x_0, x_0')}{\partial x_0'} = 0. \tag{2}$$

რადგან x_0' წინასწარ არ არის ცნობილი, ამიტომ (t_0, x_0) წერტილის საპოვნელად საჭიროა (2) განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხოთ x_0'. მივიღებთ

განტოლებას $g(t_0, x_0) = 0$, რომლის 0-ები გარკვეულ სიმრავლეს განსაზღვრავენ (t, x) სიბრტყეზე. ამ სიმრავლეს ეწოდება *დისკრიმინანტული წირი.* დისკრიმინანტული წირი შეიცავს ყველა იმ წერტილს, სადაც ერთადერთობის პირობა არ სრულდება, მაგრამ არამარტო მათ.

აქვე შევახსენებთ, რომ ორი $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებით მოცემული წირები ერთმანეთს ეხებიან ან აქვთ შეხების წერტილი, თუ სრულდება ტოლობები $\varphi(t) = \psi(t)$ და $\varphi'(t) = \psi'(t)$.

(1) განტოლების *განსაკუთრებული ამონახსნი* ეწოდება ისეთ ამონახსნს, რომელსაც ყოველ წერტილში ეხება სხვა ამონახსნი, რომელიც მისგან განსხვავებულია ამ წერტილის თუნდაც საკმაოდ მცირე მიდამოში.

რადგან განსაკუთრებული ამონახსნისათვის ერთადერთობის პირობა დარღვეულია, ამიტომ მას დისკრიმინანტული წირი აუცილებლად შეიცავს. ამიტომ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა თავდაპირველად დისკრიმინანტული წირის პოვნა. მაგრამ იგი ყოველთვის არ არის განსაკუთრებული ამონახსნი, ზოგჯერ მაშინაც კი, როდესაც იგი ამონახსნია. ამის გამო შემდეგ ნაბიჯზე საჭიროა შემოწმდეს:

1. არის თუ არა იგი ამონახსნი;
2. ეხება თუ არა მას ყოველ წერტილში სხვა ამონახსნი.

თუ ორივე პირობა სრულდება, მაშინ დისკრიმინანტის განხილული ნაწილი იქნება განსაკუთრებული ამონახსნი.

წირთა $\varphi(t, x, c) = 0$ ოჯახის *მომვლები* ეწოდება D წირს, რომელიც ამ წირთა ოჯახს ეხება ყოველ წერტილში.

თეორემა 2. $x = \psi(t)$ *წირი არის (1)* განტოლების *განსაკუთრებული ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის განტოლების ამონახსნთა ოჯახის მომვლები.*

5.2. $F(t, x, x') = 0$ სახის განტოლების ამოხსნის მეთოდები

ა) *წარმოებული ფუნქციის მიმართ განტოლების ამოხსნის მეთოდი.* ამოვხსნათ $F(t, x, x') = 0$ განტოლება უცნობის წარმოებული $x'(t)$ ფუნქციის მიმართ, ე.ი. გამოვსახოთ იგი t-სა და x-ის საშუალებით. მივიღებთ ერთ ან რამდენიმე $x'(t) = f(t, x)$ სახის განტოლებას, რომლებსაც უკვე ცნობილი მეთოდებით ამოვხსნით.

ბ) *პარამეტრის შემოტანის მეთოდი.* ამ მეთოდით განტოლება მიიყვანება განტოლებაზე, რომლის ამოხსნაც შესაძლებელია ზემოთ მოყვანილი მეთოდით.

განვიხილავთ შემთხვევებს, როდესაც $F(t,x,x')=0$ განტოლება მიიყვანება $x(t)=f(t,x')$ ან $t(x)=f(x,x')$ სახის განტოლებებზე.

$x(t)=f(t,x')$ განტოლებაში შევიტანოთ $p=\frac{dx}{dt}$ პარამეტრი და მივიღებთ:

$$x(t)=f(t,p). \tag{3}$$

ახლა განვიხილოთ (3)-ის ორივე მხარის სრული დიფერენციალი და გვექნება:

$$dx=f_t'dt+f_p'dp.$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში შევიტანოთ $dx=pdt$ მნიშვნელობა:

$$pdt=f_t'dt+f_p'dp.$$

ეს განტოლება იხსნება $\frac{dt}{dp}$ და $\frac{dp}{dt}$ ფუნქციების მიმართ. ვთქვათ, მისი ამონახსნი ვიპოვეთ $t=\varphi(p)$ სახით. $t=\varphi(p)$-ს (3) განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ საწყისი განტოლების ამონახსნს პარამეტრული სახით: $t=\varphi(p)$, $x=f(\varphi(p),p)$.

ანალოგიური გზით ამოიხსნება $t=f(x,x')$ განტოლება.

5.3. ლაგრანჟისა და კლეროს განტოლებები

არაწრფივი განტოლებები, რომლებიც ზემოთ მოყვანილი მეთოდების საშუალებით იხსნებიან უცნობი ფუნქციის წარმოებულის მიმართ, ძირითადად არ არიან კვადრატურებში ინტეგრებადები. მაგრამ ზოგიერთი სპეციალური განტოლების კვადრატურებში ინტეგრება შესაძლებელია, ასეთია *ლაგრანჟის განტოლება*:

$$A(p)x+B(p)t=C(p), \tag{1}$$

რომელიც პარამეტრის შემოტანის შემდეგ წრფივია უცნობი ფუნქციის და ცვლადის მიმართ. (1) გამოსახულებაში $A(p), B(p)$ და $C(p)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია p-ს მიმართ.

ლაგრანჟის განტოლების კერძო შემთხვევაა *კლეროს განტოლება*:

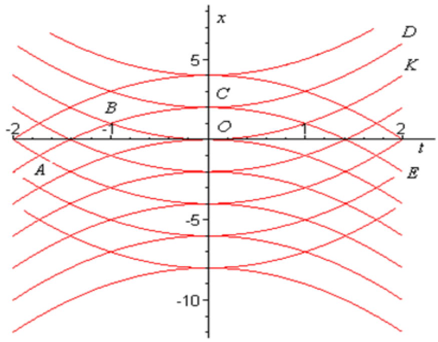
$$x=pt+b(p). \tag{2}$$

კლეროს (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნებია არაპარალელურ წრფეთა ოჯახი. თუ $b(p)$ არაწრფივი და ორჯერ უწყვეტად წარმოებადია, მაშინ მას აქვს განსაკუთრებული ამონახსნი, რომლის მხებია ამონახსნთა აღნიშ-

ნული ოჯახი. თუ $b(p)$ წრფივია, მაშინ წრფეები ერთ წერტილზე გადიან და განტოლებას განსაკუთრებული ამონახსნი არ აქვს.

ამოცანები. 1. ამოხსენით განტოლება $(x'(t))^2 - 4t^2 = 0$.

პირველ რიგში ამოვხსნათ ეს განტოლება $x'(t)$ წარმოებულის მიმართ, მივიღებთ ორ – $x'(t) = 2t$ და $x'(t) = -2t$ განტოლებას, რომელთა ამონახსნები, შესაბამისად, $x(t) = t^2 + c$ და $x(t) = c - t^2$ ფუნქციებია, რაც იმას ნიშნავს, რომ (t, x) სიბრტყის ყოველ წერტილში გადის არანაკლებ ორი ამონახსნი.



წირების ამ ოჯახის გარდა, განტოლების ინტეგრალური წირებია ისეთი შედგენილი წირები, რომლებსაც ყველა წერტილში წარმოებულები აქვთ (ან, რაც იგივეა, საერთო წერტილში მათ საერთო მხები აქვთ). მაგალითად, $ABCD$ წირი განტოლების ამონახსნია, ხოლო $ABOK$ კი განტოლების ამონახსნი არ არის. იმისათვის, რომ (t_0, x_0) წერტილში გამავალი ერთადერთი ამონახსნი გამოვყოთ, საზოგადოდ, წერტილთა ამ წყვილის მითითება საკმარისი არ არის. მაგალითად, $B(t_0 = -1, x_0 = 1)$ წერტილში განტოლების ორი ამონახსნი მაინც გადის: $x(t) = t^2$ (კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ჰიპერბოლა, რომლის შტოები ზევითაა მიმართული) და $x(t) = 2 - t^2$ ($ABCE$ წირი ნახაზზე). იმისათვის, რომ ერთადერთი ამონახსნის გამოყოფა მოხდეს, საჭიროა t_0 წერტილში $x(t)$-ს წარმოებულის $x'_0 = x'(t_0)$ მნიშვნელობა დავაფიქსიროთ, მხოლოდ x'_0 ისე უნდა შეირჩეს, რომ (t_0, x_0, x'_0) რიცხვთა სამეულმა მოცემული განტოლება დააკმაყოფილოს. მაგალითად, თუ $t_0 = -1$, $x_0 = 1$ მნიშვნელობის გარდა მოცემულია $x'_0 = 2$, განტოლების ერთადერთი ამონახსნი იქნება $x(t) = 2 - t^2$, ხოლო, თუ $x'_0 = -2$, მაშინ $x(t) = t^2$. ამონახსნების თანახების წერტილებში ერთადერთობა ირღვევა. მართლაც, ნახაზიდან ჩანს, რომ Ox ღერძის წერტილები ამონახსნთა თანახების წერტილებია და ამონახსნის გაგრძელება ამ წერტილიდან ცალსახა არ არის.

2. ამოვხსნათ განტოლება $x = x't + (x')^2$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $p = x'$. მოცემული განტოლება გადაიწერება ასეთი სახით:

$$x = tp + p^2. \tag{3}$$

ვიპოვოთ განტოლების ორივე მხარის სრული დიფერენციალი და ერთმანეთს დავუტოლოთ: $dx = pdt + tdp + 2pdp$, რადგან $dx = pdt$, ამიტომ $(t + 2p)dp = 0$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $t + 2p = 0$ ან $dp = 0$. თუ $t + 2p = 0$, მაშინ $t = -2p$ და მისი ჩასმით (1)-ში მივიღებთ გამოსავალი განტოლების ამონახსნს პარამეტრული სახით: $t = -2p$, $x = -p^2$. თუ ბოლო გამოსახულებაში შევიტანთ პარამეტრის მნიშვნელობას, მივიღებთ განტოლების ერთ-ერთ ამონახსნს: $x(t) = -\frac{t^2}{4}$. ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა: $dp = 0$. ამ განტოლების ამონახსნია $p = c$ ნებისმიერი მუდმივი რიცხვი, რომლის ჩასმის შემდეგ (3)-ში მივიღებთ გამოსავალი განტოლების კიდევ ერთ ამონახსნს $x(t) = ct + c^2$, რომელიც არაპარალელურ წრფეთა ოჯახია. შევამოწმოთ, არის თუ არა $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ ფუნქცია განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნი (განტოლება (3) კლეროს განტოლებაა, რომლის ყველა ამონახსნი ჩვენ ზემოთ უკვე დავახასიათეთ), რისთვისაც საჭიროა შემოწმდეს $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ და $x(t) = ct + c^2$ წირების თანახების პირობები:

$$-\frac{t^2}{4} = ct + c^2, -\frac{t}{2} = c.$$

მეორე ტოლობის ჩასმით პირველში მივიღებთ იგივეობას $-\frac{t^2}{4} = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ წირს ყოველ წერტილში ეხება $x(t) = ct + c^2$ წრფეთა ოჯახიდან წრფე. ამრიგად, $x(t) = -\frac{t^2}{4}$ განტოლების განსაკუთრებული ამონახსნია.

3. $x = tx' - x'^2$.

შემოვიტანოთ $p = x'$ პარამეტრი და ვიპოვოთ $x = pt - p^2$ გამოსახულების სრული დიფერენციალი:

$$pdt = d(tp - p^2) \Rightarrow pdt = tdp + pdt - 2pdp \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (t - 2p)dp = 0 \Rightarrow p = c \text{ და } p = \frac{t}{2}.$$

აქედან $x = ct - c^2$, $x = \frac{t^2}{4}$.

4. ამოვხსნათ განტოლება $t^3x'^2 + t^2xx' + a = 0$.

პირველ რიგში განტოლება ამოვხსნათ x-ის მიმართ:

$$x = -\frac{a}{t^2x'} - tx'. \qquad (4)$$

ამის შემდეგ შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = x'$ და მისი გამოყენებით (4) განტოლება გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$x = -\frac{a}{t^2p} - tp. \qquad (5)$$

ვიპოვოთ (5) გამოსახულების ორივე მხარის სრული დიფერენციალი და გავითვალისწინოთ, რომ $dx = pdt$. ამის შემდეგ (5) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$pdt = \frac{2a}{t^3p}dx + \frac{a}{t^2p^2}dp - tdp - pdt.$$

ამ ტოლობიდან ვიღებთ:

$$\left(\frac{2a}{t^3p} - 2p\right)dx + \left(\frac{a}{t^2p^2} - x\right)dp = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{t^2p^2} - x\right)\left(dp + \frac{2p}{t}dt\right) = 0.$$

უკანასკნელი განტოლებიდან ვპოულობთ $t = \sqrt[3]{\frac{a}{p^2}}$ და $t = \frac{c}{\sqrt{|p|}}$, რომელთა ჩასმით (5) განტოლებაში ვიღებთ განტოლების ყველა ამონახსნს პარამეტრული სახით:

$$x = -2\sqrt[3]{pa} \text{ და } x = -\frac{a}{c^2}sgnp - c\sqrt{|p|}.$$

თუ ამ გამოსახულებებიდან p პარამეტრს გამოვრიცხავთ, გვექნება:

$$t = \frac{4a}{x^2} \Rightarrow x = \frac{a}{c} + \frac{c}{t}.$$

5. $x = 2tx' - 4x'^2$.

შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = x'$. გადავწეროთ მოცემული განტოლება ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით: $x = 2tp - 4p^2$; ვიპოვოთ ამ გამოსახულების სრული დიფერენციალი: $dx = 2tdp + 2pdt - 8pdp$; შემდეგ dx შევცვალოთ pdt-თი და გავამარტივოთ მიღებული გამოსახულება: $2tdp + pdt - 8pdp = 0$, რომელიც შესაძლებელია გადაიწეროს სახით:

$$p\frac{dt}{dp} + 2t = 8p.$$

ეს უკანასკნელი კი წრფივი პირველი რიგის განტოლებაა $t = t(p)$ ფუნქციის მიმართ, რომლის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ ჩვენთვის კარგად ცნობილ კოშის ფორმულას და მივიღებთ: $t = \frac{c}{p^2} + \frac{8}{3}p$. t-ს ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ საწყის განტოლებაში $p = x'$ გათვალისწინებით და მივიღებთ: $x = 2p\left(\frac{c}{p^2} + \frac{8}{3}p\right) - 4p^2 \;\Rightarrow\; x = \frac{2c}{p} - \frac{4}{3}p^2$. ამრიგად, საწყისი განტოლების ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით მოიცემა შემდეგნაირად:

$$t = \frac{c}{p^2} + \frac{8}{3}p, \quad x = -\frac{4}{3}p^2 + \frac{2c}{p}.$$

გარდა ამ ამონახსნებისა, მოცემულ განტოლებას აქვს ტრივიალური ამონახსნი $x(t) \equiv 0$.

6. $x = tx'^2 - 2x'^3$.

წინა ამოცანების ანალოგიურად შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = x'$. მაშინ:

$$x = tp^2 - 2p^3 \;\Rightarrow\; dx = d(tp^2 - 2p^3) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; p\big((p-1)dt + 2(t-3p)dp\big) = 0,$$

საიდანაც ვღებულოთ: $p = 1, p = 0$ და $(p-1)\frac{dt}{dp} + 2t = 3p$. უკანასკნელი გამოსახულება წრფივი პირველი რიგის განტოლებაა, რომლის ამონახსნია $t = \frac{c}{(p-1)^2} + 2p + 1$. t-ს ამ მნიშვნელობის და $x' = p$ შეტანით გამოსავალ განტოლებაში მივიღებთ: $x = \frac{cp^2}{(p-1)^2} + p^2$. $p = 1, p = 0$ გვაძლევს, შესაბამისად, $x = t + c$ და $x = const$. მათი ჩასმით გამოსავალ განტოლებაში ვღებულობთ, რომ ფუნქციათა ამ ოჯახებიდან, განტოლების ამონახსნებია მხოლოდ $x(t) = t - 2$ და $x(t) \equiv 0$ ფუნქციები. ამრიგად, განტოლების ყველა ამონახსნი შემდეგი სახისაა:

$$x = 0; x = t - 2;\; t = \frac{c}{(p-1)^2} + 2p + 1, x = \frac{cp^2}{(p-1)^2} + p^2.$$

7. $tx'^2 = x - x'$.

შემოვიტანოთ პარამეტრი $p = x'$. მაშინ განტოლება გადაიწერება ასეთი სახით: $x = tp^2 + p$. სრული დიფერენციალის გამოთვლის შემდეგ მივიღებთ:

$$dx = d(tp^2 + p) \;\Rightarrow\; dx = 2tpdp + p^2dt + dp \;\Rightarrow\; pdt =$$
$$= 2tpdp + p^2dt + dp \Rightarrow\; (p - p^2)dt = (2tp + 1)dp.$$

დავუშვათ, $p \neq 0$ და $p \neq 1$. ამ შემთხვევაში უკანასკნელი განტოლება გადაიწერება ასეთი სახით: $\frac{dt}{dp} - \frac{2p}{p-p^2}t = \frac{1}{p-p^2}$. ეს არის პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება $t(p)$ ფუნქციის მიმართ, რომლის ამონახსნს ვპოულოთ კოშის ფორმულით: $t = \frac{lnpc-p}{(p-1)^2}$. $x = tp^2 + p$ ტოლობაში შევიტანთ t-ს ამ მნიშვნელობას, მივიღებთ: $x = \frac{p^2(lnpc-p)}{(p-1)^2} + p$. ამრიგად, მივიღეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი პარამეტრული სახით: $t = \frac{lnpc-p}{(p-1)^2}$, $x = \frac{p^2(lnpc-p)}{(p-1)^2} + p$, როდესაც $p \neq 0$ და $p \neq 1$. ახლა დავუშვათ $p = 0$ და $p = 1$, მაშინ $x = const$ და $x = t + c$, შესაბამისად. $x = const$ მოცემული განტოლების ამონახსნია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x(t) \equiv 0$, ხოლო $x = t + c$-ს ჩასმით მოცემულ განტოლებაში ვღებულობთ, რომ $c = 1$. ამრიგად, გამოსავალი განტოლების ამონახსნებია:

$$x(t) \equiv 0; \quad x(t) = t + 1; \quad t = \frac{lnpc - p}{(p-1)^2}, \quad x = \frac{p^2(lnpc - p)}{(p-1)^2} + p.$$

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ამოხსენით განტოლებები

1) $y(x) = 2xy'(x) + lny'(x)$. მითითება: შემოიტანეთ აღნიშვნა $y'(x) = p$. პასუხი: $x = \frac{c}{p^2} - \frac{1}{p}, y = lnp + \frac{2c}{p} - 2$.

2) $y(x) = x(1 + y'(x)) + (y'(x))^2$. პასუხი: $x = 2(1-p) + ce^{-p}$, $y = [2(1-p) + ce^{-p}](1+p) + p^2$.

3) $y(x) = 2xy'(x) + sin^2 y'(x)$. პასუხი: $x = \frac{c}{p^2} - \frac{cosp}{p^2} - \frac{sinp}{p}$, $y = \frac{2c}{p} - \frac{2cosp}{p} - sinp, y = 0$.

4) $y(x) = x(y'(x))^2 - \frac{1}{y'(x)}$. პასუხი: $x = \frac{cp^2+2p-1}{2p^2(p-1)^2}$, $y = \frac{cp^2+2p-1}{2p(p-1)^2} - \frac{1}{p}$.

5) $y(x) = \frac{3}{2}xy'(x) + e^{y'(x)}$. პასუხი: $x = \frac{c}{p^3} - 2e^p\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right)$, $y = \frac{3c}{2p^2} - 2e^p\left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}\right)$.

6. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის წარმოდგენა ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით

6.1. განმარტებები და ელემენტარული ფუნქციები

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ სახის გამოსახულებას, სადაც a_j მუდმივებია, ხოლო x კი ცვლადია, ეწოდება *ხარისხოვანი მწკრივი.* როდესაც გარკვეული N-დან დაწყებული, ყველა a_j, $j > N$ 0-ის ტოლია, მაშინ ხარისხოვანი მწკრივი გადაიქცევა სასრულ ჯამად და, ამრიგად, მივიღებთ N ხარისხის მრავალწევრს, ანუ პოლინომიალურ ფუნქციას. საზოგადოდ, თუ ზემოთ მოყვანილი ხარისხოვანი *მწკრივი კრებადია, მაშინ იგი არის 0-ის შემცველ ინტერვალზე* x *ცვლადის ფუნქცია* (ანალოგიურად, თუ $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია, სადაც x_0 ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ იგი არის x ცვლადის ფუნქცია x_0-ის შემცველ ინტერვალზე). ამ თვალსაზრისით, ხარისხოვანი მწკრივი არის „უსასრულო ხარისხის" მრავალწევრი, თუ მწკრივი კრებადია. ხარისხოვანი მწკრივის მაგალითია $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ მწკრივი, რომელიც კრებადია. როდესაც $|x| < 1$, იგი არის უსასრულო გეომეტრიული პროგრესია და მისი ჯამი $\frac{1}{1-x}$ -ის ტოლია, ე.ი. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, როდესაც $|x| < 1$.

მოვიყვანოთ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის ნიშანი.

თეორემა 1. *განვიხილოთ* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ *ხარისხოვანი მწკრივის ორი მეზობელი წევრის განაყოფების მოდულების მიმდევრობა და ვთქვათ, არსებობს ზღვარი* $lim_{j\to\infty} |\frac{a_{j+1}}{a_j}| = l$. *დავუშვათ,* $R = 1/l$, *გარდა ამისა, ჩავთვალოთ,* $R = 0$, *თუ* $l = \infty$ *და* $R = \infty$, *თუ* $l = 0$, *მაშინ:*

ა) თუ $|x| < R$, *მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია;*

ბ) თუ $|x| > R$, *მწკრივი განშლადია;*

გ) თუ $x = \pm R$, *მაშინ მწკრივი შეიძლება იყოს როგორც კრებადი, ასევე განშლადი.*

თეორემაში მითითებულ R-ს ეწოდება ხარისხოვანი მწკრივის *კრებადობის რადიუსი* და როგორც თეორემიდან ჩანს, ის შეიძლება იყოს როგორც უსასრულობის, ასევე 0-ის ტოლი.

ელემენტარული ფუნქციები (პოლინომიალური, მაჩვენებლიანი, ხარისხოვანი, ტრიგონომეტრიული და მათი შექცეული ფუნქციები), როგორც ვიცით, წარმოდგებიან ტეილორის მწკრივად (რომელიც ხარისხოვანი მწკრივია). ეს ფუნქციები არიან რომელიმე (არა აუცილებლად ერთადერთი) დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნები, კერძოდ:

1) $n-1$ ხარისხის პოლინომიალური ფუნქცია არის

$$y^{(n)}=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი: $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$.

2) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ($cosx$ და $sinx$ ფუნქციები)

$$y''+y=0$$

განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასეთია: $y(x)=c_1cosx+c_2sinx.$

3) ექსპონენციალური ფუნქცია (e^x)

$$y'-y=0$$

განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია (მუდმივამდე სიზუსტით). განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x)=ce^x$ ფუნქცია.

4) ჰიპერბოლური ფუნქციები დაკავშირებულია

$$y'+y=0$$

სახის განტოლებასთან. განტოლების ამონახსნია $y(x)=e^{-x}$, იგივე ფუნქცია აკმაყოფილებს აგრეთვე

$$y''-y=0$$

განტოლებას, მაგრამ ამ განტოლებას აქვს კიდევ ერთი ამონახსნი e^x. ამრიგად, განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$ ფუნქცია. აღვნიშნოთ

$$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

და

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

ამ ფუნქციებს ეწოდებათ, შესაბამისად, *ჰიპერბოლური კოსინუსი* და *ჰიპერბოლური სინუსი.* ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებლები არიან და ორივე აკმაყოფილებს $y''-y=0$ განტოლებას.

არსებობს მრავალი კრებადი ხარისხოვანი მწკრივი, რომელთაც არ აქვთ კონკრეტული სახელი, მაგრამ ყველა ისინი არიან (ისევე როგორც ელემენტარული ფუნქციები) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები. მომდევნო პარაგრაფებში განვიხილავთ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის პოვნის მეთოდს, მხოლოდ ეს ამონახსნები წარმოდგენილები იქნებიან კრებადი ხარისხოვანი მწკრივების საშუალებით.

6.2 პირველი რიგის წრფივი განტოლების ამონახსნის მწკრივად წარმოდგენა

როგორც უკვე განვიხილეთ

$$x^{/}(t) = tx(t) \tag{1}$$

წრფივი განტოლების ამოხსნის ორი შესაძლო მეთოდიდან: პირველი არის განტოლება განცალებადი ცვლადებით. ის შესაძლებელია გადაიწეროს ასეთი სახით: $\frac{dx}{x} = tdt$, საიდანაც ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ $\int \frac{dx}{x} = \int tdt$ ანუ $\ln x = \frac{t^2}{2} + C$, მაშასადამე, ამონახსნი იქნება: $x(t) = e^{\frac{t^2}{2}+C} \Rightarrow x(t) = \widetilde{C}e^{\frac{t^2}{2}}$, სადაც $\widetilde{C} = e^C$. მეორე მხრივ, შეგვიძლია ეს განტოლება განვიხილოთ როგორც პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება და ამოვხსნათ კოშის ფორმულის გამოყენებით და შედეგი იგივე იქნება. ახლა განვიხილოთ ამ განტოლების ამოხსნის კიდევ ერთი ხერხი. კერძოდ, ვეძებოთ (1) განტოლების ამონახსნი:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... \tag{2}$$

სახის ხარისხოვანი მწკრივის სახით. მაშინ $x^{/}(t)$ იქნება:

$$x^{/}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + ... \tag{3}$$

ჩავსვათ (2),(3) გამოსახულებები (1)-ში და მივიღებთ:

$$\begin{aligned} &a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + 6a_6 t^5 + ... = \\ &= a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 + a_4 t^5 + ... \end{aligned} \tag{4}$$

(4) არის ხარისხოვანი მწკრივების ტოლობა, რაც ნიშნავს, რომ t-ს ტოლი ხარისხების მქონე შესაბამისი კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს, ე.ი.

$$a_1 = 0\,,\;\; a_2 = \frac{a_0}{2}\,,\;\; a_3 = \frac{a_1}{3} = 0\,,\;\; a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2\times 4}\,,$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5} = 0\,, a_5 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0}{2\times 4\times 6}\,,...,$$

სადაც $a_0 = x_0 = x(0)$. ამრიგად, (2) მიიღებს სახეს:

$$x(t) = a_0\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + \frac{1}{2\times 3}\frac{t^6}{8} + ...\right).$$

ფრჩხილებში მოთავსებული მწკრივი კრებადია $e^{\frac{t^2}{2}}$ ფუნქციისაკენ (ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ $\frac{t^2}{2}$-ს τ-თი აღვნიშნავთ). ამიტომ მივიღებთ, რომ (1) განტოლების ამონახსნია $x(t) = a_0 e^{\frac{t^2}{2}}$.

ახლა განვიხილოთ კიდევ ერთი წრფივი პირველი რიგის განტოლება:

$$x^{/}(t) = tx(t) + 1 \qquad (5)$$

და მისი ამონახსნი ვეძებოთ ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით. მხოლოდ აქვე შევნიშნოთ, რომ (5) განტოლება არ არის განტოლება განცალებადი ცვლადებით, მაგრამ იგი შესაძლებელია ამოიხსნას კოშის ფორმულის საშუალებით. ვისარგებლოთ კვლავ (2) და (3) გამოსახულებებით და შევიტანოთ ისინი (5)-ში. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + 6a_6 t^5 + ... = \\ & = 1 + a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 + a_4 t^5 + ... \end{aligned}$$

საიდანაც

$$a_1 = 1\,, a_2 = \frac{a_0}{2}\,, a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{1\times 3}\,, a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2\times 4}\,,$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{1\times 3\times 5}\,,\;\; a_5 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0}{2\times 4\times 6}\,,...,$$

აქედან ვღებულობთ, რომ (5) განტოლების ამონახსნია შემდეგი ხარისხოვანი მწკრივი:

$$x(t)=\left(\frac{t}{1}+\frac{t^3}{1\times3}+\frac{t^5}{1\times3\times5}+\frac{t^7}{1\times3\times5\times7}+\ldots\right)+$$
$$+a_0\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2\times4}+\frac{t^6}{2\times4\times6}+\ldots\right)$$

სადაც a_0 განისაზღვრება საწყისი პირობიდან.

6.3. მეორე რიგის წრფივი განტოლების ამონახსნის წარმოდგენა მწკრივის სახით

1. დავწეროთ

$$y''(x)+xy'(x)+y(x)=0$$

განტოლების ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის საშუალებით.

ვთქვათ, $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j$, მაშინ

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots=\sum_{j=1}^{\infty}ja_jx^{j-1},$$

$$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots=\sum_{j=1}^{\infty}j(j-1)a_jx^{j-2}.$$

ჩავსვათ მოცემულ განტოლებაში და მივიღებთ

$$y''+xy'+y=(2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots)+$$
$$+(a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+\cdots)++a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots.$$

გადავწეროთ უკანასკნელი გამოსახულება აჯამვის ნიშნის გამოყენებით:

$$y''+xy'+y=\sum_{j=0}^{\infty}(j+2)(j+1)a_{j+2}x^j+\sum_{j=1}^{\infty}ja_jx^j+\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j=0.$$

ხარისხოვანი მწკრივის ნულთან ტოლობის გამო გვაქვს:

$2a_2+a_0=0$ (თავისუფალი წევრი);
$6a_3+2a_1=0$ (x-ს კოეფიციენტი);

აქედან, a_0-ის და a_1-ის საშუალებით a_2 და a_3 კოეფიციენტები გამოისახებიან შემდეგნაირად: $a_2=-\frac{1}{2}a_0$, $a_3=-\frac{1}{3}a_1$. ანალოგიურად, $j\geq1$-სათვის x^j-ს კოეფიციენტის 0-თან გატოლება მოგვცემს $(j+2)$ $(j+1)a_{j+2}+$ $+(j+1)a_j=0$, ანუ $a_{j+2}=-\frac{1}{j+2}a_j$.

საიდანაც:

$$a_2=-\frac{1}{2}a_0,\ a_4=-\frac{1}{4}a_2=-\frac{1}{4\cdot 2}a_0,\ a_3=-\frac{1}{3}a_1,\ a_5=-\frac{1}{5}a_3=-\frac{1}{5\cdot 3}a_1,$$
$$a_6=-\frac{1}{6}a_4=-\frac{1}{6\cdot 4\cdot 2}a_0,\ a_7=-\frac{1}{7}a_5=-\frac{1}{7\cdot 5\cdot 3}a_1,\ldots.$$

ამრიგად,

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n}{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\ldots 4\cdot 2}a_0=$$
$$=\frac{(-1)^n}{2\ldots 2\cdot n(n-1)\ldots\ldots 2\cdot 1}a_0=\frac{(-1)^n}{2^n n!}a_0$$

და

$$a_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\ldots 5\cdot 3}a_1=\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}a_1.$$

აქედან ვიღებთ განტოლების ფორმალურ ამონახსნს:

$$y=a_0(\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j}}{2^j j!})+a_0(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{2^j j! x^{2j+1}}{(2j+1)!}).$$

ფორმალური ვუწოდეთ ამონახსნს იმის გამო, რომ ჯერ არ ვიცით მიღებული მწკრივის კრებადობა. მაგრამ კრებადობის დამტკიცება სირთულეს არ წარმოადგენს და ის გამომდინარეობს იქიდან, რომ $lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right|=lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n+1)!}a_1\cdot\frac{2^n n!}{a_0(-1)^n}\right|=0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ მწკრივის კრებადობის რადიუსი უსასრულობაა (რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ განტოლების ამონახსნი, ისევე როგორც მისი კოეფიციენტები, განსაზღვრულია მთელ ნამდვილ ღერძზე) და ამრიგად, განტოლების ამონახსნი წარმოვადგინეთ ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

2. ვიპოვოთ

$$y''+x^2y=0,\ y(0)=0, y'(0)=1$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

დავუშვათ, $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$, მაშინ $y''=2a_2+6a_3x+$ $+12a_4x^2+\cdots+(j+1)ja_{j+1}x^{j-1}+\cdots$ (იხ.წინა ამოცანა). სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ, რომ $a_0=0$ და $a_1=1$, აქედან, $y=x+a_2x^2+\cdots$ და $x^2y=x^3+a_2x^4+a_3x^5+\cdots+a_{j-1}x^{j-1}+\cdots$. რადგან $y''+x^2y=0$, მივიღებთ:

$a_0 = 0$ (მუდმივი წევრი);

$a_3 = 0$ (x-ის კოეფიციენტი);

$a_4 = 0$ (x^2-ის კოეფიციენტი);

$a_5 = -\frac{1}{5\cdot 4}$ (x^3-ის კოეფიციენტი);

$a_6 = 0 = a_7 = a_8$ ($x^4, x^5 x^6$-ის კოეფიციენტები);

$a_9 = -\frac{1}{9\cdot 8} a_5 = -\frac{1}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} a_5$ (x^7-ის კოეფიციენტი);

და ა.შ.

ამრიგად, საძიებელი მწკრივი პირველი ოთხი წევრით იქნება:

$$y = x - \frac{1}{5\cdot 4} x^5 + \frac{1}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} x^9 - \frac{1}{13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} x^{13} + \cdots$$

აჩვენეთ, რომ ეს მწკრივი კრებადია. *მითითება:* მწკრივის კრებადობისათვის ისარგებლეთ წინა ამოცანაში გამოყენებული მოსაზრებით, ამასთან, გაითვალისწინეთ, რომ რეკურსიული თანადობაა $a_{j+1} = -\frac{1}{j(j+1)} a_{j-3}$, ხოლო ზოგადი წევრი კი

$$(-1)^j \frac{1}{(4j+1)(4j) \ldots 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} x^{4j+1}$$

გამოსახულებაა.

3. ვიპოვოთ

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \tau y = 0$$

ლეჟანდრის განტოლების ამონახსნი მწკრივის სახით და მწკრივის პირველი რამდენიმე კოეფიციენტი; ვიპოვოთ კოეფიციენტებს შორის რეკურსიული თანადობა.

ისევე როგორც წინა ამოცანებში, ვთქვათ, $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, მაშინ:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1},$$

$$-2xy' = -2a_1 x - 2\cdot 2a_2 x^2 - 2\cdot 3a_3 x^2 - \cdots - 2i a_j x^j - \cdots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \cdots + j(j-1)a_j x^{j-2} + \cdots =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2},$$

$$-x^2 y'' = -2a_2 x^2 - 3\cdot 2a_3 x^3 - 4\cdot 3a_4 x^4 - \cdots - j(j-1)a_j x^j - \cdots.$$

ზემოთ მოყვანილი გამოსახულებების ჩასმით მოცემულ $(1-x^2)y''-2xy'+\tau y=0$ განტოლებაში მივიღებთ კოეფიციენტებისათვის შემდეგ განტოლებებს:

$2a_2+\tau a_0=0$ (მწკრივის თავისუფალი წევრი);

$3\cdot 2a_3-2a_1+\tau a_1=0$ (x -ის კოეფიციენტი);

$4\cdot 3a_4-2a_2-4a_2+\tau a_2=0$ (x^2 -ის კოეფიციენტი);

$5\cdot 4a_5-3\cdot 2a_3-2\cdot 3a_3-\tau a_3$ (x^3 -ის კოეფიციენტი);

...

მიღებული განტოლებების ამოხსნით მივიღებთ:

$$a_2=-\frac{\tau}{2}a_0,\quad a_3=-\frac{2-\tau}{3\cdot 2}a_{1,}$$

$$a_4=-\frac{6-\tau}{4\cdot 3}a_2=-\frac{6-\tau}{4\cdot 3}\frac{\tau}{2}a_0,$$

$$a_5=-\frac{12-\tau}{5\cdot 4}a_3=\frac{12-\tau}{5\cdot 4}\frac{2-\tau}{3\cdot 2}a_{1,}$$

და ა.შ.

ამრიგად, საძიებელ მწკრივს აქვს სახე:

$$y=a_0\left(1-\frac{\tau}{2}x^2-\frac{(6-\tau)}{4\cdot3\cdot2}x^4+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{2-\tau}{3\cdot2}x^3+\frac{(12-\tau)(2-\tau)}{5\cdot4\cdot3\cdot2}x^5+\cdots\right).$$

რეკურსიული თანადობის მისაღებად საკმარისია x^j-ს კოეფიციენტი 0-ს გავუტოლოთ:

$$(j+2)(j+1)a_{j+2}-j(j-1)a_j-2ja_j+\tau a_j=0,$$

საიდანაც:

$$a_{j+2}=\frac{j(j+1)-\tau}{(j+2)(j+1)}a_j.$$

უკანასკნელი გამოსახულებიდან ჩანს, რომ მწკრივის კრებადობის რადიუსი დამოკიდებულია τ-ზე. დავუშვათ, $\tau=n(n+1)$, სადაც n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია. მაშინ, თუ n ლუწია, a_1 ავიღოთ 0-ის ტოლად, ხოლო, თუ n კენტია, a_0 გავუტოლოთ 0-ს. მიღებული მწკრივი გადაიქცევა სასრულ ჯამად და, ამრიგად, მივიღებთ n ხარისხის მრავალწევრს, რომელიც იქნება $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ განტოლების ამონახსნი. ამ მრავალწევრს *ლეჟანდრის მრავალწევრი* ეწოდება და $P_n(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება, რომლის თავისუფალი წევრი განისაზღვრება $P_n(1)=1$ ტოლობიდან.

4. ვიპოვოთ $y'' - 2xy' + \tau y = 0$ *ერმიტის განტოლების* ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

კვლავ დავუშვათ, რომ:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_j x^j + \cdots,$$

მაშინ

$$\tau y = \tau a_0 + \tau a_1 x + \tau a_2 x^2 + \cdots + \tau a_j x^j + \cdots,$$

$$-2xy = -2a_1 x - 4a_2 x^2 - 2 \cdot 3a_3 x^3 - \cdots - 2ja_j x^j - \cdots$$

და

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \cdots + j(j-1)a_j x^{j-2} + \cdots.$$

ჩავსვათ მიღებული შედეგები $y'' - 2xy' + \tau y = 0$ განტოლებაში და მიღებული ხარისხოვანი მწკრივის კოეფიციენტები გავუტოლოთ 0-ს:

$2a_2 + \tau a_0 = 0$ (მწკრივის თავისუფალი წევრი);

$3 \cdot 2a_3 - 2a_1 + \tau a_1 = 0$ (x -ის კოეფიციენტი);

$4 \cdot 3a_4 - 4a_2 + \tau a_2 = 0$ (x^2 -ის კოეფიციენტი);

...

$(j+2)(j+1)a_{j+2} - 2ja_j + \tau a_j = 0$ (x^j -ის კოეფიციენტი).

საიდანაც:

$$a_2 = -\frac{\tau}{2} a_0,\ a_3 = \frac{2-\tau}{3 \cdot 2} a_{1,}$$

$$a_4 = \frac{4-\tau}{4 \cdot 3} a_2 = -\frac{\tau(4-\tau)}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0.$$

ზოგადი წევრისათვის გვაქვს გამოსახულება:

$$a_{j+2} = \frac{2j-\tau}{(j+2)(j+1)} a_j,$$

საიდანაც შეგვიძლია გამოვთვალოთ მწკრივის ყველა კოეფიციენტი, კერძოდ:

$$a_5 = \frac{6-\tau}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(6-\tau)(2-\tau)}{5!} a_1.$$

ამრიგად, განტოლების ამონახსნი იქნება შემდეგი ფორმალური ხარისხოვანი მწკრივი:

$$y = a_0 \left(1 - \frac{\tau}{2} x^2 - \frac{(4-\tau)}{4!} x^4 - \frac{(8-\tau)(4-\tau)\tau}{6!} x^6 - \cdots\right) +$$

$$+ a_1 \left(x + \frac{2-\tau}{3!} x^3 + \frac{(6-\tau)(2-\tau)}{5!} x^5 + \frac{(10-\tau)(6-\tau)(2-\tau)}{7!} x^7 + \cdots\right).$$

ეს მწკრივი კრებადია ნებისმიერი x-სათვის. როდესაც τ 4-ის ჯერადი ნატურალური რიცხვია, მწკრივი გადაიქცევა სასრულ ჯამად და მიღებულ მრავალწევრს ეწოდება *ერმიტის მრავალწევრი.*

5. ვიპოვოთ $y'' = xy$ *აირის* განტოლების ამონახსნი მწკრივის სახით.

ვთქვათ, $y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, მაშინ $y' = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$ და $y'' = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2}$. განტოლებაში ამ გამოსახულებების ჩასმით მივიღებთ:

$$y'' - xy = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+1} = 0,$$

საიდანაც:

$2a_2 = 0$ (მწკრივის თავისუფალი წევრი);

$3 \cdot 2a_j - a_0 = 0$ (x -ის კოეფიციენტი);

$4 \cdot 3a_4 - a_1 = 0$ (x^2 -ის კოეფიციენტი);

$5 \cdot 4a_5 - a_2 = 0$ (x^3 -ის კოეფიციენტი);

$6 \cdot 5a_6 - a_3 = 0$ (x^4 -ის კოეფიციენტი);

$7 \cdot 6a_7 - a_4 = 0$ (x^5 -ის კოეფიციენტი);

...

$(j+2)(j+1)a_{j+2} - a_{j-1} = 0$ (x^j -ის კოეფიციენტი);

$$\Downarrow$$

$$a_2 = 0, a_3 = a_0/6, a_4 = a_1/12, a_5 = \frac{a_2}{20} = 0,$$

$$a_6 = a_3/30, a_7 = \frac{a_4}{42} = a_1/504, \dots$$

რეკურსიული ფორმულა ასეთია: $a_{j+3} = \frac{a_1}{(j+3)(j+2)}$. ამრიგად, საძიებელი მწკრივია:

$$y = a_0\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \cdots\right).$$

ფრობენიუსის მეთოდი

თუ მეორე რიგის განტოლების უფროსი კოეფიციენტი 0-ში 0-ის ტოლი ხდება, მაშინ განტოლების ამოსახსნელად გამოიყენება ე.წ. *ფრობენიუსის მეთოდი*, რომელიც მდგომარეობს განტოლების ამონახსნის ძიებაში $y = x^r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = x^r \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ მწკრივის სახით, სადაც r რაიმე უცნობი რიცხვია (არააუცილებლად მთელი, რადგან ამ დროს საქმე

კვლავ ზემოთ განხილულ შემთხვევასთან გვექნებოდა), რომელიც განისაზღვრება თანადობიდან მწკრივის კოეფიციენტებისათვის.

1. ვიპოვოთ $4xy'' - 2y' + y = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი ფრობენიუსის მეთოდით.

ამონახსნი ვეძებოთ

$$y = a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + a_2 x^{r+2} + \cdots \qquad (^*)$$

მწკრივის სახით. მაშინ:

$$-2y' = -2ra_0 x^{r-1} - 2(r+1)a_1 x^r - 2(r+2)a_2 x^{r+1} - \cdots$$

და

$$4xy'' = 4r(r-1)a_0 x^{r-1} + 4(r+1)ra_1 x^r + 4(r+2)(r+1)a_2 x^{r+1} + \cdots.$$

$4xy'' - 2y' + y = 0$ განტოლებაში მათი ჩასმით მივიღებთ, რომ:

$$a_0[4r(r-1) - 2r] = 0.$$

ამ განტოლებას მოცემული განტოლების *მახასიათებელი განტოლება* ეწოდება.

დავუშვათ, $a_0 \neq 0$, მაშინ:

$$4r(r-1) - 2r = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 0 \text{ და } r_2 = \tfrac{3}{2}.$$

შევიტანოთ r-ის ეს მნიშვნელობები $(^*)$ განტოლებაში. პირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $r_1 = 0$, მაშინ:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_j x^j + \cdots,$$

$$-2y' = -2a_1 - 2\cdot 2a_2 x - 3\cdot 2a_3 x^2 - \cdots$$

$$4xy'' = 4\cdot 2a_2 x + 4\cdot 6a_3 x^2 + 4\cdot 12a_4 x^3 + \cdots.$$

$4xy'' - 2y' + y = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$a_0 - 2a_1 = 0$ (მწკრივის თავისუფალი წევრი);
$4\cdot 2a_2 - 2\cdot 2a_2 + a_1 = 0$ (x -ის კოეფიციენტი);
$4\cdot 6a_3 - 3\cdot 2a_3 + a_2 = 0$ (x^2 -ის კოეფიციენტი),

საიდანაც $a_1 = \frac{1}{2}a_0$, $a_2 = -\frac{1}{4}a_1 = -\frac{1}{8}a_0$, $a_3 = -\frac{1}{18}a_2 = \frac{1}{144}a_0$.

ამრიგად, $y = a_0\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{144}x^3 - \cdots\right)$.

ახლა, ვთქვათ, $r_2 = \frac{3}{2}$, მაშინ:

$$y = a_0 x^{\frac{3}{2}} + a_1 x^{\frac{5}{2}} + a_2 x^{\frac{7}{2}} + a_3 x^{\frac{9}{2}} + \cdots,$$

$$-2y' = -3a_0 x^{\frac{1}{2}} - 5a_1 x^{\frac{3}{2}} - 7a_2 x^{\frac{5}{2}} - 9a_3 x^{\frac{7}{2}} - \cdots,$$

$$4xy'' = 3a_0 x^{\frac{1}{2}} + 5 \cdot 3a_1 x^{\frac{3}{2}} + 7 \cdot 5a_2 x^{\frac{5}{2}} + 9 \cdot 7a_3 x^{\frac{7}{2}} + \cdots,$$

რადგან $4xy'' - 2y' + y = 0$, ამიტომ:

$$3a_0 - 3a_0 = 0 \qquad (x^{\frac{1}{2}} \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

$$5 \cdot 3a_1 - 5a_1 + a_0 = 0 \qquad (x^{\frac{3}{2}} \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

$$7 \cdot 5a_2 - 7a_2 + a_1 = 0 \qquad (x^{\frac{5}{2}} \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

$$9 \cdot 7a_3 - 9a_3 + a_2 = 0 \qquad (x^{\frac{7}{2}} \text{ -ის კოეფიციენტი});$$

$$\cdots$$

საიდანაც:

$$a_1 = -\frac{1}{10}a_0,\ \ a_2 = -\frac{1}{28}a_1 = \frac{1}{280}a_0,\ \ a_3 = -\frac{1}{54}a_2 = -\frac{1}{280 \cdot 54}a_0\,.$$

ამით მივიღეთ განტოლების მეორე კერძო ამონახსნი:

$$y = a_0\left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{280}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{280 \cdot 54}x^{\frac{9}{2}} + \cdots\right)$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნია მიღებული კერძო ამონახსნების ჯამი:

$$y = c_1\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{144}x^3 - \cdots\right) +$$
$$+c_2\left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{280}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{280 \cdot 54}x^{\frac{9}{2}} + \cdots\right).$$

განტოლების ამოხსნის ზემოთ მოყვანილი ფრობენიუსის მეთოდი საჭიროებს მოდიფიკაციას, თუ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები, ან ერთი ფესვი მეორისაგან მთელი რიცხვით განსხვავდება. პირველ შემთხვევაში, ე.ი. როდესაც მახასიათებელი განტოლების ფესვები ჯერადია $r_1 = r_2 = r$, მაშინ დიფერენციალური განტოლების ერთი ამონახსნის პოვნა ხდება ზემოთ მოყვანილი მეთოდით. ვთქვათ, ეს ამონახსნია $y_1(x) = a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \cdots$, ხოლო მეორე ამონახსნი კი მოიცემა $y_2(x) = y_1(x)lnx + b_0x^r + b_1x^{r+1} + b_2x^{r+2} + \cdots$ მწკრივით. მეორე შემთხვევაში კი, ე.ი. თუ $r_2 = r_1 + N$, განტოლების მეორე $b_0x^{r_2} + b_1x^{r_2+1} + b_2x^{r_2+2} + \cdots$ ამონახსნს

აქვს იგივე სახე, რაც $a_0x^{r_1} + a_1x^{r_1+1} + a_2x^{r_1+2} + \cdots$ მწკრივს, მხოლოდ მისი პირველი N კოეფიციენტი 0-ის ტოლია. ამ უკანასკნელი პირობიდან მიიღება დამატებითი რეკურსიული თანადობა. განვიხილოთ ამ ტიპის ერთი მაგალითი.

2. ვიპოვოთ $x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0$ ბესელის განტოლების ამონახსნი, როდესაც $k = \frac{1}{2}$.

ისევე, როგორც ზემოთ, ვეძებოთ განტოლების ამონახსნი ფრობენიუსის მეთოდით და დავუშვათ, რომ განტოლების ამონახსნია $y = x^r \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ მწკრივი. მაშინ:

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+r},$$
$$x^2y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+r+2} = \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} x^{j+r},$$
$$y' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+r) a_j x^{j+r-1} = \sum_{j=-1}^{\infty} (j+r+1) a_{j+1} x^{j+r},$$
$$xy' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+r) a_j x^{j+r},$$
$$y'' = \sum_{j=-2}^{\infty} (j+r+1)(j+r+2) a_{j+2} x^{j+r},$$
$$x^2y'' = \sum_{j=0}^{\infty} (j+r-1)(j+r) a_j x^{j+r}.$$

ჩავსვათ $x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0$ განტოლებაში მიღებული ხარისხოვანი მწკრივები და x^r-ის კოეფიციენტი გავუტოლოთ 0-ს. მივიღებთ მახასიათებელ განტოლებას:

$$(r-1)ra_0 + ra_0 - \frac{1}{4}a_0 = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

რომლის ფესვებს $r_1 = -\frac{1}{2}$ და $r_2 = \frac{1}{2}$ შორის სხვაობა 1-ის ტოლია. ე.ი $N = 1$ და, ამრიგად, x^{r+1}-ის კოეფიციენტი 0-ს უნდა გავუტოლოთ. მივიღებთ:

$$r(r+1)a_1 + (r+1)a_1 - \frac{1}{4}a_1 = 0 \;\Rightarrow\; \left((r+1)^2 - \frac{1}{4}\right)a_1 = 0.$$

რეკურსიულ ფორმულას x^{r+j}, $j \geq 2$ კოეფიციენტისათვის აქვს სახე:

$$r(r+j)a_j + (r+j)a_j - \frac{1}{4}a_j + a_{j-2} = 0 \;\Rightarrow\; \left((r+j)^2 - \frac{1}{4}\right)a_j + a_{j-2} = 0.$$

ვთქვათ, $r_1 = -\frac{1}{2}$. რადაგან r_1 და r_2 რიცხვები ერთი და იმავე მახასიათებელი განტოლების ფესვებია, ამიტომ a_0 და a_1 რიცხვები ნებისმიერია. რეკურსიული თანადობიდან მივიღებთ:

$$a_j = -\frac{a_{j-2}}{(-1/2+j)^2 - 1/4} = -\frac{a_{j-2}}{j^2 - j} = -\frac{a_{j-2}}{j(j-1)},\; j \geq 2.$$

საიდანაც:

$$a_2=-\frac{a_0}{2\cdot 1},\ a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 3}=\frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1},\ a_6=-\frac{a_4}{6\cdot 5}=-\frac{a_0}{6!},\ldots,a_{2k}=\frac{a_0(-1)^k}{(2k)!}.$$

ანალოგიურად:

$$a_3=-\frac{a_1}{3\cdot 2},\ a_5=-\frac{a_3}{5\cdot 4}=\frac{a_1}{5!},\ a_5=-\frac{a_3}{5\cdot 4}=-\frac{a_1}{5!},\ldots,a_{2k+1}=\frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

ამრიგად, მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$x^{-1/2}\left[a_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)\right],$$

გავითვალისწინოთ, რომ $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=cosx$ და $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=sinx$. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y=a_0\frac{cosx}{\sqrt{x}}+a_1\frac{sinx}{\sqrt{x}}$.

შევნიშნოთ, რომ განტოლების ზოგადი ამონახსნი მივიღეთ მახასიათებელი განტოლების მხოლოდ ერთი ფესვის გათვალისწინებით.

6.4. ეილერის ინტეგრალი

ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლების მწკრივის სახით წარმოდგენილ ამონახსნს, მათი მნიშვნელობიდან და თვისებებიდან გამომდინარე, თავისი აღნიშვნა და სახელი აქვს. მათი ზოგადი სახელწოდებაა *სპეციალური* (ან *ტრანსცენდენტური*) ფუნქციები. გავიხსენოთ, რომ დიფერენციალური განტოლების კვადრატურებში ამოხსნა შეიცავს არა მხოლოდ ალგებრული ოპერაციების საშუალებით ამონახსნის გამოსახვას, არამედ დასაშვებ ოპერაციად ითვლება აგრეთვე ინტეგრება. მაგალითად, პირველი რიგის

$$y'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{1}$$

ფუნქცია, რომელსაც *ალბათური ინტეგრალი* ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ ინტეგრალი არ აიღება ელემენტარულ ფუნქციებში, ამიტომ მისთ-

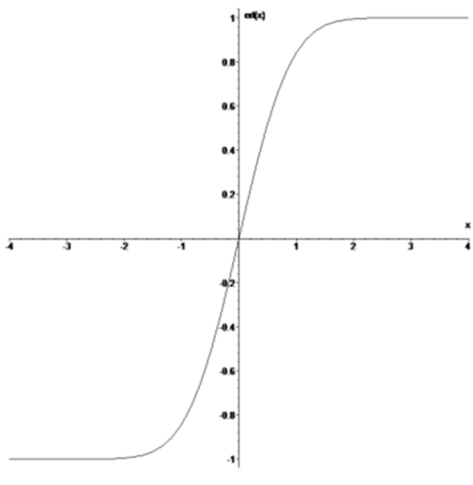
ვის შემოღებულია სპეციალური სახელი, ალბათური ინტეგრალი, ან ცდომილების ფუნქცია და erf სიმბოლოთი აღინიშნება. უფრო ზუსტად, სამეცნიერო ლიტერატურაში (1) ინტეგრალი გვხვდება მისი ეკვივალენტური $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ ფორმითაც. (1) ინტეგრალი არის მონოტონური ფუნქცია, რომელიც -1-სა და 1 შორის არის მოთავსებული. იგი იშლება მწკრივად და ღებულობს ასეთ სახეს:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

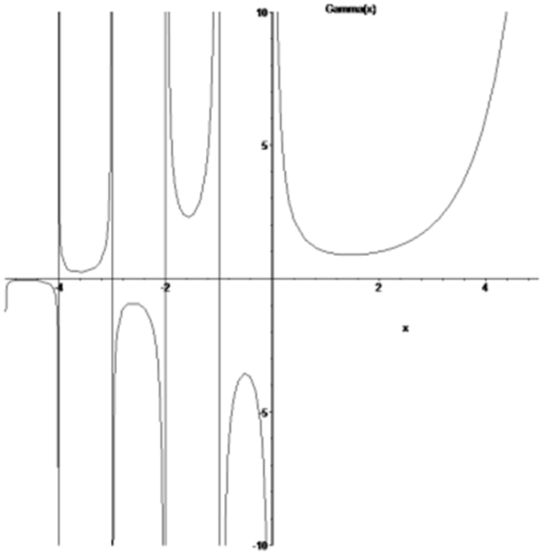
აღნიშნული მწკრივი მიიღება ექსპონენტის ხარისხოვან მწკრივად წარმოდგენის ფორმულიდან და შემდეგ მისი წევრობრივი ინტეგრებით. $erf(x)$ დიფერენცირებადი ფუნქციაა და $\left(erf(x)\right)' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. გარდა ალბათური ინტეგრალისა, სპეციალური ფუნქციების თეორიაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანია

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,,\ \ x>0\,,\ \ y>0$$

ფუნქცია, რომელსაც (ლეჟანდრის მიერ შემოღებული ტერმინი) *ბეტა-ფუნქცია* ეწოდება. ეს ფუნქცია, როგორც ახლა ვნახავთ, გამოისახება სხვა ტრანსცენდენტული, გამა-ფუნქციის საშუალებით, რომელიც გამოყენების თვალსაზრი-



$\Gamma(x)$ ფუნქციის გრაფიკი



$\Phi(x)$ ფუნქციის გრაფიკი

სით უფრო მნიშვნელოვანია, რის გამოც მის თვისებებს მოგვიანებით დაწვრილებით შევისწავლით. ბეტა-ფუნქციის დასახასიათებლად კი მის რამდენიმე თვისებას მოვიყვანთ.

უშუალო ჩასმით ($t=1-\tau$) მოწმდება ბეტა-ფუნქციის სიმეტრიულობის თვისება: $B(x,y)=B(y,x)$. აქვე შევნიშნოთ, რომ $t=0$ წერტილი $B(x,y)$-სათვის განსაკუთრებული წერტილია, როდესაც $x<1$. გარდა უკვე აღნიშნულისა, ბეტა-ფუნქციის განსაკუთრებულ თვისებათა რიცხვს ეკუთვნის ტოლობა:

$$B(x,y)=\frac{(y-1)B(x,y-1)}{x+y-1},\quad y>1.$$

აქედან და სიმეტრიულობიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$B(x,y)=\frac{(x-1)B(x-1,y)}{x+y-1},x>1.$$

როდესაც $y=n$, სადაც n ნატურალური რიცხვია, მაშინ:

$$B(x,n)=\frac{n-1}{x+n-1}\cdot\frac{n-2}{x+n-2}\cdot\frac{n-3}{x+n-3}\cdots\frac{1}{x+1}B(x,1),$$

მაგრამ

$$B(x,1)=\int_0^1 t^{x-1}dt=\frac{1}{x},$$

ამიტომ:

$$B(x,n)=\frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

გარდა y-სა, თუ x ცვლადიც ნატურალური რიცხვია და $x=m$, მაშინ გვექნება ტოლობა:

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-1)}=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

თუ $y=1-x$, მაშინ მივიღებთ ერთ-ერთ შესანიშნავ ინტეგრალს:

$$B(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \tag{2}$$

უკვე განხილული ბეტა-ფუნქციისა და ალბათური ინტეგრალის საერთო სახელწოდებაა *ეილერის ინტეგრალები*, ამასთან, ბეტა-ფუნქცია ეკუთვნის *პირველი გვარის ეილერის ინტეგრალების* კლასს, ხოლო ალბათური ინტეგრალი კი – *მეორე გვარისას*. პირველი გვარის ეილერის ინტეგრალებს მიეკუთვნება, აგრეთვე, ზემოთ ნახსენები *ეილერის გამა-ფუნქცია*:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,\ \ x>0,$$

რომლისთვისაც, ისევე როგორც ბეტა-ფუნქციისათვის, $t=0$ წერტილი განსაკუთრებულია, თუ $x<0$. გამა- და ბეტა-ფუნქციები ერთმანეთს უკავშირდებიან ტოლობით:

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{3}$$

გარდა ამისა, გამა-ფუნქცია აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$x\Gamma(x)=\Gamma(x+1). \tag{4}$$

მართლაც:

$$x\Gamma(x)=x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=x\int_0^\infty e^{-t}d\left(\frac{t^x}{x}\right)=\int_0^\infty e^{-t}d(t^x)=e^{-t}t^x\mid_0^\infty+\int_0^\infty e^{-t}t^x dt=\int_0^\infty e^{-t}t^x dt=\Gamma(x+1),$$

სადაც ჩვენ გამოვიყენეთ $e^{-t}t^x\mid_0^\infty=0$ იგივეობა.

(4) ფორმულის რამდენჯერმე გამოყენება გვაძლევს ტოლობას:

$$\Gamma(x+n)=\Gamma((x+n-1)+1)=(x+n-1)\Gamma(x+n-1)=(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x),$$

საიდანაც, როდესაც $x=1$, მივიღებთ:

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1).$$

$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\mid_0^\infty=1$ ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{5}$$

მოვიყვანოთ გამა-ფუნქციასთან დაკავშირებული ერთი შესანიშნავი ტოლობა, რომელიც (2) და (3) იგივეობებიდან გამომდინარეობს:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

შევნიშნოთ, რომ ეილერის პირველი და მეორე გვარის ინტეგრალები განიმარტებიან კომპლექსური არგუმენტებისთვისაც. მაგალითად, გამა-ფუნქციის საშუალებით შემოდის კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში ფაქტორიალის ცნება. ეილერის ინტეგრალებისათვის და, საერთოდ, სპეციალური ფუნქციებისათვის უფრო ადეკვატური თეორიაა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორია და დიფერენციალური განტოლებები კომპლექსურ სიბრტყეზე. ჩვენ ამ კურსში დიფერენციალურ განტოლებებს მხოლოდ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის თვალსაზრისით ვიხილავთ.

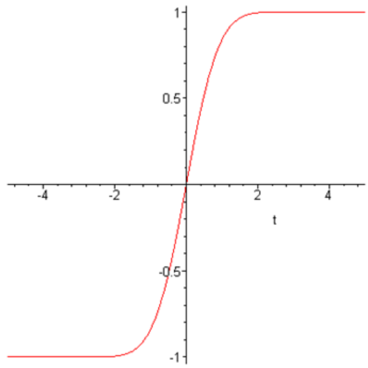
მაგალითი. $x'(t)=tx(t)+1$ არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი სპეციალური $\mathrm{erf(t)}$ ფუნქციის საშუალებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x(t)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}erf\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)+C\right)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

რადგან $\mathrm{erf}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$, მისი მწკრივად გაშლით მივიღებთ:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}t-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}t^3+\frac{1}{5\sqrt{\pi}}t^5-\frac{1}{21\sqrt{\pi}}t^7+\frac{1}{108\sqrt{\pi}}t^9+O(t^{10}).$$

$\operatorname{erf}(t)$ ფუნქციის გრაფიკი მოყვანილია ნახაზზე:



$\operatorname{erf}(t)$ არის დიფერენცირებადი ფუნქცია და $\operatorname{erf}(f(t))' = \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$.

როდესაც $C = 0$, (1) ფუნქციის შესაბამისი ხარისხოვანი მწკრივია

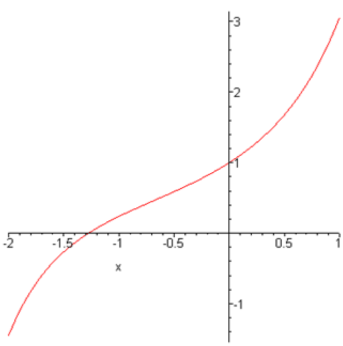
$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{105}x^7 + \frac{1}{945}x^9 + O(x^{10}),$$

ხოლო $C = 1$ კი –

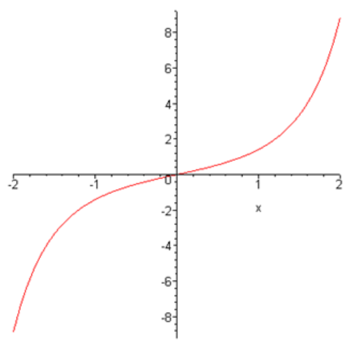
$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{48}x^6 + \frac{1}{105}x^7 +$$

$$+ \frac{1}{384}x^8 + \frac{1}{945}x^9 + O(x^{10})$$

$x(t) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{2}erf\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) + C\right)e^{\frac{x^2}{2}}$ ფუნქციის გრაფიკი



როდესაც $C = 1$



როდესაც $C = 0$

6.5. ბესელის ფუნქცია

მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები წარმოქმნიან სპეციალური ფუნქციების მნიშვნელოვან კლასს. ასეთი ფუნქციების თვისებები შეისწავლება მისი წარმომქმნელი დიფერენციალური განტოლებებიდან.

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=0\,. \qquad (1)$$

როგორც უკვე ვნახეთ, ასეთი ზოგადი სახის განტოლება კვადრატურებში არ იხსნება, იხსნება მხოლოდ $a_1(x)$ და $a_2(x)$ კოეფიციენტების სპეციალურად შერჩევის შემთხვევაში. რამდენიმე მათგანი (ეილერის, ჩებიშევის, სტოქსის) წინა პარაგრაფებში უკვე განვიხილეთ, ქვემოთ კიდევ რამდენიმე მათგანს მოვიყვანთ. ეს განტოლებები არიან სწორედ ისეთები, რომლებიც ფუნქციათა ახალ კლასს გვაძლევენ და მათი საშუალებით გამოისახება მათემატიკური ფიზიკის მრავალი განტოლების ამონახსნი.

დავუშვათ, (1) განტოლებაში $a_1(x)=\dfrac{1}{x}$ და $a_2(x)=1-\dfrac{\nu^2}{x^2}$, სადაც ν რაიმე პარამეტრია, მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0\,. \qquad (2)$$

ამ განტოლებას *ბესელის* განტოლება ეწოდება (ამ განტოლების კერძო შემთხვევას უკვე შევხვდით და განტოლების ამონახსნი მივიღეთ კვადრატურებში), ხოლო მის ამონახსნებს კი – *ბესელის* ან *ცილინდრული* ფუნქციები.

(2) განტოლება გადავწეროთ ეკვივალენტური

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(x^2-\nu^2\right)y(x)=0 \qquad (3)$$

ფორმით და მისი ამონახსნი ვეძებოთ

$$y=x^\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots) \qquad (4)$$

მწკრივის სახით, სადაც $a_0\neq 0$, მაშინ:

$$xy'=x^\sigma(a_0\sigma+a_1(\sigma+1)x+a_2(\sigma+2)x^2+\ldots)\,,$$

$$x^2y''=x^\sigma(a_0\sigma(\sigma-1)+a_1(\sigma+1)\sigma x+a_2(\sigma+1)(\sigma+2)x^2+\ldots)\,.$$

ჩავსვათ (3)-ში y, xy' და $x^2 y''$-ის მაგივრად ზემოთ მოყვანილი მწკრივები და დავაჯგუფოთ მიღებულ გამოსახულებაში წევრები x-ის ერთნაირი (ტოლი) ხარისხების მიხედვით. შედეგი იქნება:

$$x^{\sigma}[a_0\sigma^2 - a_0\nu^2] + x^{\sigma+1}[a_1(\sigma+1)^2 - a_1\nu^2] + x^{\sigma+2}[a_2(\sigma+2)^2 - a_2\nu^2 + a_0] + \ldots +$$

$$+ x^{\sigma+n}[a_n(\sigma+n)^2 - a_n\nu^2 + a_{n-2}] + \ldots \equiv 0.$$

იმისათვის, რომ (4) მწკრივი (3) განტოლების ამონახსნი იყოს, საჭიროა შესრულდეს შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned} &a_0[\sigma^2 - \nu^2] = 0; \\ &a_1[(\sigma+1)^2 - \nu^2] = 0; \\ &a_2[(\sigma+2)^2 - \nu^2] + a_0 = 0; \\ &\qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \\ &a_n[(\sigma+n)^2 - \nu^2] + a_{n-2} = 0. \\ &\qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \end{aligned}$$

პირველი ტოლობიდან, რადგან $a_0 \neq 0$, ვპოულობთ $\sigma = \pm\nu$. დავუშვათ, $\sigma = \nu$, მაშინ მეორე ტოლობიდან ვღებულობთ: $a_1 = 0$, ხოლო, როდესაც $n = 2,3,\ldots$ გვექნება:

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(\sigma+n)^2 - \nu^2} = \frac{-a_{n-2}}{(2\nu+n)n},$$

საიდანაც ნათელია, რომ ყველა მთელი არაუარყოფითი k-სათვის $a_{2k+1} = 0$ და

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{2^2(\nu+k)k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)\ldots(\nu+1)k!}.$$

დავუშვათ:

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

და გამოვიყენოთ წინა პუნქტის (4) და (5) ტოლობები, მივიღებთ:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}.$$

ამრიგად, ავაგეთ (2) განტოლების ერთი ფორმალური ამონახსნი:

$$y = y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{5}$$

საჭიროა დამტკიცდეს, რომ (4) მწკრივი კრებადია. ამისათვის ზოგადი y_k წევრისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$y_k = \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}.$$

მაშინ:

$$\left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| = \left|\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2+\nu} k!\Gamma(k+\nu+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} (k+1)!\Gamma(k+\nu+2)}\right| = \left|\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{(k+1)(k+\nu+1)}\right|$$

და აქედან:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{(k+1)(k+\nu+1)}\right| = 0, \text{ როდესაც } |x| < \infty.$$

ამიტომ მწკრივების კრებადობის დალამბერის ნიშნის თანახმად, (5) მწკრივი კრებადია ყოველი სასრული x-სათვის. უფრო მეტიც, როდესაც $|x| < R$ და $|\nu| < N$, სადაც R და N ფიქსირებული საკმაოდ დიდი რიცხვებია, კრებადობა თანაბარია თითოეული ცვლადისათვის ცალ-ცალკე. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ განხილული მწკრივი თანაბრადაა კრებადი ზემოთ მითითებულ არეზე. მიღებულ ფუნქციას ეწოდება *პირველი გვარის ბესელის ფუნქცია ინდექსით* ν და აღინიშნება $J_\nu(x)$ სიმბოლოთი.

ამრიგად:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}, \ |x| < \infty. \tag{6}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $J_\nu(x)$ მართლაც არის (2) განტოლების ამონახსნი. რადგან (5) მწკრივი თანაბრადაა კრებადი, ამიტომ მისი წევრობრივი გაწარმოება შესაძლებელია:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\,,\ y'=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\,,$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)(2k+\nu-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-2}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\,.$$

გავამრავლოთ y ფუნქცია $\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)$-ზე, $y'-\frac{1}{x}$-ზე, ხოლო y'' ფუნქცია კი – 1-ზე და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ:

$$L(y)\equiv y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k[(2k+\nu)(2k+\nu-1)+(2k+\nu)-\nu^2]x^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}\,.$$

თუ გავითვალისწინებთ

$$[(2k+\nu)(2k+\nu-1)+(2k+\nu)-\nu^2]=2^2k(k+\nu)$$

ტოლობას, გვექნება:

$$L(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k(2k+\nu)x^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu-2}k!\Gamma(k+\nu+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}=$$

$$=\sum_{\substack{k=1\\(k-1)\to k}}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu-2}(k-1)!\Gamma(k+\nu)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}\equiv 0\,,$$

რაც მიუთითებს იმაზე, რომ (6) მწკრივით მოცემული ბესელის $J_\nu(x)$ ფუნქცია არის (2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

6.6. ვებერის ფუნქცია

განმარტების თანახმად, ბესელის (ცილინდრული) ფუნქცია არის წინა პუნქტის (2) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. თუ y_1 და y_2 (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, მაშინ ზოგადი ამონახსნი მოიცემა

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

სახით, სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. უკვე ავაგეთ (2)-ის სპეციალური ამონახსნი, ბესელის ფუნქციის სახით. თუ ν პარამეტრი მთელი რიცხვი არ არის, მაშინ

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \tag{7}$$

აგრეთვე არის (2) განტოლების ამონახსნი, ამასთან, $J_\nu(x)$ და $J_{-\nu}(x)$ წრფივად დამოუკიდებლები არიან. ამის დასამტკიცებლად საჭიროა (6) და (7) ფუნქციების ყოფაქცევა შევისწავლოთ $x = 0$ წერტილში. თუ $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$, მაშინ:

$$J_\nu(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}, \text{ როდესაც } |x| \to 0,$$

ხოლო იმ შემთხვევაში, როდესაც $\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$, გვაქვს:

$$J_{-\nu}(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}, \text{ როდესაც } |x| \to 0.$$

ე.ი., როდესაც $\nu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ სამართლიანია ზემოთ მოყვანილი ორივე ფორმულა. ამ დროს:

$$\frac{J_\nu(x)}{J_{-\nu}(x)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \neq const, \quad \nu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

რაც ნიშნავს, რომ (6) და (7) წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია. მაშასადამე, ცილინდრული ფუნქციის ზოგადი სახე იქნება:

$$y = A_\nu J_\nu(x) + B_\nu J_\nu(x)\,, \nu \neq \pm1, \pm2, \pm3, \dots, \tag{8}$$

სადაც A_ν, B_ν ნებისმიერი მუდმივებია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\nu = n$ მთელი რიცხვია. მაშინ:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!}$$

და

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!\Gamma(k-n+1)},$$

რადგან $\Gamma(k-n+1) = \infty$, როდესაც $k = 0,1,2,\dots,n-1$. უკანასკნელ ჯამში ჩავსვათ k-ს მაგივრად $s+n$, მივიღებთ:

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}}{s!(s+n)!} = (-1)^n J_n(x),$$

ამრიგად, მთელი ინდექსების მქონე ბესელის ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულები არიან, ამიტომ (8) გამოსახულება არ იქნება (2) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, როდესაც ν პარამეტრი მთელი რიცხვია. ამის გამო საჭიროა მოიძებნოს (2)-ის კიდევ ერთი ამონახსნი. ამ მიზნის განსახორციელებლად შემოვიტანოთ

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \tag{9}$$

სახის ფუნქცია, რომელსაც *მეორე გვარის ცილინდრული ფუნქცია* ან *ვებერის ფუნქცია* ეწოდება. სამეცნიერო ლიტერატურაში (9) ფუნქციის აღსანიშნავად ზოგჯერ $N_\nu(x)$ სიმბოლოც გამოიყენება, ხოლო თვით ფუნქციას კი *ნეიმანის* ფუნქციასაც უწოდებენ.

როდესაც ν მთელი რიცხვია, (9) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა მიიღება. ამ დროს შევთანხმდეთ, რომ $Y_n(x)$

ფუნქცია იყოს ზღვარი $Y_n(x)=\lim_{\nu\to n} Y_\nu(x)$. ეს ზღვარი არსებობს და გამოითვლება ლოპიტალის წესის გამოყენებით:

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\right]\Bigg|_{\nu=n}-(-1)^n\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}\right]\Bigg|_{\nu=n}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (9) ფუნქცია აკმაყოფილებს ბესელის (2) განტოლებას. მართლაც:

$$L(J_\nu)\equiv J_\nu^{//}+\frac{1}{x}J_\nu^{/}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu\equiv 0,$$

$$L(J_{-\nu})\equiv J_{-\nu}^{//}+\frac{1}{x}J_{-\nu}^{/}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_{-\nu}\equiv 0.$$

ვიპოვოთ თითოეული იგივეობის წარმოებული ν მიმართ. მივიღებთ:

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)-\frac{2\nu}{x^2}J_\nu\equiv 0,\quad L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)-\frac{2\nu}{x^2}J_{-\nu}\equiv 0.$$

ამის შემდეგ პირველი თანადობა გავამრავლოთ 1-ზე, ხოლო მეორე კი -1-ზე და პირველს მეორე გამოვაკლოთ, გვექნება:

$$L\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)-(-1)^n L\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)-\frac{2\nu}{x^2}[J_\nu-(-1)^n J_{-\nu}]\equiv 0.$$

უკანასკნელი ტოლობა გავყოთ π-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $\nu\to n$. მივიღებთ $L(Y_n)\equiv 0$ იგივეობას, რაც ნიშნავს, რომ $Y_n(x)$ არის (2) განტოლების ამონახსნი. $y_1=J_\nu(x)$ და $y_2=Y_\nu(x)$ ფუნქციები, ნებისმიერი ν-სათვის, წრფივად დამოუკიდებლები არიან, ამიტომ $y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$ ყოველთვის არის (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

დაბოლოს, შემოვიტანოთ კიდევ ერთი კლასი სპეციალური ფუნქციებისა, რომლებიც კვლავ (2) განტოლების სპეციფიკური ამონახსნებია:

$$H_\nu^{(1)}=J_\nu(x)+iY_\nu(x),\quad H_\nu^{(2)}=J_\nu(x)-iY_\nu(x).$$

ამ ფუნქციებს ეწოდებათ *მესამე გვარის ცილინდრული* ან *ჰანკელის* ფუნქციები.

6.7. რამდენიმე სასარგებლო ფორმულა

სპეციალური ფუნქციების გამოყენების გასაადვილებლად ბესელის (6) ფუნქცია წარმოვადგინოთ სხვა სახით. ამისათვის გავამრავლოთ (6) გამოსახულება x^{ν}-ზე და მიღებული გამოსახულება გავაწარმოოთ x-ით. გვექნება:

$$\frac{d}{dx}x^{\nu}J_{\nu}(x)=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2(k+\nu)x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}=$$

$$=x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu-1}(k+\nu)}{x^{2k+\nu-1}k!\,\Gamma(k+\nu+1)}=x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu)}=x^{\nu}J_{\nu-1}(x).$$

ამრიგად:

$$\frac{d}{dx}x^{\nu}J_{\nu}(x)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,. \tag{10}$$

ანალოგიური გზით მიიღება თანადობა:

$$\frac{d}{dx}x^{-\nu}J_{\nu}(x)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,. \tag{11}$$

(10) და (11) გამოსახულებების მარცხენა მხარეების გაწარმოებით მივიღებთ:

$$x^{\nu}\frac{d}{dx}J_{\nu}(x)+\nu x^{\nu-1}J_{\nu}(x)=x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,, \tag{12}$$

$$x^{-\nu}\frac{d}{dx}J_{\nu}(x)-\nu x^{-\nu-1}J_{\nu}(x)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,, \tag{13}$$

საიდანაც:

$$\frac{d}{dx}J_{\nu}(x)+\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)=J_{\nu-1}(x)\,, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}J_{\nu}(x)-\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)=-J_{\nu+1}(x)\,. \tag{15}$$

(14) და (15) გამოსახულებების შეკრებითა და გამოკლებით მივიღებთ:

$$2\frac{d}{dx}J_{\nu}(x)=J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)\,, \tag{16}$$

$$\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x)=J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)\,. \tag{17}$$

თუ უკანასკნელ ტოლობებში ჩავსვამთ $\nu=0$, მივიღებთ:

$$\frac{d}{dx}J_0(x)=J_{-1}(x),\ \ J_{-1}(x)=-J_1(x).$$

ზემოთ მიღებული (10)-(17) ტოლობები სამართლიანია ბესელის მეორე და მესამე გვარის ფუნქციებისთვისაც. ამ ტოლობებს ხშირად *რეკურსიულ ფორმულებს* უწოდებენ.

ზოგჯერ, ν პარამეტრის გარკვეული მნიშვნელობისათვის, შესაძლებელია ბესელის ფუნქციების გამოსახვა ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. ქვემოთ მოვიყვანთ რამდენიმე ფორმულას დამტკიცების გარეშე.

დავუშვათ $\nu=0$, მაშინ:

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cos(xt)dt,\ \ -\infty<x<\infty,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\left|J_0(x)\right|\le\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin(t)\left.\right|_0^1=1.$$

ამრიგად, $\left|J_0(x)\right|\le1$.

ვთქვათ, $\nu=n+1/2$, $n=0,1,2,...$ (ასეთ რიცხვებს ნახევრად მთელს უწოდებენ), მაშინ:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}n!}\int_0^1(1-t^2)^n\cos(xt)dt.$$

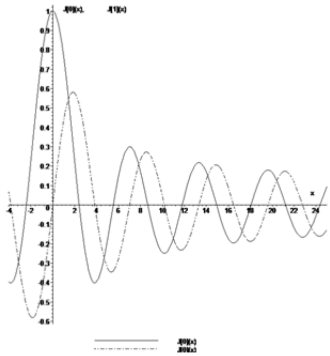
აქედან გამომდინარეობს, რომ ნახევრად მთელი დადებითი ინდექსის მქონე ბესელის ფუნქციები გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. რეკურსიული ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ უარყოფითი ნახევრად მთელი ინდექსის მქონე ბესელის ფუნქციების გამოსახვას ელემენტარულ ფუნქციებში. მაგალითად:

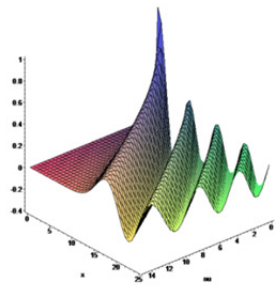
$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\cos(xt)dt=\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(x),$$

მაშასადამე,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(x)\,.$$

ლიუვილმა აჩვენა, რომ *მხოლოდ ნახევრად მთელი ინდექსების მქონე ბესელის ფუნქციები გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით.*





ბესელის $J_0(x)$ და $J_1(x)$ ფუნქციის გრაფიკები $f(x,\nu)=J_\nu(x)$ ზედაპირი

6.8. ცილინდრული ფუნქციების ასიმპტოტური ყოფაქცევა არგუმენტის დიდი მნიშვნელობისათვის

ცილინდრულ ფუნქციებს აქვთ მარტივი ასიმპტოტური ყოფაქცევა, როდესაც ν პარამეტრი ფიქსირებულია, ხოლო x კი უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის. ასიმპტოტური ფორმულების მთავარი წევრი შესაძლებელია მიღებულ იქნეს იმ დიფერენციალური განტოლებიდან, რომელსაც ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს. ამ ფორმულების მკაცრი დაფუძნებისაგან თავს შევიკავებთ და შემოვიფარგლებით გარკვეული ინტუიციური მსჯელობით.

პარაგრაფ 3.5-ის (2) განტოლებაში მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა:

$$y=\frac{w}{\sqrt{x}}\Rightarrow y'=\frac{w'}{\sqrt{x}}-\frac{w}{2\sqrt{x^3}}\Rightarrow y''=\frac{w''}{\sqrt{x}}-\frac{w'}{\sqrt{x^3}}+\frac{3w}{4\sqrt{x^5}}\,.$$

ბესელის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$w''+\left[1+\frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{x^2}\right]w=0\,.$$

როდესაც ν სასრულია, ხოლო $x \to \infty$, (1) განტოლებიდან გვექნება:

$$w'' + w \cong 0,$$

საიდანაც

$$w \cong A\cos(x) + B\sin(x) = Ce^{ix} + De^{-ix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \cong \frac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}} = \frac{Ce^{ix} + De^{-ix}}{\sqrt{x}}, \quad x \to \infty.$$

A, B, C, D კოეფიციენტები დამოკიდებულია როგორც ν ინდექსზე, ასევე განსახილველ ცილინდრულ ფუნქციაზე.

ასიმპტოტურ ფორმულებს ასეთი სახე აქვთ:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right),$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x-(2\nu+1)\frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right),$$

როდესაც ν შემოსაზღვრულია, ხოლო $x \to \infty$.

ჰანკელის ფუნქციების განმარტებიდან გამოდის, რომ:

$$J_\nu = \frac{H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)}{2}, \quad Y_\nu = \frac{H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)}{2},$$

აქედან:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right), \tag{1}$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - (2\nu+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right). \tag{2}$$

ამრიგად, თუ ჰანკელის ფუნქცია უსასრულობაში ექსპონენციალურად იზრდება, მაშინ $J_\nu(x)$ და $Y_\nu(x)$ ფუნქციები უსასრულობაში აღიწერებიან (1) და (2) ფორმულებიდან. კერძოდ, თუ $\nu = 0$, მაშინ:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|x|^{3/2}}\right).$$

ამასთან, $J_1(x) = -J_0^{/}(x)$, მაშასადამე, $J_1(x)$ ემთხვევა $J_0(x)$ ფუნქციის ექსტრემალებს.

შენიშვნა: არსებობს რამდენიმე კარგი ცნობარი, რომელშიც გადმოცემულია სპეციალური (ტრანსცენდენტური) ფუნქციების თეორია. მაგრამ, თითქმის ყველა წიგნს ფარავს Maple-ს საცნობარო სისტემა (Help). სპეციალური ფუნქციების შესახებ ამომწურავ პასუხს მიიღებთ *<? special function* ბრძანების შესრულების შემდეგ. ბრძანების შესრულება კი, როგორც აღვნიშნეთ, ხდება Enter კლავიშზე ხელის დაჭერით.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. გამოსახეთ ხარისხოვანი მწკრივით

$$y'' - xy - y = 0$$

განტოლების ამონახსნი. დაწერეთ რეკორსიული ფორმულა მწკრივის ზოგადი წევრისათვის.

პასუხი: $a_{2n} = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot \ldots 2n} = \frac{a_0}{2^n(n!)}$, $a_{2n+1} = \frac{a_1}{3\cdot 5\cdot \ldots (2n+1)} = \frac{a_1 2^n (n!)}{(2n+1)!}$,

$$y = a_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n!)}\right) + a_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n!)x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

2. იპოვეთ

$$y'' + 2x^2 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი მწკრივის სახით.

პასუხი: $y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \cdots$.

3. გამოსახეთ ხარისხოვანი მწკრივით

$$y''' - x^2 y + y = 0$$

განტოლების ამონახსნი.

პასუხი: $y = a_0\left(1 - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^6}{720} - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^4}{24} - \frac{11x^7}{5040} - \cdots\right) +$

$$+a_2\left(x^2 + \frac{x^5}{60} + + \frac{19x^8}{20160} + \cdots\right).$$

4. ფრობენიუსის მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ

$$3x^2y'' + 2xy' + y = 0$$

განტოლების ამონახსნი მწკრივის სახით.

მითითება: $r = (1 \pm \sqrt{11}i)/6,$

$$y = x^{\frac{1}{6}}(c_1 \cos\left(\sqrt{11}ln\frac{x}{6}\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{11}ln\frac{x}{6}\right)).$$

5. გამოსახეთ

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0, |x| < 1$$

ჩებიშევის განტოლების ამონახსნი ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

6. აჩვენეთ, რომ:

1. $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(x);$

2. $Y_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(x);$

3. $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -i\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{iz}$, $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = -i\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-iz}$, სადაც z კომპლექსური ცვლადია.

7. ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲐᲚᲣᲠ ᲒᲐᲜᲢᲝᲚᲔᲑᲐᲗᲐ ᲡᲘᲡᲢᲔᲛᲔᲑᲘ

7.1. წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

ქვემოთ განხილვის ობიექტი იქნება

$$X^{/}(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{1}$$

წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, სადაც $X(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ არის უცნობი ვექტორული ფუნქცია, $X^{/}(t)$ ამ ვექტორული ფუნქციის წარმოებულია და $X^{/}(t) = (x_1^{/}(t), x_2^{/}(t),..., x_n^{/}(t))$, $A(t)$ – მატრიცული ფუნქციაა უწყვეტი ელემენტებით:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

ხოლო $B(t) = (b_1(t),..., b_2(t))$ კი მოცემული ვექტორული ფუნქციაა.

წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა (1) სისტემა წარმოადგენს ვექტორების ტოლობას, ამიტომ გაშლილი სახით იგი შესაძლებელია გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} x_1^{/}(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + ... + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2^{/}(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + ... + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \qquad ... \\ x_n^{/}(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + ... + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \tag{2}$$

(2) (ან (1)) განტოლებათა სისტემას ეწოდება *წრფივ არაერთგვაროვან ცვლადკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა*, ხოლო $a_{ij}(t)$, $i, j = 1,...,n$ ფუნქციებს ეწოდებათ (2) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტები. (2) განტოლებათა სისტემას ეწოდება *ერთგვაროვანი*, თუ $b_1(t) = b_2(t) = ... = b_n(t) \equiv 0$ (ან $B(t)$ იგივურად 0-ის ტოლი ვექტორია). რადგან (1) და (2) ერთი და იმავე ობიექტის ორი სხვადასხვა ჩანაწერია, ამიტომ ამ ორიდან იმას ავირჩევთ, რომელიც კონკრეტულ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელი იქნება.

ბუნებრივია, (1) *სისტემის ამონახსნი* ვუწოდოთ ისეთ ვექტორულ ფუნქციას – $X^1(t)=(x_1^1(t),x_2^1(t),...,x_n^1(t))$, რომლის ჩასმითაც (1)-ში ეს გამოსახულება იგივეობად გადაიქცევა.

წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებზე ვრცელდება n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა, რომლებსაც *სკალარულ განტოლებებს* უწოდებენ, თვისებების უმრავლესობა.

თეორემა 1. *ვთქვათ:*

$$X^1(t)=(x_1^1(t),x_2^1(t),...,x_n^1(t))$$

და

$$X^2(t)=(x_1^2(t),x_2^2(t),...,x_n^2(t))$$

ვექტორული ფუნქციები დიფერენციალურ განტოლებათა (1) სისტემის შესაბამისი

$$X^{/}(t)=A(t)X(t) \qquad (3)$$

ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნებია, მაშინ:

1. $C_1X^1(t)+C_2X^2(t)=C_1(x_1^1(t),x_2^1(t),...,x_n^1(t))+C_2(x_1^2(t),x_2^2(t),...,x_n^2(t))=$ $=(C_1x_1^1(t)+C_2x_1^2(t),C_1x_2^1(t)+C_2x_2^2(t),...,C_1x_n^1(t)+C_2x_n^2(t))$ *წრფივი კომბინაცია, სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი კონსტანტებია, აგრეთვე ამონახსნია.*
2. *(3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი.*
3. *თუ $X^1(t)$, $X^2(t),...,X^n(t)$ აღვნიშნავთ (3) დიფერენციალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს, მაშინ (3) სისტემის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:*

$$X(t)=C_1X^1(t)+C_2X^2(t)+...+C_nX^n(t).$$

(3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის $X^1(t),X^2(t),...,X^n(t)$ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს ეწოდება *ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა*, ხოლო ამ ამონახსნების კომპონენტებისაგან შედგენილი მატრიცის

$$\begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & ... & x_1^n(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & ... & x_n^n(t) \end{pmatrix} \qquad (4)$$

დეტერმინანტს ეწოდება (3) სისტემის *ვრონსკის დეტერმინანტი* და ისევე, როგორც სკალარული განტოლებისათვის, მისთვისაც მიღებულია აღნიშვნა $W(t)$. როგორც ვხედავთ, (4) მატრიცის სვეტები არიან $X^1(t), X^2(t),...,$ $X^n(t)$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორ-ფუნქციების კოორდინატები (რომლებიც სკალარული ფუნქციებია). თუ t_0 რაიმე წერტილია (3) დიფერენციალური განტოლების განსაზღვრის არიდან, მაშინ სამართლიანია შემდეგი

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds} \tag{5}$$

ტოლობა ვრონსკის დეტერმინანტისათვის, რომელსაც *ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულა* (ზოგიერთი ავტორი (5) ტოლობას *იაკობის ფორმულასაც უწოდებს)* ეწოდება. (5)-ში ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოთავსებული $trA(t)$ სიმბოლო აღნიშნავს $A(t)$ *მატრიცული ფუნქციის კვალს*, რომელიც განმარტებით $A(t)$-ს მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ჯამია.

მიუხედავად ფორმალური მსგავსებისა, სკალარულ და ვექტორულ დიფერენციალურ განტოლებებს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავებაა. ეს, უპირველეს ყოვლისა, გამოწვეულია $A(t_1)A(t_2) \neq A(t_2)A(t_1)$ უტოლობით, სადაც t_1 და t_2 ორი ნებისმიერი რიცხვია $A(t)$ მატრიც-ფუნქციის განსაზღვრის არიდან. იმ შემთხვევაში, როდესაც ეს უტოლობა ტოლობად იქცევა, რაც სამართლიანია, მაგალითად, სკალარული ფუნქციებისათვის, მაშინ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის პოვნის ამოცანა მარტივდება. ქვემოთ დავუშვებთ, რომ $A(t)$ მუდმივი მატრიც-ფუნქციაა. ამ დაშვების შემდეგ (3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა გადაიქცევა მუდმივკოეფიციენტებიან წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემად, რომელსაც დაწვრილებით განვიხილავთ.

7.2. ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა n-ური რიგის განტოლებათა ნორმალური სისტემისათვის და საწყის პირობებზე უწყვეტად დამოკიდებულება

ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, აქაც შემოვიტანოთ ვექტორული აღნიშვნები:

$$X(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$$

და

$$F(t,X)=(f_1(t,x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)),...,f_2(t,x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)))\ .$$

დიფერენციალურ განტოლებათა *ნორმალური სისტემა* ვუწოდოთ

$$X^{/}(t)=F(t,X) \tag{1}$$

გამოსახულებას.

$X=\varphi(t)$ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება (1) სისტემის ამონახსნი $I\subset\mathbf{R}$ ნამდვილ რიცხვთა ინტერვალზე, თუ $\varphi(t)$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა I -ზე, $(t,\varphi(t))\in U$ ნებისმიერი t -სათვის I -დან და $\varphi^{/}(t)\equiv F(t,\varphi(t))$.

განვიხილოთ საწყისი პირობა:

$$X(t_0)=X_0\ ,\ \ (t_0,X_0)\in U\ . \tag{2}$$

$(t_0,X_0)\in U$ წერტილს ეწოდება *საწყისი წერტილი*, ხოლო მის t_0,X_0 კოორდინატებს კი – *საწყისი მონაცემები.*

(1) ნორმალური სისტემის ამონახსნის პოვნის ამოცანას, რომელიც (2) საწყის პირობას აკმაყოფილებს, ეწოდება *კოშის ამოცანა.*

გეომეტრიულად (1),(2) კოშის ამოცანა ნიშნავს, რომ საძიებელია U არეში ისეთი ინტეგრალური წირი, რომელიც $(t_0,X_0)\in U$ წერტილზე გაივლის.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ თეორემა, რომელიც კოშის (1) და (2) ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობისათვის საკმარისი პირობაა.

თეორემა 1 (ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა). *ვთქვათ,* $F(t,X)$ *ვექტორ-ფუნქცია* U*-ს შემოსაზღვრულ და ჩაკეტილ ქვეარეზე, თანაბრად თავისი არგუმენტების მიმართ, აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას და* $(t_0,X_0)\in U$ *მოცემული წერტილია, მაშინ:*

ა) არსებობს ისეთი $\delta>0$ *, რომ, როდესაც* $|t-t_0|\leq\delta$ *, კოშის ამოცანას აქვს ამონახსნი.*

ბ) (1),(2) ამოცანის ამონახსნი ერთადერთია იმ აზრით, რომ, თუ $X_1=\varphi(t)$ *და* $X_2=\psi(t)$ *ამოცანის ორი ამონახსნია, შესაბამისად,* $t_0\in I_1$ *და* $t_0\in I_2$ *განსაზღვრის არეებით, მაშინ* $\varphi(t)\equiv\psi(t)$ *, ნებისმიერი* t*-სათვის* $I_1\cap I_2$ *-ზე.*

თეორემა 1-ის ანალოგი სკალარული ნორმალური განტოლებისათვის დავამტკიცეთ კუმშვადი ასახვის პრინციპის გამოყენებით. ანალოგიური მსჯელობის გამოყენება შესაძლებელია ამ თეორემის დასამტკიცებლადაც.

საზოგადოდ, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა და საწყისი პირობები შესაძლებელია შეიცავდეს გარკვეული სახის *პარამეტრებს.* ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ *განტოლება (ამოცანა) დამოკიდებულია პარამეტრზე.* მნიშვნელოვანია იმის ცოდნა, რამდენად მგრძნობიარეა ამონახსნი ამ პარამეტრებისა და საწყისი პირობების ცვლილების მიმართ. თუ კოშის ამოცანა აღწერს რეალურ ფიზიკურ პროცესს, საწყისი პირობები და პარამეტრები, ჩვეულებრივ, ცნობილია მხოლოდ მიახლოებით. ისინი ემპირიულად ან ექსპერიმენტით მიღებული რიცხვებია, ამიტომ ქვემოთ მოყვანილი თეორემა გამოყოფს მთელ კლასს ამოცანებისა, რომლებიც უწყვეტად არიან დამოკიდებული პარამეტრებზე და საწყის პირობებზე. ამ კლასში ხვდება ე.წ. *კორექტული ამოცანები.*

განვიხილოთ $X=\varphi(t)$ (1), (2) კოშის ამოცანის ამონახსნი, როგორც t_0, X_0 საწყისი პირობების ფუნქცია. აღვნიშნოთ იგი $\varphi(t,t_0,X_0)$ და განვიხილოთ ამ ფუნქციის უწყვეტობის საკითხი თავისი ყველა არგუმენტის მიმართ.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა, რომელიც ცნობილია კოშის ამოცანის *საწყის პირობებზე უწყვეტად დამოკიდებულების* შესახებ.

თეორემა 2. *ვთქვათ,* $F(t,X)$ U*-ზე განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქციაა, რომელიც, თანაბრად თავისი არგუმენტების მიმართ, აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას. მაშინ არსებობს ისეთი* $\delta>0$*, რომ კოშის (1), (2) ამოცანის ამონახსნი* $\varphi(t,t_0,X_0)$ *არის თავისი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქცია, როდესაც* $|t-t_0|\le\delta$ *და* $(t_0,X_0)\in S_r$*, სადაც*

$$S_r=\{(t_0,X_0)\in U:|t_0-t|^2+|X_0-X|^2\le r^2\}$$

U *არეში შემავალი* r*-რადიუსიანი ბირთვია.*

ახლა შემოვიტანოთ მათემატიკური ფიზიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნება, ეს არის *კოშის ამოცანის კორექტულობის ცნება* დიფერენციალური განტოლებისათვის.

(1), (2) კოშის ამოცანას ეწოდება *კორექტული,* თუ არსებობს t_0-ის შემცველი ნამდვილ რიცხვთა I მონაკვეთი, სადაც არსებობს (1),(2) კოშის

ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც უწყვეტადაა დამოკიდებული საწყის t_0, X_0 მონაცემებზე იმ აზრით, რომ, როდესაც:

$$|\widetilde{F}(t,X)-F(t,X)|<\delta\,,\ |\widetilde{t}_0-t_0|<\delta\,, |\widetilde{X}_0-X_0|<\delta\,,$$

მაშინ $|\widetilde{\varphi}(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$, ნებისმიერი $t\in I$ -სათვის.

ამრიგად, თუ $F(t,X)$ აკმაყოფილებს თეორემა 2-ში მოყვანილ პირობას, მაშინ ნორმალურ განტოლებათა (1) სისტემისათვის კოშის ამოცანა კორექტულია, რაც იმას ნიშნავს, რომ საწყისი მონაცემების მცირე ცვლილების შემთხვევაში გატოლებათა სისტემის შესაბამისი ამონახსნები ერთმანეთთან საკმაოდ ახლოს არიან.

მათემატიკური ფიზიკისათვის, ძირითადად, საინტერესოა კორექტული ამოცანები, რადგან, როგორც ზემოთ გაკეთებული შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რეალური ფიზიკური პროცესები, *როგორც წესი*, კორექტულ ამოცანებზე დაიყვანებიან.

საწყის პირობებზე ამონახსნის უწყვეტად დამოკიდებულების ყველა დებულება ამ სახის განტოლებათა კლასისათვის, არის ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემების კერძო შემთხვევა.

7.3. მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

ახლა გადავიდეთ შედარებით მარტივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესწავლაზე.

$$X^{/}(t)=AX(t) \tag{1}$$

სახის განტოლებათა სისტემას, სადაც A მუდმივი მატრიც-ფუნქციაა, *წრფივი, ერთგვაროვანი, მუდმივკოეფიციენტებიანი, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა* ეწოდება.

(1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნის სახე დამოკიდებულია A მატრიცის *სპექტრალურ* მახასიათებლებზე. ამ მახასიათებლებიდან მნიშვნელოვანია *საკუთრივი მნიშვნელობები*, რომლებიც ემთხვევიან

$$\det(A-\lambda\mathbf{I})=0 \tag{2}$$

მახასიათებელი განტოლების ფესვებს, სადაც $\mathbf{I}$ ერთეულოვანი მატრიცაა.

(2) განტოლების მარცხენა მხარე არის n ხარისხის (იგი A მატრიცის რიგის ტოლია) მრავალწევრი. მართლაც,

$$\det(A-\lambda\mathbf{I}) = det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots. & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

სადაც $a_1,\ldots,a_n$ რიცხვები გამოისახებიან A მატრიცის ელემენტების საშუალებით. აღვნიშნოთ $P(\lambda)$-თი ეს მრავალწევრი. იგი განმარტებით A მატრიცის *მახასიათებელი მრავალწევრია*.

დავუშვათ, λ ისეთი არანულოვანი რიცხვია, რომ

$$Ah = \lambda h \tag{3}$$

განტოლებათა სისტემას h ვექტორის მიმართ აქვს არანულოვანი ამონახსნი. ასეთ λ-ს ეწოდება A მატრიცის *საკუთრივი მნიშვნელობა*, ხოლო იმ არანულოვან ვექტორებს, რომელთათვისაც სრულდება (3), ეწოდება λ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი *საკუთრივი ვექტორი*. როგორც აღვნიშნეთ, A მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები ემთხვევა მის მახასიათებელ ფესვებს.

თეორემა 1. *დავუშვათ, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ არიან A მატრიცის ერთმანეთისაგან განსხვავებული საკუთრივი მნიშვნელობები, ხოლო $h_1,h_2,\ldots,h_n$ კი $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$-ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები, მაშინ*

$$h_1e^{\lambda_1 t},\ h_2e^{\lambda_2 t},\ldots,\ h_ne^{\lambda_n t} \tag{4}$$

ვექტორ-ფუნქციები ქმნიან (1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას. ამასთან, (1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი არის (4) ვექტორ-ფუნქციების წრფივი კომბინაცია.

ამრიგად, განსხვავებული საკუთრივი მნიშვნელობების შემთხვევაში, ავაგეთ ამონახსნთა ფუნდამენტური (4) სისტემა. ამ ამოცანის გადაჭრაში გვეხმარება თეორემა, რომლის თანახმად, განსხვავებულ საკუთრივ მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები ქმნიან ბაზის n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში, ანუ ისინი წრფივად დამოუკიდებლები არიან. თუ საკუთრივი მნიშვნელობებიდან რომელიმე ორი მათგანი ერთმანეთის ტოლია, ანუ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები, მაშინ ისევე, როგორც

სკალარული განტოლების შემთხვევაში, (1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ასაგებად სხვა მეთოდია გამოსაყენებელი. ამ მიზნის მისაღწევად საჭიროა შემოვიტანოთ მატრიცის მიკავშირებული ვექტორის ცნება.

დავუშვათ, λ_0 არის A მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობა, ხოლო $h_1, h_2, \ldots, h_k$ ვექტორები ისეთებია, რომ სრულდება ტოლობები:

$$
\begin{aligned}
&Ah_1 = \lambda_0 h_1,\ \ h_1 \neq 0,\\
&Ah_2 = \lambda_0 h_2 + h_1,\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\\
&Ah_k = \lambda_0 h_k + h_{k-1},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

მაშინ h_1 ვექტორი A მატრიცის საკუთრივი ვექტორია, ხოლო $h_2, h_3, \ldots, h_k$ ვექტორებს ეწოდებათ h_1-თან *მიკავშირებული* ვექტორები. ვექტორთა $h_1, h_3, \ldots, h_k$ სისტემას ეწოდება λ_0 საკუთრივი მნიშვნელობის *ჟორდანის ჯაჭვი*, k-ს კი – *ჟორდანის ჯაჭვის სიგრძე*. თუ λ_0 მარტივი საკუთრივი მნიშვნელობაა, ხოლო h_1 მისი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორია, მაშინ h_1-თან მიკავშირებული ვექტორები არ არსებობენ. იმ შემთხვევაში კი, როდესაც λ_0 ჯერადი საკუთრივი მნიშვნელობაა, მაშინ მისთვის შესაძლებელია არსებობდეს ჟორდანის რამდენიმე ჯაჭვი, რომლებიც წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას შეიცავენ. ახლა უკვე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ თეორემა, რომელიც ჯერადი საკუთრივი ფესვების შემთხვევაშიც კი n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში მიუთითებს n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების არსებობაზე. ეს თეორემა ცნობილია ჟორდანის თეორემის სახელწოდებით.

თეორემა 2. *ნებისმიერი n რიგის მატრიცა აჩენს n წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორს n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში, რომელიც მიიღება ამ მატრიცის ყველა საკუთრივი მნიშვნელობების ჟორდანის ჯაჭვებისაგან.*

ახლა უკვე შეგვიძლია დავწეროთ (1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნის ფორმულა. ქვემოთ მოყვანილი თეორემა ამოწურავს (1) სახის სისტემის ყველა შესაძლო ვარიანტებს და იძლევა სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების სრულ დახასიათებას.

თეორემა 3. *დავუშვათ,* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ A *მატრიცის წყვილ-წყვილად განსხვავებული საკუთრივი მნიშვნელობებია, რომელთა ჯერადობებია* $k_1, k_2, ..., k_l$, $k_1 + k_2 + ... + k_l = n$, *ხოლო*

$$h_1^1, h_1^2, ..., h_1^{k_1},$$

$$h_2^1, h_2^2, ..., h_2^{k_2},$$

$$... \; ... \; ...$$

$$h_l^1, h_l^2, ..., h_l^{k_l}$$

მიკავშირებულ ვექტორთა სისტემაა. მაშინ:

$$h_1^1 e^{\lambda_1 t}, (h_1^1 t + h_1^2) e^{\lambda_1 t}, ..., (h_1^1 \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} + h_1^2 \frac{t^{k_1-2}}{(k_1-2)!} + ... + h_1^{k_1}) e^{\lambda_1 t},$$

$$h_2^1 e^{\lambda_2 t}, (h_2^1 t + h_2^2) e^{\lambda_2 t}, ..., (h_2^1 \frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!} + h_2^2 \frac{t^{k_2-2}}{(k_2-2)!} + ... + h_2^{k_2}) e^{\lambda_2 t},$$

$$... \; ... \; ...$$

$$h_l^1 e^{\lambda_l t}, (h_l^1 t + h_l^2) e^{\lambda_l t}, ..., (h_l^1 \frac{t^{k_l-1}}{(k_l-1)!} + h_l^2 \frac{t^{k_l-2}}{(k_l-2)!} + ... + h_l^{k_2}) e^{\lambda_l t}$$

ვექტორული ფუნქციები ქმნიან (1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემას, ხოლო (1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი ამ ვექტორების წრფივი კომბინაციაა.

აღვნიშნოთ $\Phi(t)$-თი მატრიცული ფუნქცია, რომლის სვეტებია (1) განტოლებათა სისტემის $X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ვექტორ-ფუნქციები:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & ... & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & ... & x_2^n(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & ... & x_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

ასეთნაირად შედგენილ მატრიცულ ფუნქციას ეწოდება (1) სისტემის *ფუნდამენტური მატრიცა* (მის დეტერმინანტს, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ,

ეწოდება *ვრონსკის დეტერმინანტი*). მაგალითად, მატრიცის $x_i^j(t)$ ელემენტი არის $X_j(t)$ ვექტორ-ფუნქციის i-ური საკოორდინატო ფუნქცია. ადვილი შე-სამოწმებელია (გთხოვთ, გაიაზროთ დამოუკიდებლად), რომ $\Phi(t)$ აკმაყოფი-ლებს შემდეგ *მატრიცულ დიფერენციალურ* განტოლებას:

$$\Phi^{/}(t) = A\Phi(t),$$

სადაც $\Phi^{/}(t)$ მატრიც-ფუნქცია მიიღება $\Phi(t)$-ს შესაბამისი ელემენტების გა-წარმოებით. ასევე მარტივად მოწმდება, რომ ერთგვაროვანი (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი $\Phi(t)$ ფუნდამენტური მატრიცის ნებისმიერ C ვექტორ-ზე გამრავლებით მიიღება:

$$X(t) = \Phi(t)C\,.$$

აქვე, დამტკიცების გარეშე მივუთითებთ, რომ (1) განტოლებათა სისტე-მის ზოგადი ამონახსნი მოიცემა

$$X(t) = e^{At}C$$

მატრიცული ექსპონენტის საშუალებით, სადაც e^{At} განიმარტება, როგორც

$$A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \ldots$$

კრებადი მწკრივის ჯამი. $E(t) = e^{At}$-ს ეწოდება *ევოლუციის ოპერატორი* (ეს სახელწოდება ეთანადება მის ფიზიკურ შინაარსს. კერძოდ, ევოლუციის ოპერატორით მიიღება სისტემის ნებისმიერი სხვა მდგომარეობა, თუ ერთი მდგომარეობა ცნობილია).

თუ $X(t)$ არის

$$X'(t) = AX(t),\ X(t_0) = X_0$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი, მაშინ $X(t) = e^{At}X_0$.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

სისტემის ევოლუციის ოპერატორი და ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა. ევოლუციის ოპერატორია $E(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$ მატრი-ცული ფუნქცია, სადაც $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. სისტემის ზოგადი ამონახსნი იქნე-

და $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ ვექტორული ფუნქცია, სადაც $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია.

მატრიცული ექსპონენტის საშუალებით

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

დიფერენციალურ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}C + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)ds \ ,$$

სადაც $B(t)$ მოცემული ვექტორ-ფუნქციაა.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) - 2z(t), \\ z'(t) = y(t) + z(t). \end{cases}$$

ამოხსნა: მოყვანილ ამოცანაში უცნობი ვექტორ-ფუნქციაა $((x(t), y(t), z(t))$. გადავწეროთ იგი მატრიცული სახით:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

ვიპოვოთ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები. ამისათვის საჭიროა დავწეროთ მახასიათებელი მრავალწევრი:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2 \ ,$$

ხოლო შემდეგ კი

$$(1+\lambda)(1-\lambda)^2=0$$

მახასიათებელი განტოლებიდან ვიპოვოთ მახასიათებელი ფესვები (რომლებიც A მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები იქნებიან):

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$$

ახლა საჭიროა ამ საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი რომელიმე საკუთრივი ვექტორები ვიპოვოთ. λ_1 მარტივი ფესვია, ამიტომ მიკავშირებული ვექტორი მისთვის არ არსებობს, ხოლო საკუთრივი ვექტორია, მაგალითად,

$$h_1=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

ეს ვექტორი (5) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მიიღება, თუ მასში ჩვენი ამოცანის მანაცემებს ჩავსვამთ.

λ_2 ორჯერადი ფესვია, ამიტომ მისი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის მიკავშირებული ვექტორების პოვნაც მოგვიწევს. საკუთრივი ვექტორია, მაგალითად,

$$h_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},$$

რომლის მიკავშირებული ვექტორია

$$h_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

იგი მიიღება $Ah_3=\lambda_2 h_3+h_2$ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით. h_1,h_2,h_3 ვექტორები ქმნიან სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ბაზისს, ამიტომ, თეორემა 3-ის ძალით, მოცემული განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+C_3e^{t}\left[t\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right], \qquad (6)$$

სადაც C_1,C_2,C_3 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 3. მაგალით 2-ში განხილული სისტემისათვის ამოვხსნათ კოშის შემდეგი ამოცანა: $x(0)=0, y(0)=-1, z(0)=1$.

ამოხსნა: საჭიროა C_1, C_2, C_3 უცნობების მიმართ ამოიხსნას წრფივ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

რომელიც მიიღება (6) ზოგად ამონახსნში $x(0)=0, y(0)=-1, z(0)=1$ საწყისი პირობების ჩასმით. (7)-დან ვპოულობთ: $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$. ჩავსვათ C_1, C_2, C_3-ის ეს მნიშვნელობები (6)-ში და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ t-1 \end{pmatrix},$$

ანუ $x(t) = 2te^t$, $y(t) = -e^t$, $z(t) = e^t(t-1)$.

7.4. ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის გამოყენებები

დიფერენციალური განტოლების აღდგენა ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემით. განვიხილოთ ერთგვაროვანი წრფივი n-ური რიგის დიფერენციალური განტოლება ცვლადი კოეფიციენტებით:

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_n(t)x = 0 \tag{1}$$

და დავუშვათ, $x_1(t)$,..., $x_n(t)$ (1) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია.

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & . & . & . & . & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & . & . & . & . & x_n'(t) \\ - & - & - & - & - & - & - \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & . & . & & & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

დეტერმინანტს, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ეწოდება *ვრონსკის დეტერმინანტი.* მტკიცდება, რომ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$W'(t) = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}W(t) ,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds}$$

(*ლიუვილ-ოსტროგრადსკის* ფორმულა).

ვრონსკის დეტერმინანტთან დაკავშირებულია ნორმალური

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_n(t)x = 0 \qquad (2)$$

დიფერენციალური განტოლების აღდგენა მისი ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის საშუალებით. კერძოდ, თუ $x_1(t) ,..., x_n(t)$ არის (2) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა, მაშინ საძებნი დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$\frac{(-1)^n}{W(t)}\begin{vmatrix} x & . & . & x^{(n-1)} & x^{(n)} \\ x_1 & . & . & x_1^{(n-1)} & x_1^{(n)} \\ - & - & - & - & - \\ x_n & . & . & x_n^{(n-1)} & x_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 .$$

n **-ური რიგის სკალარული განტოლების კავშირი განტოლებათა სისტემასთან.** (2) განტოლებიდან დიფერენციალურ განტოლებათა

$$Y^{/}(t) = A(t)Y(t)$$

სახის სისტემაზე გადასვლა ხდება შემდეგნაირად. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$y_1 = x , \ \ y_2 = x' ,..., \ \ y_n = x^{(n-1)} .$$

მაშინ $y_1(t) , y_2(t) ,..., y_n(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$y_1'(t) = y_2 ,$$
$$y_2'(t) = y_3 ,$$
$$. \ . \ .$$
$$y_{n-1}'(t) = y_n ,$$
$$y_n' = -a_n(t)y_1 - a_{n-1}(t)y_2 - ... - a_1(t)y_n .$$

შემოვიტანოთ მატრიცა:

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & . & . & -a_1(t) \end{pmatrix},$$

მაშინ $Y(t)=(y_1(t),...,y_n(t))$ ვექტორ-ფუნქცია აკმაყოფილებს $Y'(t)=A(t)Y(t)$ მატრიცულად ჩაწერილ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. აქედან ნათელია, რომ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა უფრო ზოგადი ობიექტია, ვიდრე სკალარული განტოლება, რადგან გადასვლა განტოლებიდან სისტემაზე მხოლოდ სპეციალური სახის $A(t)$ მატრიცისათვის არის შესაძლებელი. ამის გამო §6.2-ში მოყვანილი თეორემა 1 და თეორემა 2 ვრცელდება წინა პარაგრაფებში განხილულ განტოლებებზეც.

კოშის ფუნქცია. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, თუ $x_1(t),\dots,x_n(t)$ არიან $a_0(t)x^{(n)}+\cdots+a_n(t)x=0$ ერთგვაროვანი ცვლადკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები და $C_j'(t), j=1,\dots,n$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t)+C_2'(t)x_2(t)+...+C_n'(t)x_n(t)=0 \\ C_1'(t)x_1'(t)+C_2'(t)x_2'(t)+...+C_n'(t)x_n'(t)=0 \\ ------------------------ \\ C_1'(t)x_1^{(n-2)}(t)+C_2'(t)x_2^{(n-2)}(t)+...+C_n'(t)x_n^{(n-2)}(t)=0 \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+C_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+...+C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=\dfrac{f(t)}{a_0(t)} \end{cases}$$

წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას, მაშინ:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i(t)x_i(t) \tag{3}$$

არის

$$a_0(t)x^{(n)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \tag{4}$$

არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი.

ზემოთ მოყვანილ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად კრამერის ფორმულით ვისარგებლოთ, მაშინ:

$$C_i' = \frac{(-1)^{i+n} f(t)}{a_0(t)W(t)} \det \begin{pmatrix} x_1(t) & . & . & x_{i-1}(t) & x_{i+1}(t) & . & . & x_n(t) \\ x_1'(t) & . & . & x_{i-1}'(t) & x_{i+1}'(t) & . & . & x_n'(t) \\ ----- & ----- & ----- & ----- & ----- & ----- & ----- & ----- \\ x_1^{(n-2)}(t) & . & . & x_{i-1}^{(n-2)}(t) & x_{i+1}^{(n-2)}(t) & . & . & x_n^{(n-2)}(t) \end{pmatrix}.$$

ვაინტეგროთ ეს უკანასკნელი $\forall i$-თვის t_0-დან t-მდე და ჩავსვათ (3)-ში $C_i(t)$-ს მნიშვნელობები (რადგან ერთი ამონახსნი გვაინტერესებს, ამიტომ დავუშვათ $C_i(t_0) = 0$):

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i(t) =$$

$$= x_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{(-1)^{n+1} f(s)}{a_0(s)W(s)} \det \begin{pmatrix} x_2(s) & . & . & . & x_n(s) \\ x_2'(s) & . & . & . & x_n'(s) \\ ----- & ----- & ----- & ----- & ----- \\ x_2^{(n-2)}(s) & . & . & & x_n^{(n-2)}(s) \end{pmatrix} ds +$$

$$+ x_2(t) \int_{t_0}^{t} \frac{(-1)^{n+2} f(s)}{a_0(s)W(s)} \det \begin{pmatrix} x_1(s) & x_3(s) & . & . & . & . & x_n(s) \\ x_1'(s) & x_3'(s) & . & . & . & . & x_n'(s) \\ ----- & ----- & ----- & ----- & ----- & ----- & ----- \\ x_1^{(n-2)}(s) & x_3^{(n-2)}(s) & . & . & & & x_n^{(n-2)}(s) \end{pmatrix} ds + \ldots +$$

$$+ x_n(t) \int_{t_0}^{t} \frac{(-1)^{n+n} f(s)}{a_0(s)W(s)} \det \begin{pmatrix} x_1(s) & . & . & . & x_{n-1}(s) \\ x_1'(s) & . & . & . & x_{n-1}'(s) \\ ----- & ----- & ----- & ----- & ----- \\ x_1^{(n-2)}(s) & . & . & & x_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{pmatrix} ds .$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$K(t,s)=\frac{1}{a_0(s)W(s)}\left((-1)^{n+1}x_1(t)\det\begin{pmatrix} x_2(s) & . & . & . & x_n(s) \\ x_2'(s) & . & . & . & x_n'(s) \\ - & - & - & - & - \\ x_2^{(n-2)}(s) & & . & . & x_n^{(n-2)}(s) \end{pmatrix}+\right.$$

$$+(-1)^{n+2}x_2(t)\det\begin{pmatrix} x_1(s) & x_3(s) & . & . & . & . & x_n(s) \\ x_1'(s) & x_3'(s) & . & . & . & . & x_n'(s) \\ - & - & - & - & - & - & - \\ x_1^{(n-2)}(s) & x_3^{(n-2)}(s) & & . & . & & x_n^{(n-2)}(s) \end{pmatrix}+\ldots+$$

$$\left.+(-1)^{n+n}x_n(t)\det\begin{pmatrix} x_1(s) & . & . & . & x_{n-1}(s) \\ x_1'(s) & . & . & . & x_{n-1}'(s) \\ - & - & - & - & - \\ x_1^{(n-2)}(s) & & . & . & x_{n-1}^{(n-2)}(s) \end{pmatrix}\right).$$

ეს გამოსახულება არის

$$\det\begin{pmatrix} x_1(s) & . & . & . & . & x_n(s) \\ x_1'(s) & . & . & . & . & x_n'(s) \\ - & - & - & - & - & - \\ x_1^{(n-2)}(s) & & . & . & & x_n^{(n-2)}(s) \\ x_1(t) & . & . & . & . & x_n(t) \end{pmatrix}$$

დეტერმინანტის დაშლა უკანასკნელი სტრიქონის მიმართ, ამიტომ გვაქვს ტოლობა:

$$K(t,s)=\frac{1}{a_0(s)W(s)}\det\begin{pmatrix} x_1(s) & . & . & . & . & x_n(s) \\ x_1'(s) & . & . & . & . & x_n'(s) \\ - & - & - & - & - & - \\ x_1^{(n-2)}(s) & & . & . & & x_n^{(n-2)}(s) \\ x_1(t) & . & . & . & . & x_n(t) \end{pmatrix},$$

რომელსაც ეწოდება (4) არაერთგვაროვანი განტოლების *კოშის ფუნქცია.*

თეორემა 1.

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} K(t,s) f(s) ds$$

ფუნქცია არის (4) განტოლების ამონახსნი.

$$x(t_0)=x'(t_0)=...=x^{(n-1)}(t_0)=0$$

საწყისი პირობების შემთხვევაში.

7.5. მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

განვიხილოთ

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2}+a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+...+a_{1n}x_n(t)=0 \\ \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2}+a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+...+a_{2n}x_n(t)=0 \\ \qquad\qquad ... \\ \dfrac{d^2x_n(t)}{dt^2}+a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+...+a_{nn}x_n(t)=0 \end{cases} \tag{1}$$

მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. ისევე როგორც წინა პარაგრაფებში, აქ უცნობია $x=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ ვექტორული ფუნქცია. გადავწეროთ (1) მატრიცული ფორმით:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+Ax(t)=0, \tag{2}$$

სადაც A (1) სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მუდმივი მატრიცაა. თუ დავუშვებთ, რომ (2) სკალარული განტოლებაა და $A\neq 0$, მაშინ (2)-ის ამონახსნი $x(0)=x_0$, $\left(\dfrac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0}=\dot{x}_0$ პირობებით არის

$$x(t)=\cos(\sqrt{A}t)x_0+(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t)\dot{x}_0 \tag{3}$$

ფუნქცია. უშუალო ჩასმით მოწმდება, რომ (3) არის (2) სისტემის ამონახსნი, თუ (3)-ში ვიგულისხმებთ, რომ A მატრიცაა და $\det A\neq 0$, ხოლო $\cos(\sqrt{A}t)$ და $(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t)$ გაიგება შემდეგნაირად:

$$\cos(\sqrt{A}t) = 1 - \frac{1}{2!}At^2 + \frac{1}{4!}A^2t^4 - \dots,$$

$$(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t) = t - \frac{1}{3!}At^3 + \frac{1}{5!}A^2t^5 - \dots. \qquad (4)$$

რადგან (4) გამოსახულებების მარჯვენა მხარეებს აზრი აქვთ მაშინაც კი, როდესაც $\det A = 0$, ამიტომ (3) გამოსახულებით მიღებული ვექტორული ფუნქცია არის (2) და, ამრიგად, (1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი. აქ გათვალისწინებულია ისიც, რომ x_0 და $\dot{x}_0$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + Ax(t) = b(t)$ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნი $x(0) = x_0$, $\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0} = \dot{x}_0$ პირობებით არის

$$x(t) = \cos(\sqrt{A}t)x_0 + (\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t)\dot{x}_0 + (\sqrt{A})^{-1}\int_0^t \sin\left(\sqrt{A}(t-\tau)\right)b(\tau)d\tau$$

ვექტორ-ფუნქცია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ამოხსენით განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემები:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}$ პასუხი: $x(t) = 5c_1e^{-8t} + c_2e^{4t}$,

$y(t) = 7c_1e^{-8t} - c_2e^{4t}$.

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases}$, საწყისი პირობით: $x(0) = 3, y(0) = 0$.

პასუხი: $x(t) = 4e^{-t} - e^{2t}$, $y(t) = e^{-t} - e^{2t}$.

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$ პასუხი: $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + c_3e^{6t}$,

$y(t) = c_2e^{3t} - 2c_3e^{6t}, z(t) = -c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + c_3e^{6t}$.

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z, \end{cases}$ საწყისი პირობით: $x(0) = 3, y(0) = 0,$

$z(0) = 0.$

პასუხი: სისტემის მახასიათებელი ფესვებია: $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = \pm 4i.$

$x(t) = -4e^{-2t} - 2sin2t,\ y(t) = e^{-2t} - cos4t,\ z(t) = e^{-2t} - 2sin4t.$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \end{cases}$ პასუხი: $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t} + c_2 e^{4t},$

$y(t) = (c_1 + c_2 + c_2 t)e^{3t}.$

2. ამოხსენით $X^{/}(t) = AX(t)$ განტოლებათა სისტემა, თუ $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ უცნობი ვექტორული ფუნქციაა, ხოლო $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. დაწერეთ მოყვანილი სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა.

3. გამოვთვალოთ e^{At}, სადაც A არის შემდეგი 2×2-მატრიცა

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, პასუხი: $\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, პასუხი: $\begin{pmatrix} e^{t} & 2e^{t}(e^{t} - 1) \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, პასუხი: $\frac{e^{6t}}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{7}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, პასუხი: $\frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}cos\beta t & sin\beta t \\ -2sin\beta t & \sqrt{2}cos\beta t \end{pmatrix}, \beta = 2\sqrt{2}.$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, პასუხი: $e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 - t & t \\ -t & 1 + t \end{pmatrix}$.

4. ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის თვისებების გამოყენებით ამოხსენით შემდეგი ამოცანები:

1) შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლება, რომლისთვისაც $y(x) = e^{x}$ და $y(x) = e^{-x}$ ფუნქციები ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას ქმნიან. პასუხი: $y''(x) - y(x) = 0.$

2) შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლება, რომლისთვისაც $y(x) = e^{x^2}$ და $y(x) = e^{-x^2}$ ფუნქციები ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემას ქმნიან. პასუხი: $xy''(x) - y'(x) - 4x^3 y(x) = 0.$

8. ᲓᲘᲤᲔᲠᲔᲜᲪᲘᲐᲚᲣᲠ ᲒᲐᲜᲢᲝᲚᲔᲑᲐᲗᲐ ᲐᲕᲢᲝᲜᲝᲛᲘᲣᲠᲘ ᲡᲘᲡᲢᲔᲛᲐ

8.1. ავტონომიური სისტემა

n-ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა ნორმალური ავტონომიური სისტემა ეწოდება

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

სახის სისტემას, სადაც $f(x)$ მოცემული ნამდვილი ვექტორ-ფუნქციაა $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ კოორდინატებით, რომლებიც მნიშვნელობას ღებულობენ n-განზომილებიანი ვექტორული სივრცის რაიმე ქვესივრცეში. $t-$ დამოუკიდებელი ცვლადია, რომელსაც, მიღებულია, ეწოდოს დრო და $t \in \mathbf{R}^1$, ხოლო $x(t) = (x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))$ უცნობი ნამდვილი ვექტორული ფუნქციაა $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. $\dot{x}$ აქ და შემდგომ აღნიშნავს x-ს წარმოებულს t-თი. (1) განტოლების მარჯვენა მხარეს, ე.ი. f ვექტორ-ფუნქციას, ეწოდება (1) სისტემის *ვექტორული ველი.* შემდგომ ყოველთვის ჩავთვლით, რომ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას. ეს პირობა საკმარისია იმისათვის, რომ (1) სისტემას:

$$x(t_0) = x_0\,, \quad x_0 \in \Omega \tag{2}$$

საწყისი პირობის შემთხვევაში ჰქონდეს ერთადერთი გაუგრძელებადი ამონახსნი, რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ მისთვის სამართლიანია *ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის* თეორემა.

(1) ავტონომიურ სისტემას *დინამიკურ* ან *კონსერვატიულ* სისტემასაც უწოდებენ. ავტონომიური სისტემებით აღიწერება მრავალი რეალური ფიზიკური სისტემის მოდელი კლასიკურ მექანიკაში, რხევების თეორიაში, ეკონომიკაში თუ ცოცხალი სისტემების დინამიკაში. დიფერენციალურ განტოლებათა ნებისმიერი ნორმალური სისტემა:

$$\dot{x}(t) = f(x,t) \tag{3}$$

ყოველთვის შესაძლებელია გადავწეროთ როგორც ავტონომიური სისტემა უცნობი ფუნქციების რაოდენობის ერთი ერთეულით გაზრდის საშუალებით. მართლაც, თუ ჩავთვლით, რომ $t = x_{n+1}$, მივიღებთ ავტონომიურ სისტემას $n+1$ დამოუკიდებელი ფუნქციისათვის:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, x_{n+1}), \\ \quad \dot{x}_{n+1} = 1. \end{cases}$$

ამრიგად, ავტონომიური სისტემები განსხვავდებიან (3) სახის ნებისმიერი სისტემისაგან იმით, რომ (1)-ის მარჯვენა მხარე არ შეიცავს t ცვლადს.

(1) სისტემაში შემავალ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებს ეწოდებათ *ფაზური ცვლადები*, ხოლო Ω არეს ეწოდება (1) ავტონომიური სისტემის *ფაზური სივრცე*. თუ $x = \varphi(t)$ არის (1) სისტემის ამონახსნი $I \subset \mathbf{R}^1$ რიცხვით მონაკვეთზე, მაშინ იგი მოგვცემს პარამეტრულად განსაზღვრულ წირს Ω-ში, რომელსაც (1) ავტონომიური სისტემის *ფაზური ტრაექტორია* ეწოდება. მაშასადამე, ფაზური ტრაექტორია, ყოველი $t \in I$ -სათვის, არის $\{\varphi(t)\} \in \Omega$ სიმრავლე.

(1) ავტონომიური სისტემის *ინტეგრალური წირი* ეწოდება $x = \varphi(t)$ ფუნქციის გრაფიკს, იგი მდებარეობს:

$$G = \{(x,t) \mid x \in \Omega, t \in \mathbf{R}^1\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

უსასრულო ცილინდრში. აქედან, ფაზური ტრაექტორია იქნება ინტეგრალური წირის პროექცია t-ღერძის პარალელურად R^n-ში. ტრაექტორიაზე ისრით, ჩვეულებრივ, მონიშნავენ ხოლმე მის მიმართულებას, ორიენტაციას, ე.ი. მოძრაობის მიმართულებას t-ს ზრდის შესაბამისად. მაგალითად, როდესაც $n = 1$, $\dot{x} = x$ განტოლების, $x(0) = x_0 > 0$ საწყისი პირობით, ინტეგრალური წირი იქნება $x(t) = x_0 e^t$, $t \in \mathbf{R}^1$, ფუნქციის გრაფიკი (t, x) სიბრტყეზე, ხოლო ფაზური ტრაექტორია კი იქნება $x > 0$ ნახევარღერძი, ანუ ამონახსნი გაგრძელებადია მთელ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. კოშის (1), (2) ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ $x_0 \in \Omega$ წერტილზე გადის t_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული ერთადერთი ტრაექტორია, გარკვეულ პირობებში ეს ტრაექტორია განსაზღვრულია ნებისმიერი $t \in R^1$ -სათვის.

თეორემა 1. *იმისათვის, რომ (1) ავტონომიური სისტემის $x = \varphi(t)$, $t \in I$ ამონახსნი გაგრძელებადი იყოს მთელ $\mathbf{R}^1$-ზე, საკმარისია, ამ სისტემის ტრაექტორია მდებარეობდეს რაიმე $K \subset \Omega$ კომპაქტში.*

ეს თეორემა ავტონომიური სისტემის სახის საშუალებით ამონახსნის გაგრძელების შესაძლებლობაზე ინფორმაციას ვერ იძლევა. თუმცა, აქვე

შევნიშნავთ, რომ, თუ $f(x)$ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას Ω-ზე, მაშინ (1) ავტონომიური სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი გაგრძელებადია მთელ $\mathbf{R}^1$-ზე.

მოვიყვანოთ (1) ავტონომიური სისტემის ტრაექტორიის ელემენტარული თვისებები.

თვისება 1. *თუ $x=\varphi(t)$ (1) სისტემის ამონახსნია, როდესაც $t\in(\alpha,\beta)$ და c რაიმე ნამდვილი რიცხვია, მაშინ $x=\varphi(t+c)$ აგრეთვე იქნება (1) სისტემის ამონახსნი, როდესაც $t\in(\alpha-c,\beta-c)$.*

ამონახსნის ეს თვისება მიანიშნებს იმაზე, რომ (1)-ის ტრაექტორიის ძვრა, აგრეთვე, არის (1) ავტონომიური სისტემის ტრაექტორია.

თვისება 2. *თუ ორი ფაზური ტრაექტორია $x=\varphi(t)\,, t\in I_1$ და $x=\psi(t)$, $t\in I_2$ რომელიმე წერტილში გადაიკვეთა, ე.ი. $x_0=\varphi(t_1)=\psi(t_2)$, მაშინ $\psi(t)\equiv\varphi(t+t_1-t_2)$ ყოველი t-სათვის, რომელთათვისაც განსაზღვრულია იგივეობის ორივე მხარე.*

ეს თვისება კი მიუთითებს, რომ ავტონომიური სისტემის ტრაექტორიები ან არ იკვეთებიან, ან, თუ იკვეთებიან, ერთმანეთს ემთხვევიან. შევნიშნოთ, რომ არაავტონომიური სისტემებისათვის ეს თვისება ზოგჯერ ირღვევა.

(1) ავტონომიური სისტემის მუდმივ $x=\varphi(t)\equiv x_0\in\Omega\,,\ \forall t\in R^1$ ამონახსნს ეწოდება ავტონომიური სისტემის *წონასწორობის* ან *უძრავი* წერტილი.

ყოველ $x_0\in\Omega$ წერტილს, რომელიც სისტემის წონასწორობის წერტილი არ არის, ეწოდება *ჩვეულებრივი* წერტილი.

$f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ ჩვეულებრივ წერტილს აქვს მიდამო, რომელიც კვლავ ჩვეულებრივი წერტილებისაგან შედგება, მაშინ, როდესაც წონასწორობის წერტილი შეიძლება იყოს როგორც იზოლირებული, ისე არაიზოლირებული. თუ $x=\varphi(t)$, $t\in I$, განვიხილავთ როგორც ფაზური წერტილის მოძრაობას ფაზურ ტრაექტორიაზე, მაშინ წერტილის მოძრაობის სიჩქარე დროის t_0 მომენტში, თუ $\varphi(t_0)=x_0$, ემთხვევა $f(x_0)$ ვექტორს. ამ $f(x_0)$ ვექტორს ეწოდება (1) ავტონომიური სისტემის *ფაზური სიჩქარე*, ხოლო $f(x)$ ვექტორულ ველს ეწოდება (1) ავტონომიური სისტემის *ფაზურ სიჩქარეთა ველი.*

თეორემა 2. *$x_0 \in \Omega$ წერტილი არის (1) ავტონომიური სისტემის წონასწორობის წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ფაზური სიჩქარე 0-ის ტოლია, ე.ი. როდესაც $f(x_0) = 0$.*

თუ (1) სისტემის $x = \varphi(t)$ ამონახსნი განსაზღვრულია მთელ ნამდვილ R^1 ღერძზე და პერიოდული ვექტორ-ფუნქციაა პერიოდით $T > 0$, მაშინ მის შესაბამის ტრაექტორიას ეწოდება *ჩაკეტილი* ანუ *ციკლი.*

მოვიყვანოთ ავტონომიური სისტემის ტრაექტორიების კლასიფიკაციის თეორემა.

თეორემა 3. *(1) ავტონომიური სისტემის ყოველი ფაზური ტრაექტორია არის ერთ-ერთი შემდეგი სამიდან:*

1) წონასწორობის წერტილი;

2) ჩაკეტილი ტრაექტორია;

3) წირი თვითგადაკვეთის გარეშე.

როდესაც $n = 2$, შესაძლებელია ციკლის არარსებობის საკმარისი პირობის მოყვანა. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. *თუ (1) სისტემა მოცემულია $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ბრტყელ არეზე და Ω -ზე ფაზური სიჩქარეების $f(x)$ ველი არის პოტენციალური, მაშინ Ω -ში (1) სისტემას არ აქვს ჩაკეტილი ტრაექტორია.*

მაგალითად, $\mathbf{R}^2$ -ზე მოცემული $\dot{x} = Ax$ წრფივი სისტემისათვის $f(x) = Ax$ ვექტორული ველი არის პოტენციალური, თუ A მატრიცი სიმეტრიულია. ამრიგად, წრფივ სისტემას სიმეტრიული A მატრიცით არ აქვს ჩაკეტილი ტრაექტორია.

თუ ავტონომიური სისტემის ყოფაქცევას შევისწავლით მხოლოდ ლოკალურად, მაშინ ვნახავთ, რომ თვისობრივად ჩვეულებრივი წერტილის მიდამოში ფაზური ტრაექტორიები ერთნაირია. ამის გამო, საინტერესოა მხოლოდ წონასწორობის წერტილის მიდამო.

(1) ავტონომიური სისტემის ფაზური ტრაექტორიის გრაფიკულ (გეომეტრიულ) გამოსახულებას Ω არეში ეწოდება *ფაზური პორტრეტი.*

დავუშვათ, $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ არის (1),(2) კოშის ამოცანის ამონახსნი, რომელიც არ გრძელდება მთელ ნამდვილ $\mathbf{R}^1$ ღერძზე. დავუშვათ, საწყისი x_0 მდგომარეობები, როდესაც $t = t_0$, ავსებენ ზომად $V_0 \subset \Omega$ სიმრავლეს,

რომლის ზომაა μV_0. აღვნიშნოთ V_t-თი ზომადი $V_t \subset \Omega$ არე ზომით μV_t, რომელიც მიიღება დროის t მომენტისათვის V_0-ის ძვრით (1) სისტემის $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ ამონახსნის ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ, ე.ი. $V_t = \{\varphi(t, t_0, x_0) | x_0 \in V_0\}$. V_0 და V_t სიმრავლეებს *ფაზურ მოცულობებს* უწოდებენ.

განმარტება: კოშის ამოცანას ეწოდება დასაშვები, თუ $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ არის დიფეომორფიზმი (ურთიერთცალსახა დიფერენცირებადი ასახვა თავის შექცეულთან ერთად) V_0 და V_t არეებს შორის.

თეორემა 5 (ჯ.ლიუვილი). *თუ კოშის (1), (2) ამოცანა დასაშვებია და* Ω *არეში*

$$divf(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$$

ტოლობა სრულდება, მაშინ (1)-ის ტრაექტორიების გასწვრივ ფაზური „მოცულობები“ არ იცვლება. ე.ი. $\mu V_0 = \mu V_t$, *ნებისმიერი* t *-სათვის.*

$divf(x) = 0$ ტოლობა ლიუვილის ზემოთ მოყვანილ თეორემაში მიუთითებს იმაზე, რომ $f(x)$ ვექტორული ველი Ω არეზე არის *სოლენოიდალური.* თუ $f(x) = Ax$, სადაც A მუდმივი მატრიცაა, მაშინ $divf(x)$ A მატრიცის კვალის ტოლია. ჰამილტონური:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial H(x,p)}{\partial x_i}, \ i = 1, \dots, n$$

განტოლებათა სისტემისათვის R^{2n} ფაზურ სივრცეში კოშის ამოცანა დასაშვებია და

$$ivf(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0.$$

მაშასადამე, *ჰამილტონურ განტოლებათა სისტემის ტრაექტორიების გასწვრივ ფაზური მოცულობა არ იცვლება.*

შევნიშნოთ, რომ (1) სისტემის ფაზური სივრცე, საზოგადოდ, არ ემთხვევა იმ Ω არეს, სადაც (1) სისტემაა განსაზღვრული.

8.2. პირველი ინტეგრალი

დავუშვათ, $\mathbf{R}^n$-ის რაიმე ქვესივრცეზე – Ω არეზე მოცემულია ავტონომიური სისტემა:

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

სადაც $t \in \mathbf{R}^1$ და $f(x)$ არის Ω-ზე განსაზღვრული ნამდვილი, უწყვეტად დიფერენცირებადი ვექტორული ფუნქცია კოორდინატებით $f_1(x),\ldots,f_n(x)$. ვთქვათ, $x = \varphi(t)$ არის (1) სისტემის ამონახსნი, როდესაც $t \in I \subset \mathbf{R}^1$.

განმარტება: Ω-ზე განსაზღვრულ $u(x)$ უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციას ეწოდება (1) ავტონომიური სისტემის პირველი ინტეგრალი, თუ $u(\varphi(t)) = const$ ყოველი $x = \varphi(t)$, $t \in I$ (1) სისტემის ამონახსნისათვის.

ამ განმარტებაში მოყვანილი მუდმივის პოვნა ძნელი არ არის. თუ $x = \varphi(t)$ ამონახსნი განისაზღვრება $(0, x_0)$ წერტილში საწყისი პირობით: $\varphi(0) = x_0 \in \Omega$, მაშინ ნათელია, რომ $u(\varphi(t)) \equiv u(\varphi(0)) = u(x_0)$. ამრიგად, $u(\varphi(t))$ დამოკიდებულია მხოლოდ სისტემის ტრაექტორიის არჩევაზე და არა t ცვლადზე.

პირველი ინტეგრალის ტრივიალური მაგალითია $u(x) = const$ მუდმივი ფუნქცია. იმისათვის, რომ პირველი ინტეგრალების არატრივიალური მაგალითები მოვიყვანოთ, საჭიროა პირველი ინტეგრალის აგების კრიტერიუმი. ქვემოთ, თეორემის სახით, სწორედ ასეთ კრიტერიუმს ჩამოვაყალიბებთ. მანამდე მოვიყვანოთ ერთი განმარტება.

განმარტება: *დავუშვათ,* $u(x)$ *არის* Ω *არეზე განსაზღვრული უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია.* $u(x)$ *ფუნქციის წარმოებული* $f(x)$ *ვექტორული ველის გასწვრივ ეწოდება* $(f(x), \operatorname{grad} u(x))$ *სკალარულ ნამრავლს და აღინიშნება* $\dot{u}(x)$ *სიმბოლოთი:*

$$\dot{u}(x) = (f(x), \operatorname{grad} u(x)) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

შევნიშნოთ, რომ $u(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f(x)$ ვექტორული ველის გასწვრივ არის l ($\| l \| = 1$) მუდმივი ვექტორის გასწვრივ $u(x)$

ფუნქციის წარმოებულის განზოგადება და ახასიათებს $u(x)$-ის ცვლილებას (მონოტონურობას) (1) სისტემის ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ.

თეორემა 1. Ω *არეზე განსაზღვრული უწყვეტად დიფერენცირებადი* $u(x)$ *ფუნქცია არის (1) სისტემის პირველი ინტეგრალი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც* $\dot{u}(x)=0$ *ყოველი* x *-სათვის* Ω *-დან.*

მაგალითი. ვიპოვოთ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3 \end{cases}$$

სისტემის პირველი ინტეგრალი.

ამოხსნა: სისტემაში შემავალი განტოლებები ჯვარედინად გადავამრავლოთ და მივიღებთ:

$$(-x_1 + x_1^3)\dot{x}_1 = x_2\dot{x}_2 .$$

აქედან

$$\frac{d}{dt}\left(x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2 \right) = 0$$

და

$$x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2 = c .$$

ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად, $u(x_1, x_2) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2$ არის მოცემული ავტონომიური სისტემის პირველი ინტეგრალი, რადგან $\dot{u}(x_1, x_2) = 0$.

პირველი ინტეგრალი დაკავშირებულია $u(x)$ ფუნქციის დონის ზედაპირთან. პირველი ინტეგრალის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ (1) სისტემის ყოველი $x=\varphi(t)$ ტრაექტორია Ω-ში მდებარეობს $u(x)$ პირველი ინტეგრალის ერთ-ერთი დონის ზედაპირზე. როდესაც $n=2$, მაშინ დონის ზედაპირის მაგივრად ლაპარაკობენ დონის წირზე (რადგან მიღებული ტოპოლოგიური სამრავლე 1-განზომილებიანია). ასეთი კავშირის ღირებულებაა შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის გამარტივება. შებრუნებული ამოცანა კი მდგომარეობს იმის გარკვევაში, დონის წირებიდან რომელია ავტონომი-

ური სისტემის ტრაექტორია. ცნობილია, რომ, თუ პირველი ინტეგრალის დონის წირი არის გლუვი და არ შეიცავს სისტემის წონასწორობის წერტილს, მაშინ ეს წირი არის ავტონომიური სისტემის ტრაექტორია ან ტრაექტორიის ნაწილი. ამრიგად, პირველი ინტეგრალის დონის წირის საშუალებით, ზოგიერთ შემთხვევაში, შესაძლებელია ავტონომიური სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტის მიღება.

თუ $u(x)$ არის (1) სისტემის არატრივიალური პირველი ინტეგრალი, ხოლო $\Phi(\varsigma)$ კი ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, რომლისთვისაც აზრი აქვს $\Phi(u(x))$ კომპოზიციას, მაშინ $v(x)=\Phi(u(x))$ აგრეთვე იქნება (1) ავტონომიური სისტემის პირველი ინტეგრალი, რადგან (1) სისტემის ნებისმიერი $x=\varphi(t)$ ტრაექტორიისათვის გვაქვს:

$$v(\varphi(t))=\Phi(u(\varphi(t)))=\Phi(c)=c_1\,,\quad \forall t\in I\,.$$

ამრიგად, საზოგადოდ, (1) სისტემას აქვს უსასრულო რაოდენობის პირველი ინტეგრალები. მაგრამ, შესაძლებელია ისეთი პირველი ინტეგრალების არჩევა, რომელთა საშუალებითაც ნებისმიერი სხვა გამოისახება. ეს არჩეული ინტეგრალები არიან გარკვეული აზრით დამოუკიდებლები. დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალების ცნება დაზუსტებას მოითხოვს, რის გამოც მოვიყვანთ მის განმარტებას.

განმარტება: (1) ავტონომიური სისტემის $u_1(x),...,u_k(x)$, $1\le k\le n$ პირველ ინტეგრალებს, $a\in\Omega$ წერტილის მიდამოში ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ იაკობის $u'(x)=\left(\dfrac{\partial u_i(a)}{\partial x_j}\right)$, $i=1,...,k$, $j=1,...,n$ მატრიცის რანგი k-ს ტოლია.

ამის შემდეგ შესაძლებელია ჩამოვაყალიბოთ $n-1$ რაოდენობის დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალის არსებობის საკმარისი პირობა და აღვწეროთ ნებისმიერი სხვა პირველი ინტეგრალის სტრუქტურა.

თეორემა 2. *დავუშვათ, $a\in\Omega$ წერტილი არ არის (1) სისტემის წონასწორობის წერტილი. მაშინ ამ წერტილის ნებისმიერ $\Omega_a\subset\Omega$ მიდამოში არსებობს $n-1$ რაოდენობის დამოუკიდებელი $u_1(x),...,u_{n-1}(x)$ პირველი ინტეგრალი. გარდა ამისა, თუ $u(x)$ ამ სისტემის რომელიმე პირველი ინ-*

ტეგრალია Ω_a *არეში, მაშინ არსებობს ისეთი უწყვეტად წარმოებადი* $F(\varsigma_1,...,\varsigma_{n-1})$ *ფუნქცია, რომ* $u(x)=F(u_1(x),...,u_{n-1}(x))$, *ნებისმიერი* x *-სათვის* Ω_a *-დან.*

ნათელია, რომ ამ თეორემაში მითითებული ინტეგრალთა დამოუკიდებელი სისტემა ერთადერთი არ არის. აღნიშნული სისტემის არსებობა ლოკალური ხასიათისაა იმ აზრით, რომ ისინი F ფუნქციასთან ერთად არსებობენ მხოლოდ მითითებული წერტილის მიდამოში. იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც $a\in\Omega$ წერტილი არ არის წონასწორობის წერტილი, მის მიდამოში a წერტილზე დამოკიდებული F ფუნქცია შესაძლებელია მაინც არსებობდეს. ამასთან, წონასწორობის წერტილის მიდამოში დამოუკიდებელი ინტეგრალები შეიძლება არსებობდნენ ან არც არსებობდნენ.

8.3. კონსერვატიული სისტემა ერთი თავისუფლების ხარისხით

პირველი ინტეგრალების ფიზიკური შინაარსის გასააზრებლად განვიხილოთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე მექანიკური სისტემა ხახუნის გარეშე.

ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე კონსერვატიული სისტემა ეწოდება ისეთ სისტემას, რომელიც აღიწერება შემდეგი ავტონომიური სისტემით:

$$\ddot{x}=F(x), \tag{1}$$

სადაც F ნამდვილ რიცხვთა რაიმე I ინტერვალზე განსაზღვრული x ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

(1) განტოლება ეკვივალენტურია განტოლებათა:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = F(x_1) \end{cases} \tag{2}$$

სისტემის, სადაც $(x_1,x_2)\in I\times\mathbf{R}$.

ზემოთ მოყვანილის შესაბამისად, მექანიკაში მიღებულია შემდეგი ტერმინოლოგია: I -ს ეწოდება კონფიგურაციული სივრცე, $x_1=x-$კოორდინატია, $x_2=\dot{x}$ -ს – სიჩქარეა, $\ddot{x}$ – აჩქარებაა, $I\times\mathbf{R}$ დეკარტულ ნამრავლს კი ეწოდება ფაზური სივრცე, (1) განტოლებას ეწოდება ნიუტონის განტოლება, F -ს – ძალური ველი, ხოლო $F(x)$-ს კი – ძალა.

განვიხილოთ ფაზურ სივრცეზე განსაზღვრული შემდეგი ფუნქციები:

$T = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{{x_2}^2}{2}$ – კინეტიკური ენერგია;

$U = -\int\limits_{x_0}^{x} F(\xi)d\xi$ – პოტენციალური ენერგია;

$E = T + U$ – სრული ენერგია.

თეორემა (ენერგიის შენახვის კანონი): *მექანიკური სისტემის სრული ენერგია არის (2) სისტემის პირველი ინტეგრალი.*

რადგან $E = \frac{x_2(t)^2}{2} + U(x_1(t))$, ამიტომ, პირველი ინტეგრალის განმარტების თანახმად, საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2(t)^2}{2} + U(x_1(t))\right) = 0.$$

რადგან $\frac{dU}{dx} = -F(x)$, ამიტომ მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2(t)^2}{2} + U(x_1(t))\right) = x_2\dot{x}_2 + U^{/}\dot{x}_1 = x_2F(x_1) - F(x_1)x_2 = 0,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას.

მაგალითი. განვიხილოთ ჰამილტონის სისტემა, რომელიც აღწერს N თავისუფლების ხარისხის მქონე მექანიკური სისტემის მოძრაობას R^{2N} ფაზურ სივრცეში:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}, \ \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}, \ \ i = 1, \dots, N.$$

ამ სისტემაში $H(q,p)$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ე.წ. *ჰამილტონის ფუნქციაა.* ჰამილტონის ფუნქციის წარმოებული $\dot{q}_i$ და $\dot{p}_i$ ვექტორული ველების გასწვრივ ნულია:

$$\dot{H}(q,p) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\right) = 0,$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ $H(q,p)$ არის ჰამილტონის განტოლების პირველი ინტეგრალი იმისგან დამოუკიდებლად, აქვს თუ არა მას წონასწორობის წერტილი.

კლასიკურ მექანიკაში მექანიკური სისტემის მოძრაობის პირველ ინტეგრალებს, ჩვეულებრივ, ამ სისტემის *მოძრაობის ინტეგრალებს* (ან *მოძრაობის კონსტანტებს*) უწოდებენ. პირველი ინტეგრალის განმარტებიდან გამოდის, რომ მოძრაობის ინტეგრალები ყოველთვის გამოხატავენ შენახვის რომელიმე (ენერგიის, იმპულსის და ა.შ.) კანონს. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილ მაგალითში ვაჩვენეთ, რომ $H(q,p)$ არის პირველი ინტეგრალი. მეორე მხრივ, მექანიკიდან ცნობილია, რომ $H(q,p)$ მექანიკური სისტემის სრული ენერგიაა. ე.ი. $H=T+U$, სადაც T კინეტიკური ენერგიაა, ხოლო U კი – პოტენციალური. ამრიგად, ის ფაქტი, რომ $H(q,p)$ პირველი ინტეგრალია, ნიშნავს, რომ $H(q,p)$ ჰამილტონიანით მოცემული მექანიკური სისტემისათვის სამართლიანია ენერგიის შენახვის კანონი. ამის გამო, $H(q,p)$-ს *ენერგიის ინტეგრალსაც* უწოდებენ.

8.4. ორგანზომილებიანი ავტონომიური სისტემა

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ორგანზომილებიან ავტონომიურ განტოლებათა სისტემებს. ავტონომიური სისტემის ნაცვლად ხშირად იხმარება ტერმინი *ავტონომიური განტოლება*. ასეთი ტერმინოლოგია აღრევას არ იწვევს იმის გამო, რომ სისტემა შესაძლებელია ჩაიწეროს ვექტორული სახით და ფორმალურად მას სკალარული განტოლების სახე ექნება. ამიტომ, ჩვენ ორივე ტერმინს გამოვიყენებთ კონტექსტის შესაბამისად. გავიმეოროთ ზოგიერთი ცნება და დებულება, რომ პარაგრაფი იყოს დამოუკიდებელი წინა პარაგრაფებისაგან.

განვიხილოთ შემდეგი ორგანზომილებიანი ავტონომიური სისტემა:

$$\dot{X}(t)=F\big(X(t)\big), \tag{1}$$

სადაც $X(t)=(x_1(t),x_2(t))$ და $F=(F_1,F_2)$. ამრიგად, (1) სისტემა გაშლილი სახით იწერება შემდეგი ფორმით:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=F_1\big(x_1(t),x_2(t)\big),\\ \dot{x}_2(t)=F_2\big(x_1(t),x_2(t)\big).\end{cases}$$

$C=(c_1,c_2)$-ს ეწოდება (1)-ის *სტაციონარული (განსაკუთრებული)* წერტილი, თუ $F(C)=0$. ყველა სხვა წერტილს, რომლებისთვისაც ეს ტოლობა არ სრულდება, ეწოდება *ჩვეულებრივი* წერტილი. ამრიგად, $X(t)=C$

არის მოცემული განტოლების ამონახსნი, ხოლო მისი ინტეგრალური წირი გადაგვარდება წერტილში. თუ $F(C) \neq 0$, მაშინ განტოლების ამონახსნი ან იკლებს, ან იზრდება. ამონახსნის ასეთ გრაფიკულ სურათს *ფაზური პორტ-რეტი* ეწოდება. ფაზური პორტრეტი გამოსახავს ფაზური წერტილის სიჩქარის (ვექტორის) მიმართულებას. ეს კი ნიშნავს, რომ ფაზური პორტრეტი ასახავს სისტემის დინამიკის თვისობრივ სურათს.

დავუშვათ, $C = (c_1, c_2)$ (1) სისტემის სტაციონარული წერტილია. განვიხილოთ:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(c_1, c_2) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(c_1, c_2) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(c_1, c_2) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(c_1, c_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

წრფივი სისტემა, რომელსაც (1)-ის *გაწრფივება* ეწოდება C სტაციონარულ წერტილში. ხშირად წრფივი სისტემა საწყის არაწრფივ სისტემაზე სრულ ინფორმაციას იძლევა.

განმარტება: მეორე რიგის ორ წრფივ ავტონომიურ სისტემას ეწოდება *თვისობრივად ეკვივალენტური,* თუ არსებობს სიბრტყის (სიბრტყის ნაწილის) ისეთი ორიენტაციის შემნახველი ჰომეომორფიზმი თავის თავზე, რომ პირველი სისტემის ფაზური პორტრეტი გადადის მეორის ფაზურ პორტრეტში.

ჩვეულებრივი წერტილის მიდამოში ყველა წრფივი სისტემა ერთმანეთის ეკვივალენტურია. ამიტომ, დინამიკური სისტემის თვისობრივი ანალიზის დროს საინტერესოა მხოლოდ განსაკუთრებული წერტილები. ამის გამო, მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ განსაკუთრებული წერტილების კლასიფიკაცია. ეს უკანასკნელი ამოცანა 2×2 მატრიცების კლასიფიკაციის ეკვივალენტურია.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ წრფივი ავტონომიური სისტემა მოცემულია:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ნამდვილი (ე.ი. $a_{ij} \in R^1$) მატრიცით. გავიხსენოთ შემდეგი თეორემა წრფივი ალგებრიდან.

თეორემა 1. *ნებისმიერი ნამდვილი A მატრიცისათვის არსებობს ისეთი გადაუგვარებელი M მატრიცა, რომ $J = M^{-1}AM$ მატრიცას აქვს ქვემოთ მოყვანილიდან ერთ-ერთი სახე:*

ა) $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, $\lambda_1 > \lambda_2$;   ბ) $\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$; გ) $\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$; დ) $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$, $\beta > \alpha$,

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ და β ნამდვილი რიცხვებია.

თეორემაში მოყვანილ J მატრიცას A-ს *ჟორდანის (კანონიკური) ფორმა* ეწოდება. $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ და β რიცხვები განისაზღვრებიან A მატრიცის

$$\lambda^2 - trA\lambda + detA = 0$$

მახასიათებელი განტოლებიდან. ამასთან, თუ განტოლების დისკრიმინანტი $\Delta = (trA)^2 - 4detA > 0$, J-ს აქვს ა) სახე; თუ $\Delta = 0$ და A დიაგონალური მატრიცაა, მაშინ მისი კანონიკური სახეა ბ); ხოლო, თუ A დიაგონალური არ არის, მაშინ A-ს ჟორდანის ფორმაა გ); ბოლოს, როდესაც $\Delta < 0$, მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთმანეთის შეუღლებული ორი კომპლექსური ფესვი $\alpha \pm i\beta$ და A დაიყვანება დ) კანონიკურ სახეზე.

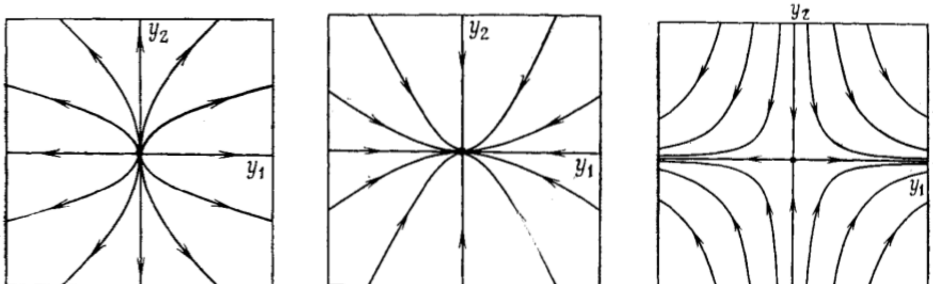
შენიშვნა: თეორემაში მითითებული M მატრიცა ცხადად იგება. მაგალითად, განსხვავებული ნამდვილი მახასიათებელი ფესვების შეთხვევაში მისი სვეტებია შესაბამისი მახასიათებელი ვექტორები.

განმარტება: ავტონომიურ სისტემას ეწოდება *მარტივი,* თუ მისი შესაბამისი მატრიცის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

მარტივ სისტემას აქვს ერთადერთი განსაკუთრებული წერტილი და იგი კოორდინატთა სათავეა. მარტივი ავტონომიური სისტემის კლასიფიკაცია განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2. *მარტივი (1) ავტონომიური სისტემის ფაზურ პორტრეტს აქვს შემდეგი ათიდან ერთ-ერთი სახე:*

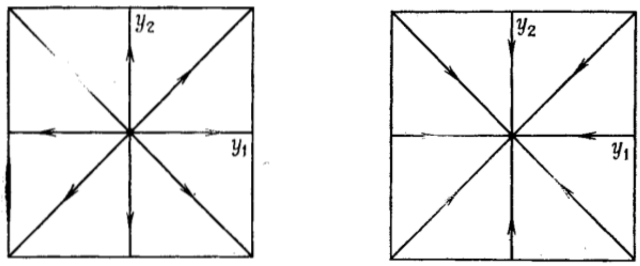
1) *როდესაც სისტემის კანონიკური სახეა ა) თეორემა 1-დან, ავტონომიური სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია ნახ. 1-ზე.*



ა) $\boldsymbol{\lambda_1 > \lambda_2 > 0}$ ბ) $\boldsymbol{\lambda_2 < \lambda_1 < 0}$ გ) $\boldsymbol{\lambda_2 < 0 < \lambda_1}$

ნახ. 1.

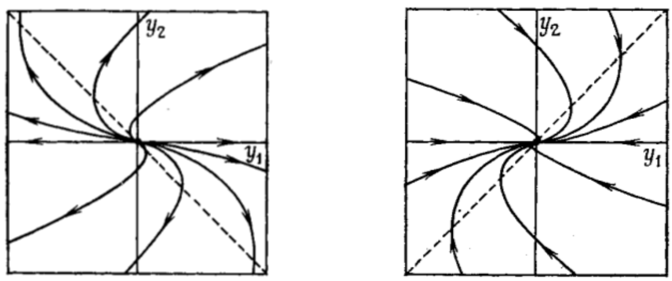
2) *როდესაც სისტემის კანონიკური სახეა ბ) თეორემა 1-დან, ავტონომიური სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია ნახ.2-ზე.*



ა) $\boldsymbol{\lambda_0 > 0}$ ბ) $\boldsymbol{\lambda_0 < 0}$

ნახ. 2

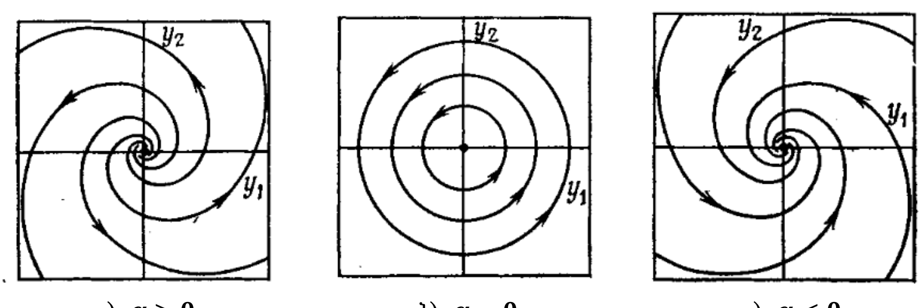
3) *როდესაც სისტემის კანონიკური სახეა გ) თეორემა 1-დან, ავტონომიური სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია ნახ.3-ზე.*



ა) $\boldsymbol{\lambda_0 > 0}$ ბ) $\boldsymbol{\lambda_0 < 0}$

ნახ. 3

4) *როდესაც სისტემის კანონიკური სახეა დ) თეორემა 1-დან, ავტონომიური სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია ნახ.4-ზე.*



ა) $\boldsymbol{\alpha > 0}$ ბ) $\boldsymbol{\alpha = 0}$ გ) $\boldsymbol{\alpha < 0}$

ნახ. 4

როდესაც ავტონომიური სისტემა არ არის მარტივი, მაშინ სისტემას კოორდინატთა სათავის გარდა სხვა სტაციონარული წერტილებიც აქვს. კერძოდ, თუ $rank\,A = 1$, მაშინ კოორდინატთა სათავეზე გამავალ წრეებზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი არის სისტემის უძრავი წერტილი, ხოლო, როდესაც $rank\,A = 0$, მაშინ სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი ავტონომიური სისტემის სტაციონარული წერტილია.

ზემოთ ძირითადად განვიხილეთ წრფივი ავტონომიური სისტემები და არაწრფივი სისტემების გაწრფივების პროცედურა. საინტერესოა ვიცოდეთ, რამდენად სრულ ინფორმაციას იძლევა გაწრფივებული სისტემა საწყის არაწრფივ სისტემაზე. ამაზე პასუხს იძლევა შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა 3. *დავუშვათ, არაწრფივი სისტემისათვის კოორდინატთა სათავე მარტივი განსაკუთრებული წერტილია (ეს ნიშნავს, რომ შესაბამისი მატრიცა მარტივია). მაშინ ამ სისტემის და მისი გაწრფივების ფაზური პორტრეტები კოორდინატთა სათავის მიდამოში თვისობრივად ეკვივალენტურებია, გარდა შემთხვევისა, როდესაც სისტემის მახასიათებელი ფესვები კომპლექსურია და მათი ნამდვილი ნაწილები (რომლებიც ერთმანეთის ტოლია) ნულოვანი.*

მაგალითად:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \tag{1}$$

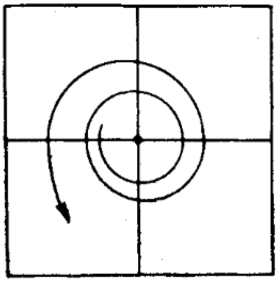
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{2}$$

სისტემების გაწრფივებას $(0,0)$ სტაციონარული წერტილის მიდამოში მივყავართ ერთსა და იმავე წრფივ სისტემამდე, მაგრამ მათი ფაზური პორტრეტები კოორდინატთა სათავეში თვისობრივად ეკვივალენტურები არ არიან.

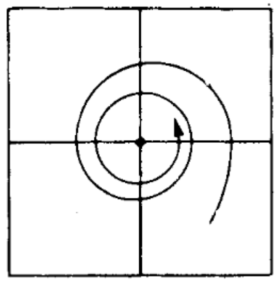
მართლაც, (1) და (2)-ის შესაბამისი წრფივი სისტემაა:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

სისტემა, რომლის მახასიათებელი ფესვებია $\pm i$, მისი ფაზური პორტრეტია ნახ.4 ბ) თეორემა 2-დან. მაშინ, როდესაც (1) და (2) სისტემების ფაზური პორტრეტები მოყვანილია, შესაბამისად, ნახ.5-სა და ნახ.6-ზე:



ნახ. 5



ნახ. 6

(1), (2) სისტემების სრული ანალიზისათვის, განტოლებათა ეს სისტემები საჭიროა გადავწეროთ (r,θ) პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში, მივიღებთ სისტემებს:

$$\begin{cases}\dot r = r^3,\\ \dot\theta = 1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot r = -r^3,\\ \dot\theta = 1,\end{cases}$$

რომელთა ფაზური პორტრეტებიც ზემოთაა მოყვანილი და ისინი თვისობრივად ეკვივალენტურები არ არიან, რადგან სიბრტყის ჰომეომორფიზმი, რომელიც ერთ ფაზურ პორტრეტს მეორეში გადაიყვანს, არ შეინარჩუნებს ორიენტაციას.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. იპოვეთ შემდეგი მატრიცების ჟორდანის ფორმა და ამოწერეთ ის მატრიცები, რომელსაც ისინი ჟორდანის ფორმაზე მიყავს.

   1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. პასუხი: $J=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

   2) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$. პასუხი: $J=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

   3) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. პასუხი: $J=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. აჩვენეთ, რომ მოცემული სისტემების:

   ა) $\begin{cases}\dot x_1 = 4x_1 + x_2\\ \dot x_2 = -x_1 + 2x_2\end{cases}$, ბ) $\begin{cases}\dot x_1 = 12x_1 + 4x_2\\ \dot x_2 = -26x_1 - 8x_2\end{cases}$, გ) $\begin{cases}\dot x_1 = 10x_1 + 2x_2\\ \dot x_2 = -28x_1 - 5x_2\end{cases}$

   კანონიკური სახეა, შესაბამისად, შემდეგი სისტემები:

   ა) $\begin{cases}\dot x_1 = 2x_1 + x_2\\ \dot x_2 = x_1 + 2x_2\end{cases}$, ბ) $\begin{cases}\dot x_1 = 2x_1 + x_2\\ \dot x_2 = 3x_1 + x_2\end{cases}$, გ) $\begin{cases}\dot x_1 = 7x_1 + 2x_2\\ \dot x_2 = 4x_1 + x_2\end{cases}$.

3. გააწრფივეთ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_2 e^{x_1} \end{cases}$$

სისტემა $(0,0)$ სტაციონარული წერტილის მიდამოში და დახაზეთ მისი ფაზური პორტრეტი.

პასუხი: წრფივ სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_2. \end{cases}$$

4. იპოვეთ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 x_2 \end{cases}$$

სისტემის სტაციონარული წერტილები და გააწრფივეთ სისტემა ამ წერტილების მიდამოში.

პასუხი: სტაციონარული წერტილებია: $(0,0)$; $(2,0)$. შესაბამისი წრფივი სისტემებია:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}.$$

5. პარაგრაფ 7.3-ის გამოყენებით იპოვეთ:

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = -x + x^3 \end{cases}$$

სისტემის ჰამილტონიანი.

მითითება: სისტემის ჰამილტონიანი არის სისტემის პირველი ინტეგრალი. მოცემული სისტემა გადავწეროთ:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-x + x^3}{p}$$

სახით. მისი ამონახსნია $x^2 - \frac{1}{2}x^4 + p^2 = c$. აქედან $H(x,p) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + p^2$ ჰამილტონიანი ფუნქციაა.

9. მდგრადობა

9.1. მდგრადობის ცნება და ძირითადი თეორემები

განმარტება: $\dot{x} = f(t,x)$ განტოლების $\bar{x}(t)$ ამონახსნს, განსაზღვრულს $[t_0,\infty)$ ნახევარღერძზე, რომელიც აკმაყოფილებს $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ საწყის პირობას, ეწოდება მდგრადი (ლიაპუნოვის აზრით), თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ დადებითი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ დადებითი რიცხვი (დამოკიდებული მხოლოდ ε-ის არჩევაზე), რომ ნებისმიერი $\bar{x}_0$-საგან განსხვავებული საწყისი x_0 მნიშვნელობისათვის, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა $|x_0 - \bar{x}_0| < \delta$, შესაბამისი $x(t)$ და $\bar{x}(t)$ ამონახსნებისათვის, რომლებიც განსაზღვრულები არიან $[t_0,\infty)$ ნახევარღერძზე, აგრეთვე სრულდება უტოლობა $|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$.

ზემოთ მოყვანილი განმარტებით, $\bar{x}(t)$ ამონახსნის მდგრადობა ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სათვის არსებობს მხოლოდ ε-ზე დამოკიდებული δ დადებითი რიცხვი, ისეთი, რომ ნებისმიერი x_0 რიცხვისათვის, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა $|x_0 - \bar{x}_0| < \delta$, არსებობს განტოლების სხვა $x(t)$ ამონახსნი საწყისი პირობით $x(t_0) = x_0$, რომელიც განსაზღვრულია $[t_0,\infty)$ ნახევარღერძზე და ამ ნეხევარღერძის ნებისმიერ $t \geq t_0$ წერტილში სრულდება უტოლობა $|x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$.

აქედან მარტივად ჩამოვაყალიბებთ არამდგრადი ამონახსნის ცნებას.

განმარტება: $\bar{x}(t)$ ამონახსნს ეწოდება *არამდგრადი*, თუ არსებობს დადებითი $\varepsilon_0 > 0$, რომ ნებისმიერი δ დადებითი რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $|x_0 - \bar{x}_0| < \delta$, x_0 წერტილზე გამავალი $x(t)$ ამონახსნი ან გაგრძელებადი არ არის მთელ ნახევარღერძზე, ან არსებობს $\exists t \geq t_0$, რომ $|x(t) - \bar{x}(t)| \geq \varepsilon_0$.

ნათელია, რომ ზემოთ მოყვანილი განმარტებები სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც $x(t)$ ვექტორული ფუნქციაა. ამ დროს შესაბამისი უტოლობები გაიგება, როგორც ნორმის შეფასება ევკლიდურ სივრცეში.

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\dot{X}(t) = \big(F_1(X,t), \dots, F_n(X,t)\big),$$

სადაც $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, ჩავთვალოთ, რომ განტოლებათა სისტემა განსაზღვრულია X, t-ს ნებისმიერი მნიშვნელბისათვის და

$$F_i(X,t),\ \frac{\partial F_i(X,t)}{\partial x_k},\ i,k = 1, \dots, n$$

უწყვეტი ფუნქციებია. ეს უზრუნველყოფს განტოლების ლოკალურად ამოხსნადობას წარმოებულის მიმართ და კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას. ვთქვათ, $Y(t)$ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია, რომელიც განმარტებულია $t > a$ ნახევარღერძზე. ეს ამონახსნი $X(t_0) = Y(t_0)$ საწყისი პირობით ცალსახად განისაზღვრება, სადაც t_0 ნებისმიერი წერტილია $[a, \infty)$ ნახევარღერძიდან. განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი წარმოიდგინება:

$$X(t) = Y(t) + U(t)$$

სახით. $U(t)$-ს ეწოდება ძირითადი ამონახსნის *შეშფოთება* და აკმაყოფილებს *შეშფოთების*

$$\dot{U} = P(U,t)$$

განტოლებათა სისტემას, სადაც

$$P(U,t) = F(Y(t) + U(t), t) - F(Y(t), t).$$

შეშფოთების განტოლებას ყოველთვის აქვს $U_0(t) \equiv 0\ (a < t < \infty)$ ნულოვანი ამონახსნი, რომელსაც *ტრივიალური* ამონახსნი ეწოდება.

დებულება 1. *განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მდგრადია ლიაპუნოვის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მდგრადია შეშფოთების განტოლებათა სისტემის ტრივიალური ამონახსნი.*

ამრიგად, განტოლების ამონახსნის მდგრადობა ეკვივალენტურია შეშფოთების განტოლების ტრივიალური ამონახსნის მდგრადობის. გარდა ამისა, *მდგრადობა არის ამონახსნის საწყის პირობებზე თანაბრად უწყვეტად დამოკიდებულების თვისება მთელ $[a, \infty)$ ნახევარღერძზე.*

განმარტება: განტოლებათა სისტემის $Y(t)$ ამონახსნს ეწოდება *ასიმპტოტურად მდგრადი*, თუ იგი მდგრადია ლიაპუნოვის აზრით და ნებისმიერი t_0-სათვის $(a < t_0 < \infty)$ არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ ყველა $X(t)$ ამონახსნისათვის, რომლებისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$|X(t_0) - Y(t_0)| < \delta,$$

სამართლიანია თანადობა

$$lim_{t\to\infty}|X(t) - Y(t)| = 0.$$

კერძოდ, ტრივიალური $U_0(t)$ ამონახსნი ასიმპტოტურად მდგრადია, თუ იგი მდგრადია და $lim_{t\to\infty}|U(t)| = 0$, როდესაც $|U(t_0)| < \delta$.

განვიხილოთ:

$$\dot{X} = (F_1(X), \dots, F_n(X)) \tag{1}$$

ავტონომიური სისტემა უწყვეტი ვექტორული ველით და, ვთქვათ, $X(t_0) \equiv X_0$ ვექტორი მისი წონასწორობის (სტაციონარული) წერტილია. ე.ი. $F(X_0) = 0$. (1) სისტემის პარალელურად განვიხილოთ წრფივი სისტემა:

$$\dot{U} = F_X'(X_0)U, \tag{2}$$

სადაც $F_X'(X_0) = \left(\frac{\partial F_i(X_0)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ კერძო წარმოებულებისაგან შედგენილი მატრიცაა გამოთვლილი X_0-ში და, ამრიგად, იგი მუდმივია. (1) სისტემიდან (2)-ზე გადასვლის პროცედურას ეწოდება (1) სისტემის გაწრფივება X_0 სტაციონარულ წერტილში. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. *იმისათვის, რომ X_0 ამონახსნი იყოს ასიმპტოტურად მდგრადი, საკმარისია, რომ ამ თვისების მატარებელი იყოს (2) წრფივი სისტემის ნულოვანი ამონახსნი.*

შევნიშნოთ, რომ, *წრფივი სისტემის შემთხვევაში, მისი ყველა ამონახსნი ან მდგრადია, ან არამდგრადი. იგივე სამართლიანია ასიმპტოტურად მდგრადი ამონახსნისათვის.* ამის გამო, შეგვიძლია ვილაპარაკოთ არა ცალკეული ამონახსნის მდგრადობაზე, არამედ თვით სისტემის მდგრადობაზე.

$$\dot{y}(t) = Ay(t) \tag{3}$$

მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებათა სისტემა ავტონომიური სისტემაა, ამიტომ მასზე ვრცელდება ზემოთ მოყვანილი თეორემები. მისი მდგრადობის კრიტერიუმი მოყვანილია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2. *მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემის მდგრადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ კოეფიციენტთა მატრიცის მახასიათებელი რიცხვების ნამდვილი ნაწილები იყვნენ უარყოფითი რიცხვები.*

თეორემა 2-ის თანახმად, (3) მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემის მდგრადობის დასადგენად საჭიროა ვიპოვოთ:

$$\det(A - \lambda I) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{4}$$

n-ური ხარისხის, სადაც n არის A მატრიცის რიგი, მრავალწევრის ფესვები, რაც, საზოგადოდ, როდესაც $n \geq 5$, შეუძლებელია. შემდეგი თეორემა, რომელიც ცნობილია სისტემის მდგრადობის *რაუს-ჰურვიცის* (ედვარდ რაუსი – 1831-1907, ინგლისელი მექანიკოსი და მათემატიკოსი; ადოლფ ჰურვიცი – 1859-1919, გერმანელი მათემატიკოსი) *კრიტერიუმის* სახელწოდებით, საშუალებას იძლევა გვერდი ავუაროთ (4) მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვების პოვნას.

თეორემა 3 (რაუს-ჰურვიცი). *იმისათვის, რომ (4) მახასიათებელი მრავალწევრის ფესვებს ჰქონდეთ უარყოფითი ნამდვილი ნაწილები, აუცილებელია და საკმარისი რომ:*

1) *(4) მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი იყოს დადებითი. ე.ი.* $a_j > 0, j = 1, \dots, n$ *და*

2) *ჰურვიცის მატრიცის დეტერმინანტი:*

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

და ყველა მთავარი Δ_j, $j = 1, \dots n$ *მინორი იყოს დადებითი, სადაც*

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix},\ \Delta_3 = det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \dots,\ \Delta_n = \Delta.$$

ჰურვიცის მატრიცის აგების წესი. ჰურვიცის მატრიცა არის n-ური რიგის მატრიცა, რომლის მთავარ დიაგონალზე დგას (4) მრავალწევრის კოეფიციენტები, დაწყებული λ^{n-1}-ის კოეფიციენტიდან. პირველ სტრიქონში კი კენტი ინდექსის მქონე კოეფიციენტები ზრდადი მიმდევრობით არიან მოთავსებული. თუ ინდექსი მრავალწევრის ხარისხს აღემატება, მაშინ იწერება 0. ყოველი მომდევნო სტრიქონი მიიღება წინა სტრიქონისაგან შესაბამისი ელემენტების ინდექსის ერთი ერთეულით შემცირებით, მანამ, სანამ ინდექსი უარყოფითი არ გახდება, ამ დროს კი იწერება 0. Δ_j, $j = 1, \dots, n$ მატრიცები მიიღება ჰურვიცის მატრიციდან მიმდევრობით $1, \dots, n$ ზომის კვადრატული მატრიცების ამოჭრით, დაწყებული ზედა მარცხენა კუთხიდან.

ზემოთ მოყვანილი მდგრადობის კრიტერიუმები გამოვიყენოთ ორგანზომილებიანი ავტონომიური სისტემების მდგრადობის გამოსაკვლევად. ვისარგებლოთ პარაგრაფ 8.4-ის აღნიშვნებით და თეორემა 1-ით და თეორემა 2-ით ამავე პარაგრაფიდან.

დავუშვათ, მარტივი ავტონომიური სისტემის მახასიათებელი რიცხვები ნამდვილი და ერთმანეთისგან განსხვავებულია. თუ ორივე დადებითია, მაშინ ავტონომიური სისტემა არამდგრადია და, შესაბამისად, სტაციონარულ წერტილს ეწოდება *არამდგრადი კვანძი*, მისი ფაზური პორტრეტია თეორემა 2-ის ნახ. 1 ა). როდესაც ერთი ფესვი დადებითია და მეორე კი უარყოფითი, სტაციონარულ წერტილს ეწოდება *უნაგირი.* ნათელია, რომ უნაგირი არამდგრადი სტაციონარული წერტილია. ფაზური პორტრეტი მოცემულია თეორემა 3-ის ნახ. 1 ბ)-თი. იმ შემთხვევაში, როდესაც ორივე ნამდვილი ფესვი უარყოფითია, სისტემა მდრადია და, შესაბამისად, სტაციონარულ წერტილს ეწოდება *მდგრადი კვანძი.* ფაზური პორტრეტი მოცემულია თეორემა 3-ის ნახ. 1 გ)-ით. ამით ამოვწურეთ განსხვავებული ნამდვილი ფესვების შემთხვევა. როდესაც სისტემის მახასიათებელი ფესვები ნამდვილი და ერთმანეთის ტოლია, შესაბამისი ფაზური პორტრეტები მოცემულია თეორემა 2-ის ნახ. 2 და ნახ. 3-ით, იმის შესაბამისად, როგორია მატრიცის კანონიკური სახე. ამასთან, სისტემა შეიძლება იყოს როგორც მდგრადი, ასევე არამდგრადი იმის შესაბამისად, დადებითია (არამდგრადი) თუ უარყოფითი (მდგრადი) მახასიათებელი ფესვი. ნახ. 2-ზე მოცემულია მდგრადი ($\lambda_0 < 0$) და არამდგრადი ($\lambda_0 > 0$) სტაციონარული წერტილი, რომელსაც *ვარსკვლავისებური კვანძი* ეწოდება, ფაზური პორტრეტი. შესაბამისად, ნახ. 3 არის მდგრადი ($\lambda_0 < 0$) და არამდგრადი ($\lambda_0 > 0$) *გადაგვარებული კვანძის* ფაზური პორტრეტები. ბოლოს განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მახასიათებელი ფესვები ერთმანეთის შეუღლებული კომპლექსური რიცხვებია. როდესაც კომპლექსური ფესვის ნამდვილი ნაწილი დადებითია (შესაბამისი ფაზური პორტრეტი მოცემილია ნახ. 4 ა)-თი), სტაციონარულ წერტილს ეწოდება *არამდგრადი ფოკუსი*, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი (მას შეესაბამება ნახ. 4 გ)-ს ფაზური პორტრეტი) – *მდგრადი ფოკუსი.* როდესაც ფესვის ნადვილი ნაწილი 0-ია, განსაკუთრებულ წერტილს *ცენტრი* ეწოდება. ნათელია, რომ ცენტრი არამდგრადი განსაკუთრებული წერტილია თეორემა 2-ის თანახმად.

9.2. განტოლებათა პერიოდული სისტემა და მისი მდგრადობა

დავუბრუნდეთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას

$$X^{/}(t) = A(t)X(t)\,, \qquad (1)$$

სადაც $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, ხოლო

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}$$

პერიოდული მატრიცული ფუნქციაა პერიოდით ω:

$$A(t+\omega) = A(t)\,.$$

ჩვენი მიზანია (1) სისტემის მდგრადობის საკითხის შესწავლა.

პირველ რიგში, ვთქვათ, $A(t)$ სკალარული ფუნქციაა და $A(t) = a(t)$. მაშინ (1) სისტემა გადაიქცევა პირველი რიგის ერთგვაროვან სკალარულ დიფერენციალურ განტოლებად:

$$x^{/}(t) = a(t)x(t)\,, \qquad (2)$$

პერიოდული $a(t)$ ფუნქციით.

(2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩვენთვის ცნობილია:

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\,.$$

გამოვთვალოთ $x(t+\omega)$:

$$x(t+\omega) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t+\omega} a(s)ds} = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} e^{\int_{t}^{t+\omega} a(s)ds} = x(t) e^{\int_{t}^{t+\omega} a(s)ds}\,.$$

რადგან $a(t)$ პერიოდულია, ამიტომ

$e^{\int_{t}^{t+\omega} a(s)ds}$ დამოკიდებული არ არის t-ზე და ტოლია $e^{\int_{t_0}^{\omega} a(s)ds}$ რიცხვის, რომელიც აღვნიშნოთ μ-თი.

ამრიგად, მივიღეთ:

$$x(t+\omega) = \mu x(t)\,. \qquad (3)$$

μ-ს ეწოდება (2) განტოლების *მულტიპლიკატორი* და გამოითვლება ფორმულით:

$$\mu = e^{\int_{t_0}^{\omega} a(s)ds}.$$

მულტიპლიკატორის საშუალებით შესაძლებელია (2) განტოლების $x(t)$ ამონახსნი გავაგრძელოთ მთელ $[0,\infty)$ ნახევარღერძზე, თუ იგი ცნობილია მხოლოდ $[0,\omega]$ სეგმენტზე. ამისათვის საკმარისია ვისარგებლოთ (3) ფორმულით და მათემატიკური ინდუქციით:

$$x(t+n\omega) = \mu^n x(t). \tag{4}$$

ახლა (4) ტოლობის გამოყენებით გამოვიკვლიოთ (2) დიფერენციალური განტოლების მდგრადობა.

დავუშვათ, $|\mu|>1$, მაშინ ნებისმიერი ფიქსირებული t-სათვის გვაქვს $|x(t+n\omega)|\to\infty$. ამრიგად, (2) განტოლების ამონახსნი შემოუსაზღვრელია. თეორემა 1-ის თანახმად *ეს კი ნიშნავს, რომ (2) განტოლება არამდგრადია.* ახლა, ვთქვათ, $|\mu|\le 1$. (4)-დან გვაქვს:

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |x(t)| = \sup_{t\in[0,\omega]} |x(t)|,$$

რაც ნიშნავს, რომ (2)-ის ყველა ამონახსნი შემოსაზღვრულია $[0,\infty)$ ნახევარღერძზე. აქედან კი, თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ, *როდესაც $|\mu|\le 1$, (2) განტოლება მდგრადია.*

ამრიგად, *(2) განტოლების მდგრადობის ამოცანა დაყვანილ იქნა განტოლების მულტიპლიკატორის ანალიზზე, ანუ განტოლება მდგრადი ან არამდგრადია იმის შესაბამისად, მულტიპლიკატორი მეტია თუ ნაკლები ან ტოლი 1-ზე.*

ახლა დავუბრუნდეთ (1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას. რადგან ჩვენ ცალკეული ამონახსნის ქცევა კი არ გვაინტერესებს, არამედ ამონახსნთა ერთობლიობის, ამის გამო განვიხილოთ ფუნდამენტური მატრიცფუნქციის ყოფაქცევა. კერძოდ, ის ფუნდამენტური მატრიცა განვიხილოთ, რომელიც ნორმირებულია, ე.ი. ნულში იგი ერთეულოვანი მატრიცის ტოლია. აღვნიშნოთ $\Phi(t)$-თი ფუნდამენტური მატრიცა, მაშინ იგი დააკმაყოფილებს შემდეგ მატრიცულ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)\,, \tag{5}$$

ხოლო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას $X(0) = X_0$, მიიღება $\Phi(t)$ მატრიც-ფუნქციისაგან შემდეგი თანადობით:

$$X(t) = \Phi(t)X_0\,.$$

ამის გამო საკმარისია შევისწავლოთ ფუნდამენტური მატრიც-ფუნქცია.

ლემა 1. $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\Phi(\omega)$.

დამტკიცება: ამ ტოლობის ორივე მხარეს მდგომი მატრიც-ფუნქციები არიან (5) მატრიცული განტოლების ამონახსნები. მართლაც, $\Phi'(t+\omega) = A(t+\omega)\Phi(t+\omega) = A(t)\Phi(t+\omega)$, რაც ნიშნავს იმას, რომ $\Phi(t+\omega)$ არის (5)-ის ამონახსნი, რადგან ის წარმოადგენს ფუნდამენტური და ნამდვილი მატრიცის ნამრავლს. ორივე მატრიც-ფუნქცია – $\Phi(t)$ და $\Phi(t+\omega)$ აკმაყოფილებენ ერთსა და იმავე საწყის პირობებს:

$$\Phi(0+\omega) = \Phi(\omega)\,,\ \ \Phi(0)\Phi(\omega) = \mathbf{I}\Phi(\omega) = \Phi(\omega)\,,$$

სადაც $\mathbf{I}$ ერთეულოვანი მატრიცაა. ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად, ისინი ვალდებულნი არიან ერთმანეთის ტოლები იყვნენ.

ლემა 1-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

დებულება 1. $\Phi(t+n\omega) = \Phi(t)\Phi^n(\omega)$.

ამრიგად, $\Phi(\omega)$ მუდმივი მატრიცა ასრულებს იმავე როლს, რასაც ასრულებდა მულტიპლიკატორი სკალარული განტოლების შემთხვევაში. $\Phi(\omega)$-ს ეწოდება (1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის მულტიპლიკატორი. სიმარტივისათვის იგი M-ით ავღნიშნოთ. მონოდრომიის მატრიცის საკუთრივი ვექტორებისა და საკუთრივი რიცხვების საშუალებით, (1) სისტემის მდგრადობის კრიტერიუმი ყალიბდება შემდეგნაირად.

თეორემა 1. *იმისათვის, რომ პერიოდული სისტემა იყოს მდგრადი, აუცილებელია და საკმარისი სისტემის მონოდრომიის მატრიცის საკუთრივი რიცხვების მოდულები არ აღემატებოდეს 1-ს. თუ მოდული 1-ის ტოლია, მაშინ ასეთ მახასიათებელ რიცხვებს უნდა შეესაბამებოდეს მხოლოდ ერთი საკუთრივი ვექტორი და არა მიკავშირებულ ვექტორთა ჯაჭვი.*

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს პერიოდული სისტემის არამდგრადობის პირობა.

შედეგი 1. *იმისათვის, რომ პერიოდული სისტემა იყოს არამდგრადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს ერთი მაინც მახასიათებელი რიცხვი მოდულით მეტი ან ტოლი 1-ზე, რომელსაც შეესაბამება არა მარტო საკუთრივი ვექტორი, არამედ მიკავშირებული ვექტორებიც.*

როგორც ვნახეთ, პერიოდული სისტემის მდგრადობის საკითხი წყდება მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემის მდგრადობის ანალოგიურად. ეს ფაქტი გასაკვირი არ არის შემდეგი თეორემის გამო.

თეორემა 2. *პერიოდულკოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ეკვივალენტურია გარკვეული მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებათა სისტემის. უფრო მეტიც, ნებისმიერი ω-პერიოდული $A(t)$ მატრიც-ფუნქციისათვის არსებობს ω-პერიოდული $P(t)$ მატრიცული ფუნქცია და B მუდმივი მატრიცა, ისეთი, რომ $\Phi(t) = P(t)e^{Bt}$. ამასთან, $e^{B\omega} = \Phi(\omega) = M$.*

თეორემა 2-ში მოყვანილი სისტემების ეკვივალენტურობა გაიგება შემდეგნაირად. დავუშვათ, მოცემულია ორი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$X^{/}(t) = A(t)X(t) \tag{6}$$

და

$$Y^{/}(t) = B(t)Y(t) \ . \tag{7}$$

ვიტყვით, რომ (6) და (7) სისტემები ერთმანეთის ეკვივალენტურები არიან, თუ არსებობს ისეთი $C(t)$ გადაუგვარებელი მატრიც-ფუნქცია, რომ $A(t) = C^{-1}(t)B(t)C(t) + C^{/}(t)C^{-1}(t)$. ნათელია, რომ, თუ $X(t)$ არის (6) სისტემის რომელიმე ამონახსნი, ხოლო $Y(t)$ კი (7) სისტემის ამონახსნი, მაშინ ისინი ერთმანეთს უკავშირდებიან ტოლობით: $X(t) = C(t)Y(t)$. (6) სისტემა ეკვივალენტურია მუდმივკოეფიციენტებიანი სისტემის, ბუნებრივია, ნიშნავს, რომ (7) სისტემაში შემავალი $B(t)$ მატრიც-ფუნქცია მუდმივია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. გამოიკვლიეთ შემდეგი განტოლების ტრივიალური ამონახსნის მდგრადობა.
   1) $x^{(4)}(t) + 5x'''(t) + 13x''(t) + 9x'(t) + 10x(t) = 0$. პასუხი: ასიმპტოტურად მდგრადია.
   2) $x'''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$. პასუხი: არამდგრადია.
   3) $x'''(t) + 5x''(t) + 9x'(t) + 5x(t) = 0$. პასუხი: მდგრადია.

2. გამოიკვლიეთ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_0^3 \end{cases}$$

არაწრფივი სისტემის მდგრადობა კოორდინატთა სათავეში.

პასუხი: კოორდინატთა სათავე არის მდგრადი ფოკუსი.

10. სასაზღვრო ამოცანა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის და გრინის ფუნქცია

მეორე რიგის განტოლება უწყვეტი კოეფიციენტებით:

$$p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 \tag{1}$$

შესაძლებელია ჩაწერილ იქნეს შემდეგი სახით:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y(x) = 0, \tag{2}$$

რომელსაც მეორე რიგის განტოლების *თვითშეუღლებული* ფორმა ეწოდება. (1)-დან (2)-ზე გადასვლა ხდება (1)-ის ყველა წევრის:

$$r(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$$

ფუნქციაზე გამრავლებით და $p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$, $q(x) = \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$ აღნიშვნების შემოტანით. მართლაც:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y(x) =$$

$$= e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\frac{dy}{dx} + e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} y(x).$$

თუ ამ გამოსახულებას 0-ს გავუტოლებთ, მივიღებთ (1)-ს.

განვიხილოთ შემდეგი *ამოცანა.* ვიპოვოთ $[x_0, x_1]$ ჩაკეტილ მონაკვეთზე განსაზღვრული $y(x)$ ფუნქცია, რომელიც არის:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x) \tag{3}$$

წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც თავისი განსაზღვრის არის საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = \omega_0,\ \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = \omega_1. \tag{4}$$

(3), (4)-ს ეწოდება *სასაზღვრო ამოცანა* $y(x)$ ფუნქციისათვის. თუ $\omega_0 = \omega_1 = 0$, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია *ერთგვაროვანი სასაზღვრო*

ამოცანა. (3), (4) ამოცანაში f და q ცნობილი, (x_0, x_1) ღია მონაკვეთზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციებია, $p(x) \neq 0$ უწყვეტად დიფერენცირებადია (x_0, x_1)-ზე, ხოლო $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega_{0,}, \omega_1$ მოცემული რიცხვებია.

კოშის ამოცანისაგან განსხვავებით, სასაზღვრო ამოცანას ყოველთვის არ აქვს ამონახსნი.

მაგალითად: ა) $y'' + y = 0, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი: $y = asint$.

ბ) $y'' + y = 0, y(0) = 0, y(\pi) = b,\ b \neq 0$ არ აქვს ამონახსნი;

გ) როდესაც $b = 0$, ამოცანას აქვს მრავალი ამონახსნი: $y = csint$, სადაც c ნებისმიერი რიცხვია.

განვიხილოთ x ცვლადის $G = G(x, s)$ ფუნქცია, სადაც $x \in [x_0, x_1]$, $s \in (x_0, x_1)$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. იგი უწყვეტია;

2. როდესაც $x \neq s$ აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d}{dx}(p(x)G'_x) + q(x)G = 0$$

და (4) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს;

3. დიფერენცირებადია x-ის მიმართ და მის წარმოებულს, როდესაც $x = s$, აქვს $\frac{1}{p(s)}$-ის ტოლი ნახტომი (ე..ი. $G'_x|_{x=s+0} - G'_x|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}$).

თუ ასეთი G ფუნქცია არსებობს, მას ეწოდება (1), (2) ამოცანის *გრინის* (ჯორჯ გრინი – 1793-1841, ინგლისელი მათემატიკოსი) *ფუნქცია.*

ამ ტერმინთან დაკავშირებით რამდენიმე ზოგადი სახის შენიშვნა გავაკეთოთ: გრინის ფუნქცია იმ ტიპის ფუნქციების ზოგადი სახელია, რომელიც განტოლების ამონახსნის ინტეგრალურ წარმოდგენას გვაძლევს.

1) წრფივი დიფერენციალური განტოლების კოშის ამოცანის გრინის ფუნქცია არის განტოლების *ფუნდამენტური ამონახსნი*, რომელიც *ერთგვაროვან* სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს.

2) *გრინის ფუნქცია არის იმ ინტეგრალური ოპერატორის ბირთვი*, რომელიც წარმოადგენს ნულოვანი სასაზღვრო პირობების მქონე წრფივი დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი დიფერენციალური ოპერატორის შებრუნებულს.

3) *გრინის ფუნქციის საშუალებით იგება ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების მქონე არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.*

ზემოთ მოყვანილი განმარტება არის ის ზოგადი თვისება, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია, რომ ის იყოს რომელიმე დიფერენციალური ოპერატორის გრინის ფუნქცია.

თუ G (3) ამოცანის გრინის ფუნქციაა და $\omega_0 = \omega_1 = 0$, მაშინ (3), (4) ამოცანის ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s) f(s) ds.$$

ამოცანა 1. ამოვხსნათ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა $y''(x) - y'(x) = 0$, $y(0) = -1, y'(1) - y(1) = 2$.

პირველ რიგში დავწეროთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი: $y(x) = C_1 + C_2 e^x$. სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას C_1, C_2 უცნობი მუდმივებისათვის: $C_1 + C_2 = -1$, $C_2 e - C_1 - C_2 e = 2$, საიდანაც ვიღებთ: $C_1 = -2, C_2 = 1$. აქედან სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი იქნება: $y(x) = -2 + e^x, 0 \leq x \leq 1$.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $y'(0) = 2, y(+\infty) = 0$ პირობებს.

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$. რადგან სასაზღვრო პირობის თანახმად $y(+\infty) = lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, ამიტომ $C_2 = 0$. $y'(0) = 2$ სასაზღვრო პირობიდან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ $C_1 = -2$. საბოლოოდ, ამოცანის ამონახსნი იქნება $y(x) = -2e^{-x}$, $0 \leq x < +\infty$ ფუნქცია.

ამოცანა 3. ამოვხსნათ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

$$y''(x) - 2iy(x) = 0, y(0) = -1, y(+\infty) = 0.$$

დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი განტოლება ასეთია: $\lambda^2 = 2i \implies \lambda = \pm(1+i)$. აქედან ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$y(x) = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{-(1+i)x} \implies$$

$$\implies y(x) = C_1 e^x (cosx + isinx) + C_2 e^{-x}(cosx - isinx).$$

რადგან $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, ხოლო $y(0) = -1 \implies C_2 = -1$, ვღებულობთ ამოცანის შემდეგ ამონახსნს:

$$y(x) = e^{-x}(isinx - cosx), 0 \leq x < +\infty.$$

ამოცანა 4. ვიპოვოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი: $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0, y(x) = o(x)$, როდესაც $x \to 0$, $y(1) = 3$.

მოცემული განტოლება ეილერის განტოლებაა. მის კერძო ამონახსნებს აქვთ ასეთი სახე: $y(x) = x^\lambda$, სადაც λ არის შემდეგი

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

მახასიათებელი განტოლების ამონახსნები: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. ამიტომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება: $y(x) = C_1x + C_2x^2$. პირველი სასაზღვრო პირობა ნიშნავს, რომ $lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x} = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $C_1 = 0$, მეორე სასაზღვრო პირობიდან კი გვაქვს: $C_2 = 3$. ამრიგად, მოცემული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნია: $y(x) = 3x^2$, $0 \le x \le 1$ ფუნქცია.

ამოცანა 5. a პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის არ აქვს

$$y''(x) + ay(x) = 1, y(0) = 0, y(1) = 0$$

სასაზღვრო ამოცანას ამონახსნი?

პირველ რიგში ვპოულობთ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელ ფესვებს $\lambda^2 + a = 0$ მახასიათებელი განტოლებიდან: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$, როდესაც $a \neq 0$ და $\lambda_{1,2} = 0$, როდესაც $a = 0$. ამის შესაბამისად განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასეთია:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} + C_1e^{\sqrt{-a}x} + C_2e^{-\sqrt{-a}x}, a \neq 0; \\ \frac{x^2}{2} + d_1x + d_2, a = 0. \end{cases}$$

სასაზღვრო პირობების გამოყენებით მივიღებთ:

$$C_1 + C_2 + \tfrac{1}{a} = 0,\ \tfrac{1}{a} + C_1e^{\sqrt{-a}} + C_2e^{-\sqrt{-a}} = 0 \text{ (როდესაც } a \neq 0\text{)}, \quad (5)$$

$$d_1 = -\tfrac{1}{2},\ d_2 = 0 \text{ (როდესაც } a = 0\text{)}.$$

სისტემა (5) არაერთგვაროვანია. მას ამონახსნი არ აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-a}} & e^{-\sqrt{-a}} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

და ერთ-ერთი

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1/a & 1 \\ -1/a & e^{-\sqrt{-a}} \end{vmatrix} \text{ ან } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1/a \\ e^{\sqrt{-a}} & -1/a \end{vmatrix} \quad (7)$$

დეტერმინანტი განსხვავებულია 0-საგან. (6)-დან გამომდინარეობს, რომ:

$$a = k^2\pi^2, k \in Z. \quad (8)$$

(8)-ის გათვალისწინებით (7)-დან მივიღებთ, რომ $cosk\pi \neq 1$. ამრიგად, k არ უნდა იყოს ლუწი და $k \neq 1$. ამრიგად, თუ $a = (2m+1)^2\pi^2, m \in Z$ (5) სისტემას ამონახსნი არ აქვს. ეს კი ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში ამონახსნი არ აქვს სასაზღვრო ამოცანას.

ამოცანა 6. ავაგოთ გრინის ფუნქცია შემდეგი სასაზღვრო ამოცანისათვის: $y''(x) = f(x), y(0) = 0, y(1) = 0$.

ამ ამოცანაში $p(x) = 1, q(x) = 0$. გრინის ფუნქციის განმარტების თანახმად, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dG(x,s)}{dx}\right) = 0$, ანუ $G_{xx}(x,s) = 0$ და $G(x,s)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს: $G(0,s) = G(1,s) = 0,\ 0 \leq x \leq 1, x \neq s$ და მის წარმოებულს აქვს $p(x) = 1$-ის ტოლი ნახტომი, ე.ი. $G'_x|_{x=s+0} - G'_x|_{x=s-0} = 1$. $G_{xx}(x,s) = 0$ განტოლების ერთხელ ინტეგრებით მივიღებთ:

$$G'_x(x,s) = \begin{cases} C_1, 0 \leq x < s, \\ C_2,\ s < x \leq 1, \end{cases}$$

სადაც $C_1 \neq C_2$, რადგან განმარტებით $G'_x(x,s)$ წყვეტილია $x = s$ წერტილში. $G'_x(x,s)$-ის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1x + C_3, 0 \leq x < s, \\ C_2x + C_4,\ s < x \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

რადგან $G(x,s)$ განმარტებით უწყვეტია s წერტილში, ამიტომ უნდა შესრულდეს ტოლობა:

$$C_1s + C_3 = C_2s + C_4. \quad (10)$$

გარდა ამისა,

$$G(0,s) = C_1.0 + C_3 = 0 \quad (11)$$

და

$$G(1,s) = C_2.1 + C_4 = 0. \quad (12)$$

გრინის ფუნქციის განმარტებით, $G'_x(x,s)$-ის ნახტომი s-ში 1-ის ტოლია. ე.ი.

$$C_2 - C_1 = 1. \quad (13)$$

(10)-(13) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მივიღებთ: $C_1 = s - 1$, $C_2 = s, C_3 = 0, C_4 = -s$. $C_i, i = 1,2,3,4$ ჩასმით (9)-ში საბოლოოდ მივიღებთ გრინის ფუნქციას:

$$G(x,s) = \begin{cases} (s-1)x, 0 \le x \le s, \\ s(x-1), \qquad s \le x \le 1. \end{cases}$$

ამოცანა 7. ვიპოვოთ $y''(x) + y(x) = f(x), y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi)$ სასაზღვრო ამოცანის გრინის ფუნქცია.

$G''_{xx} + G = 0,\ x \ne s$ განტოლების ამონახსნია:

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 sinx + C_2 cosx, 0 \le x < s, \\ C_3 sinx + C_4 cosx, \qquad s < x \le \pi. \end{cases}$$

G-ს სასაზღვრო პირობიდან მივიღებთ:

$$C_2 = -C_4, C_1 = -C_3. \tag{14}$$

$G(x,s)$-ის უწყვეტობიდან, მისი x-ით წარმოებულის ნახტომის პირობიდან $x = s$ წერტილში ვიღებთ სისტემას:
$C_1 sins + C_2 coss = C_3 sins + C_4 coss,\ C_3 sins - C_4 coss - C_1 sins + C_2 coss = 1$ (15)

(14),(15) სისტემის ამოხსნა გვაძლევს ტოლობებს:

$$C_1 = -C_3 = \frac{1}{2} coss, C_2 = -C_4 = \frac{1}{2} sins.$$

ამრიგად, ვიღებთ:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(s-x), 0 \le x \le s, \\ \frac{1}{2}\sin(x-s), \qquad s \le x \le \pi. \end{cases}$$

რაც ნიშნავს, რომ ამოცანის გრინის ფუნქციაა $G(x,s) = \frac{1}{2}\sin|x-s|$, $0 \le x \le \pi$.

თეორემა 1. *$y''(x) + q(x)y(x) = 0$ განტოლების არატრივიალურ $y(x) \not\equiv 0$ ამონახსნს ნამდვილ რიცხვთა ღერძის იმ მონაკვეთზე, სადაც განტოლების $q(x)$ კოეფიციენტი აკმაყოფილებს პირობას $q(x) \le 0$, არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი ნული.*

ამ თეორემის დამტკიცება ემყარება შემდეგ ორ ლემას.

ლემა 1. *თუ* $y(x) \not\equiv 0$ *არის* $p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0$ *განტოლების არატრივიალური ამონახსნი და* $y(t_0) = 0$, *მაშინ* $y'(t_0) \neq 0$.

მართლაც, თუ $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, მაშინ კოშის ამოცანას ექნება მეორე, $y(x)$-ისაგან განსხვავებული ამონახსნი $y(x) \equiv 0$, რაც კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას ეწინააღმდეგება.

ლემა 2. $p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0$ *განტოლების* $y(x) \not\equiv 0$ *არატრივიალურ ამონახსნს არ შეიძლება ჰქონდეს სასრულ მონაკვეთზე უსასრულო რაოდენობის ნულები.*

დავუშვათ, $[a, b]$ მონაკვეთზე განტოლების $y(x) \not\equiv 0$ ამონახსნს უსასრულო რაოდენობის ნულები აქვს. ავარჩიოთ ნულების ამ სიმრავლეში t_0-საკენ კრებადი $(t_n)_{n\geq 1}$ ქვემიმდევრობა: $t_1, t_2, \ldots \to t_0$ (რაც ყოველთვისაა შესაძლებელი, მიმდევრობის შემოსაზღვრულობის გამო), მაშინ $t_0 \in [a, b]$. რადგან y უწყვეტია და $y(t_k) = 0$, $k = 1,2, \ldots$, ამიტომ $y(t_0) = 0$. y ფუნქცია დიფერენცირებადია t_0 წერტილში, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ზღვარი:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y(t_k) - y(t_0)}{t_k - t_0} = y'(t_0).$$

ამ გამოსახულების მარცხენა მხარის მრიცხველი 0-ის ტოლია, ამიტომ $y'(t_0) = 0$, რაც $y(t_0) = 0$ ტოლობასთან არათავსებადია ლემა 1-ის ძალით. ამით ლემა 2 დამტკიცებულია.

გადავიდეთ თეორემა 1-ის დამტკიცებაზე.

დავუშვათ, $y(t_0) = 0, y(t_1) = 0, t_1 < t_2$. ლემა 2-ის თანახმად, განტოლების არატრივიალურ ამონახსნს შესაძლებელია ჰქონდეს $[t_1, t_2]$ მონაკვეთზე მხოლოდ სასრული რაოდენობის ნულები. ავიღოთ ორი მეზობელი ნული $t = a$ და $t = b > a$. მაშინ $y(t)$ ნიშანს არ იცვლის, როდესაც $a < t < b$. დავუშვათ, $y(t) > 0$ (თუ $y(t) < 0$, მაშინ y-ს მაგივრად განვიხილოთ $y_1(t) = -y(t) > 0$). რადგან $y(a) = y(b) = 0$, ამიტომ ლემა 1-ის ძალით, $y'(a) \neq 0$. რადგან (a, b)-ზე $y(t) > 0$, ე.ი. $y'(a) > 0$ და $y'' = -q(t)y \geq 0$ (a, b)-ზე, რაც ნიშნავს, რომ y'' კლებადი არ არის. აქედან კი იმის გამო, რომ $y'(a) > 0$, გამოდის $y(t) > 0$ უტოლობა ნებისმიერი t-სათვის (a, b)-დან. ეს ნიშნავს, რომ $y(t)$ ზრდადია $[a, b]$-ზე. $y(a) = 0$ ტოლობიდან, თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ $y(b) > 0$, რაც ეწინააღმდეგება b წერტილის არჩევას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. ამოხსენით სასაზღვრო ამოცანა:

$$y''(x) - y(x) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 1.$$

პასუხი: $y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2ch1}$ყ

2. ამოხსენით სასაზღვრო ამოცანა:

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - 6y(x) = 0, y(1) = 1$$

და როდესაც $x \to 0, y(x)$ შემოსაზღვრულია.

მითითება: განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x) = c_1 x^2 + \frac{C_2}{x^3}$.

11. შტურმ-ლიუვილის თეორია

11.1. ფუნქციის წარმოდგენა ფურიეს მწკრივად

$[a, b]$ სეგმენტზე მოცემული უწყვეტი ორი $-\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ – ფუნქციის *სკალარული ნამრავლი* აღინიშნება $<\varphi_1(x), \varphi_2(x)>$ სიმბოლოთი, არის კვადრატული ფესვი $\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx$ ინტეგრალიდან, ხოლო ფუნქციის *ნორმა* აღინიშნება $||\varphi(x)||$ სიმბოლოთი, არის კვადრატული ფესვი $\int_a^b \varphi^2(x)dx$ ინტეგრალიდან. ამრიგად:

$$<\varphi_1(x), \varphi_2(x)> = \left(\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$||\varphi(x)|| = <\varphi(x), \varphi(x)> = \left(\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\varphi(x)$-ს ეწოდება *ნორმირებული*, თუ მისი ნორმა ტოლია 1-ის: $||\varphi(x)|| = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx} = 1$. ორ $-\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ ფუნქციას ეწოდება *ორთოგონალური*, თუ $\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0$. $[a, b]$ სეგმენტზე მოცემულ უწყვეტ ფუნქციათა უსასრულო (სასრულ) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ ერთობლიობას ეწოდება ორთონორმირებული, თუ თითოეული მათგანი ნორმირებულია და $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0$, როდესაც $i \neq j$.

ტრიგონომეტრიულ

$$1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, \dots$$

ფუნქციათა თვლადი ერთობლიობა ორთოგონალურია $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე, რადგან:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosnxcosmxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)\,x + \cos(n+m)\,xdx =$$
$$= (\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + \frac{1}{n+m}\sin(n+m)\,x|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

ანალოგიური მსჯელობით ვიღებთ, რომ $\int_{-\pi}^{\pi} sinnxsinmxdx = 0$ და $\int_{-\pi}^{\pi} cosnxsinmxdx = 0$, მაგრამ ეს სისტემა არ არის ნორმირებული, რადგან:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} cos^2nx + sin^2nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi.$$

მისი ნორმირება ხდება თითოეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციის $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ -ზე გამრავლებით. 1-ის ნორმა, ზემოთ მოყვანილი სკალარული გამრავლების მიმართ, არის $\sqrt{2\pi}$. ამრიგად, $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე ორთონორმირებული ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემა არის:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}cosx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}sinx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}sin2x,\ldots \qquad (1)$$

ვთქვათ, $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots$ $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემული ორთონორმირებული სისტემაა და $f(x)$ $[a,b]$-ზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა. ვიტყვით, რომ $f(x)$ დაშლილია $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)\ldots$ ფუნქციათა სისტემის მიმართ, თუ $f(x)$ არის $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots$ კრებადი მწკრივის ჯამი:

$$f(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots,$$

სადაც $c_j=\int_a^b f(x)\varphi_j(x)dx$. ამ მწკრივს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის *ფურიეს მწკრივი* $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)\ldots$ ფუნქციათა სისტემის მიმართ.

თუ $f(x)$ ფუნქცია $[-\pi,\pi]$-ზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციაა და იგი წარმოდგენილია (1) ფუნქციათა მწკრივის სახით:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\,coskx+b_k sinkx), \qquad (2)$$

სადაც $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)coskxdx$ $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinkxdx$, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ დაშლილია ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უბან-უბან მონოტონური* $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ $[a,b]$ იყოფა სასრული რაოდენობის

$$[a,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\ldots,[x_n,b]$$

სეგმენტებად, რომლებზედაც $f(x)$ მონოტონურია.

თუ $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან მონოტონურია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ ნებისმიერი შიგა c წერტილისათვის არსებობს მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები:

$$lim_{x\to c_-}f(x)=f(c-0),\ lim_{x\to c_+}f(x)=f(c+0).$$

ფურიეს მწკრივის კრებადობა დამოკიდებულია დასაშლელი ფუნქციის ანალიზურ თვისებებზე. რაც უფრო გლუვია ფუნქცია, მით უფრო ,,კარგია‘‘ მწკრივის კრებადობა. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა, რომელიც

დირიხლეს (იოჰან პეტერ გუსტავ ლეჟიონ დირიხლე – 1805-1859, გერმანელი მათემატიკოსი) სახელს ატარებს.

თეორემა 1 (გ.ლ. დირიხლე). *თუ $[-\pi,\pi]$-ზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია უბან-უბან მონოტონური, უბან-უბან უწყვეტი და შემოსაზღვრულია თავის უწყვეტობის მონაკვეთზე, მაშინ მისი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი კრებადია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტის ყველა წერტილში. თუ $s(x)$ ფუნქცია $f(x)$-ის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის ჯამია, მაშინ ყველა იმ წერტილისათვის, სადაც $s(x)$ უწყვეტია, სამართლიანია ტოლობა $s(x)=f(x)$, ხოლო ყველა იმ წერტილში, სადაც ფუნქცია წყვეტას განიცდის, გვაქვს:*

$$s(x)=\frac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big).$$

გარდა ამისა:

$$s(\pi)=s(-\pi)=\frac{1}{2}\big(f(\pi-0)+f(-\pi+0)\big).$$

თეორემაში მოყვანილ პირობებს ეწოდება *დირიხლეს პირობა.* ის რამდენიმე ეკვივალენტური ფორმით შეიძლება შეგვხვდეს. მაგალითად, ამბობენ აგრეთვე, რომ $f(x)$ აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობას, თუ მას აქვს მაქსიმუმისა და მინიმუმის სასრული რაოდენობა მოცემულ სეგმენტზე.

თუ f კენტი ფუნქციაა, მაშინ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$ და თუ f ლუწია, მაშინ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$.

კენტი ფუნქციის წარმოებული და პირველყოფილი ლუწი ფუნქციაა, ხოლო ლუწი ფუნქციის წარმოებული და პირველყოფილი კენტი ფუნქციებია. აქედან გამოდის, რომ, თუ f *ლუწი ფუნქციაა*, მაშინ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinxdx=0$, $n=1,2,\ldots$, ამიტომ ფურიეს მწკრივს ექნება სახე:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,coskx,$$

ხოლო, თუ f *კენტი ფუნქციაა*, მაშინ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosxdx=0, n=1,2,\ldots$ და ამიტომ მისი ფურიეს მწკრივი იქნება:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,sinkx.$$

მაგალითი 1. დავშალოთ $f(x)=x$ ფუნქცია ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე.

ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა გამოვთვალოთ $f(x) = x$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები ფურიეს ტრიგონომეტრიული სისტემის მიმართ:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

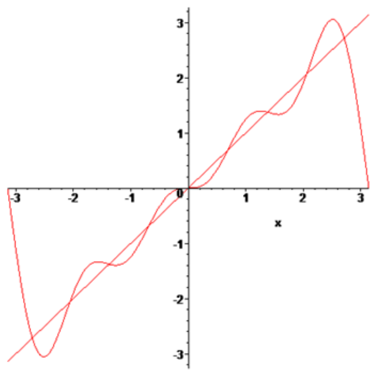
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xcoskxdx = \frac{1}{\pi}(x\frac{1}{k}sinkx\,|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} sinkxdx) = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xsinkxdx = \frac{1}{\pi}(-x\frac{1}{k}coskx\,|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} coskxdx) = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

a_k და b_k რიცხვების გამოთვლა, ყოველი k-სათვის, ხდება ნაწილობითი ინტეგრების საშუალებით (იხ.მაგალითი 2-ის შემდეგ შენიშვნა).

ამრიგად, $f(x) = x$ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი იქნება:

$$2\left(sinx - \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}sin3x - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{k}sinkx + \cdots\right).$$

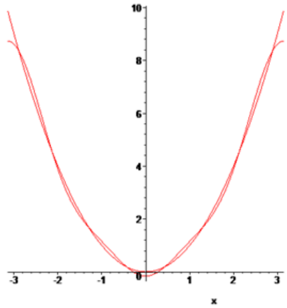


$f(x) = x$ და მისი ფურიეს მწკრივის გრაფიკები

მაგალითი 2. დავშალოთ $f(x) = x^2$ ფუნქცია ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

რადგან $f(x) = x^2$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ $b_n = 0$, a_n კოეფიციენტები კი გამოითვლება ფორმულით: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx = \frac{2\pi^2}{3}$,$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2cosnxdx = = \frac{4}{n^2}(-1)^n$. ამრიგად, მოცემული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი იქნება:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4cosx + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \cdots = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n cosnx.$$



$\boldsymbol{f(x) = x^2}$ და $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \boldsymbol{cosnx}$ ფუნქციების გრაფიკები $[-\pi, \pi]$ ინტერვალზე

შენიშვნა: $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 cosnxdx$ ინტეგრალის გამოთვლა ხდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ორჯერ გამოყენებით:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nxdx = \left[\begin{aligned} &u = x^2 \\ &dv = \cos nxdx \\ &du = 2xdx \\ &v = \int \cos nxdx = \frac{\sin nx}{n} \end{aligned}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\left.\left(\frac{x^2 \sin nx}{n}\right)\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin nx}{n}dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[\pi^2 \sin n\pi - (-\pi)^2 \sin(-n\pi) - 2\int_0^{\pi} x \sin nxdx\right] = \frac{2}{\pi n}\left[2\pi^2 \sin n\pi - 2\int_0^{\pi} x \sin nxdx\right] =$$

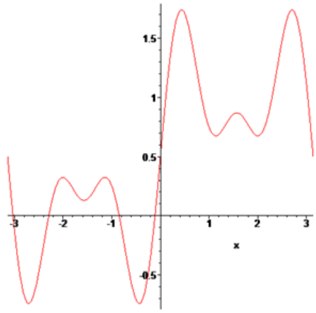
$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x \sin nxdx = \left[\begin{aligned} &u = x \\ &dv = \sin nxdx \\ &du = dx \\ &v = \int \sin nxdx = -\frac{\cos nx}{n} \end{aligned}\right] = -\frac{4}{\pi n}\left[\left.\left(-\frac{x\cos nx}{n}\right)\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left[\pi \cos n\pi - \int_0^{\pi} \cos nxdx\right] = \frac{4}{\pi n^2}\left[\pi \cos n\pi - \left.\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\right|_0^{\pi}\right] = \frac{4}{\pi n^2}\left[\pi \cos n\pi - \frac{\sin n\pi}{n}\right].$$

მაგალითი 3. დავშალოთ $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \le x \le 0, \\ 1, 0 < x \le \pi \end{cases}$ ფუნქცია ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[-\pi, \pi]$ სეგმენტზე.

გამოვთვალოთ ფურიეს კოეფიციენტები: $a_0 = 1, a_n = 0, b_n = (-1)^n$, $n \ge 1$. აქედან მოცემული ფუნქციის ფურიეს მწკრივი იქნება:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}sinx + \frac{2}{3\pi}sin3x + \frac{2}{5\pi}sin5x + \cdots = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}sinnx.$$



$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\boldsymbol{sinx}+\frac{2}{3\pi}\boldsymbol{sin3x}+\frac{2}{5\pi}\boldsymbol{sin5x}$ ფუნქციის გრაფიკი

თეორემა 2. თუ $[-\pi,\pi]$-ზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია იშლება ფურიეს

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,coskx+b_k sinkx) \qquad (3)$$

მწკრივად და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს

$$f(-\pi)=f(\pi), f'(-\pi)=f'(\pi)$$

და აქვს შემოსაზღვრული მეორე რიგის წარმოებული $|f''(x)|\leq C$, მაშინ მისი ფურიეს მწკრივი თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია. ამასთან, ფუნქციის წარმოდგენა ფურიეს (3) მწკრივად ერთადერთია.

ძირითადი სეგმენტი, სადაც ფუნქციის დაშლა განვიხილეთ ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად, იყო $[-\pi,\pi]$ სეგმენტი. ეს არის ხელსაყრელი კოეფიციენტების ჩაწერის მიზნით და ამ შემთხვევაში გამოთვლები მარტივდება. ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში ფუნქციები განსაზღვრულები იყვნენ $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე და თუ საჭიროა მთელ ნამდვილ ღერძზე მათი განხილვა (ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე), საჭიროა *პერიოდულად* (გავაგრძელოთ როგორც პერიოდული ფუნქცია) მათი გაგრძელება ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. ამრიგად, თუ $[-\pi,\pi]$ სეგმენტიდან რომელიმე სხვა $[a,b]$ რიცხვით მონაკვეთზე გადასვლა გვინდა, საჭიროა x ღერძზე მოვახდინოთ ამ ინტერვალების ერთმანეთთან შეთავსება მათი x ღერძზე გადაადგილებისა და მასშტაბის შეცვლის საშუალებით.

დებულება 1. ვთქვათ, g პერიოდული ფუნქციაა და T მისი პერიოდია, მაშინ ნებისმიერი a და μ რიცხვებისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_a^{a+T} g(x)dx=\int_{a+\mu}^{a+\mu+T} g(x)dx.$$

მართლაც, $x-T=y$ აღნიშვნის შემოტანის შემდეგ მივიღებთ:

$$\int_{a+T}^{a+\mu+T} g(x)dx = \int_{a}^{a+\mu} g(y+T)dy = \int_{a}^{a+\mu} g(y)dy = \int_{a}^{a+\mu} g(x)dx. \quad (4)$$

ამასთან,

$$\int_{a}^{a+T} g(x)dx = \int_{a}^{a+\mu} g(x)dx + \int_{a+\mu}^{a+\mu+T} g(x)dx + \int_{a+\mu+T}^{a+T} g(x)dx =$$

$$= \int_{a}^{a+\mu} g(x)dx - \int_{a+T}^{a+\mu+T} g(x)dx + \int_{a+\mu}^{a+\mu+T} g(x)dx.$$

აქედან, (4)-ის გათვალისწინებით ვიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ვთქვათ, $f(x)$-ის დაშლაა საჭირო ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[a, a+2l]$ სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში ვახდენთ ცვლადის გარდაქმნას $x = \frac{l}{\pi}t$ და ვიხილავთ $f(\frac{l}{\pi}t)$ ფუნქციის დაშლას $[\frac{a\pi}{l}, \frac{a\pi}{l} + 2\pi]$ სეგმენტზე:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnt + b_n sinnt),$$

სადაც:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l}+2\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) cosntdt, \quad n = 0,1,2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a\pi}{l}}^{\frac{a\pi}{l}+2\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) sinntdt, \quad n = 1,2, \ldots.$$

$f(x)$-ის 2π-პერიოდულობის გამო, მისი გაგრძელებაა შესაძლებელი, ამიტომ საკმარისია:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) cosntdt, \;\; n = 0,1,2, \ldots$$

და

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) sinntdt, \;\; n = 1,2, \ldots.$$

ინტეგრალების გამოთვლა. ამის შემდეგ დავუბრუნდეთ x ცვლადს და მივიღებთ:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos\frac{n\pi}{l}x + b_n sin\frac{n\pi}{l}x),$$

სადაც:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)cos\frac{n\pi}{l}xdx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

11.2. შტურმ-ლიუვილის ამოცანა

ვთქვათ:

$$L(y) \equiv p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x).$$

განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა α პარამეტრით:

$$L(y) - \alpha y = 0, ay(t_1) + by'(t_1) = 0, cy(t_2) + dy'(t_2) = 0.$$

α პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც სასაზღვრო ამოცანას აქვს არანულოვანი ამონახსნი, ეწოდება ამოცანის *საკუთრივი მნიშვნელობა*, ხოლო თვით ამ ამონახსნს, *საკუთრივი ფუნქცია.*

მაგალითი. ვიპოვოთ

$$y'' - \alpha y = 0, y(0) = 0, y(d) = 0$$

სასაზღვრო ამოცანის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ფუნქციები.

წინა პარაგრაფ 10-ის თეორემა 1-ის ძალით, ამოცანას აქვს არანულოვანი ამონახსნი, როდესაც $\alpha < 0$. ამაში პირდაპირი მსჯელობითაც შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, განტოლების ამონახსნს ექნებოდა ორი ნული სასაზღვრო პირობების გამო, რაც თეორემას ეწინააღმდეგება. ვთქვათ, $\alpha > 0$. განტოლების მახასიათებელი ფესვები იქნება $\pm\sqrt{\alpha}$, ხოლო ზოგად ამონახსნს ექნება სახე: $y(t) = c_1e^{\sqrt{\alpha}t} + c_2e^{-\sqrt{\alpha}t}$. სასაზღვრო პირობებიდან ვიღებთ c_1, c_2-ის მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემას: $c_1 + c_2 = 0, c_1e^{\sqrt{\alpha}d} + c_2e^{-\sqrt{\alpha}d} = 0$, რომელსაც მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს. ამრიგად, არატრივიალური ამონახსნის არსებობა მოსალოდნელია მხოლოდ $\alpha < 0$ შემთხვევაში. ვთქვათ, $\alpha = -a^2, a > 0$, მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება: $y(t) = c_1e^{ait} + c_2e^{-ait}$. სასაზღვრო პირობიდან ვიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$c_1 + c_2 = 0, c_1e^{aid} + c_2e^{-aid} = 0 \Rightarrow c_1e^{aid} - c_1e^{-aid} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_1(cosad + isinad) - c_1(cosad - isinad) = 0 \Rightarrow c_1sinad = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ad = \pi k, k = 1,2,3, \dots$$

ამრიგად, $a = a_k = \frac{\pi k}{d}$, $\alpha_k = -a_k^2 = -\left(\frac{\pi k}{d}\right)^2$, $k = 1,2,3,\ldots$ რაც ნიშნავს, რომ α_k ნამდვილი რიცხვები მოცემული განტოლების საკუთრივი რიცხვებია, ხოლო $y_k = c\sin\frac{\pi kt}{d}$ –საკუთრივი ფუნქციები.

განვაზოგადოთ ზემოთ თქმული. კერძოდ, განვიხილოთ:

$$\left(p(x)X^{/}(x)\right)^{/} + \left(\lambda r(x) - q(x)\right)X(x) = 0\,, \quad a < x < b\,, \tag{1}$$

მეორე რიგის ერთგვაროვანი წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, სადაც $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ ნამდვილი ფუნქციებია, ამასთან, $p(x)$, $p^{/}(x)$, $q(x)$, $r(x)$ ფუნქციები უწყვეტებია (a,b)-ზე, ხოლო $p(x)$, $r(x)$ დადებითი ფუნქციებია. λ კი პარამეტრია, რომელიც ნებისმიერ მნიშვნელობას ღებულობს.

მეორე რიგის განტოლების (1) სახით ჩაწერას, როგორც აღვნიშნეთ, განტოლების *თვითშეუღლებული* ფორმა ეწოდება.

(1) განტოლება გადავწეროთ ჩვენთვის ჩვეული სახით:

$$p(x)X^{//}(x) + p^{/}(x)X^{/}(x) + \left(\lambda r(x) - q(x)\right)X(x) = 0 \tag{2}$$

ან

$$X^{//}(x) + \frac{p^{/}(x)}{p(x)}X^{/}(x) + \left(\lambda\frac{r(x)}{p(x)} - \frac{q(x)}{p(x)}\right)X(x) = 0\,.$$

(2) განტოლების კოეფიციენტები უწყვეტი ფუნქციებია (1) განტოლების კოეფიციენტებზე დადებული შეზღუდვების გამო. (a,b) ინტერვალის ყოველი შიგა წერტილი (2) განტოლებისათვის ჩვეულებრივი წერტილია, ხოლო (a,b)-ს ბოლო წერტილები შესაძლებელია იყოს როგორც ჩვეულებრივი, ასევე განსაკუთრებული (სინგულარული). გავიხსენოთ, რომ, თუ (2) განტოლების რომელიმე კოეფიციენტი განიცდის წყვეტას რაიმე x წერტილში და მისი მნიშვნელობა ამ წერტილში უსასრულობის ტოლია, ან $p(x) = 0$, ამ დროს ამბობენ, რომ (2) განტოლებისათვის x არის განსაკუთრებული წერტილი. ჩვენი ინტერესის სფერო არის (2)-ის ისეთი ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ *ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს ნამდვილი კოეფიციენტებით.* ასეთი ტიპის სასაზღვრო ამოცანებს ეწოდება შტურმ-ლიუვილის (ჟაკ შარლ ფრანსუა შტურმი – 1803-1855, ფრანგი მათემატიკოსი; ჟოზეფ ლიუვილი – 1809-1882, ფრანგი მათემატიკოსი) ამოცანები.

შტურმ-ლიუვილის ამოცანა: *ვიპოვოთ $C^2(a,b)$ კლასის (ე.ი. ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი) (2) განტოლების ამონახსნები, რომლებიც აკმაყო-*

ფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს (a,b) *ინტერვალის ბოლოებისათვის. რადგან (1) (ან (2)) განტოლება შეიცავს უცნობ* λ *პარამეტრს, ამიტომ ამონახსნის პოვნა* λ *-ს პოვნასაც გულისხმობს.*

აქვე შევნიშნოთ, რომ ამგვარი სასაზღვრო ამოცანები ოპერატორთა სპექტრალური თეორიის ნაწილია. განსაკუთრებით საინტერესოა თვითშეუღლებული ოპერატორების სპექტრალური თეორია, რადგან ასეთი ოპერატორების სპექტრი ნამდვილი რიცხვებია. სპექტრს კი ფიზიკაში განიხილავენ როგორც დაკვირვებად სიდიდეებს.

საზოგადოდ, განიხილება ორი ტიპის ამოცანა – რეგულარული და სინგულარული. შტურმ-ლიუვილის ამოცანას ეწოდება *რეგულარული*, თუ (a,b) ინტერვალი სასრულია და ინტერვალის ბოლოები განტოლებისათვის ჩვეულებრივი წერტილებია, ხოლო ამოცანას ეწოდება *სინგულარული*, თუ რეგულარულობის ერთი პირობა მაინც დარღვეულია. სინგულარულ ამოცანაში შესაძლებელია ინტერვალის ორივე ბოლო განსაკუთრებული წერტილი იყოს განტოლებისათვის. ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების ხასიათი რეგულარული და სინგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანისათვის განსხვავებულია. რეგულარული ამოცანისათვის ისმება:

პირველი გვარის სასაზღვრო ამოცანა: $X(a)=0$, $X(b)=0$;

მეორე გვარის სასაზღვრო ამოცანა: $X^{/}(a)=0$, $X^{/}(b)=0$;

მესამე გვარის სასაზღვრო ამოცანა: $X^{/}(a)-h_a X(a)=0$,

$X^{/}(b)+h_b X(b)=0$, $h_a, h_b \geq 0$;

მეოთხე გვარის სასაზღვრო ამოცანა: $X(a)=X(b)$, $X^{/}(a)=X^{/}(b)$, $p(a)=p(b)$. ამ სასაზღვრო პირობას სხვანაირად *პერიოდულობის* პირობასაც უწოდებენ.

ყველგან, ზემოთ მოყვანილ ტოლობებში, იგულისხმება, რომ:

$$X(a)=\lim_{x\to a+0} X(x), \quad X(b)=\lim_{x\to b-0} X(x), \quad X^{/}(a)=\lim_{x\to a+0} X^{/}(x)$$

და ა.შ., ამიტომ ზოგჯერ მათ *ზღვრულ* პირობებსაც უწოდებენ.

სინგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანებიდან გამოყოფენ ორი ტიპის ამოცანას იმის შესაბამისად, განტოლების განსაკუთრებული წერტილი ინტერვალის ერთი ბოლოა თუ ორივე. დავუშვთ, $x=a$ სინგულარული, ხოლო $x=b$ რეგულარული წერტილია. მაშინ სინგულარული ბოლოსათვის

ჩვეულებრივ ისმება ფუნქციის (დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის) შემოსაზღვრულობის პირობა:

$$X|_{x\to a+0} = O(1),$$

ხოლო რეგულარულ ბოლოსათვის შესაძლებელია დაისვას ზემოთ მოყვანილი პირველი, მეორე და მესამე გვარის ამოცანა, მაგალითად, ასეთი: $X^{/}(b) + h_b X(b) = 0$, $h_b \geq 0$. თუ ორივე ბოლო სინგულარულია, მაშინ ფუნქციას შემოსაზღვრულობის პირობა ორივე ბოლოში შეიძლება დაედოს $X|_{x\to a+0} = O(1)$, $X|_{x\to b-0} = O(1)$. ზოგჯერ ზრდის რიგსაც მიუთითებენ ხოლმე. მაგალითად, ასეთს:

$$\int_a^b r(x)|X(x)|^2 dx = O(1).$$

საინტერესოა შტურმ-ლიუვილის ამოცანის მხოლოდ არატრივიალური – $X(x) \neq 0$ ამონახსნი, რადგან ტრივიალური – $X(x) \equiv 0$ ამონახსნი შტურმ-ლიუვილის ამოცანას ყოველთვის აქვს, ხოლო არატრივიალური ამონახსნი კი მოცემული λ-სათვის შესაძლებელია არ ჰქონდეს. ამიტომ შტურმ-ლიუვილის ამოცანა მდგომარეობს არა მარტო მოცემული λ-სათვის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის პოვნაში, არამედ λ პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობების შერჩევაში, რომლისთვისაც შესაბამის განტოლებას არატრივიალური ამონახსნი გააჩნია. შტურმ-ლიუვილის ყოველ არატრივიალურ ამონახსნს ეწოდება მოცემული ამოცანის *საკუთრივი ფუნქცია*. ამ დროს λ პარამეტრის მნიშვნელობა, როგორც ვთქვით, უკვე ცნობილია და მას *საკუთრივი მნიშვნელობა* ან *საკუთრივი რიცხვი* ეწოდება. განმარტებით, საკუთრივი ფუნქციები იძებნებიან ნებისმიერი მუდმივის სიზუსტით. ზოგჯერ მათ ადებენ პირობას $\int r(x)|X(x)|^2 dx = 1$, ამ დროს გვაქვს ნორმირებული საკუთრივი ფუნქციები. მოცემულ საკუთრივ რიცხვს, საზოგადოდ, შეესაბამება რამდენიმე საკუთრივი ფუნქცია. საკუთრივი რიცხვების სიმრავლეს ეწოდება ამოცანის *სპექტრი*.

შევისწავლოთ შტურმ-ლიუვილის რეგულარული ამოცანის საკუთრივი რიცხვების თვისებები. კერძოდ, განვიხილოთ რეგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანა ზემოთ მოყვანილი ოთხივე სასაზღვრო პირობით. ჩავთვალოთ, რომ (1) განტოლების $p(x)$, $p^{/}(x)$, $q(x)$, $r(x)$ კოეფიციენტები უწყვეტებია $[a,b]$-ზე, ხოლო $p(x)$, $r(x)$ დადებითი ფუნქციებია $[a,b]$-ში.

თეორემა 1. *რეგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი რიცხვები ნამდვილია და ამოცანის სპექტრი შემოსაზღვრულია ქვემოდან.*

დავუშვათ, $[a,b]$ სეგმენტის ყოველი წერტილი (1) განტოლების ჩვეულებრივი წერტილია. კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს (1)-ის $C^{(2)}$-კლასის ამონახსნი $X(x)$, ისეთი, რომ $c \in (a,b)$ ნემისმიერი რიცხვისათვის $X(c) = \alpha$ და $X'(c) = \beta$, სადაც α და β ნებისმიერი რიცხვებია. თუ α და β დამოკიდებულები არ არიან λ-ზე, მაშინ ყოველი ფიქსირებული x-სათვის $X(x)$ მთელი ფუნქციაა (ე.ი. აქვს ერთადერთი განსაკუთრებული წერტილი და ეს არის ∞) λ-ს მიმართ. დავუშვათ, $c = a$, მაშინ არსებობს (1) დიფერენციალური განტოლების $C^{(2)}(a,b)$ კლასის ორი ამონახსნი (ინტეგრალი) $\varphi(x,\lambda)$ და $\psi(x,\lambda)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\begin{aligned} \varphi(a,\lambda) &= 1, \quad \varphi'(a,\lambda) = 0, \\ \psi(a,\lambda) &= 0, \quad \psi'(a,\lambda) = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

ამასთან, $\varphi(x,\lambda)$ და $\psi(x,\lambda)$ ფუნქციები, ფიქსირებული x-სათვის, არიან მთელი ფუნქციები λ-ს მიმართ. გარდა ამისა, ისინი წრფივად დამოუკიდებლები არიან და მათი ვრონსკიანი a-ში 1-ის ტოლია:

$$W(\varphi(a,\lambda),\psi(a,\lambda)) = \begin{vmatrix} \varphi(a,\lambda) & \psi(a,\lambda) \\ \varphi'(a,\lambda) & \psi'(a,\lambda) \end{vmatrix} = 1 .$$

$\varphi(x,\lambda)$ და $\psi(x,\lambda)$ ფუნქციებს (და ყველა ასეთი თვისებების მქონე ამონახსნთა წყვილს) შტურმ-ლიუვილის ამოცანის *ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა* ეწოდება. შტურმ-ლიუვილის ამოცანის *ზოგადი ამონახსნი* ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$X(x,\lambda) = A\varphi(x,\lambda) + B\psi(x,\lambda), \tag{4}$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია.

$\varphi(x,\lambda)$ და $\psi(x,\lambda)$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის შესახებ ცნობილია, რომ მათი ასიმპტოტური ყოფაქცევა, როდესაც λ პარამეტრი უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, გამოისახება შემდეგი ტოლობების საშუალებით:

$$\varphi(x,\lambda) = \sqrt{\frac{p(a)}{p(x)}} \cos\left(\sqrt{\lambda}(x-a)\right) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}}), \quad \lambda \to +\infty, \ x \in [a,b], \tag{5}$$

$$\psi(x,\lambda) = \sqrt{\frac{p(a)}{p(x)}} \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}(x-a)\right)}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1}), \quad \lambda \to +\infty, \ x \in [a,b]. \tag{6}$$

შტურმ-ლიუვილის ზემოთ მოყვანილი რეგულარული ამოცანის $\varphi(x,\lambda)$ და $\psi(x,\lambda)$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა ყოველთვის არსებობს. ჩავთვალოთ φ და ψ ფუნქციები ცნობილად და გამოვიყვანოთ λ პარამეტრის საპოვნი განტოლებები პირველი, მეორე და მესამე გვარის რეგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანებისათვის. ამისათვის ვისარგებლოთ ამოცანის ზოგადი ამონახსნის (4) ფორმულითა და შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით. პირველი გვარის სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში გვექნება:

$$A\varphi(a,\lambda)+B\psi(a,\lambda)=0,$$

$$A\varphi(b,\lambda)+B\psi(b,\lambda)=0\ ,$$

ანუ

$$A=0\,,\ \ B\psi(b,\lambda)=0\,,\ \ B\neq 0\ \ \Rightarrow\ \ \psi(b,\lambda)=0\,. \qquad (7)$$

ამრიგად, $\psi(b,\lambda)=0$ განტოლებიდან განისაზღვრება λ პარამეტრი. ანალოგიური მსჯელობით მიიღება განტოლებები λ-სათვის მეორე და მესამე გვარის შემთხვევაში და მათ, შესაბამისად, ექნებათ ასეთი სახე:

$$\varphi'(b,\lambda)=0 \qquad (8)$$

და

$$\varphi'(b,\lambda)+h_b\varphi(b,\lambda)+h_a\psi'(b,\lambda)+h_ah_b\psi(b,\lambda)=0\,. \qquad (9)$$

დებულება 1. *(7), (8), (9) განტოლებებს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი აქვთ.*

დამტკიცება ვაწარმოოთ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $p(x)=r(x)=1$. ამ დროს (1) იღებს სახეს:

$$X''(x)+\big(\lambda-q(x)\big)X(x)=0\,,$$

ხოლო (5), (6) ასიმპტოტური ფორმულები კი მოგვცემს:

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\left(\sqrt{\lambda}(x-a)\right)+O(\lambda^{-\frac{1}{2}}),\quad \lambda\to+\infty\,,\ \ x\in[a,b]\,;$$

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}(x-a)\right)}{\sqrt{\lambda}}+O(\lambda^{-1}),\quad \lambda\to+\infty\,,\ \ x\in[a,b]\,.$$

პირველი გვარის სასაზღვრო პირობის შემთხვევაში:

$$\psi(b,\lambda)=\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}(b-a)\right)}{\sqrt{\lambda}}+O(\lambda^{-1})$$

ფუნქცია რხევადია (ოსცილირებს) λ-ს საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის. ამის გამო, უსასრულოდ ბევრჯერ გადაკვეთს ნამდვილ რიცხვთა Ox ღერძს, რაც ნიშნავს, რომ (7) განტოლებას λ-ს მიმართ, ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვს.

მეორე გვარის სასაზღვრო პირობის ანალიზის დროს საჭიროა

$$\varphi^{/}(b,\lambda) = -\sin\left(\sqrt{\lambda}(b-a)\right) + O(\lambda)$$

ფუნქცია გამოვიკვლიოთ λ-ს საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის. $\varphi^{/}(b,\lambda)$ უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც უსასრულოდ იცვლის ნიშანს, ე.ი. მრავალჯერ გადაკვეთს Ox ღერძს. ამრიგად, (8) განტოლებასაც ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვს.

მესამე გვარის სასაზღვრო პირობას მივყავართ (9) განტოლების ფესვების პოვნამდე:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{/}(b,\lambda) + h_b\varphi(b,\lambda) + h_a\psi^{/}(b,\lambda) + h_a h_b\psi(b,\lambda) = \\
&= -\sin\left(\sqrt{\lambda}(b-a)\right) + O(1) + h_b\left(\cos(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(\lambda^{-1/2}\right) + \\
&+h_a\left(\cos(\sqrt{\lambda}(b-a)) + O(\lambda^{-1/2}\right) + +h_a h_b\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}(b-a)\right)}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-1})\right) = \\
&= -\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}(b-a)\right) + O(1), \quad \lambda \to +\infty.
\end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, ეს შემთხვევა მეორე გვარის ამოცანის პირობის ეკვივალენტურია. ახლა გადავიდეთ საკუთრივი რიცხვების განაწილებისა და შტურმ-ლიუვილის ამოცანის სპექტრის ბუნების შესწავლაზე. ფუნქციები, რომელთა ნულების საკითხი ახლახან განვიხილეთ, მთელი არანულოვანი ფუნქციებია λ-ს მიმართ და აქვთ ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ არანულოვან კომპლექსური ცვლადის მთელ ფუნქციას აქვს მხოლოდ იზოლირებული ნულები და თეორემა 1-ს, მივიღებთ შემდეგი დებულების დამტკიცებას.

დებულება 2. *შტურმ-ლიუვილის რეგულარულ ამოცანას პირველი, მეორე და მესამე გვარის სასაზღვრო პირობებში აქვს დისკრეტული სპექტრი:* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, *რომელიც შედგება ქვემოდან შემოსაზღვრული ნამდვილი რიცხვებისაგან.*

აქვე შევნიშნოთ, რომ შტურმ-ლიუვილის ამოცანას შესაძლებელია ჰქონდეს *უწყვეტი* და *შერეული* სპექტრიც.

მას შემდეგ, რაც საკუთრივი რიცხვები ვიპოვეთ, საკუთრივი ფუნქციების პოვნა პირველი, მეორე და მესამე გვარის სასაზღვრო პირობებში ხდება, შესაბამისად, შემდეგი გამოსახულების საშუალებით:

$$X_n(x) = B_n\psi(x,\lambda_n)\,,\ \ n = 1,2,3,\ldots;$$

$$X_n(x) = A_n\varphi^{/}(x,\lambda_n)\,,\ \ n = 1,2,3,\ldots;$$

$$X_n(x) = A_n\big(\varphi(x,\lambda_n) + h_a\psi(x,\lambda_m)\big)\,,\ \ n = 1,2,3,\ldots.$$

როგორც ვხედავთ, ყოველ $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ საკუთრივ რიცხვს შეესაბამება ერთადერთი, მუდმივი მამრავლის სიზუსტით განსაზღვრული საკუთრივი ფუნქცია: $X_1(x)\,, X_2(x)\,,$ ... $X_n(x),\ldots$.

თეორემა 2. *თუ* $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *რეგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი ფუნქციებია პირველ, მეორე და მესამე სასაზღვრო პირობებში, მაშინ ისინი ერთმანეთის ორთოგონალურები არიან* $[a,b]$ *-ზე წონით* $r(x)$*, ე.ი.:*

$$\int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ ||X_n||^2, & m = n. \end{cases}$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც გარკვეულ პირობებს (ამ პირობებს ქვემოთ მოვიყვანთ) აკმაყოფილებს, შესაძლებელია წარმოვადგინოთ:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) \tag{10}$$

მწკრივად. თუ დავუშვებთ, რომ (10) მწკრივი კრებადია და შესაძლებელია მისი წევრობრივი ინტეგრება, მაშინ (10) წარმოდგენაში მონაწილე C_n კოეფიციენტები გამოისახებიან შემდეგნაირად:

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x)r(x)X_n(x)dx}{||\,X_m(x)\,||^2}.$$

ზემოთ თქმული სამართლიანია ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც $[a,b]$-ზე აკმაყოფილებს ეგრეთ წოდებულ *დირიხლეს* პირობებს (იხ. § 10.1). ამ შემთხვევაში (10) მწკრივი კრებადია $f(x)$-საკენ ყველგან $[a,b]$-ზე, $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებს გარდა. თუ c წერტილში $f(x)$ პირველი გვარის წყვეტა აქვს, მაშინაც კრებადია (10) მწკრივი და მისი ჯამი $\dfrac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$ გამოსახულების ტოლია (იხ.თეორემა 1 პარაგრაფ 11.1-ში).

შტურმ-ლიუვილის ამოცანა მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობებში ოდნავ განსხვავებულია ზემოთ აღწერილი ამოცანებისაგან, ამიტომ მას ცალკე გამოვყოფთ. დავუშვათ, $\varphi(x,\lambda)$ და $\psi(x,\lambda)$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა (1) დიფერენციალური განტოლებისათვის და ფუნქციათა ეს წყვილი აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$\varphi(a,\lambda)=1\,,\quad \varphi'(a,\lambda)=0\,,\quad \psi(a,\lambda)=0\,,\quad \psi'(a,\lambda)=1\,. \qquad (11)$$

მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$X(x,\lambda)=A\varphi(x,\lambda)+B\psi(x,\lambda)$$

ზოგადი ამონახსნისათვის მივიღებთ:

$$A\big(\varphi(a,\lambda)-\varphi(b,\lambda)\big)+B\big(\psi(a,\lambda)-\psi(b,\lambda)\big)=0\,,$$

$$A\big(\varphi'(a,\lambda)-\varphi'(b,\lambda)\big)+B\big(\psi'(a,\lambda)-\psi'(b,\lambda)\big)=0\,.$$

აქედან, (11)-ის გათვალისწინებით ვიღებთ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემას A და B მუდმივების მიმართ:

$$\begin{aligned} A\big(1-\phi(b,\lambda)\big)-B\psi(b,\lambda)&=0,\\ -A\phi'(b,\lambda)+B\big(1-\psi'(b,\lambda)\big)&=0. \end{aligned} \qquad (12)$$

(12) სისტემას არატრივიალური ამონახსნი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ სისტემის დეტერმინანტი ნულოვანია:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\varphi(b,\lambda) & -\psi(b,\lambda) \\ -\varphi'(b,\lambda) & 1-\psi'(b,\lambda) \end{vmatrix}=0\,.$$

გამოვთვალოთ ეს დეტერმინანტი და გავითვალისწინოთ, რომ, ერთი მხრივ,

$$W(\varphi,\psi)=\frac{p(a)}{p(x)}\bigg|_{x=b}=\frac{p(a)}{p(b)}=1$$

და, მეორე მხრივ:

$$W(\varphi,\psi)=\varphi(b,\lambda)\psi^{/}(b,\lambda)-\psi(b,\lambda)\varphi^{/}(b,\lambda)\,.$$

საბოლოოდ გვექნება განტოლება საკუთრივი რიცხვებისათვის:

$$\Delta(\lambda)=2-\phi(b,\lambda)-\psi^{/}(b,\lambda)=0\,. \qquad (13)$$

მტკიცდება, რომ, როდესაც $\lambda\to\infty$, (13) განტოლებას აქვს ამონახსნთა ქვემოდან შემოსაზღვრული, უსასრულო, დისკრეტული სიმრავლე და ამონახსნები მდებარეობენ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. მიღებული შედეგი ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დებულების სახით.

დებულება 3. *შტურმ-ლიუვილის ამოცანას მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობებში აქვს ნამდვილი, ქვემოდან შემოსაზღვრული, უსასრულო, დისკრეტული სპექტრი.*

დავუშვათ, $\lambda=\lambda_n$ ამოცანის საკუთრივი რიცხვია. მაშინ (12)-დან გვექნება:

$$A\big(1-\varphi(b,\lambda_n)\big)-B\,\psi(b,\lambda_n)=0\,. \qquad (14)$$

შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს ქვემოთ მოყვანილი შემთხვევებიდან ერთ-ერთს:

1. $\psi(b,\lambda_n)\neq 0$, მაშინ:

$$B=\frac{1-\varphi(b,\lambda_n)}{\psi(b,\lambda_n)}A$$

და აქედან საკუთრივი ფუნქციები იქნება:

$$X_n(x)=A_n\left(\varphi(x,\lambda_n)+\frac{1-\varphi(b,\lambda_n)}{\psi(b,\lambda_n)}\psi(x,\lambda_n)\right).$$

2. $\psi(b,\lambda_n)=0$, $\varphi(b,\lambda_n)\neq 1$. მაშინ (14)-დან ვპოულობთ $A=0$ და საკუთრივ ფუნქციებს ექნებათ სახე:

$$X_n(x)=B_n\psi(x,\lambda_n)\,.$$

3. $\psi(b,\lambda_n)=0$, $\varphi(b,\lambda_n)=1$. ამ დროს საკუთრივი ფუნქციებია:

$$X_n(x)=A_n\varphi(x,\lambda_n)+B_n\psi(x,\lambda_n).$$

საკუთრივი ფუნქციების ზემოთ მოყვანილ გამოსახულებებში შემავალი $\varphi(b,\lambda_n)$ და $\psi(b,\lambda_n)$ ფუნქციები თვითონ არიან საკუთრივი ფუნქციები, ხოლო $\lambda=\lambda_n$ კი – ჯერადი ფესვებია.

შემდგომ, გადმოცემის მოხერხებულობის მიზნით, საკუთრივი ფუნქციებისათვის ვიხმართ აღნიშვნას:

$$X_n(x)=A_nX_n^{(1)}(x)+B_nX_n^{(2)}(x).$$

ახლა განვიხილოთ შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი ფუნქციების ორთოგონალურობის საკითხი მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობის შემთხვევაში. დავუშვათ, $\lambda=\lambda_n$ საკუთრივი რიცხვია, რომელსაც შეესაბამება საკუთრივი ფუნქცია $X_n(x)$, ხოლო $\lambda=\lambda_m$ საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციაა $X_m(x)$. (1) განტოლებიდან გვექნება:

$$\left(p(x)X_m^{/}(x)\right)^{/}+\left(\lambda_m r(x)-q(x)\right)X_m(x)=0,$$

$$\left(p(x)X_n^{/}(x)\right)^{/}+\left(\lambda_n r(x)-q(x)\right)X_n(x)=0.$$

პირველი განტოლება გავამრავლოთ $X_n(x)$-ზე, მეორე კი – $X_m(x)$. შემდეგ პირველს გამოვაკლოთ მეორე და ვაინტეგროთ მიღებული შედეგი $[a,b]$-ზე, მივიღებთ:

$$(\lambda-\lambda_n)\int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x)dx=0,$$

საიდანაც გვაქვს

$$\int_a^b r(x)X_m(x)X_n(x)dx=0,\quad m\neq n,$$

რაც ნიშნავს, რომ საკუთრივი ფუნქციები წყვილ-წყვილად ერთმანეთის ორთოგონალურები არიან $[a,b]$-ზე, წონით $r(x)$.

ზემოთ მიღებული შედეგი ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით.

თეორემა 3. *მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობებში შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი ფუნქციები, რომლებიც განსხვავებულ საკუთრივ მნიშვნელობებს შეესაბამებიან, ორთოგონალურები არიან* $[a,b]$ *-ზე, წონით* $r(x)$.

საზოგადოდ, საკუთრივი ფუნქციები, რომლებიც ერთსა და იმავე (ჯერად) საკუთრივ რიცხვებს შეესაბამებიან, შესაძლებელია არ იყვნენ ორთოგონალურები, მაგრამ მათი ორთოგონალიზაცია შესაძლებელია შემდეგი პროცედურის საშუალებით.

დავუშვათ, $\lambda = \lambda_n$ ჯერადი საკუთრივი რიცხვია და მას შეესაბამება ორი განსხვავებული საკუთრივი ფუნქცია $X_n^{(1)}(x)$ და $X_n^{(2)}(x)$, მაშინ, როგორც აღვნიშნეთ:

$$\int_a^b r(x) X_n^{(1)}(x) X_n^{(2)}(x) dx \neq 0 .$$

შევადგინოთ ორი ფუნქცია:

$$\widetilde{X}_n^{(1)}(x) = X_n^{(1)}(x), \quad \widetilde{X}_n^{(2)}(x) = X_n^{(2)}(x) - \gamma X_n^{(1)}(x) .$$

ნათელია, რომ ეს ფუნქციები აგრეთვე საკუთრივი ფუნქციებია. ვაჩვენოთ, რომ γ ყოველთვის შესაძლებელია ისე შეირჩეს, რომ $\widetilde{X}_n^{(1)}(x)$ და $\widetilde{X}_n^{(2)}(x)$ ფუნქციები იყვნენ ორთოგონალურები. მართლაც, მოვითხოვოთ, რომ შესრულდეს ტოლობა:

$$\int_a^b r(x) \widetilde{X}_n^{(1)}(x) \widetilde{X}_n^{(2)}(x) dx = \int_a^b r(x) X_n^{(1)}(x) X_n^{(2)}(x) dx - \int_a^b r(x) (X_n^{(1)}(x))^2 dx = 0 .$$

აქედან:

$$\gamma = \frac{\int_a^b r(x) X_n^{(1)}(x) X_n^{(2)}(x) dx}{\int_a^b r(x) (X_n^{(1)}(x))^2 dx} .$$

ამრიგად, ზემოთ მოყვანილი პროცედურების ჩატარება ყოველთვისაა შესაძლებელი, რადგან უკანასკნელი წილადის მნიშვნელი ნულისაგან განსხვავებულია. ამრიგად, ზოგადობის შეუზღუდავად, საკუთრივი ფუნქციები ყოველთვის შეიძლება ჩავთვალოთ ორთოგონალურებად. მოყვანილი მსჯელობიდან

გამომდინარეობს, რომ მეოთხე გვარის სასაზღვრო პირობების შემთხვევაშიც ფუნქციის მწკრივად წარმოდგენის არსი იგივეა, რაც პირველი, მეორე და მესამე გვარის სასაზღვრო პირობების დროს. მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

დებულება 4. *ყოველი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს დირიხლეს პირობებს $[a,b]$ ინტერვალზე, წარმოიდგინება მწკრივად შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი ფუნქციების საშუალებით.*

ამოცანა 1. ამოვხსნათ შტურმ-ლიუვილის შემდეგი ამოცანა:

$$X^{//}(x)+\lambda X(x)=0,\quad 0<x<2\pi\,;$$

$$X(0)=X(2\pi)\,,\ X'(0)=X'(2\pi).$$

ამოხსნა: განტოლების ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემად ავიღოთ ფუნქციები:

$$X^{(1)}(x,\lambda)=\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right),\ X^{(1)}(x,\lambda)=\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}.$$

ზოგადი ამონახსნი ასეთია:

$$X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}\,.$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ გამოსახულებებს:

$$A(1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi))-B\frac{\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)}{\sqrt{\lambda}}=0\,,$$

$$A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)+B(1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi))=0\,.$$

საკუთრივი რიცხვების საპოვნელად ვხსნით განტოლებას:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi) & \dfrac{\sin(\sqrt{\lambda}2\pi)}{\sqrt{\lambda}}\\ \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) & 1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi)\end{vmatrix}=0\ \ \Rightarrow$$

$$\Delta(\lambda)=2(1-\cos(\sqrt{\lambda}2\pi))=0\Rightarrow$$

$$\cos(\sqrt{\lambda}2\pi))=1\Rightarrow\ \lambda_n=n^2\,,\ \ n=0,1,2,\dots\,.$$

საკუთრივი ფუნქციები იქნება:

$$X_n(x) = A_n \cos(nx) + B_n \frac{\sin(nx)}{n}.$$

ზემოთ მოყვანილი აღნიშვნების შესაბამისად შეგვიძლია საკუთრივი ფუნქციები გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$X_0(x) = 1\,,\ \ X_n^{(1)}(x) = \cos(nx)\,,\ \ X_n^{(2)}(x) = \sin(nx)\,,\ \ n = 0,1,2,\ldots.$$

ამრიგად, $\lambda_0 = 0$ მარტივი საკუთრივი რიცხვია, რომელსაც შეესაბამება საკუთრივი ფუნქცია $X_0(x) = 1$, ხოლო დანარჩენი საკუთრივი რიცხვების ჯერადობა 2-ის ტოლია. ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციის დაშლას, რომელიც დირიხლეს პირობას აკმაყოფილებს, ამოცანის საკუთრივი ფუნქციების საშუალებით აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx\,,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx\,,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx\,.$$

ქვემოთ მოვიყვანთ ზოგიერთი სინგულარული ამოცანის ამოხსნის ნიმუშს.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ შტურმ-ლიუვილის ამოცანა:

$$X^{//}(x) + \lambda X(x) = 0,\ \ 0 < x < \infty\,,$$

$$X(0) = 0\,,\ \ X|_{x\to\infty}(0) = O(1)\,.$$

ამოხსნა: ზოგადი ამონახსნი ასეთია:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)\,.$$

პირველი სასაზღვრო ამოცანიდან გამომდინარეობს, რომ $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$. ამრიგად:

$$X(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}x)\,.$$

$X|_{x\to\infty}(0) = O(1)$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\sqrt{\lambda}$ ნამდვილი რიცხვია და, მაშასადამე $\lambda > 0$. ამ შემთხვევაში განტოლების ზო-

გადი ამონახსნია $X(x) = A + Bx$, სასაზღვრო პირობიდან ვიღებთ $A = 0$ და $B = 0$. ამრიგად, $\lambda = 0$ არ არის ამოცანის საკუთრივი რიცხვი. საბოლოოდ გვაქვს: $\lambda \in (0, \infty)$, ე.ი. ამოცანას აქვს უწყვეტი სპექტრი. მოსახერხებელია ვიხმაროთ აღნიშვნა $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2$, $0 < \nu < \infty$, ასეთ პირობებში საკუთრივი ფუნქციები იქნება $X_\nu(x) = \sin(\nu x)$.

ამოცანა 3. ამოვხსნათ შტურმ-ლიუვილის შემდეგი ამოცანა:

$$(r^2 R'(r))' + \lambda r^2 R(r) = 0, \quad 0 < r < a, \quad R|_{r\to 0} = O(1), \quad R(a) = 0 .$$

ამოხსნა: დიფერენციალური განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(r^2 R'(r))' + \lambda r^2 R(r) = 0$$

$$r^2 R''(r) + 2rR' + \lambda r^2 R = 0 \quad \Rightarrow \quad rR''(r) + 2R' + \lambda r R = 0 .$$

გამოვიყენოთ ტოლობა $(rR)'' = rR'' + 2R'$ (შეამოწმეთ მისი სამართლიანობა!) და გადავწეროთ ბოლო დიფერენციალური განტოლება მისი ეკვივალენტური ფორმით:

$$(rR)'' + \lambda r R = 0 .$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$rR(r) = A\cos(\sqrt{\lambda} r) + B\sin(\sqrt{\lambda} r) .$$

აქედან გამოდის, რომ საწყისი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$R(r) = A\frac{\cos(\sqrt{\lambda} r)}{r} + B\frac{\sin(\sqrt{\lambda} r)}{r}$$

ფუნქცია. სასაზღვრო პირობებდიან გამომდინარეობს, რომ:

$$R|_{r\to 0} = O(1) \quad \Rightarrow \quad A = 0,$$

$$R(a) = 0 \Rightarrow B\frac{\sin(\sqrt{\lambda} r)}{r} = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda} a) = 0, \quad B \neq 0 .$$

ამრიგად, საკუთრივი რიცხვები იქნება:

$$\sqrt{\lambda} a = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ხოლო შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია:

$$R_n(r) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a} r\right)}{r}.$$

როდესაც $\lambda = 0$, ზოგადი ამონახსნია: $R(r) = \frac{A}{r} + B$, სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს: $A = B = 0$, რაც ნიშნავს, რომ $\lambda = 0$ არ არის ამოცანის საკუთრივი რიცხვი. ამოცანას კი დისკრეტული სპექტრი აქვს.

ამოცანა 4. ამოვხსნათ შტურმ-ლიუვილის შემდეგი ამოცანა:

$$(rR^{/}(r))^{/} + \frac{\lambda}{r} R(r) = 0, \quad 0 < r < a, \quad R|_{r \to 0} = O(1), \quad R(a) = 0.$$

ამოხსნა: დიფერენციალური განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$rR^{//}(r) + R^{/} + \frac{\lambda}{r} R = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 R^{//}(r) + rR^{/} + \lambda R = 0.$$

მივიღეთ ეილერის განტოლება, რომლის ამონახსნს ვეძებთ $R = r^s$ სახით ფუნქციათა შორის. უკანასკნელ განტოლებაში ჩასმით ვიღებთ განტოლებას s-ის მიმართ:

$$s(s-1) + s + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm i\sqrt{\lambda},$$

ე.ი. განტოლების ამონახსნია $R(r) = r^{\pm i\sqrt{\lambda}} = e^{\pm i\sqrt{\lambda}\ln(r)}$. მოსახერხებელია ამონახსნთა ფუნდამენტურ სისტემად ავიღოთ ფუნქციები $\cos(\sqrt{\lambda}\ln(r))$ და $\sin(\sqrt{\lambda}\ln(r))$. ასეთ პირობებში ზოგადი ამონახსნია:

$$R(r) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln(r/a)\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln(r/a)\right)$$

ფუნქცია. $R(a) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $A = 0$, ხოლო $R(0) = O(1)$-დან კი ვიღებთ, რომ $\sqrt{\lambda}$ ნამდვილი რიცხვია, ე.ი. $\lambda > 0$. აღვნიშნოთ: $\lambda = \lambda_\nu = \nu^2$, $0 < \nu < \infty$. მივიღებთ საკუთრივ ფუნქციებს:

$$R_\nu(r) = \sin\left(\nu\ln(r/a)\right).$$

თუ $\lambda = 0$, მაშინ ზოგადი ამონახსნია $R(r) = A\ln(r) + B$ ფუნქცია. სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ ტოლობებს: $A = B = 0$, რაც ნიშნავს, რომ

$\lambda = 0$ არ არის ამოცანის საკუთრივი რიცხვი. ამრიგად, ამოცანას აქვს უწყვეტი სპექტრი და $\lambda \in (0,\infty)$.

ამოცანა 5. განვიხილოთ კიდევ ერთი ამოცანა:

$$X^{//}(x) + (\lambda - x^2)X(x) = 0\,, \ -\infty < x < \infty\,, \ X|_{x\to\pm\infty} = O(1)\,.$$

ამოხსნა: ანალოგიური მსჯელობებით შესაძლებელია ვაჩვენოთ (აუცილებელი გარდაქმნები შეასრულეთ დამოუკიდებლად!), რომ ამოცანის საკუთრივი რიცხვებია $\lambda = \lambda_n = 2n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$, ხოლო საკუთრივი ფუნქციები კი:

$$X_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\,,$$

სადაც $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$, $n = 0,1,2,\ldots$ ერმიტის მრავალწევრებია. ამოცანის სპექტრი დისკრეტულია.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითებიდან შესაძლებელია გაკეთდეს დასკვნა: *სინგულარული შტურმ-ლიუვილის ამოცანის სპექტრი დამოკიდებულია სასაზღვრო პირობებზე. თუ ამოცანის სპექტრი აღმოჩნდა დისკრეტული, მაშინ რეგულარული ამოცანის ამოხსნის მეთოდები მთლიანად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სინგულარული ამოცანის ამოსახსნელადაც, ხოლო, თუ სპექტრი შერეული ან უწყვეტია, მაშინ რეგულარული ამოცანისათვის გაკეთებული დასკვნები არ ვრცელდება სინგულარულ ამოცანაზე.*

11.3. რამდენიმე ტიპიური ამოცანა

1. $y''(x) + \alpha y(x) = 0, y'(0) = y'(l) = 0.$

   $y''(x) + \alpha y(x) = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

   ა) $y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha}x)$, როდესაც $\alpha > 0$;

   ბ) $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x}$, როდესაც $\alpha < 0$;

   გ) $y(x) = c_1 x + c_2$, როდესაც $\alpha = 0$.

განვიხილოთ თითოეული შემთხვევა ცალ-ცალკე.

ა) როდესაც $\alpha > 0$, $y'(0) = 0$, სასაზღვრო პირობის თანახმად, $y'(x) = c_1\sqrt{\alpha}\, cos(\sqrt{\alpha}x) - c_2\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა 0-ში 0-ის ტოლია, ე.ი. $y'(0) = c_1\sqrt{\alpha} = 0$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $c_1 = 0$. $y'(l) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან კი გვაქვს $c_2\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}l) = 0$, აქედან

მივიღებთ, რომ ან $c_2 = 0$, ან $\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}l) = 0$. თუ $c_2 = 0$, მაშინ განტოლების ამონახსნი იქნება ტრივიალური, ამიტომ ვუშვებთ, რომ $c_2 \neq 0$, მაშინ $\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}l) = 0$. ეს ტოლობა კი სრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\sqrt{\alpha}l = \pi k$, ე.ი. $\alpha = (\frac{\pi k}{l})^2$, $k \in \mathbb{N}$. ამრიგად, მოცემული ამოცანის საკუთრივი რიცხვებია $\alpha_k = (\frac{\pi k}{l})^2$, რომელთა შესაბამისი ამონახსნებია $y_k(x) = c_2\cos(\frac{\pi k}{l}x)$. საკუთრივი ფუნქციები კი იქნება $y_k(x) = \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$. გავიხსენოთ, რომ საკუთრივ რიცხვს მრავალი საკუთრივი ვექტორი შეესაბამება, მაგრამ ისინი წრფივად დამოკიდებულებია. მათ შორის ვირჩევთ ერთ-ერთს. ნორმირებული საკუთრივი ფუნქციის მისაღებად საჭიროა მათი ნორმირება. რადგან:

$$\int_0^l c_2 cos^2\left(\frac{\pi k}{l}x\right)dx = c_2\int_0^l \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi k}{l}x\right)dx + \frac{c_2}{2}\int_0^l dx =$$

$$= \frac{c_2}{2}\frac{l}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi k}{l}x\right)|_0^l + \frac{c_2}{2}(x+c)|_0^l = \frac{c_2}{2}l,$$

ამიტომ $c_2 = \frac{2}{l}$. ამრიგად, c_2 გამოითვლება ნორმირების $\int_0^l c_2\cos^2(\frac{\pi k}{l}x)dx = 1$ პირობიდან და მივიღეთ, რომ $y_k(x) = \frac{2}{l}\cos(\frac{\pi k}{l}x)$ არიან ამოცანის ნორმირებული საკუთრივი ფუნქციები.

ბ) როდესაც $\alpha < 0$, განტოლების ამონახსნის გაწარმოებით მივიღებთ $y'(x) = c_1\sqrt{\alpha}e^{\sqrt{-\alpha}x} - c_2\sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{-\alpha}x}$. პირველი სასაზღვრო პირობიდან გვაქვს: $y'(0) = c_1 - c_2 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = c_2$, ხოლო მეორე სასაზღვრო პირობა კი გვაძლევს: $y'(l) = c_1\sqrt{\alpha}e^{\sqrt{-\alpha}l} - c_2\sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{-\alpha}l} = 0$. ამ უკანასკნელიდან კი $c_1 = c_2$, $\alpha \neq 0, l \neq 0$ გათვალისწინებით ვიღებთ $c_1 = c_2 = 0$. ამრიგად, ამოცანას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

გ) როდესაც $\alpha = 0$, როგორც აღვნიშნეთ, განტოლების ამონახსნია $y(x) = c_1x + c_2$ წრფივი ფუნქცია. $y'(x) = c_1$, ამიტომ, პირველი სასაზღვრო პირობის თანახმად, $c_1 = 0$. მეორე სასაზღვრო პირობა კი $y(x) = c_2$ მუდმივი ფუნქციისათვის სრულდება ნებისმიერი c_2 რიცხვისათვის. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ამოცანის არატრივიალური ამონახსნია ნებისმიერი მუდმივი. $\alpha = 0$ საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ფუნქცია კი იქნება: $y_0(x) = \frac{1}{l}$.

2. $y''(x) + \alpha y(x) = 0, y(0) = y'(l) + hy(l) = 0,\ h > 0.$

ა) $y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha}x)$, როდესაც $\alpha > 0$;

ბ) $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x}$, როდესაც $\alpha < 0$;

გ) $y(x) = c_1 x + c_2$, როდესაც $\alpha = 0$.

ა) როდესაც $\alpha > 0$, $y(0) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$c_2 = 0 \ \Rightarrow\ y(x) = c_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) \ \Rightarrow\ y'(x) = c_1\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}x),$$

ამიტომ მეორე სასაზღვრო $y'(l) + hy(l) = 0$ პირობიდან გვაქვს:

$$c_1(\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}l) + h\sin(\sqrt{\alpha})) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$
$$\text{ან}\ \sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}l) + h\sin(\sqrt{\alpha}l) = 0.$$

თუ $c_1 = 0$, მაშინ ამოცანას ექნება მხოლოდ 0-ოვანი ამონახსნი, ამიტომ ვუშვებთ, რომ $c_1 \neq 0$, მაშინ:

$$\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}l) + h\sin(\sqrt{\alpha}l) = 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{\alpha} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\alpha}l).$$

ამ ტრანსცენდენტურ განტოლებას ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა აქვს. მართლაც, $\sqrt{\alpha}$ და $-h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\alpha}l)$ ფუნქციების გრაფიკებს უსასრულო რაოდენობის გადაკვეთის წერტილები აქვთ, რომელთა პოვნა შესაძლებელია საკმაოდ დიდი სიზუსტით. აღვნიშნოთ ისინი α_k-თი. ამრიგად, α_k-ს შესაბამისი ამონახსნი იქნება $y_k(x) = c_1\sin(\sqrt{\alpha_k}x)$. c_1-ს ვიპოვით ნორმირების პირობიდან.

როდესაც $\alpha \leq 0$, ამოცანას არანულოვანი ამონახსნი არ აქვს. ამაში დავრწმუნდებით ამოცანა 1-ის შესაბამის პუნქტებში მოყვანილი მსჯელობის განმეორებით. მართლაც, როდესაც $\alpha = 0$, განტოლების ზოგადი ამონახსნია $y(x) = c_1 x + c_2$, ამიტომ $y'(x) = c_1$. პირველი სასაზღვრო პირობიდან გვაქვს $y(0) = c_2 = 0$, ხოლო მეორე სასაზღვრო პირობის თანახმად, $y'(l) + hy(0) = c_1 + hc_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. იმ შემთხვევაში, როდესაც $\alpha < 0$, სასაზღვრო პირობებს მივყავართ ტრანსცენდენტურ $e^{2\sqrt{-\alpha}l} = \frac{h-\sqrt{-\alpha}}{h+\sqrt{\alpha}}$ განტოლებამდე. ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე, როდესაც $\sqrt{\alpha} > 0$, ნაკლებია ერთზე, ხოლო მარცხენა მხარე კი მეტია ერთზე, რის გამოც განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ: $c_1 = c_2 = 0$.

ამრიგად, ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი აქვს, როდესაც $\alpha > 0$. მისი საკუთრივი რიცხვებია $\sqrt{\alpha} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\alpha}l)$ განტოლების α_k, $k \in \mathbb{N}$ ამონახს-

ნები, ხოლო მათი შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია $y_k(x) = \sin\left(\sqrt{\alpha_k}x\right)$. ამოცანა 1-ში მოყვანილი მსჯელობის განმეორება საკმარისია $\sin\left(\sqrt{\alpha_k}x\right)$ ფუნქციების ნორმირებისათვის, კერძოდ, $\sqrt{\int_0^l \sin^2\left(\sqrt{\alpha_k}x\right)dx} = \frac{l}{2}$.

3. $y''(x) + \alpha y(x) = 0, y'(0) - Hy(0) = y'(l) + hy(l) = 0,\ H, h > 0.$

$y''(x) + \alpha y(x) = 0$ განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$y(x) = c_1 sin\sqrt{\alpha}x + c_2 cos\sqrt{\alpha}x,\ \text{როდესაც}\ \alpha > 0;$$

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x},\ \text{როდესაც}\ \alpha < 0;$$

$$y(x) = c_1 x + c_2,\ \text{როდესაც}\ \alpha = 0.$$

როდესაც $\alpha > 0$, გვაქვს $y'(x) = c_1\sqrt{\alpha}cos\sqrt{\alpha}x - c_2\sqrt{\alpha}sin\sqrt{\alpha}x$. $y'(0) - Hy(0) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან მივიღებთ:

$$c_1\sqrt{\alpha} - Hc_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = H\frac{c_2}{c_1}. \qquad (1)$$

მეორე $y'(l) + hy(l) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\sqrt{\alpha}(c_1 cos\sqrt{\alpha}l - c_2 sin\sqrt{\alpha}l) + h(c_1 sin\sqrt{\alpha}l + c_2 cos\sqrt{\alpha}l) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$c_1\left(\sqrt{\alpha}cos\sqrt{\alpha}l + hsin\sqrt{\alpha}l\right) + c_2\left(-\sqrt{\alpha}sin\sqrt{\alpha}l + hcos\sqrt{\alpha}l\right) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\alpha}cos\sqrt{\alpha}l + hsin\sqrt{\alpha}l}{\sqrt{\alpha}sin\sqrt{\alpha}l - hcos\sqrt{\alpha}l}.$$

(1), (2) $\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{H} = \frac{\frac{\sqrt{\alpha}}{h}ctg\sqrt{\alpha}l + 1}{\frac{\sqrt{\alpha}}{h} - ctg\sqrt{\alpha}l}$$

$$\Rightarrow$$

$$ctg\sqrt{\alpha}l\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{H} + \frac{\sqrt{\alpha}}{h}\right) = \frac{\alpha}{Hh} - 1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{h}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$ctg\sqrt{\alpha}l = \frac{\sqrt{\alpha}}{h}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\alpha}}\right)\frac{Hh}{\sqrt{\alpha}(H+h)}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$ctg\sqrt{\alpha}l = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\alpha}}\right). \tag{3}$$

α შეგვიძლია ვიპოვოთ სხვა გზითაც, კერძოდ, (2) ტოლობიდან:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\alpha}cos\sqrt{\alpha}l + hsin\sqrt{\alpha}l}{\sqrt{\alpha}sin\sqrt{\alpha}l - hcos\sqrt{\alpha}l} = -tg\left(a + \sqrt{\alpha}l\right),$$

სადაც $a = arcsin\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha+h^2}$.

გავიხსენოთ, რომ: $\sqrt{\alpha} = H\frac{c_2}{c_1}$, ამიტომ:

$$\sqrt{\alpha} = -Htg(a + \sqrt{\alpha}l). \tag{4}$$

(3) და (4) განტოლებებს დადებით ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა აქვთ (დავრწმუნდეთ გრაფიკების საშუალებით ამონახსნის პოვნის ხერხის გამოყენებით!).

ამრიგად, როდესაც შტურმ-ლიუვილის მოცემულ ამოცანას აქვს უსასრულო რაოდენობის საკუთრივი რიცხვები, რომლებიც არიან (3) განტოლების ამონახსნები, მაშინ მათი შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია:

$$y_k(x) = Hsin\sqrt{\alpha_k}x + \sqrt{\alpha}cos\sqrt{\alpha_k}x,\ k\epsilon\mathbb{N}.$$

როდესაც $\alpha < 0$, ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი არ აქვს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\alpha = 0$. $y'(0) - Hy(0) = 0$ სასაზღვრო პირობიდან გვაქვს $c_1 - Hc_2 = 0 \ \Rightarrow \ y(x) = c_2(Hx+1)$. მეორე $y'(l) + hy(l) = 0$ სასაზღვრო პირობა გვაძლევს $c_2(H + Hhl + h) = 0$, საიდანაც $c_1 = c_2 = 0$. ამრიგად, განხილულ შემთხვევაში ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი არ აქვს. აქვე შევნიშნოთ, რომ:

$$||y_k||^2 = \frac{l(H^2+\alpha_k)^2(h^2+\alpha_k) + (H+h)(\alpha_k+Hh)(\alpha_k+H^2)}{2(H^2+\alpha_k)(h^2+\alpha_k)}.$$

როდესაც $H = h$, გვექნება $||y_k||^2 = \frac{l(h^2+\alpha_k)+2h}{2}$.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. პარაგრაფ 10.1-ის დებულება 1-ის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი a-სათვის:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cosx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sinx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sin2x, \dots$$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა სისტემა ორთონორმირებულია $[a, a + 2\pi]$ სეგმენტზე.

2. ამოხსენით შტურმ-ლიუვილის შემდეგი ამოცანები:

1. $y''(x) + \alpha y(x) = 0, y(0) = y'(l) = 0.$

საკუთრივი რიცხვები: $\alpha_k = (\frac{\pi(2k-1)}{2l})^2$, საკუთრივი ფუნქციები:

$$y_k(x) = \sin(\frac{\pi(2k-1)}{2l}x),\ k \in \mathbb{N},\ ||y_k||^2 = \frac{l}{2}.$$

2. $y''(x) + \alpha y(x) = 0, y'(0) = y(l) = 0.$

საკუთრივი რიცხვები: $\alpha_k = (\frac{\pi(2k-1)}{2l})^2$, საკუთრივი ფუნქციები:

$$y_k(x) = \cos(\frac{\pi(2k-1)}{2l}x),\ k \in \mathbb{N},\ ||y_k||^2 = \frac{l}{2}.$$

3. $y''(x) + \alpha y(x) = 0, y'(0) - hy(0) = y(l) = 0,\ h > 0$

ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი აქვს, როდესაც $\alpha_k > 0$, სადაც α_k არის $\sqrt{\alpha} = -htg(\sqrt{\alpha}l)$ განტოლების ამონახსნები, ხოლო შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია: $y_k(x) = hsin(\sqrt{\alpha_k}x) + \sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha_k}x), k \in \mathbb{N}$, $||y_k||^2 = \frac{l(h^2+\alpha_k)+h}{2}$.

4. $y''(x) + \alpha y(x) = 0, y'(0) = y'(l) + hy(0) = 0,\ h > 0.$

ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი აქვს, როდესაც $\alpha_k > 0$, სადაც α_k არის $\sqrt{\alpha}tg(\sqrt{\alpha}l) = h$ განტოლების ამონახსნები, ხოლო შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია $y_k(x) = \cos(\sqrt{\alpha_k}x), k \in \mathbb{N},\ ||y_k||^2 = \frac{l(h^2+\alpha_k)+h}{2(h^2+\alpha_k)}$.

5. $y''(x) + \alpha y(x) = 0, y'(0) - hy(0) = y'(l) = 0,\ h > 0.$

ამოცანას არატრივიალური ამონახსნი აქვს, როდესაც $\alpha_k > 0$, სადაც α_k არის $\sqrt{\alpha} = -hctg(\sqrt{\alpha}l)$ განტოლების ამონახსნები, ხოლო შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია $y_k(x) = hsin(\sqrt{\alpha_k}x) + \sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha_k}x), k \in \mathbb{N}$, $||y_k||^2 = \frac{l(h^2+\alpha_k)+h}{2}$.

6. $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right)+\dfrac{\lambda}{x}y=0$, $y(a)=0$, $y(b)=0$, $x\in[a,b]$, $a\neq 0$, $b\neq 0$;

7. $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\dfrac{dy}{dx}\right)+\lambda x^2 y=0$, $y(a)=0$, $y(b)=0$, $x\in[a,b]$, $a\neq 0$, $b\neq 0$;

8. $y^{//}(x)+\lambda y(x)=0$, $y(-l)=0$, $y(l)=0$, $x\in[-l,l]$;

9. $y^{//}(x)+\lambda y(x)=0$, $y(-l)=0$, $y^{/}(l)=0$, $x\in[-l,l]$;

10. $y^{//}(x)+\lambda y(x)=0$, $-y^{/}(-l)+hy(-l)=0$, $y^{/}(l)+hy(l)=0$, $x\in[-l,l]$, $h>0$;

11. $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right)+\dfrac{\lambda}{x}y=0$, $y^{/}(a)=0$, $y^{/}(b)=0$, $x\in[a,b]$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

3. დაშალეთ ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივად $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე შემდეგი ფუნქციები:

1. $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x, -\pi\le x\le 0,\\ \frac{\pi}{2}-x, 0<x\le\pi.\end{cases}$

   პასუხი: $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

2. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x\le 0,\\ sinx, 0<x\le\pi.\end{cases}$

   პასუხი: $f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}sinx-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx)$.

4. $\sin\frac{k\pi x}{l}, k=1,2,\ldots$ ბაზისში დაშალეთ შემდეგი ფუნქციები:

1. $\varphi(x)\equiv 1, 0<x<l$. მითითება: $\varphi_k=\frac{2}{k\pi}(1+(-1)^k$.

2. $\varphi(x)\equiv x, 0<x<l$. მითითება: $\varphi_k=-\frac{2}{k\pi}l(-1)^k$.

12. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების კვადრატურებში ინტეგრებადობა

12.1. კომპიუტერული ალგებრის სისტემების შესახებ

კომპიუტერული ალგებრის სისტემებს უწოდებენ ისეთ პროგრამულ პაკეტებს (ან ცალკეულ მოდულებს), რომლებიც ოპერირებენ სიმბოლურ (ე.ი. ალგებრულ, მაგალითად, $(a+b)^2 - ab$, და არა არითმეტიკულ, მაგალითად, $(5+7)^2 - 5\times 7$) გამოსახულებებზე. კომპიუტერული ალგებრის რამდენიმე სისტემა არსებობს, მათ შორის სამეცნიერო და საუნივერსიტეტო წრეებში ყველაზე გავრცელებულია Maple და Mathematica. დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად ამ პაკეტებს ხშირად მიმართავენ, ამიტომ აქ რამდენიმე შენიშვნას გავაკეთებთ, საზოგადოდ, კომპიუტერული ალგებრის სისტემების შესახებ.

დამწყებისათვის კომპიუტერული ალგებრის ნებისმიერი სისტემის გამოყენებაზე ადვილი არაფერია. საკმარისია იცოდეს რამდენიმე ბრძანება და მათი საშუალებით შეძლებს ისეთი სიმბოლური და რიცხვითი გამოთვლების წარმოებას, რომელსაც ფურცლითა და ფანქრით რამდენიმე საათი დასჭირდებოდა და, ხშირ შემთხვევაში, მათი გაკეთება შეუძლებელიც კი იქნებოდა. კომპიუტერული ალგებრის სისტემების სინტაქსი მარტივია და, გარდა ამისა, მონაცემების და გამოსახულებების შეტანა საკმაოდ ადვილია, რადგან მათი წარმოდგენისათვის საჭირო არ არის სპეციალური ჩანაწერები, ისინი მაქსიმალურად არიან დაახლოებულნი წერის იმ სტილთან, რომელსაც ჯერ კიდევ სკოლის მერხიდან ვეჩვევით.

დაპროგრამების ჩვეულებრივი ენებისაგან განსხვავებით, კომპიუტერული ალგებრის სისტემებს ერთი რამ ნამდვილად ახასიათებთ და მათი ცოდნა აუცილებელია. ეს გახლავთ შემდეგი: C ან რომელიმე სხვა ენაზე დასაპროგრამებლად მნიშვნელოვანია ენის სინტაქსის ცოდნა, მაგრამ სულაც არაა აუცილებელი იცოდეთ როგორ მუშაობს კომპილატორი. კომპიუტერული ალგებრის სისტემებზე დაპროგრამების დროს კი ამის ცოდნა მნიშვნელოვანია. კერძოდ, ხშირად საჭიროა გავარკვიოთ, როგორ ხდება მიმართვა მონაცემებზე და რა ალგორითმით ხდება მათი დამუშავება. მართლაც, წინასწარ ძნელია და ხშირად შეუძლებელიცაა გამოთვლების ზომების წინასწარ დადგენა, მხედველობაში გვაქვს გამოთვლებისათვის საჭირო დრო და მეხსიერე-

ბა, აგრეთვე მიღებული შედეგის აღქმადობა (ხანდახან გამოთვლების შედეგები რამდენიმე თაბახს იკავებს). ალგორითმის ცოდნა საშუალებას იძლევა შედეგის ოპტიმიზაცია მოვახდინოთ გამოთვლების დროის და მანქანური მეხსიერების თვალსაზრისით. ალგებრულ ოპერაციათა უმრავლესობა მომენტალურად სრულდება, მაგრამ, თუ აღმოჩნდა, რომ ეს ასე არ არის, შესაძლებელია ტყუილად ვიზრუნოთ რესურსების გაზრდაზე, როდესაც წარუმატებლობის მიზეზი შუალედური გამოთვლების ექსპონენციალურად ზრდაა. მაგალითად, C-ზე დაპროგრამების დროს არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს, ვეძებთ 100×100 თუ 500×500 ზომის მატრიცების საკუთრივ რიცხვებს, რადგან გამოთვლების დრო პრაქტიკულად წრფივად იზრდება, მაშინ, როდესაც კომპიუტერული ალგებრის სისტემაზე 5×5 ზომის მატრიცის საკუთრივი რიცხვის გამოთვლას შეიძლება დასჭირდეს 15 წამი, ხოლო 6×6 ზომის მატრიცისას კი – 15 წუთი.

ამიტომ დაპროგრამების ეფექტური სტილის ათვისება და გამომუშავება უნარისა, წინასწარ განჭვრიტო გამოთვლის ზომები, კომპიუტერული ალგებრული სისტემების ეფექტურად გამოყენების დროს უდავო წინაპირობაა. სამწუხაროდ, არც ერთისა და არც მეორისათვის, ერთი რეცეპტის შეთავაზება არავის შეუძლია, ერთიც და მეორეც გამოცდილების დაგროვებასთან ერთად მოდის.

თუ კომპიუტერული ალგებრის სისტების ოპტიმალურად გამოყენება არ ხდება, მაშინ მასზე სერიოზული, სამეცნიერო გათვლების წარმოება ხშირად შეუძლებელია და პირველი კითხვა რაც შეიძლება მომხმარებელმა დასვას, შესაძლებელია იყოს ასეთი: ღირს თუ არა დრო დავკარგო დაპროგრამების ისეთი ენის შესწავლაზე, რომელსაც მხოლოდ, ეგრეთ წოდებული, სათამაშო ამოცანების ამოხსნა შეუძლია? ამასთან დაკავშირებით ჩვენ პირდაპირ ვაცხადებთ, რომ კომპიუტერული ალგებრის სისტემები არიან ხელოვნური ინტელექტის პირველი ხელმისაწვდომი მაგალითები. მანქანას პაექრობა არ შეუძლია ადამიანთან, რომელიც იყენებს მეხსიერებას, გამოცდილებას, კომბინირებულ, ასოციაციურ და ინტუიციურ აზროვნებას. ხელოვნური ინტელექტის კვლევამ აჩვენა, თუ რამდენად ბევრი იცის, რამდენად ბევრი შეუძლია ადამიანს და რამდენად ეფექტურად იყენებს მას მუშაობის დროს.

სიმბოლური გამოთვლების ყველა სისტემაში ჩადებულია მათემატიკური და ლოგიკური წესების ერთობლიობა. სისტემის უნივერსალობისაკენ მიმავალ გზაზე მუდამ გვხვდება გადაუჭრელი პრობლემები. მაგალითად, სტუდენტისათვის გასაგებია ჩანაწერი $\ln 2$, ამ გამოსახულებაში ის არასოდეს იგულისხმებს მრავალსახა ფუნქციას, მაშინ, როდესაც გამომთვლელი მანქანისათვის ასეთი

გადასვლა პრობლემაა. ამის გამო მომხმარებელმა არა მარტო უნდა მისდიოს სისტემაში ჩადებული წესების ერთობლიობას, არამედ კარგად უნდა გააგებინოს გამომთვლელ მანქანას, რისი მიღწევა სურს მას და რას გულისხმობს ინტუიციურად. ამიტომ ყოველი მომხმარებელი, კომპიუტერული ალგებრის სისტემებთან მუშაობის დროს, თავის სტილს გამოიმუშავებს.

როგორც სპეციალისტები მიუთითებენ, კომპიუტერულ ალგებრებზე მუშაობის დაწყებას ყოველთვის აქვს აზრი, რადგან, ყველაფერს რომ თავი დავანებოთ, ის არის საკმაოდ ხელსაყრელი გრაფიკული კალკულატორი, რომლის შესაძლებლობების გამოსაყენებლად არ არის აუცილებელი ალგორითმების ცოდნა, საკმარისია ვიცოდეთ შესაბამისი ბრძანებები და სინტაქსი.

სიმბოლური გამოთვლების სისტემა (აპლიკაცია) Maple-სათვის დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემების ამოსახსნელად, რეალიზებულია ბრძანება dsolve (*განტოლებები, ცვლადები, ოპციები*), სადაც *განტოლებები* აღნიშნავს ამოსახსნელ დიფერენციალურ განტოლებას ან განტოლებათა სისტემას. *ცვლადები* მიუთითებს იმაზე, თუ რომელი ცვლადების მიმართ უნდა ამოიხსნას განტოლება, ხოლო *ოპციები* კი ის აუცილებელი პარამეტრებია, რომლებიც მოიცემიან შემდეგი სახით: *სიტყვა-გასაღები=მნიშვნელობა.*

ბრძანება dsolve-ს საშუალებით ანალიზურად იხსნება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა უმრავლესობა. თუ ოპცია მითითებულია ასე: type=exact, მაშინ ბრძანება ცდილობს იპოვოს განტოლების ზუსტი ამონახსნი, ანუ განტოლება ამოხსნას კვადრატურებში. ამბობენ, რომ განტოლება იხსნება *კვადრატურებში* (ან ინტეგრებადია კვადრატურებში), თუ მისი ყველა ამონახსნი ცხადად ან არაცხადად გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებზე სასრული არითმეტიკული ოპერაციების, მათი სუპერპოზიციის და პირველყოფილის საშუალებით.

მაგალითად, განტოლება $y^{/} = e^{-x^2}$ ამოხსნადია კვადრატურებში, რადგან მისი ამონახსნია $y = \int e^{-x^2} dx + C$, მიუხედავად იმისა, რომ $\int e^{-x^2} dx$ ინტეგრალი არ აიღება ელემენტარულ ფუნქციათა კლასში (იხ. შემდეგი პარაგრაფი). უმარტივესი განტოლება, რომელიც კვადრატურებში არ იხსნება, არის რიკატის $y^{/} = y^2 + x$ განტოლება, რომელიც ჩვენ უკვე განვიხილეთ. ამიტომ, დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად ხშირად იყენებენ ასიმპტოტურ და რიცხვით მეთოდებს.

სხვა შესაძლო ოპციებია type=series (ამ შემთხვევაში განტოლების ამონახსნი მოიცემა მწკრივის სახი), type=numeric (ამ დროს რიცხვითი

ამონახსნის პოვნა ხდება). შესაძლებელია, აგრეთვე, რამდენიმე სხვა ოპციის მითითება, მაგალითად, გარკვევა იმისა, შესაძლებელია თუ არა ცხადი სახით იქნეს მოძებნილი ამონახსნი (explicit=true ან explicit=false), ან კიდევ, მითითებულ იქნეს ინტეგრების მეთოდები: მაგალითად, mathod=laplace. იმ შემთხვევაში, როდესაც იძებნება განტოლების რიცხვითი ამონახსნი (ე.ი. ოპცია გამოიყურება შემდეგნაირად type=numeric), შესაძლებელია მივუთითოთ რიცხვითი გამოთვლების მეთოდზე:

method=rkf45- მეოთხე-მეხუთე რიგის რუნგე-კუტის მეთოდი;

method=dvark78- მეშვიდე-მერვე რიგის რუნგე-კუტის მეთოდი;

method=classical- შეიცავს რამდენიმე კლასიკურ მეთოდს.

method=gear და method=mgear გირის ერთბიჯიანი და მრავალბიჯიანი მეთოდები.

12.2. ლიუვილის თეორიის ელემენტები

ლიუვილმა აჩვენა, რომ $\int e^{-x^2}dx$ განუსაზღვრელი ინტეგრალი არ არის ელემენტარული ფუნქცია, მიუხედავად იმისა, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ელემენტარულ ფუნქციათა კომპოზიციაა. უფრო მეტიც, ლიუვილმა დაამტკიცა ზოგადი თეორემა, რომელიც საშუალებას იძლევა აიგოს ელემენტარული ფუნქციები, რომელთაგან ინტეგრალი არაელემენტარულია. მაგალითად, $\int sinx^2dx$, $\int cosx^2dx$, $\int \frac{sinx}{x}dx$, $\int \frac{cosx}{x}dx$, $\int \frac{dx}{lnx}$ ინტეგრალები არსებობენ, მაგრამ არ გამოისახებიან ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. აქ ასეთი ანალოგია შეგვიძლია გავაკეთოთ: ინტეგრალები $\int \frac{dx}{x}$ და $\int \frac{dx}{1+x^2}$ რაციონალური ფუნქციებიდან არ არიან რაციონალური ფუნქციები, რადგან $\int \frac{dx}{x} = lnx$ და $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx$.

ბუნებრივად და მარტივად ლიუვილის ძირითადი თეორემა ყალიბდება და მტკიცდება დიფერენციალური ველების (განმარტება მოყვანილია ქვემოთ) თეორიაში, რომელიც უფრო ახლოსაა ალგებრასთან, ვიდრე ანალიზთან. ალბათ ამიტომ, ლიუვილის თეორემა არ მიეკუთვნება ანალიზის საყოველთაოდ ცნობილ თეორემათა რიცხვს, თუმცა ის ამას იმსახურებს, მითუმეტეს, რომ თანამედროვე დამტკიცება ძნელი არ არის და თემა საინტერესოა.

ლიუვილმა შემოიტანა ელემენტარული ფუნქციების ძალიან მოხერხებული განმარტება. კერძოდ, მან ისარგებლა იმით, რომ ტრიგონომეტრიული და

მათი შებრუნებული ფუნქციები გამოისახებიან ექსპონენტასა და ლოგარითმის საშუალებით, ხოლო ექსპონენტა და ლოგარითმი განისაზღვრება თვისებით: თუ $g(x) = e^{f(x)},$ მაშინ $g'(x) = f'(x)g(x)$.

ლიუვილის თეორიაში ძირითადი ობიექტი არის დიფერენციალური K ველი, ანუ ველი, რომელშიც მოცემულია დიფერენცირების ოპერაცია $a \to a'$ შემდეგი თვისებებით: K ველის ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის სრულდება ტოლობები $(a+b)' = a' + b'$ და $(ab)' = a'b + b'a$.

ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ K ველის მახასიათებელი ნულის ტოლია. შემოვიტანოთ K ველში ექპონენტასა და ლოგარითმის ცნებები. თუ $a \neq 0$ და $a' = b'a,$ მაშინ a ელემენტს ეწოდება b ელემენტის *ექსპონენტა*, ხოლო b ელემენტს – a ელემენტის *ლოგარითმი.*

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - b'a}{b^2}$, $\left(a^n\right)' = na^{n-1}a'$ ნებისმიერი მთელი n-თვის და $1' = 0$, რადგანაც $1' = \left(1^2\right)' = 2 \cdot 1 \cdot 1'$.

$c \in K$ ელემენტს ეწოდება *მუდმივი*, თუ $c' = 0$. მუდმივები ქმნიან K-ს ქვეველს.

K დიფერენციალური ველის შემცველ L დიფერენციალურ ველს ეწოდება K ველის *დიფერენციალური გაფართოება,* თუ K ველის დიფერენცირება ემთხვევა L ველის დიფერენცირების K-ზე შეზღუდვას.

ველი, რომელიც მიიღება K ველისათვის $t_1,\ldots,t_n$ ელემენტების დამატებით, აღვნიშნოთ $K(t_1,\ldots,t_n)$ სიმბოლოთი. $L \supset K$ დიფერენციალურ გაფართოებას ეწოდება *ელემენტარული* ან *ლიუვილის გაფართოება,* თუ $L = K(t_1,\ldots,t_n)$, სადაც ყოველი t_i ელემენტი აკმაყოფილებს შემდეგი სამი პირობიდან ერთ-ერთს:

ა) t_i ალგებრულია $K_i = K(t_1,\ldots,t_{i-1})$-ზე, ანუ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$t_i^n + a_{n-1}t_i^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0$$

რაიმე ნატურალური n რიცხვისათვის და რომელიმე $a_0,\ldots,a_{n-1} \notin K_i$-თვის;

ბ) t_i არის K ველის ელემენტის ექსპონენტა;

გ) t_i არის K ველის ელემენტის ლოგარითმი.

კომპლექსურმნიშვნელობიან ფუნქციას, განსაზღვრულს $U \subset C$ არეზე, ვუწოდებთ *ელემენტარულს*, თუ ის ეკუთვნის $C(z)$ რაციონალურ ფუნქციათა რომელიმე ელემენტარულ გაფართოებას. ჩვენთვის ცნობილი ყველა ფუნქცია – პოლინომები, რაციონალური ფუნქციები, ექსპონენტა, ლოგარითმი, ტრიგონომეტრიული და მათი შებრუნებული ფუნქციები ლიუვილის მიხედვით ელემენტარულია.

მოვიყვანოთ ლიუვილის თეორემის თანამედროვე ფორმულირება და ორი დებულება, რომლებსაც გამოვიყენებთ ზოგიერთი ინტეგრალის არაელემენტარულობის დასამტკიცებლად.

თეორემა 1 (ჟ. ლიუვილი). *ვთქვათ, $\alpha \in K$, სადაც K რომელიღაც დიფერენციალური ველია. თუ განტოლებას $y' = \alpha$ აქვს y ამონახსნი, რომელიც ეკუთვნის K ველის რომელიმე ელემენტარულ გაფართოებას, რომელსაც იმავე მუდმივების ველი გააჩნია, რაც K-ს, მაშინ K ველში არსებობენ $c_1, \ldots, c_n$ მუდმივები და $u_1, \ldots, u_n, v$ ელემენტები, რომელთათვისაც სრულდება ტოლობა:*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'.$$

დებულება 1. *ვთქვათ, L დიფერენციალური K ველის გაფართოებაა, მაშინ K ველის დიფერენცირება შეიძლება გავრძელდეს L-ზე, ხოლო, თუ L გაფართოება ალგებრულია, მაშინ K ველის დიფერენცირება L-ზე გავრძელდება ერთადერთი სახით.*

დებულება 2. *ვთქვათ, K დიფერენციალური ველია, $K(t)$ კი მისი დიფერენციალური გაფართოებაა (იმავე მუდმივების ქვეველით). იმავდროულად, t ელემენტი ტრანსცენდენტულია K-ზე.*

ა) თუ $t' \in K$, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ხარისხის $f(t) \in K[t]$ მრავალწევრისათვის $\left(f(t)\right)'$ არის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ტოლია ან ერთით ნაკლებია f-ის ხარისხზე იმის მიხედვით, მუდმივისგან განსხვავდება თუ არა f-ის უფროსი კოეფიციენტი.

ბ) თუ $t'/t \in K$, მაშინ ნებისმიერი $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ არანულოვანი ელემენტისთვის და ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვის ადგილი აქვს

ტოლობას $\left(at^n\right)' = dt^n$, სადაც $d \in K^*$. გარდა ამისა, ნებისმიერი დადებითი ხარისხის $f(t) \in K[t]$ მრავალწევრისთვის $(f(t))'$-ს ხარისხი იგივეა, რაც f-ის ხარისხი. ეს მრავალწევრი იყოფა f-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესც $f(t)$ მონომია.

ახლა ვაჩვენოთ, თუ როგორ შეიძლება ლიუვილის თეორემით დამტკიცდეს ზოგიერთი ინტეგრალის არაელემენტარულობა. ამ მიზნით ლიუვილმა დაამტკიცა $\int f(z)e^{g(z)}dz$ ინტეგრალის ელემენტარულობის შემდეგი კრიტერიუმი, სადაც $f(z)$ და $g(z)$ რაციონალური ფუნქციებია.

თეორემა 2 (ლიუვილის კრიტერიუმი). *ვთქვათ, $f(z)$ და $g(z)$ რაციონალური ფუნქციებია, ამასთან, f-იგივურად ნულის ტოლი არაა, ხოლო g არ არის მუდმივი. ინტეგრალი $\int f(z)e^{g(z)}dz$ ელემენტარული ფუნქციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს რაციონალური $a(z)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას $f = a' + ag'$.*

მაგალითი 1. ინტეგრალი $\int e^{z^2}dz$ არაელემენტარულია.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში $f(z)=1$ და $g(z)=z^2$. ამიტომ განტოლებას $f = a' + ag'$ აქვს სახე: $1 = a' + 2az$. დასამტკიცებელია, რომ ამ განტოლებას არა აქვს $a(z) \in C(z)$ ამონახსნი. თუ რაციონალური $a(z)$ ფუნქციის დაშლაში შესაკრების სახით არის წილადი მნიშვნელით $(z-a)^r$, სადაც $r \geq 1$ და r მაქსიმალური შესაძლო მნიშვნელობაა, მაშინ (2) იგივეობა გვიჩვენებს, რომ $a' + 2az$ გამოსახულებაში მონაწილეობს წილადი მნიშვნელით $(z-a)^{r+1}$. ამიტომ $a(z)$ რაიმე n ხარისხის მრავალწევრია. მაშინ $a'(z)$ არის $n-1$ ხარისხის მრავალწევრი, ხოლო $2za(z)$ კი $n+1$ ხარისხის, ამიტომ ტოლობა $1 = a' + 2az$ ვერ შესრულდება.

მაგალითი 2. ინტეგრალი $\int \frac{e^z}{z}dz$ არაელემენტარულია.

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში $f(z) = 1/z$ და $g(z) = z$. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $1/z = a' + a$ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი $a(z) \in C(z)$.

ზუსტად ისევე, როგორც წინა მაგალითში, მტკიცდება, რომ $a(z)$ მრავალწევრია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $a+a'$-იც მრავალწევრია, ამიტომ ის ვერ იქნება $1/z$.

მაგალითი 3. ინტეგრალები $\int e^{e^z}dz$, $\int \frac{dz}{\ln z}$ და $\int \ln\ln z dz$ არაელემენტარულებია.

დამტკიცება: ყველა ზემოთ მოყვანილი ინტეგრალი დაიყვანება $\int \frac{e^z}{z}dz$ გამოსახულებაზე. დავუშვათ, $z=e^u$, მივიღებთ $\int \frac{e^z}{z}dz=\int e^{e^u}du$. ვთქვათ, $z=\ln w$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\int \frac{e^z}{z}dz=\int \frac{dw}{\ln w}$. ბოლოს ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ ტოლობას: $\int \ln\ln z dz = z\ln z\ln z-\int \frac{e^z}{z}dz$.

ახლა განვიხილოთ უფრო რთული მაგალითი, სადაც გამოვიყენებთ არა ლიუვილის კრიტერიუმს, არამედ ლიუვილის თეორემას.

მაგალითი 4. ინტეგრალი $\int \frac{\sin z}{z}dz$ არაელემენტარულია.

დამტკიცება: ცვლადის $z\to iz$ გარდაქმნით ეს ინტეგრალი დაიყვანება $\int \frac{e^z-e^{-z}}{z}dz$ ინტეგრალის აღებაზე. განვიხილოთ $C(z,t)$ დიფერენციალური ველი, სადაც $t=e^z$. დავუშვათ, რომ $\int \frac{e^z-e^{-z}}{z}dz$ ინტეგრალი ელემენტარულია, მაშინ, ლიუვილის თეორემის თანახმად, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{t^2-1}{tz}=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{u_i'}{u_i}+v',$$

სადაც $c_1,c_2,\dots,c_n\in C(z,t)$ და $u_1,u_2,\dots,u_n,v\in C(z,t)$. დავუშვათ, $F=C(z)$, მაშინ $u_1,\dots,u_n,v\in F(t)$. კვლავ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $u_1,\dots,u_n$ განსხვავებული დაუყვანადი მრავალწევრებია F-ზე უფროსი კოეფიციენტით 1. v შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მრავალწევრისა და

გარკვეული სახის წილადის ჯამი. *დებულება 2(ბ)* გამოყენებით მივიღებთ, რომ ან $u_i \in F$, ან $u_i = t$. შესაბამისად, მივიღეთ, რომ $\sum c_i \frac{u_i'}{u_i} \in F$. გარდა ამისა, v-ს დაშლისას მიღებული წილადების მნიშვნელში შეიძლება შეგვხვდეს მხოლოდ t-ს ხარისხები. დავუშვათ, $v = \sum_k a_k t^k$, $a_k \in F$. თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს (4) ტოლობაში t-ს კოეფიციენტებს, მივიღებთ ტოლობას $1/z = a_1' + a_1$. მაგალითი 2-ში ნაჩვენები იყო, რომ რაციონალური $a_1(z)$ ფუნქციისათვის ასეთი ტოლობა შეუძლებელია.

ამოცანები

განტოლებები განცალებად ცვლადებში

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{5x}{7y}$ 2. $\frac{dy}{dx}=\frac{5y}{7x}$ 3. $\frac{dy}{dx}=ky$ 4. $\frac{dy}{dx}=xy$ 5. $\frac{dy}{dx}=ay(1-by)$

6. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^3}$ 7. $x-y^2\frac{dy}{dx}=0$ 8. $x+y\frac{dy}{dx}=2$ 9. $y\frac{dy}{dx}-(1+y)x^2=0$

10. $y\frac{dy}{dx}-(1+y^2)x^2=0$ 11. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ 12. $(1+x)e^{3y}\frac{dy}{dx}=1$

13. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ 14. $\frac{dy}{dx}=3x^2y^2, y(0)=\frac{1}{2}$ 15. $\frac{dy}{dx}=1+y+x^2+yx^2$

16. $xdx+ydy=xy(xdy-ydx)$ 17. $y'=(x+y)^2$ 18. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y}{3y-2x}$

19. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x^2+y^2}{2xy+3y^2}$

გეომეტრიული ამოცანები

შევახსენებთ, რომ ორ (x_1,y_1) და (x_2,y_2) წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებაა $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, ხოლო წრფის განტოლებას საკუთხო კოეფიციენტით აქვს სახე: $y=kx+b$, სადაც k -ს ეწოდება *დახრილობა*. ვიტყვით, რომ ორ $-f$ და g ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს პირველი რიგის თანახება, თუ $f(x_0)=g(x_0)$ და $f'(x_0)=g'(x_0)$. f ფუნქციის მხები x_0 წერტილში არის $(x_0,f(x_0))$ წერტილზე გამავალი $y(x)=kx+b$ წრფე, რომელსაც f ფუნქციასთან x_0 წერტილში აქვს პირველი რიგის თანახება. ამრიგად, $f(x)$ და $y(x)$ ფუნქციებმა უნდა დააკმაყოფილონ შემდეგი ტოლობები: $f(x_0)=y(x_0)=kx_0+b$ და $f'(x_0)=y'(x_0)=k$, საიდანაც $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$. ამრიგად, $(x_0,f(x_0))$ წერტილზე გამავალი მხები იქნება $y(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ წრფე. როგორც ვხედავთ, დახრილობა მოცემულ წერტილში ფუნქციის წარმოებულის ტოლია. ორი, $y_1(x)=k_1x+b_1$ და $y_2(x)=k_2x+b_2$ განტოლებით მოცემული წრფეები მართობულია, თუ $k_1k_2=-1$. f ფუნქციის ნორმალი x_0 წერტილში არის $(x_0,f(x_0))$ წერტილზე მხების მართობული წრფე, რომელიც $(x_0,f(x_0))$ წერტილში გაივლის. აქედან ნორმალის განტოლებაა $y(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$. თუ x_0 f ფუნქციის კრიტიკული წერტილია, ე.ი. $f'(x_0)=0$, მაშინ მხები x ღერძის პარალელური წრფეა, შესაბამისად, ნორმალი კი $-y$ ღერძის. ამბობენ, რომ ერთი წირი მეორის ორთოგონალურია, თუ მათი გადაკვეთის წერტილში გამავალი მხებები მართობულებია.

20. დაწერეთ წირის განტოლება, რომელიც გადის (1,3) წერტილში და რომლის მხებს (x, y) წერტილში აქვს დახრა $-(1+\frac{y}{x})$.
21. იპოვეთ $xy = c$ ჰიპერბოლათა ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.
22. იპოვეთ იმ წრეწირების ერთობლიობის ორთოგონალური ტრაექტორიები, რომლებიც y ღერძს ეხებიან კოორდინატთა სათავეში.
23. იპოვეთ კოორდინატთა სათავეზე გამავალი $y = mx$ წრფეების ოჯახის ორთოგონალური ტრაექტორიები.
24. დაწერეთ წირის განტოლება, რომელიც გადის xy-სიბრტყის სათავეში და რომლის მხებსაც (x, y) წერტილში აქვს $x^2 + y$-ს ტოლი დახრა.
25. დაწერეთ წირის განტოლება, რომელიც გადის $(0,2)$ წერტილზე და რომლის მხებსაც ყოველ (x, y) წერტილში აქვს $y - 2e^{-x}$-ს ტოლი დახრა.
26. დაწერეთ წირის განტოლება, რომელიც გადის (2,1) წერტილზე და რომლის ნორმალსაც ყოველ (x, y) წერტილში აქვს $\frac{2xy}{y^2-x^2}$-ს ტოლი დახრა.

განტოლებები სრულ დიფერენციალებში

27. განსაზღვრეთ, არის თუ არა შემდეგი განტოლება სრულ დიფერენციალებში და, თუ არის, ამოხსენით იგი:

$$(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0.$$

28. აჩვენეთ, რომ შემდეგი განტოლება არის სრულ დიფერენციალებში და ამოხსენით იგი:

$$(cosy + ycosx)k2dx + (sinx - xsiny)dy = 0.$$

პირველი რიგის არაერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნის გზა მაინტეგრირებელი მამრავლის საშუალებით.

ვთქვათ, მოცემულია განტოლება: $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

შემოვიტანოთ შემდეგი დამხმარე ფუნქცია:

$$r(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

რადგან

$$\frac{dr}{dx} = e^{\int p(x)dx}p(x) = r(x)p(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}(ry) = r\frac{dy}{dx} + \frac{dr}{dx}y = r\frac{dy}{dx} + rp(x)y. \qquad (2)$$

(1) განტოლება გავამრავლოთ $r(x)$ და მივიღებთ $r(x)\frac{dy}{dx}+r(x)p(x)y=$ $=r(x)q(x)$. (2)-დან გამომდინარეობს, რომ $\frac{d}{dx}(r(x)y(x))=r(x)q(x)$, საიდანაც გვაქვს:

$$r(x)y(x)=\int r(x)p(x)dx+C\Rightarrow y(x)=\frac{1}{r(x)}\left(\int r(x)q(x)dx+C\right).$$

(1) განტოლებისათვის $r(x)=e^{\int p(x)dx}$ ფუნქცია არის *მაინტეგრირებელი მამრავლი* და, ამრიგად, (1) განტოლება ჩაიწერება როგორც განტოლება სრულ დიფერენციალებში. ეს ფაქტი გამომდინარეობს აგრეთვე პარაგრაფ 3.4-ის დებულება 3-დან და იქიდან, რომ წრფივი ერთგვაროვანი განტოლების ინტეგრალური მამრავლია $h(x,y)=\frac{1}{P(x,y)x-Q(x,y)y}$ ფუნქცია (აჩვენეთ პარაგრაფ 3.4-ის გამოყენებით!), რაც ნიშნავს, რომ წრფივი პირველი რიგის განტოლება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც განცალებადცვლადებიანი განტოლება. გარდა ამისა, თუ განტოლება ერთგვაროვანია და, ამავე დროს, არის სრულ დიფერენციალებში, მაშინ მისი ამონახსნი ასეთია: $P(x,y)x-Q(x,y)y=C$ (დაამტკიცეთ პარაგრაფ 3.4-ის თეორემა 2-ისა და თეორემა 3-ის გამოყენებით; ისარგებლეთ აგრეთვე ამის წინ დამტკიცებული დებულებით!).

29. იპოვეთ მაინტეგრირებელი მამრავლი და ამოხსენით განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}+y=e^x.$$

30. იპოვეთ მაინტეგრირებელი მამრავლი და ამოხსენით განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y=1.$$

31. იპოვეთ მაინტეგრირებელი მამრავლი და ამოხსენით განტოლება:

$$x\frac{dy}{dx}+y=x.$$

32. იპოვეთ მაინტეგრირებელი მამრავლი და ამოხსენით განტოლება:

$$\frac{dy}{dx}-y=sinx.$$

ბერნულის განტოლება

33. ამოხსენით განტოლება:

$$xy'-2y=4x^3y^{\frac{1}{2}}.$$

34. ამოხსენით განტოლება:

$$y' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) y = x^3 y^2.$$

რიკატის განტოლება

თუ $\tilde{y}(x)$ არის

$$y'(x) = P(x) + Q(x)y(x) + R(x)y^2(x) \qquad (1)$$

რიკატის განტოლების კერძო ამონახსნი, ხოლო $z(x)$ კი

$$z'(x) - \big(Q(x) - 2R(x)\tilde{y}(x)\big)z(x) = R(x)z^2(x) \qquad (2)$$

ბერნულის განტოლების ზოგადი ამონახსნი, მაშინ $y(x) = \tilde{y}(x) + z(x)$ არის რიკატის (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მართლაც, ვთქვათ $y = \tilde{y} + z$, მაშინ:

$$y' = \tilde{y}' + z' = (P + Q\tilde{y} + R\tilde{y}^2) + [Rz^2 + (Q + 2R\tilde{y})z] =$$

$$= P + Q(\tilde{y} + z) + R(\tilde{y}^2 + 2\tilde{y}z + z^2) =$$

$$P + Qy + R(\tilde{y} + z)^2 = P + Qy + y^2,$$

რაც ნიშნავს, რომ y აკმაყოფილებს (1) განტოლებას. ახლა დავუშვათ, რომ y არის (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი და ვაჩვენოთ, რომ $z = y - \tilde{y}$ არის (2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. მართლაც:

$$z' = y' - \tilde{y}' = (P + Qy + Ry^2) - (P + Q\tilde{y} + R\tilde{y}^2) =$$

$$= Q(y - \tilde{y}) + R(y^2 - \tilde{y}^2) = (y - \tilde{y})[Q + R(y + \tilde{y})] =$$

$$= z[Q + R(z + 2\tilde{y})] = z(Q + 2R\tilde{y} + Rz) = Rz^2 + (Q + 2R\tilde{y})z,$$

რაც ნიშნავს, რომ z არის ბერნულის (2) განტოლების ამონახსნი.

35. ამოხსენით რიკატის განტოლება:

$$y' = -x^5 + \frac{y}{x} + x^3 y^2.$$

36. აჩვენეთ, რომ თუ:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

მეორე რიგის ერთგვაროვანი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი λ_1, λ_2 ფესვები კომპლექსური რიცხვებია და $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, მაშინ განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასეთია: $(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x)e^{\alpha x}$.

37. იპოვეთ შემდეგი განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

38. იპოვეთ შემდეგი განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0.$$

ამოხსენით არაერთგვაროვანი განტოლებები:

39. $y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 1 + x + x^2$
40. $y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = sin3x$
41. $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = e^{3x}$
42. $y''(x) + y'(x) - 12y(x) = xe^x$
43. $y''(x) + 9y(x) = e^x cos2x$
44. ვთქვათ, $x = e^t$ და y არის x-ის ფუნქცია. აჩვენეთ, რომ $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$ და $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$.
45. იპოვეთ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.
46. $y'''(x) + 2y''(x) - 2y'(x) - y(x) = 0$
47. $y^{(4)}(x) - 4y'''(x) + 9y''(x) - 10y'(x) + 6y(x) = 0$ (*მითითება:* მახასიათებელი განტოლება იშლება $(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$ კვადრატული სამწევრების ნამრავლად).
48. $y^{(4)}(x) + 4y'''(x) + 10y''(x) + 12y'(x) + 9y(x) = 0$ (*მითითება*: მახასიათებელი განტოლება არის $\lambda^2 + 2\lambda + 3$ კვადრატული სამწევრის კვადრატი).
49. ააგეთ მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლება, რომლის ამონახსნებია e^{2x}, e^{-x}, e^{3x} და e^{5x} ფუნქციები.
50. ააგეთ მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლება, რომლის ამონახსნებია e^{-2x}, $e^x cos2x$ და ფუნქციები.

ჩებიშევის განტოლება

1. გამოსახეთ:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, |x| < 1$$

ჩებიშევის განტოლების ამონახსნები ჩებიშევის მრავალწევრით. განიხილეთ შემთხვევები $n = 0,1,2,3,4$.

პასუხი: ჩებიშევის პოლინომები $(n < 5)$:

$$T_0(x) = 1;\ T_1(x) = x;\ T_2(x) = 2x^2 - 1;$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x;\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

2. იპოვეთ:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 2y = 0, |x| < 1$$

ჩებიშევის განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მითითება: აქ $n = \sqrt{2}$, ამიტომ ამონახსნი ჩებიშევის პოლინომით არ გამოისახება.

პასუხი: $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2} arccosx) + c_2 \sin(\sqrt{2} arccosx)$.

3. ჩებიშევის:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0, |x| < 1$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი გამოსახეთ ჩებიშევის პოლინომის საშუალებით.

პასუხი: $y(x) = c_1(2x^2 - 1) + 2c_2 x\sqrt{1 - x^2}$.

4. აჩვენეთ, რომ $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x),\ m, n = 0,1,2,3, \dots$

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0. \qquad (1)$$

თუ ცნობილია (1)-ის ერთი ამონახსნი, ვთქვათ, y_1, მაშინ მეორე კერძო ამონახსნის პოვნა შესაძლებელია შემდეგნაირად: რადგან y_1 და y_2 წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, ამიტომ მათი ვრონსკიანისათვის გვაქვს გამოსახულება $W(x) = det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, მეორე მხრივ, (1)-ის ვრონსკიანი ლიუვილ-ოსტროგრადსკის ფორმულის თანახმად, $W(x) = e^{-\int P(x)dx}$-ს ტოლია. ამრიგად, მივიღეთ წრფივი პირველი რიგის $y_1 y_2' - y_2 y_1' = = e^{-\int P(x)dx}$ განტოლება y_2 მიმართ, რასაც ამოვხსნით მზა ფორმულით:

$$y_2(x) = e^{\int \frac{y_1'}{y_1} dx} (\int \frac{1}{y_1} e^{-\int P(x)dx} e^{-\int \frac{y_1'}{y_1} dx} dx + c) = y_1 (\int \frac{1}{{y_1}^2} e^{-\int P(x)dx} dx + c).$$

ლეჟანდრის განტოლება $(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0, |x| < 1.$

1. ვიპოვოთ $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ლეჟანდრის განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

პასუხი: $y(x) = c_1 x + c_2(\frac{1}{2} xln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1)$.

2. აჩვენეთ, რომ ლეჟანდრის განტოლების თვითშეუღლებული ფორმაა:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+p(p+1)y=0$$

განტოლება.

ბესელის განტოლება. იპოვეთ:

$$x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$$

ბესელის განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მითითება: პარაგრაფ 4.4-ში ამოწერილია ამ განტოლების ერთი კერძო ამონახსნი: $y_1(x)=\frac{sinx}{\sqrt{x}}$.

პასუხი: $y(x)=\frac{c_1sinx+c_2cosx}{\sqrt{x}}$.

ორთოგონალური პოლინომები

ავღნიშნოთ:

$$Y_n(x)=p_{n,n}x^n+p_{n,n-1}x^{n-1}+\cdots+p_{n,1}x+p_{n,0}$$

n-ხარისხის პოლინომი. $\{Y_n(x)\}$ პოლინომთა ერთობლიობას ეწოდება *ორთოგონალური* $[a,b]$ ინტერვალზე *წონით* $W(x)$, თუ ნებისმიერი $Y_n(x)$ და $Y_m(x)$ წყვილისათვის ამ სიმრავლიდან, როდესაც $n\neq m$, სრულდება ტოლობა:

$$\int_a^b Y_n(x)Y_m(x)W(x)dx=0. \qquad (1)$$

$[a,b]$ინტერვალზე განსაზღვრულ $W(x)$ არაუარყოფით ფუნქციას $\{Y_n(x)\}$ პოლინომთა ერთობლიობისათვის ეწოდება *წონა.* თუ იგი 0-ს არ უტოლდება არსად $[a,b]$-ს შიგა წერტილებში, სრულდება (1) ტოლობა და ყოველი $m=0,1,2\ldots$ ნომრისათვის არსებობს $W(x)$-ის ხარისხოვანი მომენტი. ე.ი:

$$\int_a^b x^mY_m(x)W(x)dx\neq\infty.$$

$Y_m(x)$ პოლინომის ნორმა განმარტებით არის $N_m^2=\int_a^b Y_m^2W(x)dx$ რიცხვი. თუ $Y_n(x)$ ორთოგონალური პოლინომის ყველა კოეფიციენტი დადებითია და $N_n=1$, მაშინ $\{Y_n(x)\}$ პოლინომთა სისტემას ეწოდება ორთონორმი-

რებული. ცნობილია, რომ ნებისმიერი $W(x)$ წონისათვის არსებობს $\{Y_n(x)\}$ ორთონორმირებულ პოლინომთა სისტემა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ, საზოგადოდ, ორთონორმირებულ პოლინომთა უსასრულო სისტემები არსებობენ. ცნობილია აგრეთვე, რომ ორთონორმირებულ პოლინომთა ფუნდამენტური თვისებები გამომდინარეობს:

$$a(x)\frac{d^2}{dx^2}Y(x) + b(x)\frac{d}{dx}Y(x) + \lambda_n Y(x) = 0 \qquad (1)$$

მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების თვისებებიდან იმ აზრით, რომ განტოლების ამონახსნი აუცილებლად უნდა იყოს პოლინომი, რომლის ხარისხი ემთხვევა n ნომერს. ეს მოთხოვნა არსებით შეზღუდვებს ადებს განტოლების $a(x)$, $b(x)$ კოეფიციენტებს და λ_n პარამეტრს. გადავწეროთ (1) თვითშეუღლებული სახით:

$$\frac{1}{\mathrm{W(x)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\mathrm{W(x)X(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{Y_n(x)}\right) + \lambda_n \mathrm{Y_n(x)} = 0.$$

განტოლების ახალი $W(x)$ და $X(x)$ კოეფიციენტები $a(x)$, $b(x)$ ფუნქციებს უკავშირდება შემდეგი თანადობით:

$$X(x) \equiv a(x), \quad \frac{W'(x)}{W(x)}X(x) + X'(x) \equiv b(x).$$

ამ ახალი აღნიშვნების შემდეგ (1) შესაძლებელია გადაიწეროს ასეთი სახით:

$$X(x)Y_n''(x) + \left(\frac{W'(x)}{W(x)}X(x) + X'(x)\right)Y_n'(x) + \lambda_n Y_n(x) = 0. \qquad (2)$$

როდესაც

$$a = -\infty, b = \infty, X(x) = 1, W(x) = e^{-x^2}, \lambda_n = 2n,$$

(2) განტოლებიდან მიიღება განტოლება:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

რომლის ამონახსნებს *ერმიტის პოლინომები* ეწოდება. $Z(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს

$$Z''(x) + (2n + 1 - x^2)Z(z) = 0$$

ვებერ-ერმიტის განტოლებას. ერმიტის პოლინომისათვის სამართლიანია წარმოდგენა (*როდრიგის ფორმულა*):

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამოდის, რომ $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$.

პასუხები

1) $y^2 = \frac{5}{7}x^2 + c$; 2) $y = cx^{\frac{5}{7}}$; 3) $y = ce^{kx}$; 4) $y = ce^{\frac{x^2}{2}}$;

5) $y = \frac{1}{b+ce^{-ax}}$; 6)$y^4 = \frac{4}{5}x^3 + c$; 7) $y^3 = \frac{3}{2}x^2 + c$; 8) $y^2 = 4x - x^2 + c$;

9) $y - \ln|1+y| = \frac{1}{3}x^3 + c$; 10) $y^2 = ce^{\frac{2}{3}x^2} - 1$;

11) $y = \frac{x+C}{1-Cx}$, $C = tgC_1$; 12)$y = \frac{1}{3}\ln(3\ln|1+x| + C)$;

13) $y = \sin(sin^{-1}x + C) = \sin(sin^{-1}x)\, cosC + \cos(sin^{-1}x) sinC =$

$= xcosC + \sqrt{1-x^2}sinC$; 14) $y = -\frac{1}{x^3-2}$; 15) $y = ce^{x+\frac{x^3}{3}} - 1$;

16) $y^2 = c(x^2-1) - 1$; 17) $y = \tan(x+c) - x$; 18) $x^2 + 4xy - 3y^2 = c$;

19) $2x^3 + 3xy^2 + 3y^3 = c$; 20) $2xy + x^2 = 7$; 21) $y^2 - x^2 = c$;

22) $x^2 + (y-K)^2 = K^2$; 23) $x^2 + y^2 = c$; 24) $y = -(x^2 + 2x + 2) + 2e^x$;

25) $y = e^{-x} + e^x = 2coshx$; 26) $x^3 - 3xy^2 = 2$; 27) $4yx - x^4 + y^4 = C$;

28) $xcosy + ysinx = C$; 29) $r(x) = e^x$, $y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$;

30) $r(x) = e^{\frac{x}{3}}$,$y(x) = 3 + Ce^{-\frac{x}{3}}$; 31) $r(x) = x, y(x) = \frac{x}{2} + \frac{c}{x}$;

32) $r(x) = e^{-x}$, $y(x) = -\frac{1}{2}(sinx + cosx) + ce^x$; 33) $y = x^2(x^2 + C)^2$;

34) $y(x) = -\frac{2x}{1+Ke^{-\frac{2x^5}{5}}}$; 35) $y = x - \frac{2x}{1+Ke^{-\frac{2x^5}{5}}}$;

37) $y(x) = (c_1 cosx + c_2 sinx)e^{-x}$;

38) $y(x) = \left(c_1 cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}$;

39) $\frac{1}{32}(8x^2 - 12x + 19) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$;

40) $y(x) = \frac{1}{30}(3cos3x - sin3x) + c_1 e^{x} + c_2 e^{4x}$;

41) $y(x) = \frac{1}{13}e^{x} + (c_1 cosx + c_2 sinx)e^{-x}$;

42) $y(x) = \frac{1}{100}(3 + 10x)e^{x} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$;

43) $y(x) = \frac{1}{26}(3e^{x}cos2x + 2e^{x}sin2x) + (c_1 cos3x + c_2 sin3x)$;

45) $y(x) = \frac{c_1 + c_2 lnx}{x}$; 46) $y(x) = c_1 e^{x} + e^{-\frac{3x}{2}}(c_2 cos\frac{5x}{2} + c_3 sin\frac{5x}{2})$;

47) $y(x) = e^{x}\left(c_1 cos\sqrt{2}x + c_2 sin\sqrt{2}x\right) + e^{x}(c_3 cosx + c_4 sinx)$;

48) $y(x) = e^{-x}(c_1 + c_2 x)cos\sqrt{2}x + (c_3 + c_4 x)sin\sqrt{2}x$;

49) $y^{(4)}(x) - 9y'''(x) + 21y''(x) + y'(x) + 30y(x) = 0$;

50) $y'''(x) + y'(x) + 10y(x) = 0$.

ჟან დალამბერი (1717-1783)

საიმონ დენის პუასონი (**1781-1840)**

ჟოზეფ ლიუ ლაგრანჟი (1736-1813)

პიერ ლაპლასი (1749-1827)

გუსტავ დირიხლე (1805-1859)

ჟან ბატისტ ფურიე (1768-1830)

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება პირველად ლეონარდ ეილერმა გამოიყენა ორგანზომილებიანი ზედაპირის თვისებების შესასწავლად. მათემატიკური ფიზიკის პირველი კლასიკური განტოლება – სიმის რხევის განტოლება და მისი ამოხსნის გზა კი ეკუთვნის ფრანგ ფილოსოფოს, მათემატიკოს და მექანიკოს, საფრანგეთის აკადემიის წევრს, ჟან-ლერონ დალამბერს (1717-1783). კერძოწარმოებულებიან დიფ. განტოლებების თეორიაში განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს ფრანგ ასტრონომს, მათემატიკოს და ფიზიკოს პიერ-საიმონ დე ლაპლასს (1749-1827). ლაპლასი თავისი დროის გამორჩეული მეცნიერი იყო. იგი იყო საფრანგეთის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი. მან აქტიური მონაწილეობა მიიღო საფრანგეთის უმაღლესი განათლების სისტემის გარდაქმნასა და დახვეწაში, რომელსაც მოყვა პარიზის ნორმალური და პოლიტექნიკური სკოლების დაარსება. დაეყრდნო რა ლაპლასი მანამდე არსებულ ცოდნას, პასუხი გასცა თითქმის ყველა კითხვას ციურ მექანიკაში, რომლებიც ეხებოდა მზის სისტემაში სხეულების მოძრაობას. ლაპლასი აქტიურად მონაწილეობდა საფრანგეთის მაშინდელ მღელვარე პოლიტიკურ ცხოვრებაში, საფრანგეთის რესპუბლიკის დროს იყო რესპუბლიკელი; ნაპოლეონ ბონაპარტეს მოსვლის შემდეგ გახდა იმპერიის გრაფი; იყო შინაგან საქმეთა მინისტრი და სენატის თავმჯდომარე, შემდეგ მონაწილეობა მიიღო ნაპოლეონის საფრანგეთიდან გაძევებაში; ბურბონების თავიდან აღზევების შემდეგ გახდა საფრანგეთის პერი და მიიღო მარკიზის ტიტული.

მე-18, მე-19 საუკუნეებში ორთქლის მანქანა ევროპაში ახლადაღმოცენებული ინდუსტრიის ფუნდამენტი გახდა. დრომ მისი მუშაობის ეფექტიანობის გაზრდა მოითხოვა. ეს გარემოება აისახა კონკურსში, რომელიც პარიზის მეცნიერებათა აკადემიამ 1811 წელს გამოაცხადა: შეიქმნას სითბოს გავრცელების კანონების მათემატიკური თეორია და შედარდეს შედეგები ექსპერიმენტულ მონაცემებს. კონკურსში გაიმარჯვა მომავალმა აკადემიკოსმა ჟან ბატისტ ფურიემ (1768-1830). მსგავსად თავისი დროის მეცნიერებისა, ფურიე საშუალო ფენის წარმომადგენელი იყო, მან დაამთავრა სამხედრო სკოლა და გარკვეული პერიოდი იქვე ასწავლიდა. მისი ძირითადი სამეცნიერო დამსახურება უკავშირდება სითბოს გავრცელების ამოცანას. სითბოს გავრცელება, ისევე როგორც სინათლისა, ფურიემ წარმოადგინა ელემენტარული ნაწილაკების ნაკადის სახით, რომლებიც თავისუფლად ვრცელდებიან გარემოში. ამის საფუძველზე მან მიიღო სითბოგამტარებლობის განტოლება და დაამუშავა მისი ამოხსნის მეთოდი, რომელსაც ამჟამად ფურიეს მეთოდი ეწოდება. სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნისას იგი სისტემატურად იყენებდა ფუნქციის წარმოდგენას ტრიგონომეტრიული მწკრივების სახით. მიუხედავად იმისა, რომ ასეთი წარმოდგენის შესაძლებლობა მანამდეც ცნობილი იყო, დღეს ამ სახით ფუნქციის წარმოდგენას ფურიეს მწკრივს უწოდებენ.

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთი გამორჩეული დარგია. მისი კვლევის ობიექტებია შრიოდინგერის, მაქსველის, აინშტეინის, კორტევეგა-დე ფრიზის, ნავიო-სტოქსის, იანგ-მილსის და სხვა განტოლებები. მათ შორის უკანასკნელი ორი განტოლება ათასწლეულის პრობლემათა რიცხვშია შეტანილი.

ნაწილი II

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები

13. მათემატიკური ფიზიკის ძირითადი განტოლებები

13.1. ძირითადი აღნიშვნები

კოორდინატთა სისტემები. დავუშვათ, (x, y) ევკლიდურ $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეზე კოორდინატთა სისტემაა, რაც ნიშნავს, რომ $\mathbf{R}^2$-ის ნებისმიერი წერტილი ცალსახად ხასიათდება ამ კოორდინატთა სისტემაში თავისი კოორდინატებით. შემოვიღოთ $\mathbf{R}^2$-ში კიდევ ერთი კოორდინატთა სისტემა (r, φ), რომელიც ძველ (x, y) კოორდინატთა სისტემას უკავშირდება ტოლობებით:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \ \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

შენიშვნა: $arctg$ ფუნქცია არგუმენტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის განსაზღვრული არ არის და ქვემოთ მოყვანილი გარდაქმნების იაკობიანი დისკრეტულ წერტილებში ნულის ტოლი ხდება. ეს ფაქტი გარკვეულ გავლენას ახდენს ახალ კოორდინატთა სისტემაში ჩაწერილ განტოლებაზე და, ბუნებრივია, მის ამონახსნზე. ამ განსაკუთრებულ წერტილებს ჩვენ არ განვიხილავთ და შემდგომი მსჯელობა შეეხება მხოლოდ ,,არაგანსაკუთრებულ“ შემთხვევებს.

აღნიშნული კოორდინატთა სისტემის შეცვლა არის ურთიერთცალსახა $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ასახვა, მოცემული თანადობით:

$$(x, y) \mapsto (r, \varphi)\,,$$

რომელსაც გააჩნია შექცეული ასახვა და იგი მოიცემა ტოლობით:

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\,.$$

ნათელია, რომ $\mathbf{R}^2$-ის ნებისმიერ წერტილს (r, φ) კოორდინატთა სისტემაც ცალსახად ახასიათებს, რადგან პირველი კოორდინატა გამოსახავს მანძილს ამ წერტილიდან კოორდინატთა $(0,0)$ სათავემდე, ხოლო φ არის

კუთხე, რომელსაც აბსცისთა ღერძთან ქმნის კოორდინატთა სათავისა და ამ წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთი.

(x, y) უწოდებენ ევკლიდურ კოორდინატთა სისტემას, ხოლო (r, φ)-ს კი – პოლარულ კოორდინატთა სისტემას. ამრიგად, ორივე ერთი და იმავე ობიექტის, კერძოდ, $\mathbf{R}^2$-ის, ორი სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაა.

3-განზომილებიან $\mathbf{R}^3$ ევკლიდურ სივრცეში (x, y, z) კოორდინატთა სისტემის გარდა შესაძლებელია შემოტანილ იქნეს სხვა საკოორდინატო სისტემებიც. მათ შორის, ცილინდრული კოორდინატთა სისტემა, რომლისთვისაც მიღებულია აღნიშვნა (r, ϕ, z) და იგი (x, y, z) კოორდინატთა სისტემას უკავშირდება თანადობით:

$$x = r\cos\phi\,,\quad y = r\sin\phi\,,\quad z = z\,.$$

შექცეულ ასახვას ახორციელებს

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\;,\;\; \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right),\quad z = z$$

ტოლობები. შევნიშნოთ, რომ, თუ r მუდმივია, მაშინ $\{(r, \phi, z) \mid r = \cos t,$ $y = \cos\phi, z = z\}$ სიმრავლე არის ცილინდრი $\mathbf{R}^3$-ში. სწორედ აქედან მოდის კოორდინატთა სისტემის სახელწოდება.

კიდევ ერთი გავრცელებული კოორდინატთა სისტემაა სფერულ კოორდინატთა (r, ϕ, θ) სისტემა, რომელიც (x, y, z) კოორდინატთა სისტემას უკავშირდება თანადობით:

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,,\; y = r\sin\theta\sin\phi\,,\quad z = r\cos\theta\,.$$

მისი შექცეული ასახვაა

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\;,\phi = arctg\left(\frac{y}{x}\right),\quad \theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\,.$$

საზოგადოდ, ნებისმიერი ურთიერთცალსახა დიფერენცირებადი ასახვა $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, რომლის შექცეული $\phi^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ასახვაც დიფერენცირებადია (იაკობიანი ყველგან ნულისაგან განსხვავებულია), განსაზღვრავს $\mathbf{R}^n$-ზე კოორდინატთა სისტემას. ასეთ ϕ ასახვას დიფეომორფიზმი ეწოდება.

ზემოთ მოტანილ საკოორდინატო სისტემების, გარდა დეკარტულისა, ზოგადი სახელწოდებაა *მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემები.*

მაგალითი 1. დავუშვათ, $F(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$, u და v დიფერენცირებადი, ხოლო f კი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია ორივე ცვლადის მიმართ, მაშინ:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{და} \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

მაგალითი 2. ვთქვათ, $F(t)=f(u(t),v(t))$, u და v დიფერენცირებადი, ხოლო f კი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია, მათ შორის f ორივე ცვლადის მიმართ, მაშინ:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

მაგალითი 3. დავუშვათ, $F(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$. ვიპოვოთ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ და $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. აქვე შევნიშნოთ, რომ ჩანაწერის გამარტივების მიზნით ჩვენ გამოვიყენებთ კერძო წარმოებულებისათვის საყოველთაოდ მიღებულ აღნიშვნებს: $\frac{\partial F}{\partial x}=F_x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=F_y$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=F_{xx}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=F_{xy}$ და ა.შ.

$$F_{xx}=f_u u_{xx}+f_v v_{xx}+f_{uu}(u_x)^2+2f_{uv}v_x u_x+f_{vv}(v_x)^2,$$

$$F_{xy}=f_u u_{xy}+f_v v_{xy}+f_{uu}u_x u_y+2f_{uv}(v_y u_x+v_x u_y)+f_{vv}v_x v_y,$$

$$F_{xx}=f_u u_{xx}+f_v v_{xx}+f_{uu}(u_x)^2+2f_{uv}v_x u_x+f_{vv}(v_x)^2.$$

ამოცანა 1. ვაჩვენოთ, რომ $z=f(xy)$ არის

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

განტოლების ამონახსნი.

ამოხსნა: რადგან $\frac{\partial z}{\partial x}=yf'(xy)$ და $\frac{\partial z}{\partial y}=xf'(xy)$, ამიტომ

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=xyf'(xy)-yxf'(xy)=0.$$

ამოცანა 2. დავწეროთ ორგანზომილებიანი ლაპლასის

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}=0$$

განტოლება ახალ (u,v) კოორდინატებში, თუ $x=\dfrac{u^2-v^2}{2}$ და $y=uv$ (კოორდინატთა ასეთ სისტემას ეწოდება *პარაბოლური*).

ამოხსნა: $F_{uu}=F_x x_{uu}+F_y y_{uu}+F_{xx}(x_u)^2+2F_{xy}x_u y_u+F_{yy}(y_u)^2=$

$$=F_x+u^2F_{xx}+2uvF_{xy}+v^2F_{yy},$$

$$F_{vv}=F_x x_{vv}+F_y y_{vv}+F_{xx}(x_v)^2+2F_{xy}x_v y_v+F_{yy}(y_v)^2=$$

$$=-F_x+v^2F_{xx}-2uvF_{xy}+v^2F_{yy}.$$

აქედან:

$$F_{uu}+F_{vv}=(u^2+v^2)(F_{xx}+F_{yy}).$$

ძირითადი ოპერატორები. n-განზომილებიანი *ლაპლასის ოპერატორი*, რომელიც Δ სიმბოლოთი აღინიშნება, განმარტებით არის:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

მეორე რიგის დიფერენციალური ოპერატორი n ცვლადის ორჯერ დიფერენცირებად ფუნქციათა სივრცეზე.

დავუშვათ, $v:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ არის n ცვლადის ვექტორული ფუნქცია:

$$v=v(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(v_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,v_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)),$$

სადაც $v_j(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ j=1,\ldots,n$ საკოორდინატო ფუნქციებია: $v_j:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$. v ვექტორული ფუნქციის *იაკობის მატრიცა* განმარტებით არის v-ს კერძო წარმოებულებისაგან შედგენილი კვადრატული მატრიცა

$$J(v)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial v_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცის დეტერმინანტს ეწოდება v ვექტორული ფუნქციის *იაკობიანი.* $J(v)$ მატრიცის კვალი, ე.ი. მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ჯამი, $trJ(v)=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial v_n}{\partial x_n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$, სკალარული ფუნქციაა და ტოლია v-ს დივერგენციის, რომელიც $\mathrm{div}v$-თი აღინიშნება.

ამრიგად:

$$\mathrm{div}v=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

დავუშვათ ახლა, რომ $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ არის n ცვლადის (სკალარული) ფუნქცია. ამ ფუნქციას ბუნებრივად შეესაბამება ვექტორული ფუნქცია, რომელსაც $u=u(x_1,\ldots,x_n)$-ს *გრადიენტი* (ან ∇ *ნაბლა* ოპერატორი) ეწოდება, იგი აღინიშნება $\mathrm{grad}u$ და განმარტებით არის:

$$\mathrm{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

აქედან, $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ სკალარულ ფუნქციას შეესაბამება $\nabla\mathrm{u}=grad\ u$: $R^n\to R^n$ ვექტორული ფუნქცია, რომლის საკოორდინატო ფუნქციებია მისი კერძო წარმოებულები $x_1,\ldots,x_n$ ცვლადების მიმართ.

განვიხილოთ $\nabla\mathrm{u}=grad\ u$-ს დივერგენცია:

$$\mathrm{div\ grad}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

რაც ნიშნავს, რომ მივიღეთ ტოლობა:

$$\Delta=div\ grad\ u.$$

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება, რომ $\Delta u=\nabla^2 u$.

სამი – x,y,z ცვლადის $\vartheta:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ ვექტორ-ფუნქციისათვის შემოვიტანოთ აგრეთვე *როტორის* ანუ *ვიხრის* ცნება, რომელიც rot სიმბოლოთი აღინიშნება და განმარტებით არის შემდეგი სამგანზომილებიანი ვექტორული ფუნქცია:

$$\mathrm{rot}\vartheta=\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right),$$

სადაც u, v, w საკოორდინატო ფუნქციებია:

$$\vartheta(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

13.2. ძირითადი ცნებები და განმარტებები

კურსის დასაწყისში ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებთან ერთად მოვიყვანეთ კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების განმარტებაც და აღვნიშნეთ, რომ კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები წარმოიშობა იმ დროს, როდესაც საძიებელი ფუნქცია მრავალი (ორი ან ორზე მეტი) ცვლადისაა და განტოლება შეიცავს ამ ფუნქციის ყველა, ან ზოგიერთ კერძო წარმოებულს. ისევე, როგორც ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის მიზნით, განტოლებების კლასებად დაყოფა ანუ კლასიფიკაციაა საჭირო და ცალკეული კლასისათვის ამოხსნის მეთოდის მითითება. ზოგიერთი მათგანის ამოხსნის გზა მათ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე დაყვანაში მდგომარეობს.

შემოვიტანოთ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებთა თეორიის საწყისი ცნებები.

დავუშვათ, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ ნამდვილი n ცვლადის ნამდვილი ფუნქციაა.

განმარტება: *პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება* u უცნობი ფუნქციის მიმართ ეწოდება

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (1)$$

სახის გამოსახულებას, სადაც $F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ მოცემული ნამდვილი, დიფერენცირებადი ფუნქციაა $2n+1$-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის $U \subset \mathbf{R}^{2n+1}$ არეში.

განმარტება: $\Omega \subset R^n$ არეში განსაზღვრულ $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციას ეწოდება (1) განტოლების ამონახსნი, თუ:

1) $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ უწყვეტად დიფერენცირებადია Ω-ში;

2) ყოველი $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$-სათვის $\left(x_1, \ldots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \in U$;

3) $F\left(x_1,\ldots,x_n,\varphi(x_1,\ldots,x_n),\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)\equiv 0$ ყოველი $(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega$ -სათვის.

(1) განტოლების ამონახსნი იძლევა $n+1$-განზომილებიან R^{n+1} სივრცეში გლუვ n -განზომილებიან ზედაპირს – ჰიპერზედაპირს, რომელსაც (1) განტოლების *ინტეგრალური ზედაპირი* ეწოდება. ყურადღება მიაქციეთ ფაქტს, რომ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალური წირი ჩვენ ვუწოდეთ განტოლების ამონახსნის გრაფიკს, რომელიც ერთგანზომილებიანი ჰიპერზედაპირია $\mathbf{R}^2$ -ში.

როგორც ვთქვით, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებით მრავალი ფიზიკური მოვლენა აღიწერება. მაგალითად, გაზური დინამიკის ძირითადი განტოლებაა:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

ჰოპფის განტოლება, სადაც $u=u(t,x)$ უცნობი ფუნქციაა. ოპტიკაში კი მნიშვნელოვან როლს თამაშობს:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=n(x,y,z)$$

განტოლება, რომელიც აღწერს სინათლის სხივის გავრცელებას $n(x,y,z)$ გარდატეხის მაჩვენებლის მქონე არაერთგვაროვან გარემოში.

(1) განტოლებას ეწოდება წრფივი, თუ უცნობი $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ ფუნქცია და მისი კერძო წარმოებულები მასში წრფივად შედიან. წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა:

$$\sum_{j=1}^{n}a_j(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b(x_1,\ldots x_n)u=f(x_1,\ldots,x_n)$$

გამოსახულება. ხოლო:

$$\sum_{j=1}^{n}a_j(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j}=0$$

სახის განტოლებას კი კერძოწარმოებულებიანი წრფივი *პირველი რიგის ერთგვაროვანი განტოლება* ეწოდება. თუ (1) განტოლებაში წრფივად მხოლოდ

$u = u(x_1,...,x_n)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები შედიან, მაშინ განტოლებას *კვაზიწრფივი* ეწოდება. კვაზიწრფივი განტოლების ზოგადი სახე კი ასეთია:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x_1,...x_n,u).$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც (1) განტოლება არ არის კვაზიწრფივი, მაშინ მას კერძოწარმოებულებიანი პირველი რიგის *არაწრფივი* განტოლება ეწოდება.

13.3. მათემატიკური ფიზიკის კლასიკური განტოლებები

ამ პარაგრაფს საცნობარო ხასიათი აქვს და აქ მოყვანილია კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები. მათი უმრავლესობა მომდევნო პარაგრაფებში განხილვის ობიექტი იქნება. მიუხედავად მათი მრავალფეროვნებისა, ვნახავთ, რომ ის მეთოდები, რომლებსაც კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად განვავითარებთ, საკმარისია მოყვანილი განტოლებების სრული ან ნაწილობრივი ანალიზისათვის.

კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის ძირითად განტოლებებს მიეკუთვნება:

*ა) **ლაპლასის განტოლება***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

როგორც უკვე ვიცით, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ არის ლაპლასის ოპერატორი და იგი მოქმედებს ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებად $u(x,y,z)$ ფუნქციებზე. ლაპლასის განტოლების გარდა, ლაპლასის ოპერატორი გვხვდება ტალღურ განტოლებაში, სითბოგამტარებლობის და დიფუზიის განტოლებებში. ლაპლასის განტოლება აღწერს გარკვეულ ფიზიკურ პროცესებს ელექტროდინამიკაში, მაგნიტოსტატიკაში, ჰიდრო- და აეროდინამიკაში, დრეკადობის თეორიაში და სხვა;

*ბ) **პუასონის განტოლება***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x,y,z)$$

ლაპლასის განტოლების შესაბამისი არაერთგვაროვანი განტოლებაა;

გ) ***ტალღური განტოლება*** (ტალღის განტოლება)

$$\Delta u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x,y,z,t);$$

დ) ***სითბოგამტარებლობის ანუ ფურიეს განტოლება***

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial u}{\partial t} = -f(x,y,z,t)$$

გვხვდება სითბოგამტარებლობის და დიფუზიის თეორიებში, აგრეთვე ბირთვული რეაქტორების თეორიაში;

ე) ***ჰელმჰოლცის განტოლება***

$$\Delta u + k^2 u = -f(x,y,z), \quad k = const,$$

რომელიც აღწერს სხვადასხვა სახის რხევით პროცესებს. განტოლებაში $k = \omega/v$ ტალღური რიცხვია. მრავალგანზომილებიანი (ერთგვაროვანი) ტალღის განტოლება $u_{tt} = c^2 \Delta u$, სადაც $u = u(t,x)$ უცნობი ფუნქციაა, $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაინტერესებს $e^{i\omega t}u(x)$ სახის ამონახსნი, დაიყვანება

$$(\Delta + k^2)u = 0$$

ჰელმჰოლცის (ერთგვაროვან) განტოლებაზე, სადაც $\omega = k/c$.

ვ) ***შრიოდინგერის განტოლება.*** მიუხედავად იმისა, რომ ჩვენ არ განვიხილავთ დაწვრილებით, მაინც აღვნიშნავთ კიდევ ერთ მნიშვნელოვან განტოლებას – შრიოდინგერის განტოლებას:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar}(E - V)\psi = 0,$$

რომელიც კვანტური მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი განტოლებაა. აქ $\psi(x)$ ტალღური ფუნქციაა, m ნაწილაკის მასაა, E ნაწილაკის ენერგია, $V(x)$ გარე ველის პოტენციალია, $\hbar$ პლანკის მუდმივაა ($\hbar = 1{,}054 \times 10^{-27}$ ერგი$\times$ წამი). ეს განტოლება საკმაოდ ზოგადი განტოლებაა და დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის იმ მეთოდების გამოყენებით, რაც შევისწავლეთ, მხოლოდ კერძო შემთხვევებში შევძლებთ მის ამოხსნას.

მაგალითად, უსპინო ნაწილაკს გარე ველში აღწერს:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(x)\psi \tag{1}$$

შრიოდინგერის განტოლება, სადაც $x\in\mathbf{R}^3$, $\psi(t,x)$ არის კვანტური ნაწილაკის ტალღური, ანუ ფსი-ფუნქცია, რომლითაც მოიცემა ე.წ. კომპლექსური ამპლიტუდა და იგი ახასიათებს $|\psi(t,x)|^2$-ის ტოლი ალბათობით ნაწილაკის მდებარეობას x წერტილში დროის t მომენტში. m აღნიშნავს ნაწილაკის მასას, $V(x)$ არის გარე ველის პოტენციალი (იგი ნამდვილი ფუნქციაა), ხოლო $\hbar$ კი – პლანკის მუდმივაა. (1) განტოლებისათვის:

$$\psi|_{t=0}=\psi_0(x) \tag{2}$$

საწყისი პირობა ბუნებრივად ისმება. (1), (2) ამოცანის ამონახსნი ფორმალურად იწერება:

$$\psi(t,\circ)=e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\psi_0$$

სახით, სადაც $\circ$ სიმბოლოს მაგივრად x-ის კონკრეტული მნიშვნელობა ისმება. ხოლო:

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(x)$$

გამოსახულებას ((1) განტოლების მარჯვენა მხარე) ეწოდება *შრიოდინგერის ოპერატორი*. მას აქვს ფიზიკური შინაარსი, რის გამოც ამ ოპერატორს მოცემული ნაწილაკის ენერგიის ოპერატორსაც უწოდებენ. ტალღის განტოლების (სადაც სპეციალური სახის ამონახსნის ძიებას მივყავართ ჰელმჰოლცის განტოლებაზე) ანალოგიურად, შრიოდინგერის არასტაციონარულ განტოლებას, რომლის ამონახსნია: $e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\psi(x)$, მივყავართ განტოლებამდე:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x),$$

რომელსაც *შრიოდინგერის სტაციონარული განტოლება* ეწოდება. ის აღწერს ფიქსირებული E ენერგიის მქონე ნაწილაკის მდგომარეობას.

ფიზიკურ მოვლენათა საკმაოდ ფართო კლასს აღწერს აგრეთვე განტოლება:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} - cu = -f(x, y, z),$$

რომელსაც უწოდებენ *ტალღის გავრცელების განტოლებას ენერგიის შთანმთქმელ გარემოში.* მისი ამოხსნის მეთოდებს, ისევე როგორც ზემოთ მოყვანილ შრიოდინგერის განტოლებისას, ცალკე მონოგრაფიები აქვს მიძღვნილი, ხოლო ის კერძო შემთხვევები, რომლის დროსაც ეს განტოლება ინტეგრებადია კვადრატურებში, ტრივიალურია.

ზ) ***მაქსველის განტოლება.*** რაიმე გარემოში მაგნიტური და ელექტრული ველის დაძაბულობას აღწერს *მაქსველის განტოლება.* თუ ელექტრულ და მაგნიტურ დაძაბულობებს, შესაბამისად, აღვნიშნავთ $E = (E_1, E_2, E_3)$ და $H = (H_1, H_2, H_3)$ ვექტორებით, მაშინ მაქსველის განტოლება იქნება ასეთი:

$$divD = 4\pi\rho,$$

$$divB = 0,$$

$$rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$rotH = \frac{4\pi}{c}j + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t},$$

სადაც ρ ელექტრული მუხტების სიმკვრივეა, c სინათლის სიჩქარეა ვაკუუმში. გარდა ამისა, ვაკუუმში $D = E$, $B = H$, $j = 0$, ხოლო იზოტროპულ გარემოში კი $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$, $j = \sigma E + j_1$, სადაც ε გარემოს დიალექტრიკული შეღწევადობაა, μ –გარემოს მაგნიტური შეღწევადობა, σ ელექტროგამტარებლობაა, j_1 კი გარე დენების სიმკვრივეა. ე.ი., აქ იგულისხმება ისეთი დენები, რომლებიც აღიძვრებიან სხვა ძალებიდან (დიფუზიით ან მაგნიტური ველისაგან) და არა ელექტრული ველის ძალისაგან.

მაქსველის განტოლებათა სისტემა არის ელექტრომაგნიტური ტალღების თეორიის ძირითადი განტოლება და გამოიყენება ე.წ. რადიოტექნიკური გათვლებისათვის, აგრეთვე ტალღგამტარების თეორიაში. სასაზღვრო და საწყისი პირობები მაქსველის განტოლებისათვის ისმება ფიზიკური მოსაზრებებიდან.

მაქსველის განტოლებიდან გამოიყვანება ე.წ. *ტელეგრაფული განტოლება*, რომელიც აღწერს დენის ძალის და დაძაბულობის ცვლილებას გამტარში:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial i}{\partial x} + C\dfrac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + C\dfrac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0 \end{cases}$$

სადაც x არის კოორდინატი გამტარის გასწვრივ, v ძაბვაა გამტარის მოცე-მულ წერტილში, i დენის ძალაა, R წინაღობაა, L თვითინდუქციაა, C – ტევადობა, ხოლო G კი გაჟონვაა (გადინება). აქ ყველაგან წინაღობა, თვი-თინდუქცია და ა.შ. იგულისხმება ერთეულთა ერთსა და იმავე სისტემაში.

14. პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები

14.1. წრფივი პირველი რიგის განტოლება

დავუშვათ, $x=(x_1,...,x_n)\in\Omega$ და, ვთქვათ, $a_j(x)$, $j=1,...,n$, Ω არეზე განსაზღვრული უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. განვიხილოთ წრფივი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}=0\,. \tag{1}$$

ამ დროს ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს Ω არეზე განსაზღვრული განტოლება. დავუშვათ, (1) განტოლების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2(x)\neq 0\,,\quad \forall x\in\Omega.$$

შემოვიტანოთ ვექტორ-ფუნქცია $a(x)=(a_1(x),...,a_n(x))$, მაშინ (1) განტოლება შესაძლებელია გადაიწეროს

$$(a(x),\mathrm{grad}\,u(x))=0$$

სახით, სადაც (A,B) მრგვალი ფრჩხილი აღნიშნავს A და B ვექტორების სკალარულ ნამრავლს.

განმარტება:

$$\dot{x}(t)=a(x) \tag{2}$$

ავტონომიურ განტოლებას ეწოდება (1) კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების *მახასიათებელი სისტემა*, ხოლო მის ტრაექტორიებს კი (1) განტოლების *მახასიათებლები.*

თეორემა 1. *$x_0\in\Omega$ წერტილის ნებისმიერ მიდამოში (1) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი ასეთია:*

$$u(x)=F(u_1(x),...,u_{n-1}(x))\,,$$

სადაც $u_1(x),\ldots,u_{n-1}(x)$ *ფუნქციები არიან (2) მახასიათებელი სისტემის დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალები* x_0 *წერტილში, ხოლო* $F(\varsigma_1,\ldots,\varsigma_{n-1})$ *ფუნქცია კი ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა.*

განმარტება: $u = F(u_1(x),\ldots,u_{n-1}(x))$ ფუნქციას, სადაც $F(\varsigma_1,\ldots,\varsigma_{n-1})$ ნებისმიერი თავისი არგუმენტების მიმართ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ეწოდება (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი x_0 წერტილის V მიდამოში.

როგორც ვხედავთ, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების *ზოგადი ამონახსნი ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციის სიზუსტით განისაზღვრება.* შედარებისათვის გავიხსენოთ, რომ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი მუდმივებზეა დამოკიდებული და ამ მუდმივების განსაზღვრის, უფრო ზუსტად, ამონახსნებიდან ერთი ამონახსნის გამოყოფის მიზნით მოიცემა კოშის, ანუ საწყისი პირობა. ანალოგიურად, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა სივრციდან კონკრეტული ამონახსნის გამოსაყოფად საჭიროა დამატებითი პირობების მოცემა.

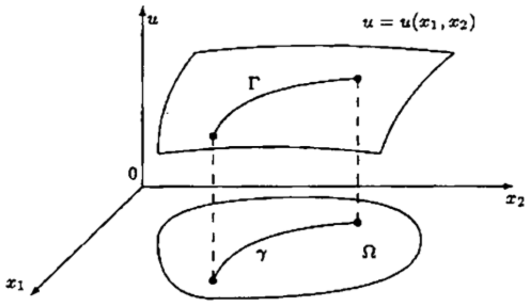
ავიღოთ რაიმე $n-1$-განზომილებიანი γ ზედაპირი (ჰიპერზედაპირი) Ω-ში. დავუშვათ, იგი მოცემულია $g(x)=0$ განტოლებით. g ფუნქციას მოვთხოვოთ, რომ ის იყოს უწყვეტად დიფერენცირებადი და $\mathrm{grad} g(x) \neq 0$ ყოველი x-სათვის Ω-დან. ვუწოდოთ γ ზედაპირს *საწყისი* ზედაპირი. გარდა ამისა, დავუშვათ, რომ γ-ზე მოცემულია რაიმე $\varphi(x)$ ფუნქცია. ამ შემთხვევაში $u(x)$-სათვის საწყისი (სასაზღვრო) პირობა იქნება:

$$u(x)\big|_{x\in\gamma} = \varphi(x). \tag{3}$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე ნიშნავს, რომ u ფუნქცია შეზღუდულია $\gamma \subset \Omega$ $n-1$-განზომილებიან Ω-ს ქვესიმრავლეზე და (3) ტოლობა სრულდება ამ ქვესიმრავლეზე.

კოშის ამოცანა (1) განტოლებისათვის ისმება შემდეგნაირად: *ვიპოვოთ (1) განტოლების ყველა ამონახსნი (3) სასაზღვრო პირობით.*

მაგალითად, როდესაც $n = 2$, კოშის (1), (3) ამოცანა გეომეტრიულად ნიშნავს (1) განტოლების ისეთი ინტეგრალური ზედაპირის მოძებნას, რომელიც გაივლის მოცემულ γ წირზე (ნახაზი 1).



ნახ. 1

ამ ამოცანის ანალიზისათვის საჭიროა ერთი დამატებითი ცნება შემოვიტანოთ.

განმარტება: $M_0 \in \gamma$ წერტილს ეწოდება (1) განტოლების *მახასიათებელი* წერტილი, თუ $\dot{g}(M_0) = (a(M_0), \mathrm{gradg}(\mathrm{M}_0)) = 0$.

$M_0 \in \gamma$ არის (1) განტოლების მახასიათებელი წერტილი, მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ $a(M_0)$ ვექტორი არის γ ზედაპირის მხები ვექტორი M_0 წერტილში. აქედან გამომდინარეობს, რომ (2) მახასიათებელი სისტემის წონასწორობის და γ ზედაპირის განსაკუთრებული წერტილები არიან (1) განტოლების მახასიათებელი წერტილები.

ახლა დავუბრუნდეთ კოშის ამოცანას. სამართლიანია შემდეგი დებულება, რომელიც შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც არსებობისა და ერთადერთობის თეორემა.

თეორემა 2. *თუ $M_0 \in \gamma$ წერტილი არ არის (2) განტოლების მახასიათებელი წერტილი, მაშინ M_0-ის რაიმე V მიდამოში (2), (4) კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.*

14.2. ორი ცვლადის შემთხვევა

როგორც აღვნიშნეთ, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას უწოდებენ ისეთ განტოლებას, რომელშიც უცნობია რამდენიმე ცვლადის ფუნქცია მის კერძო წარმოებულებთან ერთად. უცნობების რიცხვის ზრდასთან ერთად რთულდება დიფერენციალური განტოლება და ძალზე ცოტაა

ისეთი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა ამოხსნაც ცხადად შეიძლება. მოვიყვანოთ ისეთი განტოლებები, რომელთა ამოხსნაც შედარებით მარტივია. ამ მიზნის მისაღწევად მაქსიმალურად შევზღუდოთ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა კლასი და განვიხილოთ განტოლება:

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0\,. \tag{1}$$

ყოველივე ზემოთ თქმული შევაჯამოთ ამ განტოლებისათვის.

(1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასში მოიცემა გამოსახულებით:

$$u(x,y)=f(v(x,y))\,,$$

სადაც f უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო $v(x,y)$ კი ჩვენი განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნია.

$v(x,y)$ კერძო ამონახსნი მოიცემა:

$$\begin{cases}\dot{x}=a(x,y),\\ \dot{y}=b(x,y)\end{cases} \tag{2}$$

ავტონომიური სისტემის ამონახსნით. უფრო ზუსტად, (1) განტოლების ამონახსნები არიან (2) სისტემის პირველი ინტეგრალები.

(2) სისტემის პირველი ინტეგრალების პოვნა დაიყვანება

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის პოვნაზე.

მაგალითი 1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$. საძებნია ორი ცვლადის $u(x,y)$ ფუნქცია. ამოცანა დასაწყისისათვის საინტერესოა იმით, რომ ორ ცვლადზეა დამოკიდებული. მოვახდინოთ გამოსახულების ინტეგრება x ცვლადით და მივიღებთ: $u=C$, აქ C ნებისმიერი მუდმივია x-ის მიმართ, მაგრამ შესაძლებელია მეორე y ცვლადზე ნებისმიერი თანადობით იყოს დაკავშირებული, სხვა სიტყვებით, $u(x,y)=C(y)$. მოცემულ განტოლებაში $C(y)$-ის ჩასმით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ იგი მართლაც არის განტოლების ამონახსნი.

მაგალითი 2. $\frac{\partial u}{\partial x}=f(x)$. წინა ამოცანის ანალოგიურად მივიღებთ $u(x,y)=\int f(x)dx+C(y)$.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ:

$$-y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა: დავწეროთ მოცემული განტოლების შესაბამისი (2) ავტონომიური სისტემა:

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x.\end{cases}$$

ეს უკანასკნელი შესაძლებელია გადავწეროთ ასეთი სახით: $d(x^2+y^2)=0$, საიდანაც $x^2+y^2=C$ და, ამრიგად, $v(x,y)=x^2+y^2$ არის ავტონომიური სისტემის პირველი ინტეგრალი. გამოსავალი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი იქნება $u(x,y)=f(x^2+y^2)$, სადაც f ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{3}$$

განტოლების ამონახსნი, თუ $u=yz$, როდესაც $x=1$.

ამოხსნა: დავწეროთ (3)-ის შესაბამისი ავტონომიური სისტემა:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$$

და ვიპოვოთ მისი პირველი ინტეგრალები: $x-y=C_1$ და $2x-z=C_2$. ამრიგად, ზოგად ინტეგრალს აქვს ასეთი სახე: $u(x,y,z)=F(x-y,2x-z)$. საწყისი პირობა გვაძლევს $yx=F(1-y,2-x)$. შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $1-y=\xi$, $2-z=\eta$, მაშინ $F(\xi,\eta)=(1-\xi)(2-\eta)$. ამრიგად, $u(x,y,z)=$ $=(1-x+y)(2-2x+z)$ ფუნქცია არის ამოცანის ამონახსნი.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

განტოლების ამონახსნი, თუ $u=x^2+y^2$, როდესაც $z=0$.

ამოხსნა: დავწეროთ ავტონომიური სისტემა:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy}$$

და ვიპოვოთ მისი პირველი ინტეგრალები: $\frac{x}{y}=C_1$ და $2xy-2z=C_2$.

ზოგად ამონახსნს აქვს ასეთი სახე: $u(x,y,z)=F\left(\frac{x}{y},xy-2z\right)$. F ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას, ვპოულობთ განტოლებიდან $x^2+y^2=F\left(\frac{x}{y},xy\right)$. თუ ამ განტოლებაში ჩავსვამთ $\frac{x}{y}=\xi$, $xy=\eta$, მივიღებთ $F(\xi,\eta)=\frac{\eta}{\xi}+\xi\eta$, საიდანაც $u(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)\left(1-\frac{2z}{xy}\right)$.

მაგალითი 6. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$. მიუხედავად იმისა, რომ ეს განტოლება მარტივად გამოიყურება, მისი ამონახსნის პოვნა ადვილი საქმე არ არის. ამ ტიპის განტოლებების ამოსახსნელად რამდენიმე სხვადასხვა მეთოდია დამუშავებული. მოვიყვანთ ერთ-ერთ მათგანს. შემოვიტანოთ ახალი $\xi=\xi(x,y)$ და $\eta=\eta(x,y)$ დამოუკიდებელი ცვლადები. დავუშვათ, რომ შესაბამისი იაკობიანი 0-საგან განსხვავებულია (რაც იმაზე მიუთითებს, რომ $(x,y)\to(\xi,\eta)$ ასახვა ურთიერთცალსახაა). გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის კერძო წარმოებულების პოვნის ფორმულები:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

ეს გამოსახულებები შევიტანოთ გამოსავალ განტოლებაში და შედეგი გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=0\,. \tag{4}$$

მოვითხოვოთ, რომ შესრულდეს იგივეობა $\frac{\partial \xi}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial y}=0$, რომელიც, თავის მხრივ, არის გამოსავალი განტოლების მსგავსი, მაგრამ ამჯერად საკმარისია რომელიმე ერთი ამონახსნის პოვნა. მაგალითად, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\xi = x + y$, $\eta = x$. (4) განტოლება გახდება ასეთი: $\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$, საიდანაც ვიღებთ, რომ $u=\varphi(\xi)$, სადაც φ ნებისმიერი ფუნქ-ციაა. რადგან $\xi = x + y$, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება $u(x,y)=\varphi(x+y)$, სადაც φ $x+y$ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციაა.

მაგალითი 7. $a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$, სადაც a და b მუდმივებია. მაგალითი 6 არის ამ განტოლების კერძო შემთხვევა. განვიხილოთ ცვლადის გარდაქმნა $\xi = bx - ay, \eta = ax + by$. მოცემული განტოლება ახალ კოორდინატებში მი-იღებს ასეთ სახეს: $u_\eta = 0$, რომლის ამონახსნია $u(\xi,\eta) = f(\xi)$. დავუბრუნ-დებით რა ძველ ცვლადებს, მივიღებთ მოცემული განტოლების ამონახსნს: $u(x,y) = f(bx - ay)$, სადაც f ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

თუ წინა მაგალითს გადავწერთ $-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ სახით, მაშინ უკანასკ-ნელ ორ მაგალითში მიღებული შედეგები ერთმანეთს დაემთხვევა.

მაგალითი 8. მაგალითები 4 და 6 (აგრეთვე 7) არიან შემდეგი ამოცა-ნის კერძო შემთხვევები:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(V, grad\, u) = 0, \tag{5}$$

$$V(t,X) = f(X), \tag{6}$$

სადაც $X = (x_1, \dots, x_n)$ n-განზომილებიანი ვექტორია, ხოლო მრგვალი ფრჩხილი კი აღნიშნავს სკალარულ ნამრავლს. (5) განტოლებას ეწოდება *გადატანის განტოლება.*

ამ ამოცანის ამონახსნია:

$$u(t,X) = f(X - t\,V) \tag{7}$$

ფუნქცია, ხოლო (6) საწყისი პირობის გარეშე (5) განტოლების ამონახსნია $u(t,X) = F(X - t\,V)$, სადაც F ნებისმიერი ფუნქციაა (გააკეთეთ აუცილებელი გამოთვლები დამოუკიდებლად და დარწმუნდით ამაში!).

ვთქვათ, $n = 2$, $t = x - 1$, $X = (y,z)$, $V = (1,2)$ და $f(X) = yz$, როდესაც $x = 1$. ეს არის მაგალით 4-ში განხილული შემთხვევა. (7) ფორმულის გამოყენებით ამოცანის ამონახსნია:

$$f\big((y,z) - (x-1)(1,2)\big) = f(y - x + 1, z - 2x + 2).$$

სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $u(x,y,z) = (y - x + 1)(z - 2x + 2)$.

მაგალით 6-ში $t = x$ და $V = -1$, მაშინ (7) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ: $u(x,y) = F(x + y)$.

მაგალითი 9. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. განვიხილოთ ცვლადის შემდეგი გარდაქმნა: $\dfrac{y}{x} = \eta, y = \eta$, მაშინ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\times 0 = -\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{y}{x^2}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\times 1\,.$$

ამრიგად, განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0\,,$$

სადაც $u = f(\xi)$, რაც ნიშნავს, რომ ზოგადი ამონახსნია: $u(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, სადაც f ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

მაგალითი 10. ვიპოვოთ:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

განტოლების ის ინტეგრალური ზედაპირი, რომელიც გადის

$$x = \tau \,, \quad y = \tau \,, \quad u = \tau^3 \,, \quad \tau \in \mathbf{R}^1$$

პარამეტრულად მოცემულ წირზე.

ამოხსნა: ამ ამოცანას ორი განსხვავებული მეთოდით ამოვხსნით.

პირველი გზა *(პარამეტრთა შემოტანის საშუალებით)*. მახასიათებელი

$$\dot{x}(t) = x \,, \quad \dot{y}(t) = -y \,, \quad \dot{u}(t) = u$$

სისტემა

$$x\,|_{t=0} = \tau \,, \quad y\,|_{t=0} = \tau \,, \quad u\,|_{t=0} = \tau^3$$

საწყისი პირობების შემთხვევაში ასეთია:

$$x = \tau e^t \,, \quad y = \tau e^{-t} \,, \quad u = \tau^3 e^t \,.$$

ეს არის კოშის ამოცანის პარამეტრული ამონახსნი, საიდანაც ვპოულობთ ანალიზურ ამონახსნს: $u = x^2 y$.

მეორე გზა. ახლა გამოვიყენებთ არა ტრაექტორიას, არამედ პირველ ინტეგრალებს. ფუნქციები $v_1 = xy$ და $v_2 = yu$ მახასიათებელი განტოლების პირველი ინტეგრალებია. როგორც უკვე ვიცით, $F(xy, yu) = 0$ განტოლება, სადაც $F(\varsigma_1, \varsigma_2)$ ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, იძლევა გამოსავალი განტოლების ზოგად ინტეგრალს. საწყისი პირობებიდან ვპოულობთ F -ის ცხად გამოსახულებას შემდეგნაირად:

$$F(v_1, v_2) = F(xy, yu) = F(\tau^2, \tau^4) \equiv 0 \,, \quad \forall \tau \in \mathbf{R}^1 \,.$$

აქედან, $F = v_1^2 - v_2 = x^2 y^2 - yu = 0$ და ამრიგად, $u = x^2 y$.

მაგალითი 11. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა წინა განტოლებისათვის, რომელსაც u ფუნქცია იგივურად ერთის ტოლია $x^2 + y^2 = 4$ წრეწირზე.

ამოხსნა: გამოვრიცხოთ x , y , u ცვლადები

$$u = 1 \,, \quad x^2 + y^2 = 4 \,, \quad xy = v_1 \,, \quad yu = v_2$$

სისტემიდან და მივიღებთ: $v_2^4 + v_1^2 = 4v_2^2$. ამრიგად, კოშის ამოცანის ამონახსნი მოიცემა განტოლებით: $y^4 u^4 + x^2 y^2 = 4 y^2 u^2$.

14.3. კვაზიწრფივი განტოლება

დავუშვათ, $U \subset R^{n+1}$ რაიმე არეა $x = (x_1, ..., x_n)$ და u დეკარტული კოორდინატებით. განვიხილოთ U არეზე განსაზღვრული პირველი რიგის კვაზიწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = b(x,u) , \tag{1}$$

სადაც $a_j(x,u)$, $j = 1,...,n$ და $b(x,u)$ მოცემული უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია U არეზე. ამასთან, დავუშვათ სრულდება უტოლობა:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2(x,u) \neq 0 , \ \ \forall (x,u) \in U .$$

როგორც ვხედავთ, (1) განტოლების კოეფიციენტები დამოკიდებულია არა მარტო x ცვლადზე, არამედ u ფუნქციაზეც.

კვაზიწრფივი განტოლების ანალიზისათვის, ანალოგიურად წრფივი განტოლებისა, შემოვიტანოთ $a(x,u)$ ვექტორ-ფუნქცია კოორდინატებით $a_1(x,u),...,a_n(x,u)$ და (1) განტოლება გადავწეროთ სკალარული ნამრავლის გამოყენებით:

$$(a(x,u), \mathrm{grad}\, u(x)) = b(x,u)$$

სახით.

განმარტება: ავტონომიურ სისტემას:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x,u), \\ \dot{u}(t) = b(x,u) \end{cases} \tag{2}$$

ეწოდება (1) განტოლების მახასიათებელი სისტემა, ხოლო მის ტრაექტორიებს კი – (1) განტოლების მახასიათებლები.

ზემოთ მოყვანილი $\sum_{j=1}^{n} a_j^2(x,u) \neq 0$ უტოლობა მიუთითებს იმაზე, რომ U არე არ შეიცავს (2) განტოლების წონასწორობის წერტილს. გარდა ამისა, U არეში სრულდება კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემის პირობები.

განვიხილოთ (1) სახის:

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u) \qquad (3)$$

განტოლება ორი დამოუკიდებელი ცვლადის $u(x,y)$ ფუნქციისათვის და დავადგინოთ კავშირი განტოლების მახასიათებელ და ინტეგრალურ ზედაპირებს შორის. აქ $a(x,y,u)$, $b(x,y,u)$, $c(x,y,u)$ ფუნქციები $U\subset R^3$ არეზე მოცემული უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია. ყოველ $M\in U$ წერტილში (3) განტოლება განსაზღვრავს $l(M)=(a(M),b(M),c(M))$ ვექტორულ ველს. ვთქვათ, (3) განტოლების ინტეგრალური ზედაპირი მოიცემა განტოლებით $u=u(x,y)$. თუ M წერტილი ინტეგრალურ ზედაპირზე მდებარეობს, მაშინ $n(M)=\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x},\frac{\partial u(M)}{\partial y},-1\right)$ ვექტორი M წერტილში ზედაპირის ნორმალის გასწვრივაა მიმართული. $l(M)$ და $n(M)$ ვექტორები ორთოგონალურები არიან, რადგან (6) განტოლება ნიშნავს

$$(l(M),n(M))=0,\ \forall M\in U,$$

ტოლობას. ამრიგად, $l(M)$ მდებარეობს (3) განტოლების ინტეგრალური ზედაპირის M წერტილში გამავალ მხებ სიბრტყეზე. სამართლიანია აგრეთვე შებრუნებული დებულებაც, კერძოდ, თუ გლუვი $u=u(x,y)$ ზედაპირის მხები ვექტორია $l(M)$ ყოველ M წერტილში, მაშინ ეს ზედაპირი არის (3) განტოლების ინტეგრალური ზედაპირი. მაშასადამე, $l(M)$ არის მხები ვექტორი როგორც M წერტილზე გამავალი მახასიათებლისა, ასევე ინტეგრალური ზედაპირის.

თეორემა 3. *ყოველი უწყვეტად დიფერენცირებადი $u=u(x,y)$ ზედაპირი, სადაც $(x,y)\in\Omega\subset R^2$, $(x,y,u)\in U$ არის (3) განტოლების ინტეგრალური ზედაპირი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის არის (4) განტოლების მახასიათებელი.*

დავუბრუნდეთ ზოგად (1) განტოლებას. მისი ამოხსნა დაიყვანება:

$$\sum_{j=1}^{n}a_j(x,u)\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}+b(x,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0 \qquad (4)$$

სახის განტოლების ამოხსნაზე. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. *დავუშვათ,* $v = V(x,u)$ *არის (4) განტოლების ამონახსნი* U *არის რაიმე* $U_0 \subseteq U$ *ქვეარეზე და, ვთქვათ,* $V(x,u) = 0$ *რომელიმე* $M \in U_0$ *წერტილში და* $\frac{\partial V(M)}{\partial u} \neq 0$. *მაშინ* R^n *-ზე* M *-ის* M' *პროექციის რაიმე მიდამოსათვის* $V(x,u) = 0$ *განტოლება განსაზღვრავს (1) განტოლების* $u = \varphi(x)$ *ამონახსნს.*

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს (1) განტოლების ამოხსნის ხერხი: (2) მახასიათებელი სისტემიდან ვპოულობთ $M \in U$ წერტილში დამოუკიდებელ პირველ $v_1(x,u), ..., v_n(x,u)$ ინტეგრალებს, მაშინ M -ის რაიმე მიდამოში (1) განტოლების ამონახსნი იქნება $v = F(v_1(x,u), ..., v_n(x,u))$ ფუნქცია, სადაც $F(\varsigma_1, ..., \varsigma_n)$ ნებისმიერი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ამრიგად, (2) განტოლების ამონახსნი განისაზღვრება როგორც არაცხადი ფუნქცია

$$F(v_1(x,u), ..., v_n(x,u)) = 0 \qquad (5)$$

განტოლებიდან.

(5) გამოსახულებას (1) განტოლების *ზოგადი ინტეგრალი* ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ (5) შესაძლებელია არ შეიცავდეს (1) განტოლების ყველა ამონახსნს. სახელდობრ, არ არის გამორიცხული, რომ არსებობდეს (1) განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც (4) განტოლებას იგივურად ნებისმიერი (x,u) წყვილისათვის არ აკმაყოფილებდეს, მაგრამ აკმაყოფილებდეს იმ შემთხვევაში, როდესაც $u = \varphi(x)$. ასეთი სახის ამონახსნს ეწოდება (1) განტოლების სპეციალური ამონახსნი. გავიმეორებთ, რომ ეს მხოლოდ გამონაკლისი შემთხვევაა.

ისევე, როგორც წრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლებებისათვის, კონკრეტული ამონახსნის გამოსაყოფად კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლიდან, საჭიროა დამატებითი პირობების მოცემა. ხშირად ასეთ პირობად ითვლება საწყისი პირობა, რაც ჩვენს შემთხვევაში ნიშნავს, რომ R^n -ის Ω არეში მოიცემა $n-1$ -განზომილებიანი (საწყისი) γ ზედაპირი, ხოლო γ -ზე კი – უწყვეტად დიფერენცირებადი $\varphi(x)$ ფუნქცია. საწყისი პირობა (1) განტოლებისათვის ასეთია:

$$u(x)\,|_{x \in \gamma} = \varphi(x). \qquad (6)$$

კოშის ამოცანა წრფივი განტოლების ანალოგიურად ისმება. კერძოდ, საჭიროა (1) განტოლების ამონახსნის პოვნა (6) საწყისი პირობით. სიმარტივისათვის ანალიზი ჩავატაროთ (3) განტოლებისათვის. დავუშვათ, γ წირი R^2-ში პარამეტრული განტოლებითაა მოცემული:

$$x = x(\tau) \text{ და } y = y(\tau),$$

სადაც $\tau \in I \subset R^1$ და ვთქვათ:

$$u(x,y)|_{(x,y)\in\gamma} = u_0(\tau), \quad \tau \in I. \tag{7}$$

γ წირს *საწყისი წირი* ეწოდება. იგულისხმება, რომ I-ზე $x(\tau)$, $y(\tau)$ და $u_0(\tau)$ უწყვეტად დიფერენცირებადები არიან და $(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2 > 0$ ყველა τ-სათვის I-დან.

(7) საწყისი პირობა მოგვცემს გლუვ Γ წირს:

$$\Gamma = \{(x,y,u) \mid x = x(\tau), y = y(\tau), u = u_0(\tau), \tau \in I\}.$$

(3), (7) კოშის ამოცანის ამონახსნი იძლევა (3) განტოლების ინტეგრალურ ზედაპირს, რომელიც ეხება Γ წირს. დავუშვათ, $M_0(x_0, y_0)$ არის $M(x_0, y_0, u_0) \in \Gamma$ წერტილის პროექცია R^2-ზე.

განმარტება: $M_0(x_0, y_0) \in \gamma$ წერტილს, სადაც $x_0 = x(\tau_0)$, $y_0 = y(\tau_0)$, $u_0 = u(\tau_0)$, ეწოდება (3) განტოლების მახასიათებელი წერტილი, თუ:

$$a(x_0, y_0, u_0) \cdot \dot{y}(\tau_0) - b(x_0, y_0, u_0) \cdot \dot{x}(\tau_0) = 0.$$

ამის შემდეგ უკვე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ თეორემა, რომელიც ეხება კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობას.

თეორემა 5. *თუ $M_0 \in \gamma$ წერტილი არ არის (3) განტოლების მახასიათებელი წერტილი, მაშინ M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში არსებობს (3), (7) კოშის ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი.*

კვაზიწრფივი განტოლების ამონახსნით აღიწერება მრავალი ფიზიკური პროცესი. მაგალითად, განვიხილოთ წრფეზე ინერციით მოძრავი ნაწილაკების ერთგვაროვანი გარემო, რომელთა სიჩქარე უცვლელია. აღვნიშნოთ $u(t,x)$-ით

ნაწილაკის სიჩქარე x წერტილში დროის t მომენტში. დავწეროთ ნიუტონის კანონი: *ნაწილაკების აჩქარება ნულის ტოლია.*

ამოხსნა: დავუშვათ, $x=\varphi(t)$ ფუნქცია ნაწილაკის მოძრაობას ახასიათებს. რადგან ნაწილაკის მოძრაობის სიჩქარე u-თი აღვნიშნეთ, გვექნება $\dot{\varphi}=u(t,\varphi(t))$, საიდანაც ვღებულობთ აჩქარებას:

$$\ddot{\varphi}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\dot{\varphi}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}.$$

ამრიგად, ნიუტონის კანონი იქნება განტოლება:

$$u_t+uu_x=0.$$

ეს განტოლება *ბიურგერის* განტოლების სახელითაა ცნობილი.

თუ ნაწილაკები მოძრაობენ $F(x)$ ძალურ ველში, მაშინ იგივე კანონი კვაზიწრფივი განტოლების საშუალებით ჩაიწერება $u_t+uu_x=F$ სახით. ეს უკანასკნელი კი არაერთგვაროვანი კვაზიწრფივი განტოლებაა.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

ვიპოვოთ შემდეგი განტოლებების ზოგადი ამონახსნები:

1. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-ay\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, $a=const.$ *პასუხი:*

$$z(x,y)=F\left(\frac{\sqrt[a]{y}(x+ax+2y)}{1+a}\right)$$

2. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y.$ *პასუხი:* $z(x,y)=y+x+F\left(xy+y^2\right)$

3. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2.$ *პასუხი:*

$$z(x,y)=\frac{x^2}{2}+(\ln(y)+1)yx+2y^2\ln(y)+F(xy+y^2)$$

4. $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}+e^x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$ *პასუხი:* $z(x,y)=F\left(\dfrac{ye^x+1}{y}\right)$

5. $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$ პასუხი: $z(x,y)=F\left(\dfrac{ye^x+2}{2y}\right)$

6. $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x.$ პასუხი: $z(x,y)=y+F\left(\dfrac{ye^x+2}{2y}\right)$

7. $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x.$ პასუხი: $z(x,y)=y+F\left(ye^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

8. $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=1.$ პასუხი: $z(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+F\left(-x^2+y^2\right)$

9. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u.$ პასუხი: $z(x,y)=F(xy)x$

15. მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები

15.1. კლასიფიკაცია

დავიწყოთ ზოგადი შემთხვევით და განვიხილოთ n ცვლადზე დამოკიდებული $u(x_1,...x_n)$ ფუნქციისათვის შემდეგი კვაზიწრფივი (წრფივი უმაღლესი წარმოებულის მიმართ) განტოლება:

$$\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\Phi(x,u,\nabla u)=0 \qquad (1)$$

U არეში უწყვეტი $a_{ij}(x)$ კოეფიციენტებით. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$. დავაფიქსიროთ U არეში რომელიმე $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ წერტილი და შევადგინოთ კვადრატული ფორმა:

$$g(X_1,X_2,....,X_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x^0)X_iX_j. \qquad (2)$$

(2) ფორმას ეწოდება (1) განტოლებასთან დაკავშირებული კვადრატული ფორმა. შევადგინოთ (2) კვადრატული ფორმის დეტერმინანტი:

$$\det g=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ვიტყვით, რომ (2) ფორმა *განსაზღვრულია*, თუ იგი ინარჩუნებს ნიშანს X-ის ცვლილების დროს, ხოლო, თუ ნიშანი იცვლება X-ის ცვლილებისას, მაშინ (2) ფორმა *განუსაზღვრელია.*

განმარტება: (1) განტოლებას x^0 წერტილში ეწოდება *ელიფსური* ტიპის განტოლება, თუ $\det g\neq 0$ და g განსაზღვრული ფორმაა.

(1) განტოლებას x^0 წერტილში ეწოდება *ჰიპერბოლური* ტიპის განტოლება, თუ $\det g\neq 0$ და g განუსაზღვრელი ფორმაა.

(1) განტოლებას x^0 წერტილში ეწოდება *პარაბოლური* ტიპის განტოლება, თუ $\det g = 0$.

(1) განტოლებას ეწოდება ელიფსური (შესაბამისად, ჰიპერბოლური, პარაბოლური) U არეში, თუ ამ არის ნებისმიერ წერტილში იგი არის ელიფსური (შესაბამისად, ჰიპერბოლური, პარაბოლური).

ნათელია, რომ, თუ $a_{ij}(x)$ კოეფიციენტები მუდმივებიაა, მაშინ განტოლების ტიპი დამოკიდებული არ არის დამოუკიდებელ ცვლადებზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში განტოლების ტიპი შეიძლება შეიცვალოს დამოუკიდებელი ცვლადების ცვლილებასთან ერთად. ამიტომ, ამ შემთხვევაში ბუნებრივად ისმება ისეთი არეების გამოყოფის ამოცანა, სადაც განტოლების ტიპი უცვლელია.

განტოლების ზემოთ მოყვანილი კლასიფიკაცია დამოკიდებული არ არის ცვლადების გარდაქმნაზე. ორი ცვლადის შემთხვევაში ამ დებულებას ჩამოვაყალიბებთ თეორემად და დავამტკიცებთ მას.

მაგალითი 1. ლაპლასის $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ განტოლებისათვის g კვადრატულ ფორმას აქვს ასეთი სახე: $g(X,Y,Z)=X^2+Y^2+Z^2$. ამ ფორმის დეტერმინანტი ტოლია:

$$\det g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \,,$$

ამრიგად g დადებითად განსაზღვრულია, რაც ნიშნავს, რომ ლაპლასის განტოლება არის ელიფსური.

მაგალითი 2. g კვადრატულ ფორმას ტალღური

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f(x,y,z,t)$$

განტოლებისათვის აქვს ასეთი სახე:

$$g(X,Y,Z,T) = X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{T^2}{a^2} \,,$$

ხოლო ამ ფორმის დეტერმინანტს კი –

$$\det g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2} \neq 0 .$$

ცხადია, რომ g განუსაზღვრელი ფორმაა, ამრიგად, განტოლება ჰიპერბოლურია.

მაგალითი 3. ფურიეს განტოლებისათვის კვადრატულ ფორმას აქვს $g(X,Y,Z,S) = X^2 + Y^2 + Z^2$ სახე (S ცვლადი აღნიშნავს t-ს მიმართ უმაღლეს, ე.ი. მეორე რიგის წარმოებულის შესაბამის ცვლადს), ხოლო ამ კვადრატული ფორმის დეტერმინანტს კი –

$$\det g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

რაც ნიშნავს, რომ ფურიეს განტოლება არის პარაბოლური ტიპის.

მაგალითი 4. თრიკომის (ფრანჩესკა თრიკომი (1897-1978), იტალიელი მათემატიკოსი და მექანიკოსი):

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

განტოლება არის შერეული ტიპის, რადგან მისი შესაბამისი $g(X,Y) = yX^2 + Y^2$ კვადრატული ფორმის დეტერმინანტის:

$$\det g = \begin{vmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y$$

ნიშანი დამოკიდებულია y დამოუკიდებელ ცვლადზე. თუ $y < 0$, განტოლება ჰიპერბოლურია, თუ $y > 0$ – ელიფსური, ხოლო თუ $y = 0$, მაშინ კი – პარაბოლური.

თრიკომის განტოლება გაზური დინამიკის ერთ-ერთი ძირითადი განტოლებაა. იმ არეში, სადაც განტოლება ჰიპერბოლურია, იგი აღწერს ზებგერით

მოძრაობას, ხოლო, როდესაც განტოლება ელიფსურია, ბგერის სიჩქარეზე დაბალი სიჩქარით მოძრაობის აღმწერი განტოლებაა.

15.2. კლასიფიკაცია: ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევა

განვიხილოთ მეორე რიგის კვაზიწრფივი დიფერენციალური განტოლება ორი x, y ცვლადის $u(x,y)$ ფუნქციის მიმართ:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\Phi(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})=0\,, \qquad (1)$$

სადაც განტოლების A, B, C კოეფიციენტები არიან ორი x, y ცვლადის ფუნქციები, რომელთაც აქვთ მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებულები. დავუშვათ, რომ A, B, C ფუნქციებიდან ერთდროულად ყველა ნულის ტოლი არ ხდება.

(1) განტოლების შესაბამისი კვადრატული ფორმაა $g = AX^2 + 2BXY + CY^2$, რომლის დეტერმინანტია:

$$\det g = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2\,.$$

დავუშვათ, $\det g = AC - B^2 > 0$ და $A \neq 0$, მაშინ g შესაძლებელია წარმოდგენილ იქნეს ასეთი სახით:

$$g = \frac{1}{A}[(AX+BY)^2 + (AC-B^2)Y^2]\,. \qquad (2)$$

(2) განსაზღვრული ფორმაა. ამრიგად, განტოლება არის ელიფსური.

დავუშვათ, $\det g = AC - B^2 < 0$. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. $A \neq 0$, მაშინ ადგილი აქვს (2) ტოლობას, მაგრამ იმის შესაბამისად, როგორია Y, g ფორმის ნიშანი იცვლება. მართლაც, ამ შემთხვევაში (2) გამოსახულებაში კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული მეორე შესაკრები 0-ზე ნაკლებია, რომელიც ემატება დადებით სიდიდეს, ამიტომ შედეგი იმის შესაბამისად, როგორია Y^2, ხან უარყოფითი იქნება, ხან დადებითი. ამიტომ იგი განუსაზღვრელი ფორმაა. მაშასადამე, (1) განტოლება ჰიპერბოლურია.

2. თუ $A = 0$, მაშინ g შესაძლებელია გადაიწეროს შემდეგი სახით: $g = (2BX + CY)Y$. ნათელია, რომ g განუსაზღვრელი ფორმაა, ხოლო განტოლება კი ჰიპერბოლურია.

დავუშვათ, $\Delta = AC - B^2 = 0$, ამ შემთხვევაში განტოლება პარაბოლურია.

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ, რომ, თუ $\Delta > 0$, მაშინ განტოლება *ელიფსურია,* თუ $\Delta < 0$, განტოლება *ჰიპერბოლურია,* ხოლო, თუ $\Delta = 0$, მაშინ განტოლება *პარაბოლურია.*

15.3. მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის განტოლება

მეორე რიგის ზოგადი სახის დიფერენციალური განტოლება ორი დამოუკიდებელი ცვლადის $u(x,y)$ ფუნქციისათვის არის შემდეგი:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0\,, \tag{1}$$

სადაც, როგორც აღვნიშნეთ, $u(x,y)$ საძიებელი ფუნქციაა, ხოლო A, B, C, D, E, F და G არიან x, y ცვლადებზე დამოკიდებული მოცემული ფუნქციები. თუ (1)-ში $G(x,y) \equiv 0$, მაშინ (1)-ს ეწოდება ერთგვაროვანი განტოლება.

განვიხილოთ ცვლადების შემდეგი გარდაქმნა:

$$\xi = \varphi(x,y) \quad \text{და} \quad \eta = \psi(x,y)\,, \tag{2}$$

სადაც ξ და η ახალი დამოუკიდებელი ცვლადებია. φ და ψ ფუნქციებს, რომლებიც ერთმანეთს აკავშირებენ ძველ x, y და ახალ ξ, η ცვლადებს, შევარჩევთ მოგვიანებით, ამჯერად მხოლოდ ჩავთვალოთ, რომ $(x,y) \to (\xi,\eta)$ ურთიერთცალსახა ასახვაა.

მოვახდინოთ (1)-ში ცვლადის გარდაქმნა:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\,,\;\; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\,; \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \\ &+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right];\end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \\ + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \\ + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]. \tag{6}$$

(3)-(6) ტოლობების მარჯვენა მხარეები არიან წრფივი ფუნქციები $u'_\xi, u'_\eta, u''_{\xi\xi}, u''_{\xi\eta}, u''_{\eta\eta}$-ის მიმართ. შევცვალოთ (1)-ში $u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}$ შესაბამისი გამოსახულებებით (3)-(6)-დან და მივიღებთ კვლავ მეორე რიგის წრფივ განტოლებას ξ, η ცვლადებზე დამოკიდებული u ფუნქციისათვის:

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{7}$$

სადაც

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2;$$

$$\overline{B} = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x};$$

$$\overline{C} = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

ხოლო Φ ფუნქცია წრფივია u, u'_ξ, u'_η-ის მიმართ. ამით ჩვენ დავამტკიცეთ დებულება, რომელსაც ჩამოვაყალიბებთ თეორემის სახით.

თეორემა 1. ცვლადთა (2) გარდაქმნით (1) განტოლების ტიპი არ იცვლება. შევნიშნოთ, რომ:

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & k2\xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}.$$

ამ მატრიცული ტოლობის სამართლიანობაში ადვილად დავრწმუნდებით პირდაპირი გამოთვლით.

(7) განტოლება მარტივდება, თუ აღმოჩნდება, რომ $\overline{A}$ და $\overline{C}$ კოეფიციენტები 0-ის ტოლია. ამისათვის საკმარისია, (2) გარდაქმნაში φ,ψ ფუნქციები ისეთები შევარჩიოთ, რომ აკმაყოფილებდნენ განტოლებას:

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0\,. \qquad (8)$$

უკანასკნელი გამოსახულება არის პირველი რიგის არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება. შემდეგი თეორემა მიუთითებს კავშირზე (8) განტოლების ამონახსნსა და გარკვეული სახის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას შორის.

თეორემა 2. *იმისათვის, რომ $z = f(x, y)$ ფუნქცია Ω არის ყოველ წერტილში აკმაყოფილებდეს (8) განტოლებას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x, y) = const$ იყოს:*

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0 \qquad (9)$$

განტოლების ზოგადი ამონახსნი Ω არეში.

ეს თეორემა ამარტივებს გამოსავალი (1) განტოლების ამონახსნის ძიების გზას. ამრიგად, განტოლების გამარტივების გზა ასეთია: პირველ რიგში იწერება დამხმარე (9) განტოლება, რომელსაც (1)-ის *მახასიათებელი განტოლება ეწოდება.* მახასიათებელი განტოლება პირველი რიგის მეორე ხარისხის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა. ამოვხსნათ იგი y' წარმოებულის მიმართ და მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}\,, \qquad (10)$$

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}\,. \qquad (11)$$

თუ (10) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასეთია: $\varphi(x, y) = const$, მაშინ ავიღებთ რა $\xi = \varphi(x, y)$, ნულს გაუტოლდება $u''_{\xi\xi}$-ის კოეფიციენტი. თუ

$\psi(x,y)=const$ არის (11) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, მაშინ $\eta=\psi(x,y)$ ჩასმით 0-ს გაუტოლდება აგრეთვე $u''_{\eta\eta}$-ს კოეფიციენტი.

მახასიათებელი განტოლების ინტეგრალურ წირებს, ე.ი. წირებს, რომლებიც შედიან $\varphi(x,y)=const$ და $\psi(x,y)=const$ ოჯახში, ეწოდება მოცემული (1) დიფერენციალური განტოლების *მახასიათებლები.* ამის გამო, (1) განტოლების გამარტივების ზემოთ მოყვანილ მეთოდს ეწოდება *მახასიათებლთა მეთოდი.*

ჰიპერბოლური განტოლება. $\varphi(x,y)=const$ და $\psi(x,y)=const$ ოჯახი შესაძლებელია განხილულ იქნეს, როგორც (9) განტოლების ზოგადი ინტეგრალები. ეს განტოლება, როგორც აღვნიშნეთ, იშლება ორ დამოუკიდებელ – (10) და (11) განტოლებებად. მათი მარჯვენა მხარეები ნამდვილები და ერთმანეთისაგან განსხვავებულებია. ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად, $z=\varphi(x,y)$ და $z=\psi(x,y)$ ფუნქციები არიან (8) კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები. ეს ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებლები არიან (დაამტკიცეთ, რომ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია, როდესაც $AC-B^2<0$). რადგან $\varphi(x,y)$ და $\psi(x,y)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (9) განტოლებას, ცვლადების გარდაქმნის შემდეგ აღმოჩნდება, რომ $\overline{A}=0$ და $\overline{C}=0$. მაშასადამე, (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,$$

თუ ორივე მხარეს $2\overline{B}$-ზე გავყოფთ და მეორე შესაკრებს მარჯვენა მხარეს გადავიტანთ, მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\overline{\Phi}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{12}$$

ნათელია, რომ მიღებულ განტოლებას უფრო მარტივი სახე აქვს, ვიდრე გამოსავალ (1) განტოლებას. თუ შევძლებთ ამ უკანასკნელის ინტეგრებას, (1)-ის ამონახსნის საპოვნელად საკმარისია დავუბრუნდეთ ძველ ცვლადებს.

(12) განტოლებას ეწოდება *ჰიპერბოლური განტოლების კანონიკური სახე.*

ზოგჯერ იხმარება ჰიპერბოლური განტოლების სხვა კანონიკური სახე. კერძოდ, თუ (12)-ში მოვახდენთ ცვლადის $\xi=t+\tau$ და $\eta=t-\tau$ გარდაქმნას, სადაც t და τ ახალი ცვლადებია, (12) მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \widetilde{\Phi},$$

სადაც $\widetilde{\Phi} = 4\overline{\Phi}$.

პარაბოლური განტოლება. ამ შემთხვევაში (10) და (11) განტოლებები ერთმანეთს ემთხვევა, გვაქვს ერთი განტოლება და $\varphi(x, y) = const$ ერთი ზოგადი ინტეგრალი, რომელიც განსაზღვრავს მახასიათებელ წირთა ერთ ოჯახს. შეგვიძლია ავიღოთ $\xi = \varphi(x, y)$ და $\eta = \psi(x, y)$, სადაც $\psi(x, y)$ ნებისმიერი ფუნქციაა, რომლისგანაც მხოლოდ ის მოითხოვება, რომ იყოს იმდენჯერ წარმოებადი, რამდენჯერაც საჭიროა. ნათელია, რომ ცვლადების ასეთი გარდაქმნის დროს (7) გამოსახულებაში $\overline{A}$ კოეფიციენტი 0-ის ტოლი ხდება, ე.ი.:

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $AC - B^2 = 0$ ანუ $B = \sqrt{A}\sqrt{C}$, უკანასკნელი ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\sqrt{A}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

ეს დაგვეხმარება $\overline{B}$ კოეფიციენტის 0-თან ტოლობის დამტკიცებაში. მართლაც:

$$\overline{B} = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} =$$

$$= A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{A}\sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \sqrt{A}\sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} =$$

$$= A\frac{\partial \xi}{\partial x}\left(\sqrt{A}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\sqrt{A}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{A}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{A}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0.$$

ამრიგად, (7) განტოლება იღებს სახეს:

$$\overline{C}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0,$$

$\overline{C}$ -ზე გაყოფით კი, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\widetilde{\Phi}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{13}$$

(13) განტოლებას ეწოდება *პარაბოლური განტოლების კანონიკური სახე.*

აქვე შევნიშნოთ, რომ, თუ (13) განტოლების მარჯვენა მხარე დამოკიდებული არ არის $\partial u/\partial\xi$ წარმოებულზე, მაშინ იგი გადაიქცევა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებად, ხოლო ξ შეგვიძლია პარამეტრად ჩავთვალოთ.

ელიფსური განტოლება. ამ შემთხვევაში (10) და (11) განტოლების მარჯვენა ნაწილები კომპლექსურად შეუღლებულები არიან. დავუშვათ, $\varphi(x,y)$ (10)-ის კომპლექსური ინტეგრალია, მაშინ $\varphi^*(x,y)=const$ არის (11) განტოლების ამონახსნი, სადაც $\varphi^*(x,y)$ არის $\varphi(x,y)$-ის კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია. თუ გადავალთ $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\varphi^*(x,y)$ კომპლექსურ ცვლადებზე, მაშინ, ზოგადი თეორიის თანახმად, (1) განტოლება იმავე სახემდე მიიყვანება, რაზედაც ჰიპერბოლური განტოლება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

იმისათვის, რომ ნამდვილ რიცხვთა თეორიის ფარგლებში დავრჩეთ, საჭიროა კიდევ ერთხელ მოვახდინოთ ცვლადების შემდეგი გარდაქმნა:

$$\alpha=\frac{\varphi+\varphi^*}{2},\ \ \beta=\frac{\varphi-\varphi^*}{2i},\ \ i=\sqrt{-1},$$

სადაც α და β ახალი ცვლადებია. ამ შემთხვევაში $\xi=\alpha+i\beta$ და $\eta=\alpha-i\beta$. ადვილად მოწმდება, რომ ამ შემთხვევაში $\overline{A}=\overline{C}$ და $\overline{B}=0$ (შეამოწმეთ დამოუკიდებლად!). ამრიგად, (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}=\Theta\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial \alpha},\frac{\partial u}{\partial \beta}\right).$$

უკანასკნელ განტოლებას ეწოდება *ელიფსური განტოლების კანონიკური სახე.*

მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის კერძოწარმოებულებიანი განტოლება. დავუშვათ, (1) განტოლებაში A, B, C, D, E, F და G მუდმივებია და განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0 \qquad (14)$$

მოვახდინოთ (2)-ის ანალოგიურად ცვლადების წრფივი გარდაქმნა:

$$\xi = \alpha x + \beta y,\ \ \eta = \gamma x + \delta y,\ \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \qquad (15)$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ ასეთ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\bar{a}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{b}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{c}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad (16)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2, \\ \bar{b} &= a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta, \\ \bar{c} &= a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2. \end{aligned} \qquad (17)$$

ხოლო $F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$ გამოსახულების ქვეშ გაიგება ყველა ის შესაკრები, რომლებიც გარდაქმნის შემდეგ მიიღებიან და შეიცავენ საძიებელი u ფუნქციის არაუმეტეს პირველი რიგის კერძო წარმოებულებს. როგორც ვხედავთ, F არ შეიცავს ξ და η დამოუკიდებელ ცვლადებს.

დებულება 1 (ჰიპერბოლური განტოლება). *დავუშვათ, $b^2 - ac > 0$. (14) დიფერენციალური განტოლების პირველი სამი კოეფიციენტისაგან შევადგინოთ შემდეგი კვადრატული განტოლება $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ და დავუშვათ, რომ $a \neq 0$ და $c \neq 0$. ამ განტოლებას ორი – λ_1 და λ_2 ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნამდვილი ფესვი აქვს. ცვლადის გარდაქმნის (15) ფორმუ-*

ლაში შევარჩიოთ α, β, γ და δ ისე, რომ $\alpha/\beta = \lambda_1$ და $\gamma/\delta = \lambda_2$. მაშინ $\bar{a} = 0, \bar{c} = 0$ და განტოლება (16) იქნება ასეთი:

$$2\bar{b}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{18}$$

ამ დებულების დამტკიცება სირთულეს არ წარმოადგენს. მართლაც, (17) გამოსახულებების თანახმად:

$$\frac{\bar{a}}{\beta^2} = a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2b\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + c\,,$$

$$\frac{\bar{c}}{\delta^2} = a\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 + 2b\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + c\,.$$

რადგან დებულების პირობით $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ განტოლების $D = b^2 - ac$ დისკრიმინანტი დადებითია, ამიტომ ამ განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ნამდვილი ფესვი. დავუშვებთ რა, რომ $\alpha/\beta = \lambda_1$ და $\gamma/\delta = \lambda_2$, მივიღებთ $\bar{a} = 0, \bar{c} = 0$. ეს ამტკიცებს დებულების ერთ ნაწილს. ცვლადების მითითებული გარდაქმნით მივიღებთ, რომ:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \beta\delta\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}\right) = \beta\delta(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0\,,$$

რაც მიუთითებს იმაზე, რომ (17) გამოსახულებების ბოლო პირობა სრულდება. ამით დებულება დამტკიცებულია.

განტოლება (18)-ის $2\bar{b}$-ზე გაყოფით მიიღება განტოლება: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \Phi\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial\xi}, \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)$, რასაც ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურად ეწოდება მუდმივკოეფიციენტებიანი ჰიპერბოლური განტოლების კანონიკური სახე.

შევნიშნოთ, რომ დებულება 1-ის პირობების დაცვით შესაძლებელია შერჩეულ იქნეს ცვლადის ისეთი წრფივი გარდაქმნა, რომ (14) განტოლება მივიყვანოთ განტოლებამდე: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = \Psi\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial\xi}, \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)$. ამ უკანასკნელსაც მუდმივკოეფიციენტებიანი ჰიპერბოლური განტოლების კანონიკური სახე ეწოდება.

დებულება 1-ის ანალოგიურად მტკიცდება ქვემოთ მოყვანილი დებულე-ბები.

დებულება 2 (პარაბოლური განტოლება). *დავუშვათ,* $b^2 - ac = 0$*, მაშინ* $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ *კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ტოლი ფესვი* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -b/a$ *და თუ ავიღებთ* $\alpha/\beta = \lambda$ *(15) გარდაქმნაში, მივი-ღებთ, რომ* $\overline{a} = 0, \overline{b} = 0$*, ხოლო განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:*

$$\overline{c}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (19)$$

დებულება 3 (ელიფსური განტოლება). *დავუშვათ,* $b^2 - ac < 0$*, მაშინ* $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ *კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ერთმანეთის შეუღ-ლებული ფესვი და შესაძლებელია (15) გარდაქმნის ისე შერჩევა, რომ* $\overline{a} = \overline{c}$ *და განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \qquad (20)$$

(19) და (20) განტოლებებს ეწოდებათ, შესაბამისად, *პარაბოლური* და *ელიფსური* კერძოწარმოებულებიანი მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებების კანონიკური სახე.

ამოცანა 1. მივიყვანოთ კანონიკურ სახემდე და ვიპოვოთ ამონახსნი შემ-დეგი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების:

1. $16u_{xx} + 16u_{xy} + 3u_{yy} = 0$; (21)
2. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0$; (22)
3. $u_{xx} = \tau^2 u_{yy}$, სადაც τ დადებითი პარამეტრია. (23)

ამოხსნა: 1. შევადაროთ $16u_{xx} + 16u_{xy} + 3u_{yy} = 0$ განტოლება (14)-ს და დავინახავთ, რომ $a = 16, b = 8, c = 3$, აქედან $D = 16 > 0$. მაშასადამე, ჩვენი განტოლება ჰიპერბოლურია. გამოვიყენოთ დებულება 1, რომლის თანახმად საჭიროა $16\lambda^2 + 16\lambda + 3 = 0$ კვადრატული განტოლების ფესვების პოვნა: $\lambda_1 = -1/4, \lambda_2 = -3/4$. ცვლადის გარდაქმნის (17) ფორმულებში შევარ-

ჩიოთ α, β, γ და δ ისე, რომ შესრულდეს ტოლობები: $\alpha/\beta = -1/4$, $\gamma/\delta = -3/4$, ავირჩიოთ ყველაზე მარტივი – $\alpha = 1, \beta = -4, \gamma = 3, \delta = -4$. (17) წრფივი გარდაქმნა მიიღებს სახეს:

$$\xi = x - 4y, \eta = 3x - 4y . \tag{24}$$

დებულება 1-ის ძალით, ცვლადების ასეთი გარდაქმნის დროს ჩვენი განტოლება გამარტივდება $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ სახის განტოლებამდე, რომლის მარჯვენა მხარეში მოთავსებულია 0 იმის გამო, რომ, (18) გამოსახულების თანახმად, F ფუნქცია შეიცავს საძიებელ ფუნქციას და მის პირველი რიგის წარმოებულებს, რომლებსაც ჩვენი ამოცანა არ შეიცავს და არც შეიძლება გაჩნდნენ ცვლადების გარდაქმნის შემდეგ. ამრიგად, (21)-ის კანონიკური სახეა $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ განტოლება. ამ განტოლების ამონახსნი კი, როგორც უკვე ვიცით, არის $u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$, სადაც φ და ψ ნებისმიერი ფუნქციებია. ჩავსვათ მასში ξ და η-ს (24) მნიშვნელობები და საბოლოოდ გვექნება (21) განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$u(x, y) = \varphi(x - 4y) + \psi(3x - 4y) .$$

2. გამოსაკვლევი (22) განტოლების (14)-თან შედარებით მივიღებთ, რომ $a = c = 1, b = -1$, ე.ი. $D = 0$ და ამრიგად, (22) განტოლება პარაბოლურია. გამოვიყენოთ დებულება 2. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ განტოლების ფესვია $\lambda = 1$. ცვლადების გარდაქმნის (17) გამოსახულებებს დავადოთ პირობა $\alpha/\beta = 1$ და ჩავთვალოთ, რომ $\alpha = \beta = 1$. γ და δ ცვლადებს, გარდა (17)-ის ბოლო უტოლობის დაკმაყოფილებისა, სხვა შეზღუდვები არ ედება. ამის გათვალისწინებით ახალი η ცვლადი ავირჩიოთ x-ის ტოლი: $\eta = x$. ამრიგად, ცვლადების გარდაქმნის (17) გამოსახულება იქნება:

$$\xi = x + y, \eta = x . \tag{25}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} .$$

შევიტანოთ ეს ტოლობები გამოსავალ (22) განტოლებაში და მივიღებთ $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$. უკანასკნელი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების მსგავსი განტოლებები უკვე გამოვიკვლიეთ და ვიცით, რომ მისი ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა ვიპოვოთ $z^{//}+z^{/}=0$ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელი ფესვები $k_1=0$ და $k_2=-1$, რომლებიც გვაძლევენ ფუნდამენტურ ამონახსნთა $z_1(\eta)=1$ და $z_2(\eta)=e^{-\eta}$ სისტემას, ხოლო $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი კი მოიცემა $u=C_1(\xi)+e^{-\eta}C_2(\xi)$ ფუნქციით. მაშასადამე, (25)-ის გათვალისწინებით (22) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$u(x,y)=C_1(x+y)+e^{-x}C_2(x+y),$$

სადაც C_1 და C_2 თავიანთი არგუმენტის ნებისმიერი ფუნქციებია.

3. (23) განტოლება გადავწეროთ $u_{xx}-\tau^2 u_{yy}=0$ სახით და შევადაროთ (14)-ს. მივალთ ტოლობებამდე: $a=1, b=0, c=-\tau^2$, საიდანაც ვღებულობთ $b^2-ac=\tau^2>0$, რაც ნიშნავს, რომ (23) განტოლება ჰიპერბოლურია. გამოვიყენოთ დებულება 1: შევადგინოთ $\lambda^2-\tau^2=0$ კვადრატული განტოლება და ვიპოვოთ მისი ფესვები: $\lambda_1=\tau$ და $\lambda_2=-\tau$. ცვლადების გარდაქმნის (17) გამოსახულება ავიღოთ შემდეგნაირად: $\alpha/\beta=\tau$ და $\gamma/\delta=-\tau$. ისევე როგორც წინა მაგალითებში, ავირჩიოთ უმარტივესი შემთხვევა: $\alpha=\tau, \beta=1, \gamma=-\tau, \delta=1$, მაშინ (17) მიიღებს სახეს:

$$\xi=\tau x+y,\ \eta=-\tau x+y. \tag{26}$$

ახალ ცვლადებში ჩვენი განტოლება მიიღებს სახეს: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$, რომლის ამონახსნია $u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$, სადაც φ და ψ ნებისმიერი ფუნქციებია. ჩავსვათ მასში (26) გამოსახულებები და მივიღებთ (23) განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$u(x,y)=\varphi(y+\tau x)+\psi(y-\tau x).$$

ამოცანა 2. ორგანზომილებიანი ლაპლასის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში ასეთია:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=0\,. \qquad (27)$$

ვიპოვოთ ლაპლასის განტოლების ზოგადი წრიულად სიმეტრიული ამონახსნი.

ამოხსნა: ლაპლასის ზემოთ მოყვანილი განტოლების წრიულად სიმეტრიულობა ნიშნავს, რომ f დამოკიდებულია მხოლოდ r, ამიტომ (27) განტოლება რედუცირდება (დაიყვანება) მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე:

$$\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}=0\,. \qquad (28)$$

რადგან $\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)=r\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{df}{dr}$, ამიტომ (28) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)=0\,,$$

საიდანაც გვაქვს:

$$\frac{df}{dr}=\frac{A}{r},$$

სადაც A ნებისმიერი მუდმივია. ამრიგად, (27) განტოლების ზოგადი წრიულად სიმეტრიული ამონახსნი იქნება: $f(r)=A\ln r+B$, სადაც B, ისევე როგორც A, ნებისმიერი მუდმივებია.

15.4. ტიპიური მაგალითები

როგორც აღვნიშნეთ, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას უწოდებენ ისეთ განტოლებას, რომელშიც უცნობის სახით შედის რამდენიმე ცვლადის ფუნქცია მის კერძო წარმოებულებთან ერთად. უცნობების რიცხვის ზრდასთან ერთად რთულდება დიფერენციალური განტოლება და ძალზე ცოტაა ისეთი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა ამოხსნაც ცხადად შეიძლება. მოვიყვანოთ ისეთი განტოლებები, რომელთა ამოხსნაც შედარებით მარტივია.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. ეს განტოლება გადავწეროთ ეკვივალენტური ფორმით $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ და შემოვიტანოთ ახალი უცნობი ფუნქცია განმარტებული $v = \frac{\partial u}{\partial y}$ სახით. მაშინ გამოსავალი განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს: $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. ასეთი განტოლება უკვე განვიხილეთ და ვიცით, რომ მისი ამონახსნია: $v = C(y)$, რადგან $v = \frac{\partial u}{\partial y}$; ვღებულობთ განტოლებას: $\frac{\partial u}{\partial y} = C(y)$, ასეთი განტოლებაც უკვე განხილული გვაქვს და ვიცით, რომ $u(x, y) = \int C(y)dy + \varphi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ კიდევ ერთი ნებისმიერი ფუნქციაა. შევნიშნოთ, რომ $\int C(y)dy = \psi(y)$ ნებისმიერი ფუნქციაა, რადგან ასეთია $C(y)$. ამრიგად, ჩვენი განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y), \tag{1}$$

სადაც φ და ψ თავისი არგუმენტების ნებისმიერი ფუნქციებია. (1) გამოსახულებას ეწოდება $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. ანალოგიურად ზემოთ მოყვანილი მაგალითისა, გვაქვს:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \text{ ამიტომ } \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y) \Rightarrow u(x, y) = \varphi(y)x + \psi(y).$$

3. განვიხილოთ პირველი ამოცანის განზოგადება. საძებნია ორი – x და y ცვლადების $u(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას:

$$a_m \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \ldots + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_0 u = 0, \tag{1}$$

სადაც $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია. განვიხილოთ შემდეგი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება:

$$a_m z^{(m)}(x)+...+a_1 z^{/}(x)+a_0 z(x)=0\,. \tag{2}$$

თეორემა. *ვთქვათ, $z_1(x),...,z_m(x)$ (2) განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია. დავუშვათ, $C_1(y),...,C_m(y)$ ნებისმიერი ფუნქციებია. მაშინ ორი ცვლადის:*

$$u(x,y)=z_1(x)C_1(y)+...+z_m(x)C_m(y) \tag{3}$$

ფუნქცია არის (1) კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი.

ეს თეორემა გამოსახულება (3)-ის განტოლება (1)-ში პირდაპირი ჩასმით მტკიცდება. მაგალითისათვის შევამოწმოთ, რომ (3) გამოსახულების პირველი შესაკრები $u_1(x,y)=z_1(x)C_1(y)$ მართლაც არის (1)-ის ამონახსნი. თეორემის პირობის ძალით, $z_1(x)$-სათვის სრულდება ტოლობა $\sum_{k=0}^{m} a_k z_1^{(k)}(x)=0$, საიდანაც ვღებულობთ:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \frac{\partial^k u_1}{\partial x^k}=\sum_{k=0}^{m} a_k z_1^{(k)}(x)C_1(y)=0\,,$$

რაც ამტკიცებს, რომ $u_1(x,y)=z_1(x)C_1(y)$ არის (1) განტოლების ამონახსნი.

(3) გამოსახულება შეიცავს m ნებისმიერ ფუნქციას, ამიტომ ეს ამონახსნი არის ზოგადი.

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$. ეს განტოლება (1)-ის კერძო შემთხვევაა. მისი შესაბამისი ჩვეულებრივი დიფერენციალური $z^{//}-z^{/}=0$ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია $z_1(x)=1$ და $z_2(x)=e^x$. თეორემა 1-დან გამომდინარეობს, რომ ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$u(x,y)=C_1(y)+e^x C_2(y)\,,$$

სადაც C_1,C_2 ნებისმიერი ფუნქციებია.

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა:

$$x+y=\xi\,,\;\; x-y=\eta\,,$$

მაშინ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

და განტოლება მიიღებს სახეს:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0\,.$$

ამრიგად, $u=f(\xi)+g(\eta)$. მაშასადამე, განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს ასეთი სახე:

$$u(x,y)=f(x+y)+g(x-y),$$

სადაც f და g ნებისმიერი ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციებია.

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. მაგალითი 5-ის ანალოგიურად მივიღებთ ამონახსნს $u(x,y)=f(x+iy)+g(x-iy),$ სადაც f, g ნებისმიერი ორჯერ დიფერე-ნცირებადი ფუნქციებია და $i=\sqrt{-1}$ კომპლექსური ერთეულია.

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, სადაც a ნამდვილი რიცხვია. გადავწეროთ ეს განტოლება შემდეგი სახით:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+a\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-a\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0. \qquad (1)$$

ეს განტოლება ნიშნავს, რომ $\frac{\partial}{\partial x}-a\frac{\partial}{\partial y}$ ოპერატორი მოქმედებს უცნობ u ფუნქციაზე. შედეგად, ვთქვათ, მიიღება v, ე.ი:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-a\frac{\partial u}{\partial y}=v. \qquad (2)$$

ამის შემდეგ v ფუნქციაზე მოქმედებს $\frac{\partial}{\partial x}+a\frac{\partial}{\partial y}$ ოპერატორი და შედეგად გვაქვს 0:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+a\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{3}$$

ამრიგად, მოცემული მეორე რიგის განტოლების ამოხსნა დავიყვანეთ ორი – (2) და (3) *პირველი რიგის განტოლებათა სისტემის* ამოხსნაზე:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-a\dfrac{\partial u}{\partial y}=v\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+a\dfrac{\partial v}{\partial y}=0.\end{cases} \tag{4}$$

ამოვხსნათ (4) სისტემა ნიშნავს, ვიპოვოთ ისეთი $u(x,y)$ და $v(x,y)$ ფუნქციები, რომლებიც (2) და (3) განტოლებებს აკმაყოფილებენ.

(4) სისტემის მეორე განტოლება ჩვენთვის უკვე ცნობილია (§14.2, მაგალითი 7). ამიტომ ამ განტოლებიდან ვიპოვით v ფუნქციას, რომელსაც ჩავსვამთ სისტემის პირველ განტოლებაში. შედგად მიიღება პირველი რიგის არაერთგვაროვანი განტოლება, რომლის ამონახსნიც იქნება მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

განტოლების ამოხსნის ამ მეთოდს ეწოდება *დეკომპოზიციის მეთოდი.*

8. გამოვიყენოთ დეკომპოზიციის მეთოდი $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ლაპლასის განტოლებისათვის.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0.$$

წინა მაგალითის მსგავსად, მივიღეთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}=v,\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}=0.\end{cases}$$

აქედან ჩანს, რომ სისტემის ამონახსნი კომპლექსური ფუნქცია უნდა იყოს. რაც მიუღებელია ჩვენი მიზნებისათვის, ჩვენ ვეძებთ ნამდვილ ამონახსნებს. ამრიგად, აქ მოყვანილ *ლაპლასის განტოლების დეკომპოზიციას* სასურველ შედეგამდე ვერ მივყავართ.

ლაპლასის განტოლებასთან მიმართებაში მიზანშეწონილია განვიხილოთ პირველი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომელიც *კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის* სახელითაა ცნობილი და ასე გამოიყურება:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

თუ $u(x, y)$ და $v(x, y)$ კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ამონახსნებია, მაშინ ისინი აკმაყოფილებენ ლაპლასის განტოლებას.

ზემოთ მოყვანილი სისტემები შესაძლებელია გადავწეროთ მატრიცული ფორმით. კერძოდ, კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის მატრიცული ფორმაა შემდეგი გამოსახულება:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & -\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & -\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad U = (u, v),$$

მაშინ კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\mathfrak{D}U = 0.$$

$\mathfrak{D}$-ს მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორი ეწოდება. ის შესაძლებელია იყოს ნებისმიერი რიგის მატრიცა, რომლის ელემენტებია „სკალარული" დიფერენციალური ოპერატორები, მათ შორის ნულოვანი რიგის (მუდმივი) ოპერატორიც.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. დაადგინეთ შემდეგი განტოლების ტიპი და მიიყვანეთ ისინი კანონიკურ სახეზე:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

პასუხი: განტოლება ელიფსურია; $u_{\eta\eta}(\eta,\xi) + u_{\xi\xi}(\eta,\xi) - u(\eta,\xi) = 0$

2) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

პასუხი: განტოლება პარაბოლურია; $u_{\eta\eta}(\eta,\xi) - 2u_{\eta}(\eta,\xi) - 2u_{\xi}(\eta,\xi) = 0$ ან $4u_{\eta\eta}(\eta,\xi) - 2u_{\xi}(\eta,\xi) = 0.$

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

პასუხი: განტოლება ელიფსურია; კანონიკური სახე: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$

4) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u = 0$

პასუხი: განტოლება პარაბოლურია; კანონიკური სახე: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + u = 0.$

5) $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

პასუხი: განტოლება ელიფსურია; კანონიკური სახე: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$

2. იპოვეთ განტოლებების ტიპი და მიუთითეთ არეზე, სადაც განტოლების ტიპი არ იცვლება:

1) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$ პასუხი: განტოლება ჰიპერბოლურია ნებისმიერი x, y-სათვის.

2) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$ პასუხი: განტოლება პარაბოლურია ნებისმიერი x, y-სათვის.

3) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$ პასუხი: განტოლება პარაბოლურია ნებისმიერი x, y-სათვის.

3. განსაზღვრეთ შემდეგი განტოლებების ტიპი მოცემულ არეზე:

1) $(y+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$1 < x < 3,\ 0 < y < 1$ მართკუთხედში. პასუხი: ელიფსური

2) $y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2(x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

$x^2+(y-6)^2<1$ წრეში. პასუხი: ჰიპერბოლური

3) $2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0$

$|x|<1,\ |y|<1$ კვადრატში. პასუხი: პარაბოლური

4) $(x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+xu=0$

$(x-5)^2+y^2<1$ წრეში. პასუხი: ელიფსური

5) $(x+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x^2\frac{\partial u}{\partial x}+(y-3)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u=0$

$0<x<1,\ 0<y<1$ კვადრატში. პასუხი: ჰიპერბოლური

4. დაწერეთ ერთ-ერთი შესაძლო გარდაქმნა, რომელსაც განტოლება მიჰყავს კანონიკურ სახემდე და ამოწერეთ განტოლების შესაძლო კანონიკური სახე:

1) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$ პასუხი: $\xi=2y+x,\eta=x;$ ელიფსური;
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}).$

2) $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$ პასუხი: $\xi=3x-2y,\eta=2x+4;$
ჰიპერბოლური; $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}).$

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+25\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$ პასუხი: $\xi=3x+y,\eta=x;$ პარაბოლური;
$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}).$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}-x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$ პასუხი: $\xi=e^x,\eta=y;$ ელიფსური;
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}).$

5) $9y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6y^2 sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$ პასუხი: $\xi=cosx+y^3,\eta=x;$
პარაბოლური; $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}).$

5. მიიყვანეთ განტოლებები კანონიკურ სახემდე და მიუთითეთ შესაბამის გარდაქმნაზე:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$ პასუხი: $\xi=4x+y,\eta=2x+y;$
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. პასუხი: $\xi = x + y, \eta = x$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

3) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$. პასუხი: $\xi = x + y, \eta = x - y$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

4) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 12\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. პასუხი: $\xi = x^3 y, \eta = y$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{4}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

5) $4y^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. პასუხი: $\xi = x + y^2, \eta = x + y^2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

6. იპოვეთ გარდაქმნა, რომელსაც განტოლება მიჰყავს კანონიკურ სახემდე, დაწერეთ განტოლების კანონიკური სახე და იპოვეთ განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. პასუხი: $\xi = x + y, \eta = 5x - y$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$; $u = \varphi(x + y) + \psi(5x - y)e^{-\frac{x+y}{6}}$.

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (sinx - ctgx)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. პასუხი: $\xi = y, \eta = y - cosx$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$; $u = \varphi(y) + \psi(y - cosx)e^{y}$.

3) $4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 7\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. პასუხი: $\xi = xy^4, \eta = y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$;
$u = \varphi(xy^4)y^3 + \psi(y)$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} - 2(x - 1)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

პასუხი: $\xi = x^2 + y, \eta = x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$;

$u = \varphi(x^2 + y) + \psi(x^2 + y)e^{x}$.

5) $x\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. პასუხი: $\xi = xy, \eta = y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$;

$u = \varphi(xy)y + \psi(y)$.

6) $2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. პასუხი: $\xi = xy^2, \eta = x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$;

$u = \varphi(xy^2)x + \psi(x)$.

7) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. პასუხი: $\xi = x^2 + y, \eta = x$;

$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$; $u = \varphi(x^2 + y)x^2 + \psi(x^2 + y)$.

8) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 5\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. პასუხი: $\xi = x^3 y, \eta = x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$;

$u = \varphi(x^3 y)x^2 + \psi(x)$.

9) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. პასუხი: $\xi = xy, \eta = y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{3}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$;

$u = \varphi(xy)y^3 + \psi(y)$.

10) $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. პასუხი: $\xi = \frac{y}{x}, \eta = y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$;

$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)y + \psi(y)$.

7. იპოვეთ კოშის ამოცანის ამონახსნი:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, $u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -x - 1$. პასუხი: $u = \frac{1}{2}t^2 - xt - t$.

2) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7(\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$, $u|_{x=0} = 1, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 3y$.

პასუხი: $u = -\frac{3}{7}e^{-\frac{7}{3}x}(x + 3y + 3) + \frac{1}{7}(16 - 18x + 9y)$

3) $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u|_{x=0} = 2y, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 5y$.

პასუხი: $u = e^{-\frac{1}{5}x}(-25y + 5x - 110) + 27y - 27x + 110$.

4) $3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u|_{x=0} = 2y, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 4y$.

პასუხი: $u = e^{-\frac{1}{3}x}(-12y - 4x - 54) + 14y - 14x + 54$.

5) $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u|_{y=0} = 3x, \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 2x + 6$.

პასუხი: $u = e^{\frac{1}{3}y}(4y + 6x + 24) - 6y - 3x - 24$.

ჰიპერბოლური განტოლებები

16. კოშის ამოცანა სიმის რხევის განტოლებისათვის

16.1. ტალღის განტოლება

მრავალი მექანიკური (სიმის, ღეროს, მემბრანის და სამგანზომილებიანი ობიექტების რხევა) და ფიზიკური (ელექტრომაგნიტური რხევები) ამოცანები აღიწერებიან რხევის შემდეგი განტოლებებით:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\nabla,(p(x)\nabla u)-q(x)u+F(x,t), \qquad (1)$$

სადაც უცნობი $u(x,t)$ ფუნქცია დამოკიდებულია n სივრცულ (ჩვეულებრივ, $n=1,2,3$) კოორდინატებზე და t დროის კოორდინატზე. $\rho(x)$, $p(x)$ და $q(x)$ კოეფიციენტები განისაზღვრებიან იმ გარემოს თვისებებიდან, სადაც რხევა ხდება, ხოლო $F(x,t)$ თავისუფალი წევრი ახასიათებს გარე შეშფოთებას. ფრჩხილები აქ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლია და ამრიგად:

$$(\nabla, p(x)\nabla u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

პირველ რიგში განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი სიმის განტოლება.

სიმის მცირე განივი რხევა. (1) განტოლება გამოვიყვანოთ იმ შემთხვევაში, როდესაც საქმე გვაქვს *სიმის მცირე განივ რხევასთან.*

სიმი ეწოდება გაჭიმულ ძაფს, რომელიც არ ეწინააღმდეგება ღუნვას.

დავუშვათ, (x,u) სიბრტყეზე სიმი ირხევა განივად თავისი წონასწორობის მდგომარეობიდან x ღერძის გასწვრივ. სიმის გადახრა წონასწორობის მდგომარეობიდან x წერტილში დროის t მომენტში $u(x,t)$-თი აღვნიშნოთ, ასე რომ, $u(x,t)$ არის სიმის მდგომარეობა დროის t მომენტში. შემოვისაზღვროთ მხოლოდ სიმის მცირე რხევით, რაც ნიშნავს, რომ რიგით $tg\alpha=\partial u/\partial x$ სიდიდეზე მცირე სიდიდეებს უგულებელვყოფთ. რადგან სიმი არ ეწინააღმდეგება ღუნვას, ამიტომ მისი დაძაბულობის $\vec{T}(x,t)$ ვექტორი x წერტილში დროის t მომენტში მიმართულია x წერტილში მხების გასწვრივ. სიმის ნებისმიერი

$[a,b]$ მონაკვეთი წონასწორობიდან სიმის გადახრის შემდეგ არ იცვლის სიგრძეს ჩვენი მიახლოების პირობებში და ამრიგად:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}dx\approx b-a\,,$$

რაც ნიშნავს, რომ, ჰუკის კანონის თანახმად, დაძაბულობის ვექტორის $|\vec{T}(x,t)|$ სიგრძე მუდმივია, ე.ი. დამოკიდებული არ არის x-ზე და t-ზე: $|\vec{T}(x,t)|=T_0$. აღვნიშნოთ $F(x,t)$-ით იმ გარე ძალის სიმკვრივე, რომელიც დროის t მომენტში x წერტილში მოქმედებს და მიმართულია x-ის პერპენდიკულარულად (x,u) სიბრტყეზე. დავუშვათ, $\rho(x)$ აღნიშნავს x წერტილში სიმის წრფივ სიმკვრივეს. ამრიგად, $\rho(x)\Delta x$ დაახლოებით არის $(x,x+\Delta x)$ სიმის მასის ელემენტი.

დავწეროთ სიმის მოძრაობის განტოლება. $(x,x+\Delta x)$ ელემენტზე მოქმედებენ დაძაბულობის ძალები $\vec{T}(x+\Delta x,t)$, $-\vec{T}(x,t)$ და გარე ძალა, რომელთა ჯამი, ნიუტონის კანონის თანახმად, ტოლია ამ ელემენტის მასის და მისი აჩქარების ნამრავლის. ვექტორთა ამ ტოლობის პროექცია u ღერძზე, ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით, გვაძლევს:

$$T_0\sin(\alpha)|_{x+\Delta x}-T_0\sin(\alpha)|_x+F(x,t)\Delta x=\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,. \tag{2}$$

გავითვალისწინოთ ტოლობები:

$$\sin(\alpha)=\frac{tg(\alpha)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}\approx tg(\alpha)=\frac{\partial u}{\partial x}\,. \tag{3}$$

(2) განტოლება (3) იგივეობების გათვალისწინებით გვაძლევს:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+F(x,t)\,,$$

საიდანაც, როდესაც $\Delta x\to 0$, ვიღებთ:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t)\,.$$

ეს არის *სიმის მცირე განივი რხევის განტოლება*. როდესაც $F\neq 0$, სიმის რხევას ეწოდება *იძულებითი*, ხოლო $F=0$ შემთხვევაში კი – *თავი-*

თავისუფალი. თუ $\rho(x)$ სიმკვრივე მუდმივია და $\rho(x) = \rho$, სიმის რხევის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\ , \tag{4}$$

სადაც $f = F/\rho$, $v^2 = T_0/\rho$ მუდმივი სიდიდეებია.

(4) განტოლებას ეწოდება *ერთგანზომილებიანი* ტალღური განტოლება (ეს განტოლება გამოყვანილ და ამოხსნილ იქნა ჟ.ლ. დალამბერის მიერ 1743 წელს).

ღუნვადი ღეროს მცირე გასწვრივი (სიგრძივი) რხევის განტოლება. (1) სახის განტოლება აღწერს აგრეთვე ღუნვადი ღეროს მცირე გასწვრივ რხევას.

ღერო არის ცილინდრული ფორმის სხეული, რომლის გაწელვას (გაჭიმვას) ან გაღუნვას გარკვეული ძალა ესაჭიროება. ეს თვისება ასხვავებს ღეროს სიმისაგან, რომელიც, როგორც აღვნიშნეთ, არ ეწინააღმდეგება ღუნვას.

ამრიგად, საძიებელი განტოლება შემდეგი სახისაა:

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t)\ , \tag{5}$$

სადაც $S(x)$ არის ღეროს გასწვრივი კვეთის ფართობი და $E(x)$ არის, ეგრეთ წოდებული, *იუნგის მოდული* x წერტილში. თუ $S(x)$, $E(x)$ და $\rho(x)$ სიდიდეები მუდმივებია, მაშინ (5) განტოლება მიიყვანება (4) განტოლებამდე, სადაც $f = F/\rho S$ და $v^2 = E/\rho$.

ახლა გამოვიყვანოთ (5) განტოლება. წარმოვიდგინოთ ღერო, რომლის განივი კვეთის დიამეტრიც გაცილებით მცირეა, ვიდრე მისი სიგრძე. დავუშვათ აგრეთვე, რომ ღეროს ერთი ბოლო დამაგრებულია, ხოლო მეორე კი – თავისუფალი. მიუხედავად იმისა, რომ ეს პირობები უმნიშვნელოა, კორექტულობის თვალსაზრისით მათი აღნიშვნა აუცილებელია. ჩავთვალოთ აგრეთვე, რომ ღეროს განივი კვეთა ყველგან ერთი და იგივეა. ღეროს ღერძი ჩავთვალოთ წრფედ, რომელიც გადის განივი კვეთების სიმძიმის ცენტრში. ღერძის გასწვრივ ღეროს წერტილის კოორდინატი აღვნიშნოთ x-ით. ყოველ განივ კვეთას შეესაბამება თავისი x კოორდინატი. რეალური ღერო სამგანზომილებიანი ობიექტია, ე.ი. გარკვეული მოცულობა აქვს სამგანზომილებიან სივრცეში. მაგრამ, თუ ღეროს განივი კვეთის დიამეტრი მის სიგრძეზე გაცილებით მცირეა, მაშინ იგი შორიდან შეხედვით აღიქმება როგორც წრფე. ამი-

ტომ შესაძლებელია ღერო განხილულ იქნეს როგორც რეალური (მატერიალური) წრფე, რომელსაც არ აქვს მოცულობა, მაგრამ აქვს მასა. ღეროს მასა ხელსაყრელია მოცემულ იქნეს მასის ელემენტის წრფივი სიმკვრივის სახით, რომლის გამოთვლაც შესაძლებელია შემდეგნაირად: თუ $S(x)$ განივი კვეთის ფართობია, მაშინ AB და CD განივ კვეთებს შორის მოთავსებული მატერიალური ღეროს მოცულობა გამოითვლება ფორმულით: $dV = Sdx$. ამ უსასრულოდ მცირე მოცულობის მასა ტოლია $dm = \rho Sdx$ სიდიდის, სადაც ρ არის იმ მასალის მასური სიმკვრივე, რომლისგანაც ღეროა დამზადებული. რეალური ღეროს მოდელი წრფეა, ამიტომ უნდა ჩავთვალოთ, რომ რეალური ღეროსა და მისი მოდელის მასები ერთნაირია. აღვნიშნოთ ρ_c-თი ღერომოდელის მასის წრფივი სიმკვრივე, მაშინ dx ელემენტის მასა ტოლია $dm = \rho_c dx$ სიდიდის. ამრიგად, ρ_c-ს განსასაზღვრავად ვიღებთ თანადობას სამგანზომილებიანი ρ სიმკვრივის საშუალებით:

$$dm = \rho_c dx = \rho Sdx \Rightarrow \rho_c = \rho S .$$

წარმოვიდგინოთ, რომ ღეროს მარჯვენა მხარე დავიჭირეთ ხელში, გავჭიმეთ იგი x ღერძის გასწვრივ და შემდეგ ხელი გავუშვით. ნათელია, რომ ღეროს წერტილები მოვლენ მოძრაობაში და ისინი რხევას დაიწყებენ x ღერძის გასწვრივ. ღეროს ასეთ რხევას ეწოდება *გასწვრივი* რხევები. იმისათვის, რომ ღეროს რხევა აღვწეროთ, შემოვიტანოთ ორი ცვლადის $u(x,t)$ ფუნქცია, რომელიც აღწერს ღეროს x კოორდინატის მქონე წერტილების გადაადგილებას დროის t მომენტისათვის ღეროს ღერძის გასწვრივ. ღეროს მოძრაობისას დროის t მომენტში განივი AB კვეთა გადაინაცვლებს ღერძის გასწვრივ $u(x,t)$ მანძილზე, ასე რომ, მისი კოორდინატი იქნება $x+u(x,t)$. ღეროს CD განივი კვეთაც აგრეთვე გადაადგილდება და მისი კოორდინატა იქნება:

$$x + dx + u(x + dx, t) = x + dx + u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx .$$

ღეროს AB და CD კვეთებს შორის მანძილი დროის t მომენტში იქნება:

$$\left[x + u(x,t) + dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] - \left[x + u(x,t) \right] = \left[1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx .$$

ღეროს გასწვრივი დეფორმაცია ეწოდება ღეროს უსასრულოდ მცირე მონაკვეთების სიგრძის ფარდობით ცვლილებას. ჩვენს შემთხვევაში AB და CD

კვეთებს შორის dx სიგრძის ნაზრდი, უკანასკნელი ფორმულის თანახმად, ტოლია:

$$\varepsilon(x,t)=\frac{\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx-dx\right]}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

სიდიდის.

გამოვიყვანოთ ღეროს მოძრაობის განტოლება. ღეროს $(x,x+dx)$ ელემენტზე მოქმედებს დაძაბულობის $\vec{T}(x+dx,t)$, $-\vec{T}(x,t)$ ძალები და გარე მასური ძალა, რომელიც განაწილებულია ღეროს სიგრძის შესაბამისად და იცვლება დროში. $\vec{T}=T(x,t)\vec{i}$ სიდიდე არის ისეთი გაზრდილი ძალის მოდელი, რომელიც მოქმედებს ღეროს იმ ნაწილზე, რომელიც მოთავსებულია x კოორდინატის მქონე წერტილის მარჯვნივ ღეროს იმ ნაწილზე, რომელიც მდებარეობს x კოორდინატის მქონე წერტილის მარცხნივ. ასეთი ძალის სიმკვრივე დროის t მომენტში x წერტილის კვეთაში აღვნიშნოთ $\vec{F}=F(x,t)\vec{i}$ -ით. თუ $T(x,t)>0$, მაშინ $T(x,t)$ -ს ეწოდება *გაჭიმვა*, ხოლო, თუ $T(x,t)<0$, მაშინ – *შეკუმშვა.* ყველა ამ ძალების ჯამი, ნიუტონის კანონის თანახმად, ტოლი უნდა იყოს განხილული ელემენტის მასის ნამრავლისა აჩქარებაზე. ყოველივე ზემოთ თქმულის საფუძველზე ვწერთ:

$$\begin{gathered}T(x+dx,t)-T(x,t)+F(x,t)dx=\rho(x)S(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Rightarrow\\ \frac{\partial T}{\partial x}dx+F((x,t)dx=\rho(x)S(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Rightarrow\\ \frac{\partial T}{\partial x}+F(x,t)=\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\cdot\end{gathered}\tag{6}$$

უკანასკნელი განტოლება შეიცავს ორ უცნობ, $\vec{T}=T(x,t)\vec{i}$ და $u(x,t)$ ფუნქციებს, ამიტომ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა დამატებითი პირობები. ჩვენ ვიხილავთ მცირე გასწვრივ რხევას, ამიტომ დამატებით პირობად ჩავთვლით ჰუკის კანონს, რომლის თანახმად, ძალა გადაადგილების პროპორციულია:

$$T(x,t)=ES\varepsilon=ES\frac{\partial u}{\partial x},\tag{7}$$

სადაც პროპორციულობის ES კოეფიციენტს ეწოდება ღეროს *სიხისტე.* (7) თანადობას ეწოდება *განმსაზღვრელი განტოლება* ან *დრეკადობის თანადობა,*

რომელიც სამართლიანია მხოლოდ დრეკადი ღეროს მცირე ε დეფორმაციის შემთხვევაში. ჩავსვათ (7) გამოსახულება (6)-ში, მივიღებთ (5) განტოლებას.

მემბრანის მცირე განივი რხევის განტოლება. *მემბრანა ეწოდება თხელ, ბრტყელ, დრეკად, უჭიმავ აფსკს.* ამ პარაგრაფში გამოვიყვანთ მემბრანის მცირე განივი რხევის შემდეგ განტოლებას:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + F(x,t), \quad x = (x_1, x_2). \tag{8}$$

თუ ρ სიმკვრივე მუდმივია, მაშინ მემბრანის რხევის განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + f(x,t), \quad v^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \tag{9}$$

რომელსაც ეწოდება *ორგანზომილებიანი ტალღური განტოლება.*

გამოვიყვანოთ (8) განტოლება. განვიხილოთ ისეთი მემბრანის მცირე განივი რხევა, რომელშიც გადაადგილება მოხდება მემბრანის სიბრტყის მართობულად. მემბრანის სიბრტყის აღსანიშნავად გამოვიყენებთ Oxy საკოორდინატო სიბრტყეს. დავუშვათ, $u(x, y, t)$ გადაადგილების სიდიდეა დროის t მომენტში (x, y) წერტილიდან. რხევის სიმცირის კრიტერიუმად ავიღებთ:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << 1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 << 1$$

პირობებს. ვთქვათ, ds რომელიმე რკალის ელემენტია, ამ ელემენტზე მოქმედებს დაძაბულობის $\vec{T}ds$ ძალა. მემბრანის დრეკადობის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ დაძაბულობის $\vec{T}$ ვექტორი მდებარეობს M მემბრანის მხებ სიბრტყეში და მართობულია ds ელემენტისა, ხოლო მემბრანის გადაადგილების მიმართ ინვარიანტულობიდან კი გამომდინარეობს, რომ დაძაბულობა ამ წერტილში დამოკიდებული არ არის ds ელემენტის მიმართულებაზე. სიმცირის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ: 1) დაძაბულობის $\vec{T}$ ვექტორის T_{pr} პროექცია (x, y) სიბრტყეზე ტოლია T-სი, 2) T დაძაბულობა დამოკიდებული არ არის t დროზე. მართლაც, $T_{pr} = T\cos(\alpha)$, სადაც α არის კუთხე

(x, y) სიბრტყესა და $\vec{T}$ ვექტორს შორის. მაგრამ α კუთხე არ აღემატება მემბრანის მხებ სიბრტყესა (რომელშიც ძევს $\vec{T}$ ვექტორი) და (x, y) სიბრტყეს შორის γ კუთხეს: $\alpha \le \gamma$. აქედან გვაქვს:

$$\cos(\alpha) \ge \cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \approx 1 \cdot$$

მაშასადამე, $\cos(\alpha) \approx 1$ და ამრიგად, $T_{pr} \approx T$. განვიხილოთ მემბრანის შეუშფოთებელი უბანი. მისი ფართობი $\iint\limits_S dxdy$-ს ტოლია, ხოლო დროის t მომენტში ამ არის ფართობი იქნება: $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\cos(\gamma)} \approx \iint\limits_S dxdy$. ეს ნიშნავს, რომ მემბრანის ფიქსირებული არის ფართობი დროზე დამოკიდებული არ არის, ანუ ეს უბანი არ იწელება. ამიტომ, ჰუკის კანონის თანახმად, არ იცვლება აგრეთვე T. რადგან $\vec{T}$ ვექტორი მიმართულია რკალის ds ელემენტის მართობულად, T დამოკიდებული არ არის x, y კოორდინატებზე. განვიხილოთ მემბრანის ისეთი ელემენტი, რომლისთვისაც $N(x, y, u)$ შუა წერტილია. ამ ელემენტზე, გარდა დაძაბულობის $\vec{T}$ ძალისა, მოქმედებს აგრეთვე ზედაპირის ერთეულოვან ფართობზე განაწილებული დატვირთვა $\rho(x, y, t)$, რომელიც მემბრანის ზედაპირის მართობულია. თანაბრად მოქმედი გარე ძალები ტოლი იქნება $q(x, y, t)dxdy$ სიდიდის, ხოლო თანაბრად მოქმედი დაძაბულობის ძალა იქნება:

$$\left[Tdy\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x+\frac{dx}{2}} - Tdy\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x-\frac{dx}{2}} \right] + \left[Tdx\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{y+\frac{dy}{2}} - Tdx\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{y-\frac{dy}{2}} \right] =$$

$$Tdy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + Tdx\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy \,.$$

აღვნიშნოთ $\rho(x, y)$-ით მემბრანის ზედაპირული სიმკვრივე (სიმკვრივე ფართობის ერთეულზე). მაშინ მემბრანის განხილული ელემენტის მასა იქნება $\rho(x, y)dxdy$. ამრიგად, ნიუტონის კანონის თანახმად გვექნება განტოლება:

$$\rho(x,y)dxdy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=q(x,y,t)dxdy+T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{q(x,y,t)}{T},\ \ v=\sqrt{T/\rho}\ .$$

v სიდიდეს აქვს სიჩქარის განზომილება. ის ახასიათებს რხევის გავრცელების სიჩქარეს. კერძო შემთხვევაში შესაძლებელია $\rho(x,y,t)=0$ ტოლობა. ამ დროს ვიღებთ მემბრანის *თავისუფალი რხევის* შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

ყველა დაჰკვირვებია სიმის რხევას და იცის, რომ თითოეული მათგანი სპეციფიკურ, განსხვავებულ ხმას გამოსცემს. ეს ნიშნავს, რომ ყოველი სიმი ინდივიდუალურ მიდგომას მოითხოვს. სიმის რხევის რამდენიმე მათემატიკური მოდელი არსებობს. ისინი ერთმანეთისაგან მათემატიკურ მოდელში ჩადებული პირობებით განსხვავდებიან. ზემოთ მიღებული განტოლება ყველაზე მარტივი და, ამავე დროს, უნივერსალურია, რადგან აღწერს მცირე რხევითი პროცესების საკმაოდ ფართო კლასს. მათ შორის: თხელი ღეროს განივ და გრეხვით რხევებს, ელექტრულ რხევებს წრედში, ერთგვაროვან გარემოში ელექტრომაგნიტურ რხევებს, მცირე ტალღებს სითხეში და წყლის ზედაპირზე. ამ ჩამონათვალით არ ამოიწურება ის ფიზიკური პროცესები, რომლებიც ტალღური განტოლებით აღიწერება.

სიმის რხევის განტოლების გამოყვანის დროს დავუშვით, რომ რხევა მცირეა, რაც გამოიხატება დაახლოებით ტოლობაში: $\sin\alpha\approx tg\alpha$. ბუნებრივია ვიკითხოთ, როდის არის შესაძლებელი ასეთი მიახლოების დაშვება? შევახსენებთ, რომ α არის ის კუთხე, რომელსაც სიმის მხები ადგენს ჰორიზონტალურ ღერძთან. გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$tg\alpha=\sin\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha}\approx\sin\alpha\left(1+\frac{1}{2}tg^2\alpha\right).$$

როდესაც $\alpha=\dfrac{\pi}{20}$, რაც შეესაბამება 8°, გვაქვს: $\dfrac{1}{2}tg^2\left(\dfrac{\pi}{20}\right)=0.01$, გარდა ამისა, 8°-ზე ნაკლები კუთხეებისათვის უტოლობაში $1+\dfrac{1}{2}tg^2\alpha\approx 1$ შეც-

დომა არ აღემატება ერთ პროცენტს. პრაქტიკაში წრფივი მიახლოება ითვლება დამაკმაყოფილებლად 16°-ზე ნაკლები კუთხეებისათვის. მუსიკალურ ინსტრუმენტებში გადახრის კუთხე გაცილებით ნაკლებია ზემოთ მითითებულ დასაშვებ სიდიდეზე, ამიტომ მუსიკალური ინსტრუმენტების სიმის რხევის თეორია დაფუძნებულია ტალღურ განტოლებაზე. ტალღური განტოლება საკმაოდ ეფექტურად გამოიყენება შახტებში ლიფტების ამწევი ტროსების რხევის შესასწავლადაც.

ამრიგად, სიმის (4) (ერთგანზომილებიან შემთხვევაში) და მემბრანის (8) (ორგანზომილებიან შემთხვევაში) რხევის განტოლებებს ერთი და იგივე სახე აქვთ და ისინი (1) ზოგადი განტოლების კერძო შემთხვევებია. (4) და (8) განტოლებები *ჰიპერბოლური ტიპის* განტოლებებია. ისინი ჩაწერილია კანონიკური სახით. როგორც ვიცით, ჰიპერბოლურ განტოლებებს ორი შესაძლო კანონიკური სახე აქვთ. (4) და (8) ერთი და იმავე სახისაა (ისინი არ შეიცავენ შერეულ წარმოებულებს). ამ სახის ჰიპერბოლურ განტოლებებს, მიღებულია, ეწოდოს *ტალღის განტოლებები.* ტალღის განტოლების განზომილება განისაზღვრება მასში შემავალი ,,სივრცითი‘‘ ცვლადების რაოდენობის მიხედვით (დროითი t ცვლადი ცალკეა გამოყოფილი). ამრიგად, (4) და (8), შესაბამისად, არიან ერთ- და ორგანზომილებიანი *ტალღის განტოლებები.*

16.2. უსასრულო სიმი

დავადგინეთ ტალღის –

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

განტოლების ტიპი და აღვნიშნეთ, რომ იგი მეორე რიგის კვაზიწრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლების კლასიფიკაციის მიხედვით არის ჰიპერბოლური. წინა პარაგრაფის აღნიშვნებით: $A = 1$, $C = -\frac{a^2}{2}$, $B = 0$, ამიტომ $AC - B^2 = -\frac{a^2}{2} < 0$. ახლა ვნახავთ, რომ მისი ამონახსნი:

$$u(x,t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at) \qquad (1)$$

მოიცემა ორი ნებისმიერი φ, ψ ფუნქციების ჯამის სახით, რომელსაც *დალამბერის ფორმულა* ეწოდება. განტოლების ამონახსნის განმარტების თანახმად, მისი ჩასმით განტოლებაში უნდა მივიღოთ იგივეობა, მაგრამ დალამბერის ფორმულით მოცემული ამონახსნის ჩასასმელად ტალღურ განტოლებაში სა-

ჭიროა, რომ $u(t,x)$ იყოს ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი, რაც, თავის მხრივ, φ,ψ ფუნქციებისათვის ამ პირობის დაკმაყოფილებას ნიშნავს. მიუხედავად ამისა, დალამბერის ფორმულას აზრი აქვს არააუცილებლად წარმოებადი ფუნქციებისათვის. ამ შემთხვევაში $u(x,t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$ იქნება ე.წ. *განზოგადებული ამონახსნი.* ამგვარი ამონახსნი ზოგჯერ საჭიროა რეალური პროცესების აღწერის დროს.

დალამბერის ფორმულიდან სიმის რხევის განტოლების მრავალი ამონახსნი მიიღება φ,ψ ფუნქციების შერჩევის ხარჯზე. რეალური ამოცანის ამოხსნის დროს კი მხოლოდ ერთი ამონახსნია საჭირო. იმისათვის, რომ ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლიდან კონკრეტული ამონახსნი იქნეს გამოყოფილი, საჭიროა, ამონახსნს დავადოთ დამატებითი პირობები, რომლებიც ასევე მრავალია ამოცანის ფიზიკური ბუნებიდან გამომდინარე. მათემატიკურად ყველაზე მარტივია ამოცანა საწყისი პირობით, რომელსაც სხვანაირად კოშის ამოცანაც ეწოდება და ასე გამოიყურება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ u|_{t=0}=f(x),\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x). \tag{2}$$

ზემოთ მოყვანილ სასაზღვრო პირობებში f და g ფუნქციები ითვლებიან ცნობილად. ამასთან, t-ს ეწოდება საწყისი გადახრა, ხოლო g-ს კი საწყისი სიჩქარე. ისინი ასახავენ სიმის მდგომარეობას და ყოველი წერტილის სიჩქარეს დროის საწყის მომენტში. კოშის ამოცანის დასმა გამართლებულია, თუ სიმი საკმაოდ გრძელია და რხევა შეისწავლება სადღაც შუაში. ამრიგად, იგულისხმება, რომ სიმის ბოლოები რხევის პროცესზე გავლენას ვერ ახდენენ. კოშის ამოცანის ამონახსნი იწერება მოცემული f და g ფუნქციების საშუალებით. რადგან საძიებელი ფუნქცია აკმაყოფილებს სიმის რხევის განტოლებას, ამიტომ იგი შესაძლებელია (1) სახის ტოლობით იქნეს წარმოდგენილი. გამოვთვალოთ მისი კერძო წარმოებულით, t-თი:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\varphi'(x+at)-a\psi'(x-at),$$

შემდეგ ამ უკანასკნელსა და (1)-ში ჩავსვათ $t=0$. გამოვიყენოთ (2)-ის დამატებითი პირობაც და მივიღებთ:

$$u|_{t=0}=\varphi(x)+\psi(x)=f(x),\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=a\varphi'(x)-a\psi'(x)=g(x).$$

უკანასკნელი ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{a}G(x),\ \ G(x)=\int g(x)dx\,.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x),\ \ \varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{a}G(x),$$

საიდანაც განისაზღვრებიან φ და ψ ფუნქციები:

$$\varphi=\frac{1}{2}\left(f+\frac{1}{a}G\right),\ \ \psi=\frac{1}{2}\left(f+\frac{1}{a}G\right).$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულებები დალამბერის (1) ფორმულაში და გვექნება:

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[f(x+at)+f(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\left[G(x+at)-G(x-at)\right].\quad (3)$$

ამ ტოლობაში უკანასკნელი სხვაობა არის $g(x)$ ფუნქციის $G(x)$ პირველყოფილის ნაზრდი, რომელიც შესაძლებელია ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულით გამოვსახოთ, როგორც განსაზღვრული ინტეგრალი (ე.ი. $G(x+at)-$ $-G(x-at)=\int_{x-at}^{x+at}g(s)ds$) და მივიღებთ:

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[f(x+at)+f(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)ds\,.\quad (4)$$

ამონახსნის ამგვარ წარმოდგენას ეწოდება *დალამბერ-ეილერის ფორმულა.* ეს ფორმულა მიღებულია კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობის დაშვებიდან. თუ არსებობს კოშის ამოცანის მეორე ამონახსნიც, მაშინ ისიც აუცილებლად (4) სახით წარმოიდგინება. იმის შესამოწმებლად, რომ (4) ფორმულით მოცემული ფუნქცია მართლაც წარმოადგენს (2) ამოცანის ამონახსნს, საჭიროა $u(t,x)$ (განსაზღვრული (4) ფორმულით) ჩავსვათ განტოლებაში და შევამოწმოთ სასაზღვრო პირობები, რისი გაკეთებაც ძნელი არ არის. აღმოჩნდება, რომ f-ს უნდა მოვთხოვოთ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადობა, ხოლო g-ს კი – უწყვეტად დიფერენცირებადობა.

განმარტება: $u(t,x)$ ფუნქციას ეწოდებაა (2) კოშის ამოცანის კლასიკური ამონახსნი, თუ მას აქვს უწყვეტი პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულები $\Omega=\{(t,x)\,|\,t>0, x\in \mathbf{R}^1\}\subset \mathbf{R}^2$ არეში და Ω-ზე აკმაყოფილებს სიმის რხევის განტოლებას. გარდა ამისა, უწყვეტი და უწყვეტად დიფერენცირებადია t-ს მიმართ Ω ჩაკეტილ სიმრავლეზე და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს.

ამ განმარტების გათვალისწინებით ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა შეჯამებულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1. *დავუშვათ, $f(x)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია ნებისმიერი $x\in \mathbf{R}^1$ -სათვის, ხოლო $g(x)$ უწყვეტად დიფერენცირებადია. მაშინ კოშის (2) ამოცანას აქვს ერთადერთი კლასიკური ამონახსნი. ეს ამონახსნი მოიცემა დალამბერ-ეილერის (4) ფორმულით.*

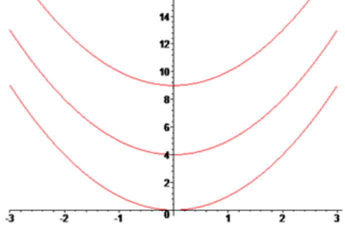
ამოცანა 1. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა:

$$u_{tt}=u_{xx}\,,\;\; u|_{t=0}=x^2\,,\;\; u_t|_{t=0}=0\,.$$

ამოხსნა: აქ $a=1, f(x)=x^2, g(x)=0$, ამიტომ (12) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]=x^2+t^2\,.$$

მივიღეთ პარაბოლების ოჯახი. სიმის მდგომარეობა დროის $t=0,2,3$ მომენტებისათვის გამოსახულია ნახ. 1-ზე. შევნიშნოთ, რომ პარაბოლის წვეროს აჩქარებულ მოძრაობას აქვს ადგილი t-ს გაზრდასთან ერთად. ასეთი ყოფაქცევა დამახასიათებელია მაგრად მოჭიმული მშვილდის ლარისათვის.



ნახ. 1

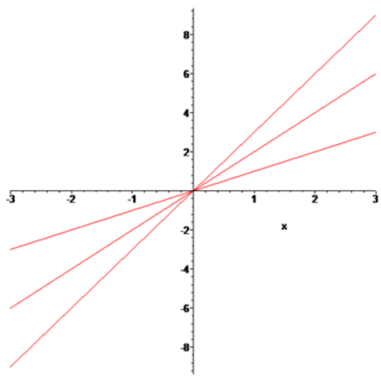
ამოცანა 2. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x.$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $a = 2, f(x) = 0, g(x) = x$. აქედან $G(x) = \dfrac{x^2}{2}$. გამოსახულება (12)-დან ვღებულობთ ამოცანის ამონახსნს:

$$u(t,x) = \frac{1}{8}\left[(x+2t)^2 - (x-2t)^2\right] = xt.$$

ეს უკანასკნელი არის t პარამეტრზე დამოკიდებული წრფეთა ოჯახი. სიმის მდგომარეობა დროის სხვადასხვა მომენტისათვის $t = 1,2,3$ გამოსახულია ნახ. 2-ზე. სიმი ბრუნავს კოორდინატთა სათავის გარშემო, როგორც მყარი ტანი.



ნახ.2

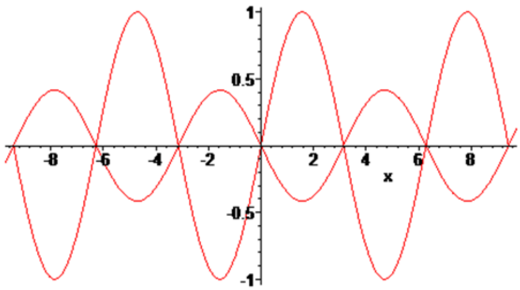
ამოცანა 3. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

ამოხსნა: ამ ამოცანისათვის $a = 1, f(x) = \sin x, g(x) = 0$ და (3) ფორმულა მოგვცემს:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[\sin(x+t) + \sin(x-t)\right] = \sin x \cos t.$$

სიმის ნაწილი დროის სხვადასხვა მომენტისათვის, $t = 0$, $t = 2$, ნაჩვენებია ნახ.3-ზე. ნახაზიდან ჩანს, რომ სიმის რხევა ეთანადება ადამიანის წარმოსახვას სიმის რხევაზე.



ნახ. 3

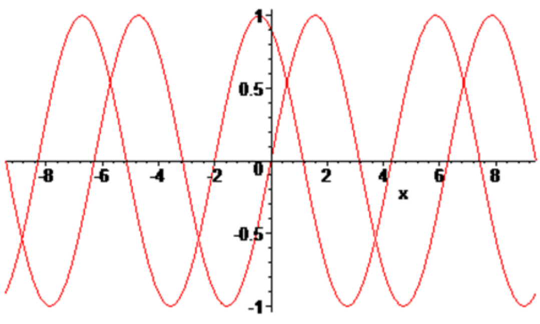
ამოცანა 4. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა:

$$u_{tt} = u_{xx}\,,\quad u|_{t=0} = \sin x\,,\quad u_t|_{t=0} = \cos x\,.$$

ამოხსნა: აქ $a=1, f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$, ამიტომ $G(x)=\sin x$. (3) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left[\sin(x+t)+\sin(x-t)\right]+\frac{1}{2}\left[\sin(x+t)-\sin(x-t)\right]=\sin(x+t)\,.$$

არგუმენტი $x+t$ მიუთითებს იმაზე, რომ გეომეტრიულად (ნახ. 4. $t=0$, $t=2$) მოხდა ფუნქციის ძვრა Ox ღერძის გასწვრივ t-ს ტოლი სიდიდით.



ნახ.4

ამრიგად, სიმი გადაადგილდება Ox ღერძის გასწვრივ და ქმნის მორბენალი ტალღის იმიტაციას.

სასარგებლოა ნახოთ ზემოთ მოყვანილი პროცესების დინამიკური სურათი Maple-ს გამოყენებით. მაგალითად, მორბენალ ტალღას მიიღებთ Maple-ზე შემდეგი ერთსტრიქონიანი პროგრამის გაშვებით (პროგრამა ფაქტობრივად ერთი ბრძანებაა – animate):> *animate(plot,[sin(x+t),x=-5..5],t=0..5).*

16.3. მორბენალი ტალღა

განვიხილოთ:

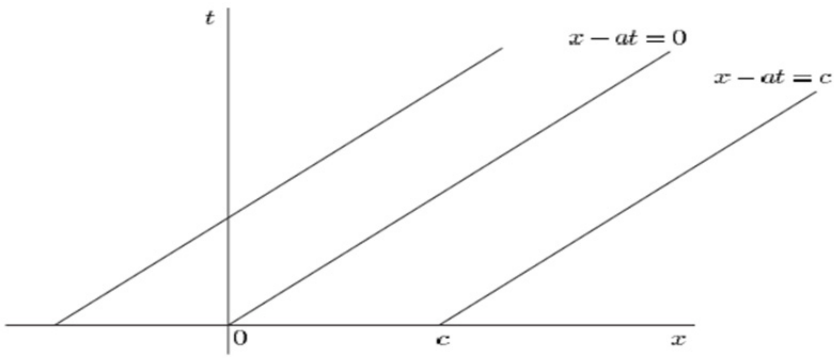
$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

სიმის რხევის განტოლების გეომეტრიული სტრუქტურა. როგორც აღვნიშნეთ, ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასეთია:

$$u(t, x) = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \qquad (1)$$

სადაც φ და ψ ნებისმიერი ფუნქციებია.

განვიხილოთ უკანასკნელი $\psi(x - at)$ შესაკრები. იგი დამოკიდებულია $x - at$ სიდიდეზე, რომელიც ორი $- x$ და t დამოუკიდებელი ცვლადებისაგან შედგება. თუ მას მუდმივად ჩავთვლით, ე.ი., თუ $x - at = c$, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია, მაშინ (x, t) სიბრტყეზე მივიღებთ წრფის განტოლებას. c მუდმივის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის გვექნება წრფეთა ოჯახი (ნახ.1).

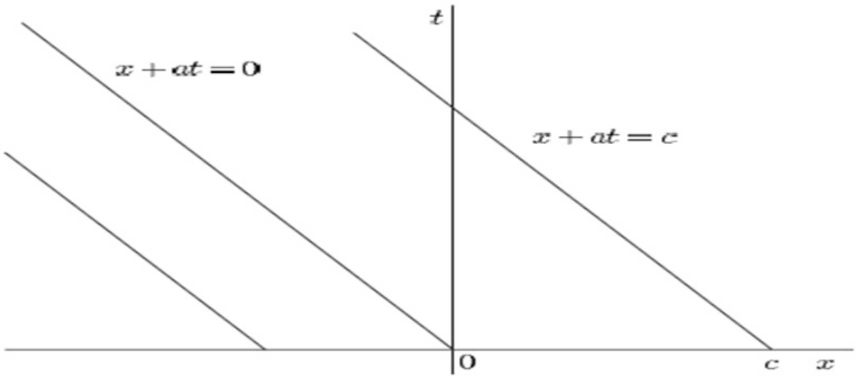


ნახ. 1

ფიქსირებულ $x - at = c$ წრფეზე ψ ფუნქცია მუდმივია, რადგან $\psi(x - at) = \psi(c)$. ესენი არიან სიმის რხევის განტოლების *მახასიათებელი წრფეები.* მათი საშუალებით მარტივად ხდება $\psi(x - at)$ ფუნქციის (ორი $- x$ და t ცვლადის) გრაფიკის აგება ψ, x, t საკოორდინატო სისტემის მქონე სამგანზომილებიან სივრცეში (რომელიც, ცხადია, იქნება ზედაპირი). ჩავთვალოთ, რომ, როდესაც $t = 0$, ცნობილია $\psi(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. დავაფიქსიროთ $x = c$ და გავატაროთ მასზე (x, t) სიბრტყეში განტოლების $x - at = c$ მახასიათებელი წრფე. ამ წრფის გასწვრივ ψ ფუნქცია მუდმივია, რაც ნიშნავს, რომ $\psi(x - at)$ ზედაპირზე მდებარეობს წრფე, რომელიც შესაბამის

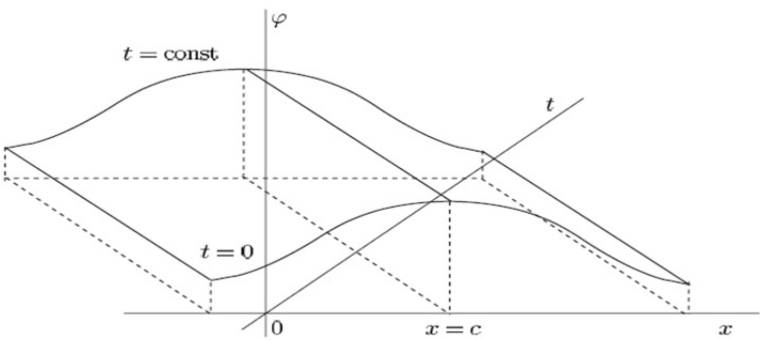
მახასიათებელ წრფეზე პროექტირდება, ანუ $\psi(x)$-ის გრაფიკი გადაიტანება აღნიშნული წირის გასწვრივ, როგორც მყარი კონსტრუქცია, რომელიც ფორმას არ იცვლის (ეს შემთხვევა განვიხილეთ წინა პარაგრაფის მაგალითებში). ამის გამო, მიღებულია შემდეგი სახელწოდებები: $\psi(x - at)$-ს ეწოდება *პირდაპირი ტალღა*, $x - at$-ს – *ტალღის ფაზა*, a-ს – *ფაზური სიჩქარე*, (x, t) სიბრტყეს კი – *ფაზური სიბრტყე*.

ნათელია, რომ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა სამართლიანია $\varphi(x + at)$ შესაკრებისათვის. $x + at = c$ მახასიათებელი წრფე c-ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის მოყვანილია ნახ. 2-ზე.



ნახ. 2

$\varphi(x + at)$-ს ეწოდება *შებრუნებული ტალღა*, რადგან იგი გადაადგილდება მარცხნივ (ფორმის შეუცვლელად) Ox ღერძის გასწვრივ (t-ს ცვლილების დროს. იხილე ნახ.3).

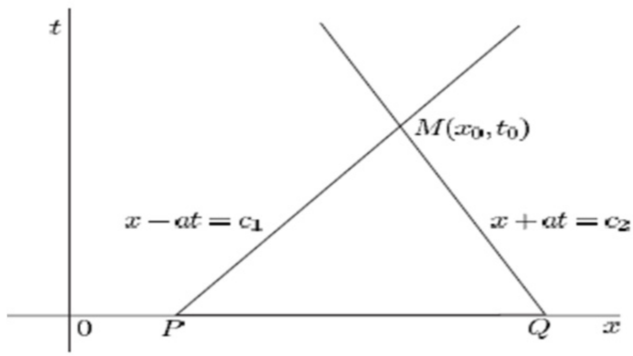


ნახ. 3

ყოველივე ზემოთ თქმული მსჯელობა მივუსადაგოთ დალამბერის ფორმულას, რომელიც, როგორც აღვნიშნეთ, კოშის ამოცანის ამონახსნია სიმის განტოლებისათვის. ფაზურ სივრცეში დავაფიქსიროთ $M(x_0, t_0)$ წერტილი. ამ წერტილში გაივლის

$$x - at = c_1, \; x + at = c_2 \tag{2}$$

მახასიათებელი წრფეები, რომლებიც Ox ღერძს გადაკვეთენ P და Q წერტილებში. PQM სამკუთხედს, რომელიც შემოსაზღვრულია (2) განტოლებით მოცემული წრფეებით და Ox ღერძის ნაწილით, ეწოდება *მახასიათებელი,* PQ მონაკვეთს კი – (x_0, t_0) წერტილის *დამოკიდებულების მონაკვეთი.*



ნახ. 4

P და Q წერტილების კოორდინატების საპოვნელად ვაწარმოოთ შემდეგი მსჯელობა. M წერტილი (2) წრფეების გადაკვეთის წერტილია, ამიტომ მისი კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორივეს (2) განტოლებებიდან: $x_0 - at_0 = c_1, \; x_0 + at_0 = c_2,$ რაც მიგვიყვანს განტოლებებამდე:

$$x - at = x_0 - at_0, x + at = x_0 + at_0. \tag{3}$$

თუ (3)-ში ჩავსვამთ $t = 0$, მივიღებთ P და Q წერტილების კოორდინატებს:

$$P(x, 0) = (x_0 - at_0, 0), Q(x, 0) = (x_0 + at_0, 0).$$

აქედან, დალამბერის ფორმულის გამოყენებით ვიღებთ (x_0, t_0) წერტილში $u(x_0, t_0)$ ფუნქციის მნიშვნელობას:

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0 + at_0) + f(x_0 - at_0)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} g(s)ds.$$

ჩავსვათ ამ ფორმულაში სიბრტყის წერტილები მათი კოორდინატების ნაცვლად და ინტეგრალი ავიღოთ PQ მონაკვეთზე:

$$u(M) = \frac{1}{2}\big(f(P) + f(Q)\big) + \frac{1}{2a}\int_{PQ} g(s)ds.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ მივიღოთ კოშის ამოცანის ამონახსნი სიმის რხევის განტოლებისათვის ფიქსირებულ M წერტილში, საკმარისია $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობების ცოდნა ორ – P და Q წერტილებში, ხოლო $g(x)$-ისა კი PQ მონაკვეთზე. ამასთან, P და Q წერტილები არიან M წერტილზე გამავალი მახასიათებელი წრფეების Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილები.

ზემოთ მოყვანილი გეომეტრიული სურათი საშუალებას იძლევა *გრაფიკულად* ამოვხსნათ სიმის რხევის განტოლება. განტოლების ამოხსნის ამ გზას *მორბენალი (მრბოლი) ტალღის მეთოდი* ეწოდება.

დავუშვათ, მოცემულია $\psi(x)$ ფუნქცია. $\psi(x - at)$ ფუნქციის გრაფიკი ფიქსირებული დროის t მომენტში მიიღება $\psi(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ძვრით მარჯვნივ Ox ღერძის გასწვრივ at სიდიდით. ანალოგიურად, $\phi(x + at)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $\phi(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ძვრით at სიდიდით Ox ღერძის გასწვრივ მარცხნივ. ძვრებით მიღებული ორივე გრაფიკის ჯამი არის სიმის რხევის განტოლების ამონახსნი, რომელიც შეესაბამება (1) ფორმულით მიღებულ ამონახსნს. რეალური ამონახსნის ასაგებად საჭიროა შემოვიფარგლოთ დროის ცალკეული მომენტებისათვის.

იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ მორბენალი ტალღის მეთოდით, აუცილებელია საწყისი $\phi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციების ცოდნა. გავიხსენოთ, რომ:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\left(f + \frac{1}{a}G\right),\ \ \psi(x) = \frac{1}{2}\left(f - \frac{1}{a}G\right),\ \ G(x) = \int_0^x g(s)ds. \qquad (4)$$

ეს ფორმულები მარტივდება, როდესაც ერთ-ერთი მოცემული ფუნქციიდან, მაგალითად, $g(x)$ იგივურად ნულია. მივიღებთ $\phi(x) = \psi(x) = \frac{1}{2}f(x)$. ხოლო, როდესაც $f(x) \equiv 0$, გვექნება $\phi(x) = \frac{1}{2a}G(x) = -\psi(x)$.

გავაერთიანოთ ზემოთ მოყვანილი არგუმენტები შემდეგი პროცედურების მიმდევრობაში და ჩამოვაყალიბოთ მორბენალი ტალღის მეთოდი ალგორითმის სახით. პირველ რიგში, გამოვთვალოთ $\phi(x)$ და $\psi(x)$ ფუნქციები (4) ფორმულების გამოყენებით. დავაფიქსიროთ t და მოვახდინოთ $\phi(x)$ ფუნქციის მარცხნივ ძვრა Ox ღერძის გასწვრივ at სიდიდით. $\psi(x)$ ფუნქციის

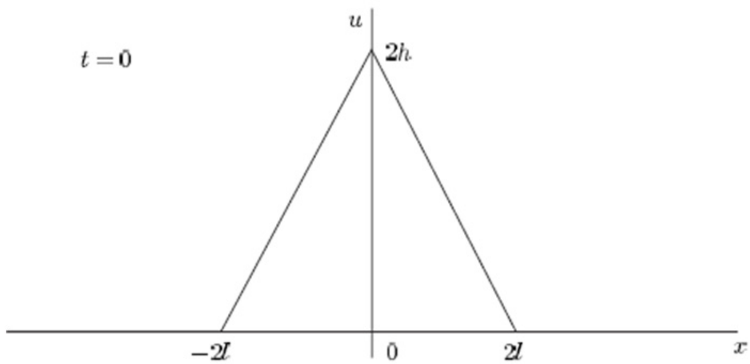
ძვრა მოვახდინოთ მარჯვნივ Ox-ის გასწვრივ at სიდიდით. მივიღებთ $\phi\,(\mathrm{x}+\mathrm{at})$ და $\phi\,(\mathrm{x}-\mathrm{at})$ ფუნქციების გრაფიკებს, რომლებსაც შევკრებთ. შედეგად კი მივიღებთ დროის ფიქსირებულ t მომენტში საძიებელი $\mathrm{u(x,t)}$ ფუნქციის გრაფიკს.

მოყვანილი კონსტრუქცია განსაკუთრებით სასარგებლოა მაშინ, როდე-საც საწყისი მონაცემები გრაფიკულადაა მოცემული.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ კოშის ამოცანა:

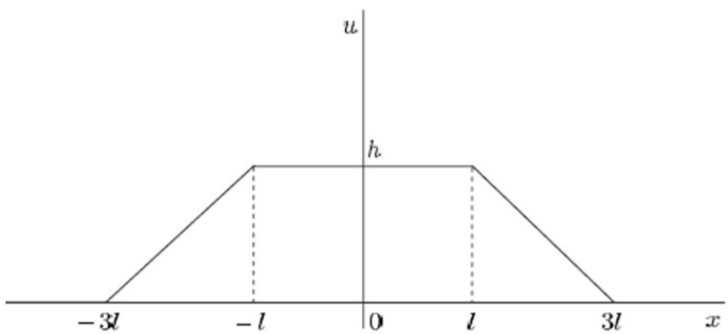
$$u_{tt} = u_{xx},\ u_{|t=0} = f(x), u_{t|t=0} = 0,$$

სადაც $f(x)$ მოცემულია ნახ. 5-ზე.

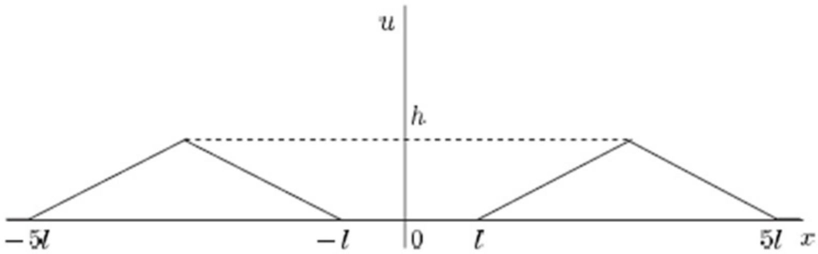


ნახ. 5

ამოხსნა: რადგან $g = 0$, ამიტომ $\varphi = \psi = \frac{1}{2}f$. შესაძლო ამონახსნის გრაფიკები მოცემულია ნახ.6. და ნახ. 7-ზე.



ნახ. 6



ნახ. 7

16.4. შემოსაზღვრული სიმის რხევა

კოშის უკვე განხილული ამოცანა სიმის განტოლებისათვის დასმული იყო იმ დაშვებით, რომ სიმი უსასრულოდ გრძელია. რეალურად საჭიროა შესწავლილ იქნეს სასრული სიგრძის სიმის რხევა. მაგალითად, თუ სიმის ბოლოები დამაგრებულია და იგი Ox ღერძის გასწვრივ $[0,l]$ მონაკვეთს იკავებს, მაშინ სიმის თავისუფალი რხევის ამოცანა არის:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\,,\ \ 0 < x < l\,,\ \ t > 0\,, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = f(x)\,,\ \ u_t|_{t=0} = g(x)\,,\ \ 0 \le x \le l\,, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = 0\,,\ \ u|_{x=l} = 0\,, t \ge 0\,. \tag{3}$$

(2) პირობას ეწოდება *საწყისი*, ხოლო (3)-ს კი – *სასაზღვრო*. საზოგადოდ, (1)-(3) ეწოდება *შერეული* ამოცანა. ამ ამოცანის ამოსახსნელად დამუშავებულია სპეციალური მეთოდი, რომელიც მისი პირველაღმომჩენის *ფურიეს მეთოდის* სახელითაა ცნობილი. ფურიეს მეთოდის სხვაგვარი სახელწოდებაა *ცვლადთა განცალების მეთოდი.* მეთოდის არსი მდგომარეობს ამონახსნის წარმოდგენაში ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით, რომელთაგან თითოეული ერთი ცვლადის ფუნქციაა: $u(t,x) = T(t)X(x)$.

ვიპოვოთ $u_{tt} = T^{//}(t)X(x)$ და $u_{xx} = T(t)X^{//}(x)$ კერძო წარმოებულები. ჩავსვათ ისინი სიმის (1) განტოლებაში და მივიღებთ:

$$T^{//}(t)X(x) = a^2 T(t)X^{//}(x)\,.$$

ამ განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $a^2T(t)X(x)$ და გვექნება:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T^{//}(t)}{T(t)}=\frac{X^{//}(x)}{X(x)}\,. \tag{4}$$

(4) ტოლობის მარცხენა მხარეში არის t-ზე დამოკიდებული ფუნქცია, ხოლო მარჯვენა მხარეში კი – x-ზე დამოკიდებული.

ლემა 1. *ტოლობა $\varphi(t)=\psi(x)$, სადაც t,x დამოუკიდებელი ცვლადებია, რომლებიც იცვლებიან, შესაბამისად, $[0,\tau]$ და $[0,l]$ ინტერვალებზე, ხოლო φ,ψ თავიანთი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქციებია, სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ორივე ფუნქცია რაიმე ერთისა და იმავე მუდმივის ტოლია.*

დამტკიცება ელემენტარულია. მართლაც, დავაფიქსიროთ x, ვთქვათ $x=0$. მივიღებთ $\varphi(t)=\psi(0)=const$. ანალოგიურად, თუ დავუშვებთ, რომ $t=0$, მივიღებთ $\psi(x)=\varphi(0)=const$, ამით ლემა დამტკიცებულია.

დავუბრუნდეთ (4) ტოლობას. გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი ლემა და ეს მუდმივი აღვნიშნოთ $-\lambda^2$. ამრიგად:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T^{//}(t)}{T(t)}=-\lambda^2\,,\quad \frac{X^{//}(x)}{X(x)}=-\lambda^2$$

ტოლობებიდან მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$X^{//}(x)+\lambda^2X(x)=0\,, \tag{5}$$

$$T^{//}(t)+a^2\lambda^2T(t)=0\,. \tag{6}$$

ამრიგად, ცვლადების განცალების შემდეგ, ერთი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების მაგივრად მივიღეთ ორი დამოუკიდებელი, ერთსა და იმავე პარამეტრზე დამოკიდებული ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება. პარამეტრი, რომელსაც განტოლებები შეიცავენ, უცნობია და დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნთან ერთად საჭიროა მისი პოვნაც.

გავიხსენოთ (3) სასაზღვრო პირობა. ჩავსვათ მასში დასაშვები სტრუქტურის მქონე $u(t,x)=T(t)X(t)$ ამონახსნი. მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$u\,|_{x=0}=T(t)X(x)\,|_{x=0}=T(t)X(0)=0\,, \tag{7}$$

$$u\,|_{x=l}=T(t)X(x)\,|_{x=l}=T(t)X(l)=0\,. \tag{8}$$

ტოლობა (7) სრულდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $X(0)=0$, ხოლო (8) კი, როდესაც $X(l)=0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ $T(t)\equiv 0$, რაც ამოცანის პირობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად, (5) დიფერენციალურ განტოლებას ვუმატებთ სასაზღვრო პირობებს $X(0)=0$ და $X(l)=0$. ასე რომ, საბოლოოდ ვღებულობთ სასაზღვრო ამოცანას საკუთრივი მნიშვნელობისათვის:

$$X^{//}(x)+\lambda^2 X(x)=0,\quad X(0)=0,\quad X(l)=0 \tag{9}$$

ასეთი ამოცანის ამოხსნის მეთოდი ჩვენთვის უკვე ცნობილია. (9) დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელ განტოლებას $k^2+\lambda^2=0$ აქვს ორი წარმოსახვითი ფესვი და დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე: $X(x)=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x$, სადაც C_1, C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. გამოვიყენოთ $X(0)=0$ სასაზღვრო პირობა და მივიღებთ $C_2=0$. ასე რომ, გვრჩება მხოლოდ ერთი შესაკრები $X(x)=C_1\sin\lambda x$, რომლის ჩასმის შემდეგ $X(l)=0$ სასაზღვრო პირობაში მივდივართ $\sin\lambda l=0$ განტოლებამდე. აქედან ვპოულობთ $\lambda_n=\pi n/l$, $n=1,2,3...$, რომელთა კვადრატები ადგენენ (9) ამოცანის სპექტრს. λ_n-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ამონახსნები $X_n(x)=C_n\sin\pi nx/l$, $n=1,2,3...$, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან ნებისმიერ C_n მუდმივებზე. გადავიდეთ (6) განტოლებაზე. ისიც ანალოგიურად იხსნება. მახასიათებელი $k^2+a^2\lambda^2=0$ განტოლების ფესვებია $k_{1,2}=\pm i\lambda a$, ხოლო ზოგადი ამონახსნი წარმოიდგინება $T(t)=A\cos a\lambda t+B\sin a\lambda t$ სახით. λ პარამეტრის მნიშვნელობა ჩვენ უკვე ვიპოვეთ და ვიცით, რომ $\lambda=\pi n/l$. ჩავსვათ იგი $T(t)$ ფუნქციაში და მივიღებთ ამონახსნთა თვლად რაოდენობას:

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{\pi nat}{l}+B_n\sin\frac{\pi nat}{l},\quad n=1,2,3...\ .$$

ამრიგად, ჩვენ ვიპოვეთ (5) და (6) დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნთა თვლადი სიმრავლე. ცვლადთა განცალების მეთოდის თანახმად, (1) ამოცანის ამონახსნები მოიცემა ამ ამონახსნთა ნამრავლის საშუალებით:

$$u_n(t,x)=T_n(t)X_n(x)=\left(a_n\cos\frac{\pi nat}{l}+b_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi n}{l}x\,.$$

ნათელია, რომ ყოველი $u_n(t,x)$ ფუნქცია უსასრულოდ დიფერენცირებადია $\Pi = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq l\}$ ჩაკეტილ სიმრავლეზე a_n, b_n მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. პირდაპირი ჩასმით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ $u_n(t,x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1) განტოლებას და (3) სასაზღვრო პირობებს Π არეზე. ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

დებულება 1. *სიმის რხევის განტოლებას აქვს ამონახსნების თვლადი რაოდენობა. თითოეული ამონახსნი აკმაყოფილებს (3) სასაზღვრო პირობებს და არიან უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქციები* $\Pi = \{t \geq 0, 0 \leq x \leq l\}$ *სიმრავლეზე.*

ფურიეს მეთოდის დასკვნით ეტაპს წარმოადგენს სიმის რხევის განტოლების წრფივობის თვისების (სუპერპოზიციის პრინციპის) გამოყენება. თუ ნაპოვნია ერთგვაროვანი წრფივი განტოლებების რამდენიმე ამონახსნი, მაშინ მათი ჯამი აგრეთვე ამონახსნია. დებულება 1-ის თანახმად, სიმის რხევის განტოლებას აქვს ამონახსნთა თვლადი რაოდენობა, ამიტომ მათი ჯამიც იქნება ამ განტოლების ამონახსნი. სხვა სიტყვებით:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n a t}{l} \right) \sin\frac{\pi n x}{l} \tag{10}$$

მწკრივი არის დამაგრებული ბოლოების მქონე სიმის თავისუფალი რხევის განტოლების ამონახსნი, რომელსაც ამონახსნის *ფურიეს ფორმით წარმოდგენა* ეწოდება.

გამოვთვალოთ $u(t,x)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული t-თი და დავუშვათ, რომ მიღებული:

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} \left(-a_n \sin\frac{\pi n a t}{l} + b_n \cos\frac{\pi n a t}{l} \right) \sin\frac{\pi n x}{l}$$

მწკრივიც კრებადია. გავიხსენოთ (2) საწყისი პირობა. ჩავსვათ მასში $u(t,x)$ და $u_t(t,x)$ ფუნქციები და მივიღებთ:

$$u\,|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{l} = f(x), \tag{11}$$

$$u_t\,|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} b_n \sin\frac{\pi n x}{l} = g(x). \tag{12}$$

დავუშვათ, ცნობილია $[0,l]$ ინტერვალზე $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების დაშლა ფურიეს მწკრივად $\sin\frac{\pi nx}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$ ფუნქციების საშუალებით. გავიხსენოთ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტები გამოითვლება:

$$f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \quad g_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \tag{13}$$

ფორმულების საშუალებით, ხოლო ფურიეს მწკრივს ამ ფუნქციებისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{\pi nx}{l}, \tag{14}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{15}$$

ერთი და იგივე $f(x)$ ფუნქცია ჩვენ წარმოდგენილი გვაქვს ორი – (11) და (14) მწკრივის სახით, ამიტომ ამ მწკრივების კოეფიციენტები ერთმანეთს ემთხვევა: $a_n = f_n$. ანალოგიურად, $g(x)$ ფუნქციისათვის გვაქვს მისი მწკრივის სახით (12) და (15) გამოსახულებები, რაც ნიშნავს, რომ $\pi nab_n/l = g_n$, საიდანაც $b_n = g_n l/(\pi na)$, სადაც $n=1,2,\ldots$. a_n-სა და b_n-ის ნაპოვნი მნიშვნელობები ჩავსვათ (10) მწკრივში და მივიღებთ სიმის რხევის (1)-(3) ამოცანის ამონახსნს.

ზემოთ თქმული შევაჯამოთ შემდეგ დებულებაში.

დებულება 2. *იმისათვის, რომ ამოვხსნათ ბოლოებდამაგრებული სიმის თავისუფალი რხევის განტოლება ფურიეს მეთოდის გამოყენებით, საჭიროა გამოვთვალოთ მოცემული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტები (13) ფორმულით, განვსაზღვროთ $a_n = f_n$ და $b_n = g_n l/(\pi na)$ კოეფიციენტები და შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები ზოგად (10) ამონახსნში.*

ამოცანა 1. ამოვხსნათ $]0,1[$ ღია ინტერვალზე შემდეგი შერეული ამოცანა ტალღური განტოლებისათვის:

$$u_{tt} = u_{xx},\ \ 0 < x < 1,\ \ t > 0,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,\ \ u|_{t=0} = x(x-1),\ \ u_t|_{t=0} = 0.$$

ამოხსნა: ამ ამოცანის შედარება ზოგად (1)-(3) ამოცანასთან გვაძლევს, რომ $a=1$, $l=1$, $f(x)=x(x-1)$, $g(x)=0$. გამოვთვალოთ f და g ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტები (13) ფორმულების საშუალებით:

$$f_n = 2\int_0^1 x(x-1)\sin \pi nx dx = \begin{cases} \dfrac{-8}{\pi^3(2k-1)^3}, & n=2k-1, \\ 0, & n=2k; k=1,2,3,..., \end{cases}$$

$$g_n = 0\,,\ \ n=1,2,3,... \ .$$

ამონახსნი წარმოიდგინება მწკრივით:

$$u(t,x) = \frac{-8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\cos\pi(2k-1)t\sin\pi(2k-1)x \qquad (16)$$

გამოვიკვლიოთ ამ მწკრივის კრებადობა. (16)-ის მაჟორანტული მწკრივია $\dfrac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-3}$. ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად, (16) ფუნქციონალური მწკრივი თანაბრად კრებადია $\Pi=\{t\ge 0, 0\le x\le 1\}$ სიმრავლეზე და წარმოადგენს ორი ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას. $u(x,t)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულების u_t და u_x მაჟორანტს წარმოადგენს რიცხვითი მწკრივი $\dfrac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-2}$, ამიტომ ისინიც უწყვეტი ფუნქციებია. მეორე კერძო წარმოებულები წარმოიდგინებიან მწკრივის სახით:

$$u_{tt} = u_{xx} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\cos\pi(2k-1)t\sin\pi(2k-1)x\,, \qquad (17)$$

რომელსაც Π-ზე არ აქვს კრებადი რიცხვითი მაჟორანტული მწკრივი. (17) მწკრივი კრებადია წყვეტილი ფუნქციისაკენ. მართლაც, (17)-ში ჩავსვათ $t=0$ და მივიღებთ:

$$u_{tt}(0,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi(2k-1)x}{2k-1}\,.$$

გამოვიყენოთ ცნობილი დაშლა

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & 0<x<1, \\ 0, & x=0, x=1 \end{cases}$$

და მივიღებთ:

$$u_{tt}(0,x)=\begin{cases}2, & 0<x<1,\\ 0, & x=0, x=1.\end{cases}$$

ამ უკანასკნელიდან ჩანს, რომ $u_{tt}(0,x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას $[0,1]$ სეგმენტის ბოლოებში. (17) წარმოდგენიდან გამომდინარეობს, რომ $u_{tt}(t,x)$ პერიოდულია t-ს მიმართ პერიოდით 2, რის გამოც აქვს წყვეტის წერტილები $[0,1]$ სეგმენტის ბოლოებში ყოველი $t=2m$-სათვის, $m=0,1,2,\ldots$.

(16) ამონახსნის მოყვანილი თვისება შევადაროთ საწყის-სასაზღვრო ამოცანის კლასიკური ამონახსნის განმარტებას.

განმარტება. დავუშვათ, $[0,l]$ მონაკვეთზე მოცემულია უწყვეტი $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები. $u(t,x)$ ფუნქციას ეწოდება (1)-(3) *შერეული ამოცანის კლასიკური ამონახსნი,* თუ იგი არის სიმის რხევის განტოლების კლასიკური ამონახსნი $\Omega=\{t>0, 0<x<l\}$ არეზე. ე.ი. Ω-ზე აქვს პირველი და მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები და აკმაყოფილებს $u_{tt}=a^2u_{xx}$ განტოლებას. გარდა ამისა, განსაზღვრული და უწყვეტია Ω არის $\overline{\Omega}$ ჩაკეტვაზე თავის u_t კერძო წარმოებულთან ერთად და აკმაყოფილებს საწყის და სასაზღვრო (2)-(3) პირობებს.

დავუბრუნდეთ ახლა ჩვენს მაგალითს. ძნელი შესამოწმებელია, (17) მწკრივით წარმოდგენილი u_{tt} და u_{xx} ფუნქციები უწყვეტები არიან თუ არა $\Omega=\{t>0, 0<x<1\}$ არეზე. ჩვენ მხოლოდ ის შევამოწმეთ, რომ u_{tt} წყვეტას განიცდის მონაკვეთის ბოლოებში. ამიტომ ვილაპარაკებთ მხოლოდ განზოგადებულ ამონახსნზე. განვიხილავთ განზოგადებულ ამონახსნს, მიუხედავად იმისა, რომ საწყისი და სასაზღვრო პირობები სრულდება კლასიკური აზრით და $u(t,x)$ და $u_t(t,x)$ ფუნქციები უწყვეტები არიან ჩაკეტილ $\Pi=\{t\geq 0, 0\leq x\leq 1\}$ სიმრავლეზე.

ამოცანა 2. *ამოვხსნათ ბოლოებდამაგრებული სიმის რხევის (1) განტოლება, როდესაც* $0<x<l$, *შემდეგ საწყის და სასაზღვრო პირობებში:*

$$u|_{t=0}=\varphi(x)=A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)=0,$$

$$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0.$$

ამოხსნა: ეს ამოცანა შესაძლებელია ფურიეს მეთოდით ამოიხსნას. მაგრამ მის ამოსახსნელად დალამბერის ფორმულითაც შეგვიძლია ვისარგებლოთ. ჩვენ ამოცანის ამოხსნის ამ გზას ავირჩევთ. საჭიროა სიმის რხევის განტოლების ინტეგრება:

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) = 0$$

საწყის და

$$u\,|_{x=0} = 0\,, \ u\,|_{x=l} = 0$$

სასაზღვრო პირობებში. პირველ რიგში გავაგრძელოთ $\varphi(x)$ და $\psi(x)$, როგორც კენტი ფუნქციები $[-l,0]$ სეგმენტზე, ხოლო შემდეგ კი მთელ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე, როგორც პერიოდული ფუნქციები. შედეგად მივიღებთ:

$$\Phi(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \ \Psi(x) = 0\,, \ -\infty < x < \infty\,,$$

რომლებიც მოცემულ ფუნქციებს ემთხვევიან $[0,l]$-ზე. ჩავსვამთ რა $\Phi(x)$ და $\Psi(x)$ ფუნქციებს დალამბერის ფორმულაში, მივიღებთ სიმის რხევის განტოლების ამონახსნს:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}A\sin\left(\frac{\pi}{l}(x-at)\right) + A\sin\left(\frac{\pi}{l}(x+at)\right),$$

ანუ

$$u(x,t) = A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi a t}{l}\right).$$

ამოცანა 3. ამოვხსნათ ბოლოებდამაგრებული, ე.ი. $u(0,t) = u(l,t) = 0$, სიმის რხევის განტოლება $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ შემდეგი საწყისი პირობებით $u(x,0) = f(x) = sin^3 x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x) = 0$.

ამ პარაგრაფში ჩვენ მივიღეთ ამოცანის ამონახსნისათვის გამოსახულება (ფორმულა (10)):

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\right)\sin\frac{\pi n x}{l}\,.$$

$sin\frac{n\pi}{l}x,\ n = 1,2,\ldots.$ ბაზისში a_n კოეფიციენტები გამოითვლება დებულება 1-დან და მივიღებთ, რომ მხოლოდ ორი $- a_1$ და a_3 კოეფიციენტია 0-საგან განსხვავებული, ყველა სხვა კოეფიციენტი კი 0-ია. საბოლოოდ გვაქვს:

$$f(x) = sin^3x = \frac{3}{4}sinx - \frac{1}{4}sin3x.$$

(სასკოლო კურსის ტრიგონომეტრიიდან კარგად ცნობილი ფორმულა— გასამმაგებული კუთხის სინუსის გამოსახვა კუთხის სინუსის საშუალებით: $sin3x = 3sinx - 4sin^3x$).

ამრიგად, ამოცანის ამონახსნი იქნება ფუნქცია

$$u(x,t) = \frac{3}{4}sin\frac{\pi x}{l}cos\frac{a\pi}{l}t - \frac{1}{4}sin\frac{3\pi x}{l}cos\frac{3a\pi}{l}t.$$

როგორც ვხედავთ, მწკრივი ამ შემთხვევაში სასრული ჯამია.

16.5. მართკუთხა მემბრანის რხევა

მრავალი საინჟინრო ამოცანის ამოსახსნელად აუცილებელია ბრტყელი ერთგვაროვანი ნაკეთობის დინამიკის შესწავლა მასზე გარე ძალების მოქმედების დროს. ეს ნაკეთობები იდეალიზაციის შემდეგ შეგვიძლია წამოვიდგინოთ როგორც მემბრანები. *მემბრანის* ქვეშ ჩვენ ვგულისხმობთ დრეკად, თავისუფლად ღუნვად, გაჭიმულ აფსკს. დავუშვათ, წონასწორულ მდგომარეობაში მყოფი მემბრანა იკავებს xOy სიბრტყის D არეს, ხოლო წონასწორობიდან გამოყვანის შემდეგ, ვთქვათ, იგი იწყებს რხევას ისე, რომ მისი წერტილები მოძრაობენ xOy სიბრტყის პერპენდიკულარულად (მემბრანის განივი რხევა). xOy სიბრტყიდან მემბრანის წერტილების გადახრა აღვნიშნოთ u-თი. გადახრის სიდიდე დამოკიდებულია (x,y) წერტილზე და t დროზე. $u(x,y,t)$ ფუნქცია იქნება საძიებელი ფუნქცია. ფიქსირებული x,y-სათვის ის იძლევა მემბრანის (x,y) წერტილის რხევის კანონს. ამასთან, $\partial u/\partial t$ და $\partial^2 u/\partial t^2$ კერძო წარმოებულები აღწერენ მოძრავი წერტილის სიჩქარესა და აჩქარებას. თუ t-ს დავაფიქსირებთ, $u = u(x,y,t)$ ზედაპირი შეესაბამება მემბრანის ფორმას დროის t მომენტში და t ცვლილებასთან ერთად ეს ფორმაც შეიცვლება.

გაჭიმული სიმის რხევის განტოლების გამოყვანის დროს წარმოებული მსჯელობის ანალოგიური ანალიზით შესაძლებელია ვაჩვენოთ, რომ ზემოთ მოყვანილ პირობებში მემბრანის თავისუფალი რხევა აღიწერება ორგანზომილებიანი ტალღის განტოლებით:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\ \ (x,y)\in D,$$

რომელიც ხშირად უფრო კომპაქტური ფორმით შემდეგნაირად იწერება:

$$u_{tt}=a^2\Delta u\,,\ \ \Delta u=u_{xx}+u_{yy}\,. \qquad (1)$$

ამ განტოლებას ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვს. ერთი ამონახსნის გამოყოფის მიზნით საჭიროა დამატებითი პირობების მოთხოვნა. განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა. დავუშვათ, მემბრანის კიდეები დამაგრებულია. ეს შეესაბამება სასაზღვრო პირობას:

$$u\,|_S=0\,, \qquad (2)$$

სადაც S არის D არის საზღვარი. დავუშვათ, მემბრანის წერტილებისათვის მოცემულია საწყისი გადახრა და საწყისი სიჩქარე. ეს ნიშნავს, რომ მოცემულია:

$$u\,|_{t=0}=f(x,y)\,,\ \ u_t\,|_{t=0}=g(x,y) \qquad (3)$$

D არეზე განსაზღვრული ფუნქციები. (1)-(3) განტოლებათა სისტემას ეწოდება მემბრანის რხევის სასაზღვრო-საწყისი ან შერეული ამოცანა. დაწვრილებით განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მემბრანას წონასწორობის მდგომარეობაში აქვს მართკუთხედის ფორმა, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=0, x=l; y=0, y=m$ წრფეებით. ასეთი მემბრანის რხევის განტოლება დაწვრილებით ასე ჩაიწერება :

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})\,,\ \ (x,y)\in D\,, \qquad (4)$$

$$u\,|_{x=0}=0\,, u\,|_{x=l}=0\,,\ \ u\,|_{y=0}=0\,,\ \ u\,|_{y=m}=0\,, \qquad (5)$$

$$u\,|_{t=0}=f(x,y)\,,\ \ u_t\,|_{t=0}=g(x,y)\,. \qquad (6)$$

დასმული ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ ცვლადების განცალების მეთოდს. რადგან ცვლადების რაოდენობა სამია, ამიტომ ამონახსნს ვეძებთ სამი ფუნქციის ნამრავლის სახით:

$$u(t,x,y)=T(t)X(x)Y(y). \qquad (7)$$

(5) პირობების პირველი განტოლებიდან გამოდის, რომ $T(t)X(0)Y(y)=0$. რადგან ჩვენ არანულოვანი ამონახსნი გვაინტერესებს, ამიტომ $X(0)=0$ პირობის შესრულება უნდა მოვითხოვოთ. ანალოგიურ თვისებას მოვთხოვთ $X(x),Y(y)$ ფუნქციებსაც და მივიღებთ, რომ არატრივიალური ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელია:

$$X(0)=0, X(l)=0, Y(0)=0, Y(m)=0 \qquad (8)$$

ტოლობების შესრულება.

(4) განტოლებაში შევიტანოთ $u_{tt}=T^{//}XY$, $u_{xx}=TX^{//}Y$, $u_{yy}=TXY^{//}$ გამოსახულებები და მივიღებთ:

$$T^{//}XY=a^2TX^{//}Y+a^2TXY^{//},$$

რომლის a^2TXY-ზე გაყოფით გვექნება:

$$\frac{T^{//}(t)}{a^2T(t)}=\frac{X^{//}(x)}{X(x)}+\frac{Y^{//}(y)}{Y(y)}. \qquad (9)$$

(9) ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარე სხვადასხვა არგუმენტზე დამოკიდებული ფუნქციებია, რომელთა ტოლობა მხოლოდ იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი, როდესაც ისინი ერთმანეთის ტოლი მუდმივებია. ეს მუდმივი სიდიდე აღვნიშნოთ $-\mu^2$-ით. ამ აღნიშვნის შემდეგ (9) განტოლება შესაძლე-ბელია გადაიწეროს ორი განტოლების სახით:

$$T^{//}(t)+a^2\mu^2T(t)=0, \qquad (10)$$

$$\frac{X^{//}(x)}{X(x)}+\frac{Y^{//}(y)}{Y(y)}=-\mu^2. \qquad (11)$$

ანალოგიურად ზემოთ მოყვანილი არგუმენტისა, (11) განტოლების თითო-ეული შესაკრები მუდმივი უნდა იყოს. ეს მუდმივები აღვნიშნოთ $-\lambda^2$-ით და

$-\nu^2$-ით. ისინი უარყოფითი სიდიდეები უნდა იყვნენ, რადგან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, $X(x), Y(y)$ ფუნქციები (8) სასაზღვრო პირობას ვერ დააკმაყოფილებენ. ამრიგად:

$$\frac{X^{//}(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \quad \frac{Y^{//}(y)}{Y(y)} = -\nu^2. \qquad (12)$$

ამ განტოლებების გაერთმნიშვნელიანების შემდეგ, მივუწერთ რა შესაბამის განტოლებას სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ:

$$X^{//}(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \qquad (13)$$

$$Y^{//}(y) + \nu^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(m) = 0. \qquad (14)$$

როგორც წინა პარაგრაფებში დავადგინეთ, (13)-(14) შტურმ-ლიუვილის ამოცანას აქვს ამონახსნთა თვლადი რაოდენობა, რომლებიც მოიცემიან ფორმულებით:

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi k x}{l}, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k = 1,2,...,$$

$$Y_n(y) = \sin\frac{\pi n y}{m}, \quad \nu_n = \frac{\pi n}{m}, \quad n = 1,2,... \; .$$

(11) და (12) გამოსახულებების ერთდროული ანალიზით ვასკვნით, რომ $\mu^2 = \lambda^2 + \nu^2$. რადგან λ და ν რიცხვებისათვის მიიღება საკუთრივ რიცხვთა $\lambda_k = \pi k/l$ და $\nu_n = \pi n/m$ თვლადი რაოდენობები, ამიტომ μ_{kn}^2 რიცხვებისათვის გვაქვს:

$$\mu_{kn}^2 = \lambda_k^2 + \nu_n^2 = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{m}\right)^2, \quad k, n = 1,2,3,...$$

(10) დიფერენციალური განტოლება საჭიროა ამოიხსნას მხოლოდ ზემოთ ამოწერილი μ_{kn}^2 რიცხვებისათვის, ანუ, საჭიროა:

$$T^{//}(t) + a^2\mu_{kn}^2 T(t) = 0, \quad k, n = 1,2,3,...$$

განტოლებების თვლადი რაოდენობის ამონახსნების პოვნა. ეს განტოლება გადავწეროთ მისი ეკვივალენტური ფორმით:

$$T^{//}(t) + \omega_{kn}^2 T(t) = 0, \quad \omega_{kn}^2 = a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}\right),$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$T_{kn}(t) = a_{kn}\cos\omega_{kn}t + b_{kn}\sin\omega_{kn}t\,,\ \ k,n = 1,2,3,\ldots\ \ .$$

მიღებულ ω_{kn} რიცხვებს ეწოდებათ მემბრანის რხევის *საკუთრივი სიხშირეები.*

ამრიგად, მემბრანის რხევის განტოლება გარდავქმენით სამ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებად, ვიპოვეთ თითოეული მათგანის ამონახსნების თვლადი რაოდენობა $X_k(x), Y_n(x)$ და $T_{kn}(t)$. მემბრანის განტოლების ამონახსნის საპოვნელად, (7)-ის თანახმად, საჭიროა ამ ფუნქციების ნამრავლი განვიხილოთ:

$$u_{kn}(t,x,y) = (a_{kn}\cos\omega_{kn}t + b_{kn}\cos\omega_{kn}t)\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi ny}{m}, \qquad (15)$$

სადაც $k,n = 1,2,3,\ldots$. პირდაპირი ჩასმით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ u_{kn} ფუნქციები მართლაც აკმაყოფილებენ მართკუთხა მემბრანის რხევის განტოლებას.

ყოველივე ზემოთ თქმული შევაჯამოთ შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1. *მართკუთხა მემბრანის რხევის (4) განტოლებას აქვს (15) გამოსახულებით მოცემულ ამონახსნთა თვლადი რაოდენობა, რომელიც აკმაყოფილებს (5) სასაზღვრო პირობებს.*

სუპერპოზიციის პრინციპის თანახმად, (4) განტოლების ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ყველა კერძო ამონახსნის ჯამით, რომელიც შემდეგი ორმაგი ჯამია:

$$u(t,x,y) = \sum_{k-1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{kn}\cos\omega_{kn}t + b_{kn}\sin\omega_{kn}t)\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi ny}{m}. \qquad (16)$$

(16)-ს ეწოდება (4) განტოლების ამონახსნი ფურიეს ფორმით (5) სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, იმ დაშვებით, რომ (16) კრებადია, როგორც რიცხვითი მწკრივი ყოველი $t \ge 0$, $x \in [0,l]$ და $y \in [0,m]$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (16) ზოგადი ამონახსნიდან მიიღება ჩვენი ამოცანის კერძო ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ საწყის პირობებს. ზოგად ამონახსნში ჩავსვათ $t = 0$ და შედეგი გავუტოლოთ f-ს. (6) საწყისი პირობის თანახმად მივიღებთ:

$$\sum_{k-1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi ny}{m}=f(x,y)\,.$$

დავწეროთ მოცემული $f(x,y)$ ფუნქციის ფურიეს ორმაგ მწკრივად დაშლა სინუსების საშუალებით $[0,l]\times[0.m]$ მართკუთხედში:

$$\sum_{k-1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi ny}{m}=f(x,y)\,.$$

ბოლო ორი ტოლობის შედარებით მიიღება, რომ $a_{kn}=f_{kn}$. ფურიეს ორმაგი მწკრივის კოეფიციენტების გამოსათვლელი ფორმულა ასეთია:

$$f_{kn}=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m f(x,y)\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi ny}{m}dxdy\,. \tag{17}$$

გამოვთვალოთ (16) ზოგადი ამონახსნის კერძო წარმოებული t-ს მიმართ იმ დაშვებით, რომ შესაძლებელია მწკრივის წევრობრივი გაწარმოება. მივიღებთ:

$$u_t=\sum_{k-1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-a_{kn}\omega_{kn}\sin\omega_{kn}t+b_{kn}\omega_{kn}\cos\omega_{kn}t)\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi ny}{m}\,.$$

ამ გამოსახულებაში შევიტანოთ $t=0$ მნიშვნელობა და შედეგი, (6) საწყისი პირობის თანახმად, გავუტოლოთ $g(x,y)$-ს:

$$\sum_{k-1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{kn}\omega_{kn}\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi ny}{m}=g(x,y)\,.$$

აქედან, (17) ფორმულის ანალოგიურად მიიღება, რომ $b_{kn}\omega_{kn}=g_{kn}$, სადაც

$$g_{kn}=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m g(x,y)\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi ny}{m}dxdy\,. \tag{18}$$

დებულება 1. *იმისათვის, რომ ფურიეს მეთოდით ამოიხსნას (4)-(6) საწყისი-სასაზღვრო ამოცანა მემბრანის რხევის განტოლებისათვის, საჭიროა გამოითვალოს ფურიეს კოეფიციენტები მოცემული f და g ფუნქციებისათვის (17), (18) ფორმულებით; ნაპოვნი იქნეს $a_{kn}=f_{kn}$, $b_{kn}=g_{kn}/\omega_{kn}$ რიცხვები და შეტანილ იქნეს ზოგად (16) ამონახსნში.*

შევნიშნოთ, რომ მიღებული ორმაგი მწკრივის კრებადობისა და დიფერენცირებადობის საკითხი ყოველი კონკრეტული ამოცანისთვისაა შესასწავლი.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. დალამბერის ფორმულის გამოყენებით ამოხსენით კოშის ამოცანა:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial tx^2},\ -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty,\ u(x,0) = \cos x,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = e^{-x}.$$

პასუხი: $u(x,t) = \cos x \cos t + e^{-x}\, sht$

2. ამოხსენით შერეული ამოცანა:

$$u_{tt} = 9u_{xx};\ 0 < x < 4, t > 0;\ u_x(0,t) = 0, u(4,t) = 0;$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 16 - x^2.$$

პასუხი: $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{256(-1)^k}{3\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^4} \sin\frac{3(k+\frac{1}{2})\pi t}{4} \cos\frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{4}.$

პარაბოლური განტოლებები

17. სითბოგამტარებლობის განტოლება ღეროსათვის

17.1. უსასრულო ღეროში სითბოს გავრცელება

თუ სხეულის სიგრძე გაცილებით აღემატება მის სხვა ზომებს, მაშინ სხეულს *ღერო* ეწოდება და შეგვიძლია იგი Ox ღერძთან გავაიგივოთ.

სითბოგამტარებლობის:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \, , \;\; a^2 = \frac{k}{c\rho} \tag{1}$$

განტოლება ამ შემთხვევაში მიიღებს $u_t = a^2 u_{xx}$ სახეს და არის პარაბოლური ტიპის განტოლება. გავიხსენოთ, რომ სიმის რხევის $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ განტოლების შემთხვევაში ჩვენ ვიპოვეთ ზოგადი ამონახსნი. გარეგნულად მისი მსგავსი სითბოგამტარებლობის განტოლების ამონახსნის დაწერა ელემენტარული სახით შეუძლებელია. ანალოგიურ შემთხვევებში ჩვეულებრივ შემოისაზღვრებიან ხოლმე პარამეტრზე დამოკიდებული სპეციალური ამონახსნის ძიებით. მართლაც დავრწმუნდეთ, რომ ღეროს სითბოგამტარებლობის განტოლებას აკმაყოფილებს საკმაოდ სპეციფიკური ფუნქცია, რომელსაც *სითბოგამტარებლობის ერთგანზომილებიანი განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი* ეწოდება და მოიცემა გამოსახულებით:

$$G(t - t_0, x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 (t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \, , \;\; t > t_0 \, , \tag{2}$$

სადაც ξ და t_0 პარამეტრებია. გამოვთვალოთ (2)-ის კერძო წარმოებულები:

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{x - \xi}{2[a^2(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \, ,$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{-1}{2[a^2(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x - \xi)^2}{4[a^2(t - t_0)]^{\frac{5}{2}}} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \, ,$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{-a^2}{2[a^2(t-t_0)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2(x-\xi)^2}{4[a^2(t-t_0)]^{\frac{5}{2}}}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}.$$

აქედან ჩანს, რომ $G_t = a^2 G_{xx}$, რისი ჩვენებაც გვინდოდა.

თეორემა 1 (*სუპერპოზიციის პრინციპის ინტეგრალური ფორმა). ვთქვათ, მოცემულია ერთგვაროვანი განტოლება $u_t - a^2 u_{xx} = 0$, $t > 0$ და $x \in \mathbf{R}^1$ და მისი ამონახსნი $\xi \in \mathbf{R}^1$ პარამეტრზე დამოკიდებული $G(t,x,\xi)$ ფუნქციაა. ე.ი. ყოველი $\xi \in \mathbf{R}^1$ ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის სრულდება ტოლობა $G_t - a^2 G_{xx} = 0$. დავუშვათ, $f(\xi)$ ცნობილი და უწყვეტი ფუნქციაა. განვიხილოთ შემდეგი არასაკუთრივი ინტეგრალი:*

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,x,\xi) f(\xi) d\xi \tag{3}$$

და დავუშვათ, რომ იგი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია t, x ცვლადების მიმართ ყოველ ჩაკეტილ $t \ge t_1 > 0, x \in \mathbf{R}^1$ სიმრავლეზე თავის u_t, u_x, u_{xx} კერძო წარმოებულებთან ერთად.

მაშინ $u(t,x)$ ფუნქცია, წარმოდგენილი (3) ინტეგრალური ფორმით, აგრეთვე არის $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ განტოლების ამონახსნი.

მართლაც, (3) ინტეგრალი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია. აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია აგრეთვე ანალოგიური ინტეგრალები u_t, u_x, u_{xx} ფუნქციებისათვის, რის გამოც ეს წარმოებულები შეგვიძლია ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შევიტანოთ და გამოვთვალოთ ინტეგრალი. ამრიგად, სამართლიანია ტოლობა:

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} (G_t - a^2 G_{xx}) f(\xi) d\xi \equiv 0,$$

რადგან $G_t - a^2 G_{xx} \equiv 0$. ამით დამტკიცება დამთავრებულია.

გამოვიყენოთ ეს თეორემა (2) ფორმულით განსაზღვრული $G(t,x,\xi)$ ფუნქციისათვის. უფრო ზუსტად, შემოვიტანოთ ფუნქცია:

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} f(\xi) d\xi, \tag{4}$$

რომელსაც *პუასონის ინტეგრალი* ეწოდება. დავუშვათ, (4) გამოსახულებაში $f(\xi)$ ფუნქცია უწყვეტი და შემოსაზღვრულია ნებისმიერი ξ-სათვის $\mathbf{R}$-დან: $|f(\xi)| \le M$. განვიხილოთ პუასონის ინტეგრალისათვის $t>0$, $x\in\mathbf{R}$ ცვლადების შემდეგი გარდაქმნა:

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = y\,,\ \ \xi = x + 2a\sqrt{t}\,y\,,\ \ d\xi = 2a\sqrt{t}dy\,,\ \ y\in(-\infty,\infty)\,,$$

მაშინ (4) ინტეგრალი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(x+2a\sqrt{t}\,y)dy\,,$$

რომელიც უწყვეტი ფუნქციაა $t\ge 0, x\in\mathbf{R}$ არეზე. დავუშვათ $t=0$, მაშინ

$$u(0,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dyf(x) = f(x)\,.$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ტოლობა $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$. ზემოთ თქმული შევაჯამოთ შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2. *დავუშვათ,* $f(x)$ *უწყვეტი და შემოსაზღვრულია* $\mathbf{R}$*-ზე, მაშინ პუასონის (4) ინტეგრალი არის უწყვეტი* $u(x,y)$ *ფუნქცია* $t\ge 0$, $x\in\mathbf{R}$ *არეში და ივი აკმაყოფილებს* $u_t - a^2u_{xx} = 0$ *განტოლებას ამ არეზე. გარდა ამისა, როდესაც* $t=0$, *სამართლიანია ტოლობა* $u(0,x) = f(x)$. *სხვა სიტყვებით,* $u(x,y)$ *არის:*

$$u_t = a^2u_{xx}\ \ (t\ge 0,\ x\in\mathbf{R}),\ \ u(0,x) = f(x)\ \ (x\in\mathbf{R})$$

კოშის ამოცანის კლასიკური ამონახსნი.

17.2. სასრული სიგრძის ღეროში სითბოს გავრცელება

თუ ღეროს სიგრძე დიდი არ არის, მაშინ სითბოს გავრცელების დროს მისი ბოლოების გავლენა სითბოს გავრცელებაზე მხედველობაში უნდა მივიღოთ. ამისათვის კი საჭიროა ტემპერატურის ცვლილების კანონი იქნეს მოცემული ბოლოებში. მოვათავსოთ ღერო Ox ღერძის $[0,l]$ მონაკვეთზე და

დავუშვათ, რომ ღეროს ბოლოებში ნულოვანი ტემპერატურაა. მათემატიკური ამოცანა მაშინ შემდეგი სახით დაისმება:

$$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ \ t > 0{,}0 < x < l\,,\ \ u\,|_{x=0} = 0\,,\ \ u\,|_{x=l} = 0 \qquad (1)$$

$$u\,|_{t=0} = f(x)\quad 0 \le x \le l\,. \qquad (2)$$

ამ განტოლებათა სისტემისათვის გამოვიყენოთ ფურიეს მეთოდი. ეს კი ნიშნავს, რომ ამონახსნი იძებნება ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით, რომელთაგან თითოეული დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ ცვლადზე: $u(t,x) = T(t)X(x)$. ჩავსვათ ეს ნამრავლი სითბოგამტარებლობის (1) განტოლებაში და მივიღებთ ტოლობას: $T^{/}(t)X(x) = a^2 T(t)X^{//}(x)$, რომლის $a^2T(t)X(x)$-ზე გაყოფის შემდეგ გვექნება:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T^{/}}{T(t)} = \frac{X^{//}(x)}{X(x)}\,. \qquad (3)$$

(3) ტოლობის მარცხენა მხარე დამოკიდებულია მხოლოდ t ცვლადზე, ხოლო მარჯვენა მხარე კი $-x$-ზე. ცვლადები დამოუკიდებლები არიან, ამიტომ ორ სხვადასხვა ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციების ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი დამოკიდებულები არ არიან თავიანთ არგუმენტებზე, ე.ი. როდესაც მუდმივები არიან. ეს მუდმივი აღვნიშნოთ λ^2 -ით. (3) ტოლობიდან ვიღებთ ორ მუდმივკოეფიციენტებიან ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$X^{//}(x) + \lambda^2 X(x) = 0\,,\ \ T^{/}(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0\,. \qquad (4)$$

პირველი განტოლებისათვის მახასიათებელი ფესვებია $k = \pm i\lambda$, საიდანაც მისთვის ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x\,. \qquad (5)$$

ამ ამონახსნმა უნდა დააკმაყოფილოს სასაზღვრო პირობები: $u\,|_{x=0} = u\,|_{x=l} = 0$ ანუ $T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0$. თუ $T(t)$-ს 0-საგან იგივურად განსხვავებულად ჩავთვლით, მაშინ მივალთ $X(0) = 0$ და $X(l) = 0$ განტოლებათა სისტემამდე, ამასთან, (5) ტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$C_1 = 0\,,\ \ C_1\cos\lambda l + C_2 \sin\lambda l = 0\,,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $C_2 \sin \lambda l = 0$. თუ დავუშვებთ, რომ $C_2 = 0$, მაშინ მივიღებთ $X(x) \equiv 0$, რაც ჩვენი ამოცანიდან გამომდინარე შეუძლებელია, ამიტომ დავუშვათ, რომ $\sin \lambda l = 0$ და მივიღებთ ტოლობათა თვლად რაოდენობას $\lambda l = \pi n$, $n = 1,2,\ldots$, საიდანაც $\lambda_n = \pi n / l$. λ_n-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება $X_n = \sin \pi n x / l$, $n = 1,2,\ldots$ (4)-ის პირველი განტოლების ამონახსნი. ახლა მეორე განტოლება განვიხილოთ. მისი მახასიათებელი განტოლება უკვე ნაპოვნი $\lambda = \lambda_n$-ის გათვალისწინებით ასეთია: $k + a^2 \lambda_n^2 = 0$, საიდანაც $k = -a^2 \lambda_n^2$ და ზოგადი ამონახსნი იქნება: $T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}$.

შევაჯამოთ შუალედური შედეგები. სითბოგამტარებლობის განტოლება დავიყვანეთ ორ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე ცვლადების განცალების საშუალებით, ამოვხსენით თითოეული დიფერენციალური განტოლება. ამის შემდეგ უკვე შესაძლებელია სითბოგამტარებლობის განტოლების კერძო ამონახსნების პოვნა:

$$u_n(t,x) = C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}, \ \ \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \ \ n = 1,2,\ldots . \tag{6}$$

(6) გამოსახულების უშუალო ჩასმით (1) განტოლებაში მოწმდება, რომ (6) მართლაც არის გამოსავალი განტოლების ამონახსნი. ახლა ყოველივე ზემოთ თქმული შევაჯამოთ შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1. *(1) სასაზღვრო ამოცანას აქვს ამონახსნთა თვლადი რაოდენობა, რომელიც მოიცემა განცალებად ცვლადებში (6) ტოლობით და ყოველი მათგანი დამოკიდებულია თავის* C_n, $n = 1,2,\ldots$ *მუდმივებზე.*

შეგახსენებთ, რომ ფურიეს იდეაა (1)-(2) ამოცანის ამონახსნი მოიძებნოს:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} \tag{7}$$

ფუნქციონალური მწკრივის საშუალებით. თუ (7) კრებადია როგორც რიცხვითი მწკრივი ყოველი $x \in [0,l]$ და $t \geq 0$-სათვის, მაშინ მას ეწოდება (1) ამოცანის ფურიეს ფორმით მოცემული ზოგადი ამონახსნი. (1)-(2) შერეული ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა (2) საწყისი პირობის დაკმაყოფილება, რისთვისაც (7) ზოგადი ამონახსნის ჩასმაა საჭირო (2) საწყის პირობაში. შედეგად მიიღება ტოლობა:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = f(x), \ \ 0 \leq x \leq l, \tag{8}$$

რომელიც წარმოადგენს მოცემული $f(x)$ ფუნქციის დაშლას $[0,l]$ ინტერვალზე ფურიეს მწკრივად სინუსის საშუალებით. C_n რიცხვების პოვნა ხდება:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\ ,\ \ n = 1,2,... \tag{9}$$

ფორმულის საშუალებით.

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღეთ:

დებულება 1. *იმისათვის, რომ ამოვხსნათ (1)-(2) შერეული ამოცანა ღეროში სითბოს გავრცელების განტოლებისათვის ფურიეს მეთოდით, საჭიროა გამოვთვალოთ $[0,l]$ ინტერვალზე ფურიეს კოეფიციენტები მოცემული $f(x)$ ფუნქციისათვის (9) ფორმულით და შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (7) ზოგად ამონახსნში.*

ამოცანა 1. ვიპოვოთ სითბოგამტარებლობის განტოლებისათვის შემდეგი შერეული ამოცანის ამონახსნი:

$$u_t = 16u_{xx}, t > 0, 0 < x < 4, u|_{x=0} = u|_{x=4} = 0 \tag{10}$$

$$u\,|_{t=0} = \begin{cases} x^2/2, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 < x \le 4. \end{cases} \tag{11}$$

ამოხსნა: შევადაროთ ჩვენი ამოცანა (1)-(2) ამოცანას. ვხედავთ, რომ (2) საწყისი პირობით მოცებულ $f(x)$ ფუნქციას აქვს (11) სახე. იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ (9) ფორმულით, მოცემული ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტების გამოსათვლელად, საჭიროა ინტეგრალი $[0,4]$ მონაკვეთზე გავყოთ ორ – $[0,2]$ და $[2,4]$ – მონაკვეთზე განსაზღვრული ინტეგრალების ჯამად:

$$C_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 \frac{x^2}{2}\sin\frac{\pi nx}{4}dx + \int_2^4 (4-x)\sin\frac{\pi nx}{4}dx\right).$$

თითოეული შესაკრების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_0^2 \frac{x^2}{2}\sin\frac{\pi nx}{4}dx = -2\left(\frac{4}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n}{2} + 2\left(\frac{4}{\pi n}\right)^2\sin\frac{\pi n}{2} + \left(\frac{4}{\pi n}\right)^3\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right),$$

$$\int_0^2 (4-x)\sin\frac{\pi nx}{4}dx = 2\left(\frac{4}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n}{2} + \left(\frac{4}{\pi n}\right)^2\sin\frac{\pi n}{2}\,,$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$C_n = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\right)^2 \sin\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\right)^2\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right), \ \ n = 1,2,\dots. \qquad (12)$$

ჩავსვათ გამოთვლილი კოეფიციენტები ზოგადი ამონახსნის (7) გამოსახულებაში და მივიღებთ (10)-(11) ამოცანის ამონახსნს:

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(3\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right)\right)e^{-\pi^2 n^2 t}\sin\frac{\pi n x}{4}. \qquad (13)$$

(13)-ის მაჟორანტული მწკრივია $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. ამის გამო, (13) ფუნქციონალური მწკრივი თანაბრად კრებადია $0 \le x \le l, t \ge 0$ ჩაკეტილ არეზე და იქ განსაზღვრავს ორი ცვლადის უწყვეტ ფუნქციას. როდესაც $t > 0$, (13) მწკრივის წევრები, აგრეთვე იმ მწკრივების წევრები, რომლებიც მიიღებიან მისგან t და x ცვლადებით გაწარმოებით, იძენენ სწრაფად ქრობად $e^{-\pi^2 n^2 t}$ მამრავლს, რის გამოც (13) მწკრივი განსაზღვრავს ორი ცვლადის უსასრულოდ დიფერენცირებად ფუნქციას. როდესაც $t = 0$, (13)-დან მიიღება $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \pi n x/4$, რომელიც (11) ფორმულით განსაზღვრულ ფუნქციას ემთხვევა, რადგან მის ფურიეს მწკრივს წარმოადგენს.

ამრიგად, (13) მწკრივი არის $t > 0$, $0 < x < l$ ღია არეზე უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქცია და აკმაყოფილებს სითბოგამტარებლობის (10) განტოლებას. ჩაკეტილ $t \ge 0$, $0 \le x \le l$ არეზე (13) განსაზღვრავს უწყვეტ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს (10) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს და (11) საწყის პირობას. ზემოთქმული ნიშნავს, რომ (13) მწკრივით წარმოდგენილი $u(t,x)$ ფუნქცია არის (10)-(11) ამოცანის კლასიკური ამონახსნი. ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ, თუ $t > 0$, მაშინ (13) მწკრივი ძალზე სწრაფად იკრიბება და მრავალ ამოცანაში შესაძლებელია დავკმაყოფილდეთ:

$$u(t,x) \approx \frac{8}{\pi^2}\left(\left(3 - \frac{4}{\pi}\right)e^{-\pi^2 t}\sin\frac{\pi x}{4} - \frac{1}{\pi}e^{-4\pi^2 t}\sin\frac{\pi x}{2}\right), \ \ t > 0$$

მიახლოებით.

დებულება 1 გვიჩვენებს, რომ სასრული ღეროსათვის შერეული ამოცანის ამონახსნი არის არცთუ ისე მარტივი მათემატიკური ობიექტი – (7) ფუნქციონალური მწკრივი. პირველ რიგში აუცილებელია მიღებული მწკრივის

კრებადობა შევისწავლოთ, რაც საკმაოდ რთულ მათემატიკურ აპარატს და სპეციფიკურ ჩვევებს მოითხოვს. პრაქტიკაში ხშირად უფრო მარტივ ფორმულებს იყენებენ. ეს დასაშვებია მაშინ, როდესაც მიღებული თეორიული დასკვნები ექსპერიმენტულ მონაცემებს ემთხვევა.

ამოცანა 2. განვიხილოთ $u_0 > 0$ ტემპერატურამდე თანაბრად გაცხელებული l სიგრძის ღეროს გაცივება, იმ პირობით, რომ მის საზღვარზე 0-ოვანი ტემპერატურა გვაქვს. მათემატიკურად ამოცანა ყალიბდება:

$$u_t = a^2 u_{xx}\,,\ \ u\,|_{x=0} = 0\,,\ \ u\,|_{x=l} = 0\,,\ \ u\,|_{t=0} = u_0 = const$$

განტოლებისა და სასაზღვრო პირობების სახით.

ამოხსნა: ამოცანა 1-ის ანალოგიურად, (1)-(2) ამოცანასთან ჩვენი ამოცანის შედარებით ვღებულობთ, რომ $f(x) \equiv u_0$. ამ ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად $[0,l]$ მონაკვეთზე სინუსების საშუალებით კარგად არის ცნობილი და მას აქვს ასეთი სახე:

$$u_0 = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\,,$$

ხოლო ამოცანის ამონახსნი კი მოიცემა მწკრივით:

$$u(t,x) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\,,\ \ \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{l}\,,$$

რომელიც პირობითად კრებადია. გამოყენებაში საჭიროა მხოლოდ t-ს დიდი მნიშვნელობები, ამიტომ საკმარისია შევინარჩუნოთ მხოლოდ ერთი შესაკრები. ასეთ პირობებში ამბობენ, რომ დამყარდა რეგულარული რეჟიმი. იგი განისაზღვრება ფორმულით:

$$u(t,x) \approx \frac{4u_0}{\pi}e^{-a^2\pi^2 l^{-2} t}\sin\frac{\pi x}{l}\,.$$

ამოცანა 3. დავწეროთ სითბოგამტარებლობის განტოლება ცილინდრისათვის.

ამოხსნა: მოცემულია V ცილინდრი h სიმაღლით და ფუძის რადიუსით r_0. ჩავთვალოთ, რომ ცილინდრის ღერძი მიმართულია Oz ღერძის გასწვრივ და მისი ფუძე მდებარეობს xOy სიბრტყეზე. ასეთ პირობებში სითბოგამტარებლობის განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$u_t = a^2 \Delta u,\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \tag{1}$$

$$0 \le r < r_0,\ 0 < z < h,\ t > 0.$$

შემოვიტანოთ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\cos\varphi,\ z = z.$$

გვექნება ტოლობა:

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$$

და (1) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$u_t = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}\right). \tag{2}$$

ამრიგად, საძიებელი $u(t,x,y,z)$ არის ოთხი ცვლადის ფუნქცია და, მაშასადამე, (2) არის *სამგანზომილებიანი სითბოგამტარებლობის განტოლება ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში.*

ვთქვათ, ვეძებთ რადიალურად სიმეტრიულ ამონახსნს, ე.ი. ისეთ ამონახსნს, რომელიც დამოკიდებული არ არის φ-ზე. მაშინ $u_{\varphi\varphi} \equiv 0$ და, ამრიგად, (2) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$u_t = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz}\right), \tag{3}$$

$$0 \le r < r_0,\ 0 < z < h,\ t > 0.$$

ამოვხსნათ (3) განტოლება ცვლადთა განცალების მეთოდით.

ვთქვათ:

$$u(t,r,z) = T(t)v(r,z).$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (3)-ში და მოვახდინოთ განტოლების გარდაქმნა უკვე ცნობილი მეთოდით:

$$T'v = a^2\left(v_{rr} + \frac{1}{r}Tv + Tu_{zz}\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + v_{zz}}{v}.$$

ამის შემდეგ ორივე მხარე გავუტოლოთ $-\lambda^2$ და მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$T'(t) + a^2T(t) + \lambda^2 = 0, \tag{4}$$

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + v_{zz} + \lambda^2 v = 0. \tag{5}$$

(5)-ის მიმართ კვლავ იგივე მეთოდი გამოვიყენოთ. დავუშვათ, $v(r,z)=R(r)Z(z)$. (5) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$R''(r)Z(z)+\frac{1}{r}R'(r)Z(z)+R(r)Z''(z)+\lambda^2R(r)Z(z)=0.$$

უკანასკნელი ტოლობის ყველა წევრი გავყოთ $R(r)Z(z)$-ზე. ცვლადთა განცალების შემდეგ ორივე მხარე გავუტოლოთ $-\tau^2$ და გადავწეროთ ჩვენ-თვის ხელსაყრელი სახით:

$$\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)}=-\tau^2\Rightarrow R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\tau^2R(r)=0, \qquad (6)$$

$$-\frac{Z''(z)}{Z(z)}-\lambda^2=-\tau^2\Rightarrow Z''(z)+(\lambda^2-\tau^2)Z(z)=0, \qquad (7)$$

ამრიგად, მიღებული (4), (6), (7) განტოლებები პარამეტრზე დამოკიდე-ბული წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებია. λ და τ გა-ნისაზღვრებიან შესაბამისი შტურმ-ლიუვილის ამოცანიდან (რომელიც, თავის მხრივ, განტოლების საწყისი და სასაზღვრო პირობებიდან მიიღება). (4) და (7) განტოლებები მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დი-ფერენციალური განტოლებებია და მათი ზოგადი ამონახსნი ადვილად იწე-რება. (6) კი ბესელის განტოლებაა, რომლის ზოგადი ამონახსნია:

$$R(r)=c_1J(0,\tau r)+c_2Y(0,\tau r)$$

ფუნქცია, სადაც $J(0,\tau r)$ და $Y(0,\tau r)$, შესაბამისად, ბესელის პირველი და მეორე გვარის ფუნქციებია, ხოლო τ კი – პარამეტრია.

ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. იპოვეთ კოშის ამოცანის ამონახსნი:

   1) $4\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ u|_{t=0}=e^{2x-x^2}$.

   პასუხი: $u(t,x)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{2x-x^2+t}{1+t}}$.

   2) $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ u|_{t=0}=xe^{-x^2}$.

   პასუხი: $u(t,x)=x(1+4t)^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{x^2}{1+4t}}$.

3) $4\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ u|_{t=0}=\sin x\, e^{x^2}.$

პასუხი: $u(t,x)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{1+t}e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}}.$

2. ამოხსენით შერეული ამოცანა:

1) $\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0<x<5, t>0;\ u(0,t)=u(5,t)=0;\ u(x,t)=1.$

პასუხი: $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)e^{-\left(\frac{3k\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{5}$

2) $\frac{\partial u}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0<x<3, t>0;\ u_x(3,t)=0;\ u(x,0)=x.$

პასუხი: $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{6(-1)^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}e^{-\frac{4\pi^2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{9}t}\sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{3}.$

3. კოშის ამოცანის ამონახსნი ერთგანზომილებიანი სითბოგამტარებლობის არაერთგვაროვნი განტოლებისათვის:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x), u|_{t=0}=u_0(x),$$

სადაც f და u_0 მოცემული ფუნქციებია, მოიცემა ფორმულით:

$$u(t,x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

ამ ფორმულის გამოყენებით ამოხსენით კოშის შემდეგი ამოცანები:

1) $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=4\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+t+e^t,\ u|_{t=0}=2.$

პასუხი: $u(t,x)=1+e^t+\frac{t^2}{2}.$

2) $\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+3t^2,\ u|_{t=0}=\sin x.$

პასუხი: $u(t,x)=t^3+e^{-t}\sin x.$

18. ელიფსური განტოლებები

18.1. ლაპლასის განტოლება

სხეულში სითბოს გავრცელებას ეწოდება *სტაციონარული*, თუ სხეულის ყოველ წერტილში ტემპერატურა დამოკიდებული არ არის t დროზე. ამ შემთხვევაში $u_t = 0$ და სითბოგამტარებლობის $u_t = \Delta u$ განტოლება გადადის $\Delta u = 0$ ლაპლასის განტოლებაში. ლაპლასის განტოლების ამონახსნს *ჰარმონიული ფუნქცია ეწოდება.* $\Delta u = 0$ განტოლება დროს არ შეიცავს, ამიტომ მისთვის საწყისი პირობა არ მოიცემა. თუ V სხეულის σ საზღვარზე მუდმივი f ტემპერატურაა შენარჩუნებული, მაშინ სხეულის შიგა ნაწილში მყარდება გარკვეული ტემპერატურული წონასწორობა. შესაბამის მათემატიკურ ამოცანას *დირიხლეს*, ანუ *პირველი სასაზღვრო ამოცანა* ეწოდება და აქვს ასეთი სახე: $\Delta u = 0$; $u|_\sigma = f$. თუ სხეულის ზედაპირზე ტემპერატურა ცნობილი არ არის, მაგრამ მოცემულია სითბოს ნაკადი სხეულის ზედაპირის ყოველ წერტილში, რომელიც ნორმალის გასწვრივ წარმოებულის პროპორციულია, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია *მეორე სასაზღვრო*, ანუ *ნეიმანის* ამოცანა: $\Delta u = 0$, $\partial u/\partial n|_\sigma = g$.

ლაპლასის განტოლება ერთ-ერთი ცენტრალური განტოლებაა, რის გამოც უნდა დავიწყოთ ზოგადი შემთხვევით. n-განზომილებიან ლაპლასის განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

სადაც საძიებელი u ფუნქცია n დამოუკიდებელ ცვლადზეა დამოკიდებული. ამ განტოლებას მრავალი ამონახსნი აქვს. მაგალითად, როდესაც $n = 2$ და f კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციაა $f_1(x, y)$ და $f_2(x, y)$ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებით, მაშინ ორივე აკმაყოფილებს ორგანზომილებიან ლაპლასის განტოლებას. ამრიგად, თუ რაიმე შეზღუდვას არ დავადებთ განტოლების საძიებელ ამონახსნს, ვიღებთ ფუნქციათა საკმაოდ ფართო კლასს. როგორც აღვნიშნეთ, ამონახსნთა ამ კლასისათვის სპეციალური სახელიც კი არსებობს და მათ ჰარმონიული ფუნქციები ეწოდებათ. დირიხლესა და ნეიმანის ზემოთ მოყვანილი პირობები ჰარმონიულ ფუნქციათა კლასიდან გამოყოფენ ერთ კონკრეტულ ჰარმონიულ ფუნქციას. განვიხილოთ ასეთი ამოცანა:

ამოცანა. ვიპოვოთ ლაპლასის განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც დამოკიდებულია არგუმენტის: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ სიგრძეზე და დამოკიდებული არ არის $x_1, x_2, \dots, x_n$ კოორდინატებზე. ანუ, გვაინტერესებს ისეთი ჰარმონიული ფუნქციის პოვნა, რომელიც ნებისმიერ r-რადიუსიან სფეროზე მუდმივ მნიშვნელობას იღებს და ეს მნიშვნელობა იცვლება r-ის ცვლილებასთან ერთად.

ამრიგად, საძიებელი ფუნქცია ერთ r ცვლადზეა დამოკიდებული: $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(r)$. ვიპოვოთ $f(r)$-ის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x_j} = \frac{df(r)}{dr}\frac{dr}{dx_j} = \frac{df(r)}{dr}\frac{x_j}{r} \Rightarrow \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_j^2} = \frac{d^2 f(r)}{dr^2}\frac{x_j^2}{r^2} + \frac{df(r)}{rdr} - \frac{x_j^2 df(r)}{r^3 dr}.$$

შედეგი ჩავსვათ ლაპლასის განტოლებაში:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \left[\frac{d^2 f(r)}{r^2 dr^2} - \frac{df(r)}{r^3 dr}\right] + n\frac{df(r)}{rdr} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df(r)}{dr} = 0.$$

მივიღეთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნა და ამონახსნთა ყოფაქცევა ჩვენთვის ცნობილია:

$$f(r) = c_1 + c_2 lnr, \text{ როდესაც } n = 2$$

და

$$f(r) = c_1 + c_2 r^{2-n}, \text{ როდესაც } n > 2.$$

მაშასადამე, მივიღეთ, რომ:

$$u(x_1, x_2) = c_1 + c_2 ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

და

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 + c_2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1-\frac{n}{2}},$$

ნებისმიერი $n > 2$-სათვის, სადაც c_1, c_2 ნებისმიერი კონსტანტებია.

ძირითადად, ჩვენი განხილვის საგანი იქნება ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანები ლაპლასის განტოლებისათვის. ამ შემთხვევაში კი მოსახერხებელია არა დეკარტულ, არამედ პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში მუშაობა, რის გამოც პირველ რიგში გადავწეროთ ორგანზომილებიანი ლაპლასის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში.

ეს ნიშნავს, რომ მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $(x,y) \to (r,\varphi)$ ფორმულით $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. მაშინ $r=\sqrt{x^2+y^2}, \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, საიდანაც:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\varphi,\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=-\frac{\sin\varphi}{r},\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\cos\varphi}{r}.$$

ორი ცვლადის რთული ფუნქციის გაწარმოება ახალ კოორდინატებში მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

ამგვარად:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}.$$

მეორე რიგის დიფერენციალის გამოსათვლელად კიდევ ერთხელ გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი, გვექნება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

გამოვთვალოთ: $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ და $\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\phi-\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\sin\phi}{r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{\sin\varphi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin\varphi}{r}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r},$$

ამის შემდეგ პირველი ტოლობა გავამრავლოთ $\frac{\partial r}{\partial x} = cos\varphi$, ხოლო მეორე კი $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = sin\varphi$-ზე, შევკრიბოთ შედეგები და შევაერთოთ მსგავსი წევრები, მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r}\frac{sin\varphi cos\varphi}{r} +$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{sin\varphi cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{sin^2\varphi}{r^2}. \qquad (1)$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi}\frac{sin\varphi cos\varphi}{r} -$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{cos^2\varphi}{r^2}. \qquad (2)$$

შევკრიბოთ (1) და (2) ტოლობები და მივიღებთ ლაპლასის განტოლებას პოლარულ კოორდინატებში:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

შენიშვნა: უკანასკნელ განტოლებას ზოგჯერ (თვითშეუღლებული ფორმა)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

სახითაც წერენ.

18.2. არაკორექტული ამოცანები. ადამარის მაგალითი

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ანალოგიურად, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში განიხილება ამოცანის (დიფერენციალური განტოლება საწყის ან სასაზღვრო (ან ორივე ერთად) პირობებთან ერთად) კორექტულობის საკითხი. გავიხსენოთ, რომ ამოცანა კორექტულია, თუ მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ფუნქციათა გარკვეულ კლასში და ეს ამონახსნი უწყვეტადაა დამოკიდებული საწყის, სასაზღვრო პირობებზე და კოეფიციენტებზე (ამოცანის შესაბამისად). ვაჩვენეთ, რომ კოშის ამოცანას სიმის რხევის განტოლებისათვის აქვს ერთადერთი ამონახ-

სნი. მტკიცდება, რომ ამონახსნი უწყვეტადაა დამოკიდებული საწყის პირობებზე და, ამრიგად, კოშის ამოცანა კორექტულია სიმის რხევის განტოლებისათვის.

ახლა განვიხილოთ კოშის ამოცანა ლაპლასის განტოლებისათვის:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > 0, -\infty < x < +\infty,$$

$$u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{1}{n} sinnx, \tag{1}$$

სადაც n ნატურალური რიცხვია.

ამ ამოცანის ამონახსნია:

$$u(x,t) = \frac{1}{n^2} sh\, nt \sin nx. \tag{2}$$

რადგან

$$\left|\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right| = \left|\frac{1}{n}\sin nx\right| \leq \frac{1}{n},$$

ამიტომ საკმაოდ დიდი n-სათვის $u_t(x,0)$-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა რაგინდ მცირეა ნებისმიერი x-სათვის. მეორე მხრივ, (1) ამოცანის (2) ამონახსნის აბსოლუტური მნიშვნელობა რაგინდ დიდია ნებისმიერი საკმაოდ პატარა t-სათვის, როდესაც n საკმაოდ დიდია. ვთქვათ, ვიპოვეთ ზემოთ მოყვანილი ლაპლასის განტოლების $u_0(x,t)$ ამონახსნი შემდეგი კოშის ამოცანისათვის:

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1,$$

მაშინ იმავე განტოლების ამონახსნი:

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1 + \frac{1}{n} sinnx,$$

საწყისი პირობების შემთხვევაში იქნება:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{n^2} sh\, nt \cdot \sin nt$$

ფუნქცია, რომელიც საწყისი პირობების მცირე ცვლილების შემთხვევაში რაგინდ დიდ მნიშვნელობას იღებს $t = 0$ წრფის მახლობლობაში.

მაშასადამე, კოშის ამოცანა ლაპლასის განტოლებისათვის არ არის კორექტული.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითი, რომლითაც ვაჩვენეთ ლაპლასის განტოლებისათვის კოშის ამოცანის არაკორექტულობა, ეკუთვნის ფრანგ მათემატიკოს ჟ. ადამარს.

ადამარის მაგალითი არაა ერთადერთი არაკორექტული ამოცანა. არაკორექტულია აგრეთვე სასაზღვრო ამოცანა $u_{xy} = 0$ ჰიპერბოლური განტოლებისათვის, რომლის თანახმად, საძიებელია ამ განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც მართკუთხედის გვერდებზე მოცემულ (ოთხ) ფუნქციებს ემთხვევა. მოცემული განტოლების ამონახსნია: $u(x, y) = f(x) + g(y)$, სადაც f, g ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციებია. $u_y = g'(y)$ და $u_x = f'(x)$ ფუნქციებმა, შესაბამისად, მართკუთხედის $x = const$ და $y = const$ საპირისპირო გვერდებზე უნდა მიიღონ ტოლი მნიშვნელობები, რაც იმას ნიშნავს, რომ მართკუთხედის გვერდებზე ნებისმიერად მოცემული სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში ამოცანას ამონახსნი ვერ ექნება. ე.ი., ასეთი სახით დასმული სასაზღვრო ამოცანა ჰიპერბოლური განტოლებისათვის კორექტული არ არის. ამოცანას ამონახსნი ექნება იმ შემთხვევაში, თუ სასაზღვრო პირობებს დავადებთ საძიებელ ფუნქციას მართკუთხედის მხოლოდ ორ მეზობელ გვერდზე.

18.3. ლაპლასის განტოლება რგოლისთვის

გამოყენების თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია სიბრტყეზე:

$$\Delta u = 0 \quad \text{ანუ} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

ლაპლასის განტოლება, რომლის ამონახსნებს ჰარმონიული ფუნქციები ეწოდება.

განვიხილოთ რგოლის მსგავსი K არე სიბრტყეზე, რომელიც, ვთქვათ, შემოსაზღვრულია R_1 და R_2 რადიუსის მქონე წრეწირებით, რომელთა ცენტრები კოორდინატთა სათავეშია. ვიგულისხმოთ, რომ $R_1 < R_2$.

განვიხილოთ ასეთი ამოცანა:

ვიპოვოთ $u(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც K რგოლის შიგნით აკმაყოფილებს ლაპლასის (1) განტოლებას.

ამოცანის ამოსახსნელად გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატთა სისტემაზე: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. K რგოლი ახალ კოორდინატთა სისტემაში მოიცემა $R_1 < r < R_2$, $0 \le \varphi < 2\pi$ მარტივი თანადობით. საჭიროა ლაპლა-

სის ოპერატორიც გადაიწეროს ახალ კოორდინატებში. *ლაპლასის* $\Delta u = 0$ *განტოლება პოლარულ კოორდინატებში, როგორც აღვნიშნეთ, ასეთია:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 . \qquad (2)$$

განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ცვლადთა განცალების მეთოდი. ამრიგად, განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ ნამრავლის სახით, იმ დაშვებით, რომ: $R_1 < r < R_2$, $0 \le \varphi < 2\pi$. ჩავსვათ $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ ფუნქცია (2) განტოლებაში და გვექნება:

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0 \cdot$$

ამ განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $R(r)\Phi(\varphi)/r^2$ და შედეგი ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} . \qquad (3)$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარე მხოლოდ r ცვლადზეა დამოკიდებული, მაშინ, როდესაც მარჯვენა მხარე – φ ცვლადზე. მაშასადამე, მათი ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ორივე ერთი და იმავე მუდმივის ტოლია. აღვნიშნოთ ეს მუდმივი λ^2 -ით. (3) განტოლებიდან მიიღება ორი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება, რომელთა მცირე გარდაქმნით მივიღებთ:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\lambda) = 0 , \;\; \Phi(0) = \Phi(2\pi) , \;\; \Phi'(0) = \Phi''(2\pi) , \qquad (4)$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda^2 R(r) = 0 , \;\; \lambda \ge 0 . \qquad (5)$$

(4) ამოცანაში სასაზღვრო პირობა აღნიშნავს ფაქტს, რომ $\Phi(\varphi)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ყოველი 2π -ს შემდეგ მეორდება. სხვა სიტყვებით, იძებნება პერიოდული ამონახსნი. (4) ამოცანას ვხსნით უკვე ცნობილი სქემის საშუალებით. თავიდან ჩავთვალოთ, რომ λ პარამეტრი დადებითია. დიფერენციალური განტოლების $k^2 + \lambda^2 = 0$ მახასიათებელი განტოლებიდან ვპოულობთ მახასიათებელ ფესვებს: $k = \pm i\lambda$, რომლითაც ვაგებთ დიფერენციალური გან-

ტოლების $\Phi(\varphi) = C_1 \cos \lambda\varphi + C_2 \sin \lambda\varphi$ ზოგად ამონახსნს. ჩავსვათ იგი სასაზღვრო პირობებში და მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას C_1 და C_2 მუდმივების მიმართ:

$$\begin{cases} C_1(\cos 2\pi\lambda - 1) + C_2 \sin 2\pi\lambda = 0, \\ -C_1 \sin 2\pi\lambda + C_2(\cos 2\pi\lambda - 1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

მიღებული სისტემა ერთგვაროვანია, ამიტომ არანულოვანი ამონახსნის არსებობისათვის საჭიროა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იყოს, ე.ი.:

$$\begin{vmatrix} \cos 2\pi\lambda - 1 & \sin 2\pi\lambda \\ -\sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც ვღებულობთ განტოლებას $\cos 2\pi\lambda = 1$, რომელსაც ამონახსნთა თვლადი რაოდენობა აქვს $\lambda_n = n$, სადაც $n = 1,2,3\ldots$. C_1 და C_2 მუდმივების პოვნის მიზნით, $\lambda_n = n$ უკვე ნაპოვნი მნიშვნელობები ჩავსვათ (6) სისტემაში და მივიღებთ იგივეობას $0 = 0$, რაც ნიშნავს, რომ (6)-ის ამონახსნებია ნებისმიერი C_1, C_2 რიცხვები. ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ ეს მუდმივები იცვლებიან $\lambda_n = n$ პარამეტრების ცვლილებასთან ერთად, რის გამოც (4) ამოცანის ამონახსნი დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 1,2,3,\ldots \; .$$

ახლა დავუშვათ $\lambda = 0$. ეს შემთხვევა განსაკუთრებულ შესწავლას მოითხოვს. (4) ამოცანა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi''(2\pi).$$

$\Phi''(\varphi) = 0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ასეთია: $\Phi(\varphi) = A_0 + B_0\varphi$. იმისათვის, რომ ამ ფუნქციამ პერიოდულობის პირობა დააკმაყოფილოს, აუცილებელია ჩავთვალოთ, რომ $B_0 = 0$. ამრიგად, ამონახსნი იქნება $\Phi(\varphi) = A_0$ მუდმივი ფუნქცია. მიღებული შედეგი ხშირად გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის სხვადასხვა ამოცანის ამოხსნის დროს, ამიტომ ჩამოვაყალიბოთ იგი თეორემის სახით:

თეორემა 1. *(4) პერიოდულ სასაზღვრო ამოცანას აქვს ამონახსნთა თვლადი* $\lambda_n^2 = n^2$, $n = 0,1,2,3,...$ *საკუთრივი რიცხვები და თვლადი საკუთრივი:*

$$\Phi(\varphi) = A_0 \,,\ \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \,,\ n = 1,2,3,... \qquad (7)$$

ფუნქციები.

გადავიდეთ ახლა (5) ამოცანის ანალიზზე. (5) დიფერენციალური განტოლება წარმოადგენს *ეილერის* განტოლებას. ეილერის განტოლების ამონახსნი, როდესაც $\lambda > 0$, საჭიროა ვეძებოთ $R(r) = r^{\alpha}$ სახით, რომლის განტოლებაში ჩასმის და გამარტივების შემდეგ მივდივართ ალგებრულ განტოლებამდე:

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda^2 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha^2 - \lambda^2 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha = \pm\lambda.$$

აქედან ვიღებთ ეილერის განტოლების კერძო ამონახსნებს: $r^{\lambda}, r^{-\lambda}$ და ზოგად $R(r) = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda}$, $\lambda > 0$ ამონახსნს. კვლავ საჭიროა ცალკე განვიხილოთ შემთხვევა $\lambda = 0$. ამ დროს ეილერის განტოლებას აქვს ასეთი სახე: $r^2 R'' + rR' = 0$. $R' = z$ ცვლადის გარდაქმნას მივყავართ პირველი რიგის განტოლებამდე, რომელიც იხსნება ცვლადების განცალების მეთოდით:

$$rz' + z = 0 \ \Rightarrow\ r\frac{dz}{dr} + z = 0 \Rightarrow\ \frac{dz}{z} + \frac{dr}{r} = 0 \Rightarrow\ \ln|z| + \ln r = \ln|C|.$$

აქედან $zr = C \Rightarrow R' = z = C/r$, რაც ნიშნავს, რომ ზოგად ამონახსნს აქვს ასეთი სახე: $R(r) = C\ln r + D$. ამრიგად, *(5) ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნია:*

$$R(r) = C\ln r + D \,,\ \textit{როდესაც}\ \lambda = 0 \,,$$

$$R(r) = Cr^{\lambda} + Dr^{-\lambda} \,,\ \textit{როდესაც}\ \lambda > 0 \,.$$

გავიხსენოთ, რომ (4),(5) განტოლებები უნდა ამოიხსნას ერთი და იმავე λ პარამეტრის მნიშვნელობისათვის. რადგან პერიოდული ამონახსნები (4) ამოცანისათვის მიღებულია მხოლოდ $\lambda = n$-სათვის, ამიტომ (5) ამოცანის ამონახსნები საჭიროა პარამეტრის ამ მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ, რაც მოგვცემს ფუნქციათა თვლად რაოდენობას:

$$\begin{cases} R_0(r) = C_0 \ln r + D_0, & n = 0, \\ R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, & n = 1,2,3,... \end{cases} \qquad (8)$$

(4)-(5) ამოცანების ამონახსნები, წარმოდგენილი (7), (8) ფორმულებით, ჩავწეროთ ყოველი $n=0,1,2,3,\ldots$ ნომრისათვის:

$$\begin{cases} n=0: R_0(r)=C_0\ln r+D_0, & \Phi_0(\varphi)=A_0, \\ n>0: R_n(r)=C_n r^n+D_n r^{-n}, & \Phi_n(\varphi)=A_1\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi \end{cases}$$

ძნელი არ არის იმის შემოწმება, რომ ზემოთ ამოწერილი ფუნქციების წყვილ-წყვილად გადამრავლებით მივიღებთ ლაპლასის განტოლების კერძო ამონახსნებს რგოლისათვის. ეს ნამრავლები გადავწეროთ შემდეგი ხელსაყრელი ფორმით:

$$\begin{cases} u_0(r,\varphi)=a_0+b_0\ln r, & n=0, \\ u_n(r,\varphi)=(a_n r^n+b_n r^{-n})\cos n\varphi+(c_n r^n+d_n r^{-n})\sin n\varphi, & n>0. \end{cases} \tag{9}$$

სუპერპოზიციის პრინციპის თანახმად, ყველა (9) სახის კერძო ამონახსნების ჯამი მოგვცემს რგოლში *ლაპლასის განტოლების ზოგად ამონახსნს* იმ შემთხვევაში, თუ:

$$u(r,\phi)=a_0+b_0\ln r+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\Big((a_n r^n+b_n r^{-n})\cos n\phi+(c_n r^n+d_n r^{-n})\sin n\phi\Big) \tag{10}$$

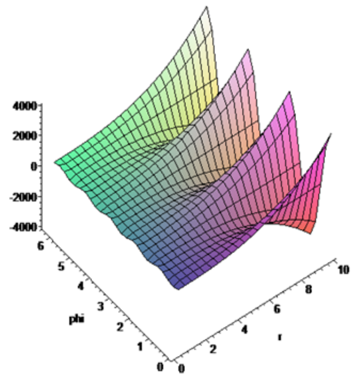
მწკრივი კრებადია. ამ მწკრივის კრებადობის საკითხი შეისწავლება ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში. გავიხსენოთ, რომ (10)-ის კრებადობა უწყვეტი ფუნქციისაკენ ჯერ კიდევ არ იძლევა იმის გარანტიას, რომ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადი იქნება. ფუნქციის დიფერენცირებადობა კი აუცილებელია ამონახსნის ჩასასმელად ლაპლასის განტოლებაში. ამის გამო (10) მწკრივი ამოცანის განზოგადებული ამონახსნია. ცხადია, კრებადობის საკითხი არ დაისმება, თუ (9) კერძო ამონახსნების სასრულ ჯამს განვიხილავთ. ყოველი ასეთი სასრული ჯამი ლაპლასის განტოლების კლასიკური ამონახსნია ეგრეთ წოდებულ ზღვრულ რგოლში:

$$K=\{0<r<\infty, 0\le\varphi<2\pi\},$$

რადგან არსებობს მისი არა მარტო მეორე, არამედ უსასრულო რიგის კერძო წარმოებულები. ლაპლასის განტოლების კლასიკური ამონახსნია, მაგალითად:

$$u(r,\varphi)=\ln r+4r^3\cos 3\varphi-\frac{2}{r^5}\sin 5\varphi$$

ფუნქცია. მისი გრაფიკი მოცემულია ნახ. 1-ზე (r-სა და φ-ს მნიშვნელობები აღებულია K-დან).



ნახ. 1

18.4. დირიხლეს ამოცანა წრეში ლაპლასის განტოლებისათვის

განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილის კერძო შემთხვევა, როდესაც რგოლი გადაგვარდება წრეში, რაც შეესაბამება შემთხვევას, როცა $R_1 = 0$. რგოლის დიდი რადიუსი აღვნიშნოთ $R = R_2$-ით.

$\Delta u = 0$, $u|_{r=R} = f(\varphi)$, *სადაც* f *ცნობილი პერიოდული ფუნქციაა, პერიოდით* 2π, *წარმოადგენს ლაპლასის განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანას წრეწირზე.*

პოლარულ კოორდინატებში ამოცანა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < r < R, \quad u|_{r=R} = f(\varphi). \tag{1}$$

გავიხსენოთ, რომ რგოლისათვის ამ ამოცანის ამონახსნი წინა პარაგრაფის (10) გამოსახულებით მოიცემოდა. (10) გამოსახულებაში შემავალი $\ln r$ და r^{-n} ფუნქციები წრეწირის ცენტრში შემოსაზღვრულები არ არიან. ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე ითვლება, რომ ასეთი ამონახსნების რეალიზება არ შეიძლება, რის გამოც მათ წინ მდგომი კოეფიციენტები 0-ს უნდა გავუტოლოთ. ამიტომ, წრისათვის ლაპლასის ამოცანის ამონახსნი იქნება:

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n \cos n\varphi + c_n r^n \sin n\varphi). \tag{2}$$

(2) გამოსახულებაში a_n და c_n კოეფიციენტების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ სასაზღვრო პირობებით. $r = R$ ჩასმის შემდეგ (2) გავუტოლოთ $f(\varphi)$-ს და მივიღებთ:

$$f(\varphi)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nR^n\cos n\varphi+c_nR^n\sin n\varphi).$$

დავწეროთ $f(\varphi)$ ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად $[0,2\pi]$ ინტერვალზე:

$$f(\varphi)=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}(f_n^c\cos n\varphi+f_n^s\sin n\varphi).$$

ფუნქციის ფურიეს მწკრივად დაშლის ერთადერთობიდან გამოდის, რომ:

$$a_0=f_0,\ \ a_0R^n=f_n^c,\ \ c_0R^n=f_n^s,\ \ n=1,2,...,$$

საიდანაც ვპოულობთ: $a_n=\dfrac{1}{R^n}f_n^c$ და $c_n=\dfrac{1}{R^n}f_n^s$. ჩავსვათ a_n-სა და c_n-ს ეს მნიშვნელობები (2)-ში და გვექნება:

$$u(r,\varphi)=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(f_n^c\cos n\varphi+f_n^s\sin n\varphi). \qquad (3)$$

f_0, f_n^c, f_n^s კოეფიციენტები გამოითვლებიან კარგად ცნობილი ფორმულებიდან:

$$f_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi,\quad f_n^c=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$f_n^c=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi,\ \ n=1,2,3,... \qquad (4)$$

დებულება 1. *იმისათვის, რომ წრეში დირიხლეს ამოცანა ამოვხსნათ ლაპლასის განტოლებისათვის ფურიეს მეთოდით, საჭიროა გამოითვალოს მოცემული $f(\varphi)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები (4) ფორმულებიდან და ჩაისვას (3) გამოსახულებაში.*

18.5. დირიხლეს ამოცანა წრის გარეთ ლაპლასის განტოლებისათვის

განვიხილოთ კიდევ ერთი კერძო შემთხვევა, როდესაც რგოლი წრის გარე არეში გადაგვარდება, რაც, ბუნებრივია, შეესაბამება შემთხვევას $R_2=\infty$. გარე რადიუსი აღვნიშნოთ $R=R_1$-ით. ლაპლასის განტოლებას ემატება სასაზღვრო პირობა $r=R$-რადიუსიანი წრეწირის საზღვარზე. ზოგადი ამონახს-

ნის (10) ფორმულაში შემავალი $\ln r$ და r^n ფუნქციები, როდესაც $r \to \infty$, უსასრულოდ იზრდებიან. ამიტომ ამ ფუნქციების წინ მდგომი კოეფიციენტე-ბი დირიხლეს ამოცანის ამოხსნისას 0-ს უნდა გავუტოლოთ, რასაც მივყა-ვართ ლაპლასის განტოლების შემდეგ ამონახსნამდე:

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{r^n}\cos n\varphi + \frac{d_n}{r^n}\sin n\varphi\right). \qquad (1)$$

(1) ფუნქციისათვის სასაზღვრო პირობების შესრულება ნიშნავს $r = R$-ის ჩასმას მასში და $f(\varphi)$-სათვის გატოლებას:

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{R^n}\cos n\varphi + \frac{d_n}{R^n}\sin n\varphi\right),$$

რომლის შედარება $f(\varphi)$-ის ფურიეს

$$f(\varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi)$$

მწკრივთან გვაძლევს:

$$a_0 = f_0, \frac{b_n}{R^n} = f_n^c, \ \frac{d_n}{R^n} = f_n^s, \ n = 1,2,\dots,$$

საიდანაც ვიღებთ: $b_n = R_n f_n^c$, $d_n = R_n f_n^s$. მათი ჩასმით (1) ზოგად ამონახ-სნში ვღებულობთ ამოცანის ამონახსნს:

$$u(r,\varphi) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n (f_n^c \cos n\varphi + f_n^s \sin n\varphi),$$

რომლის კოეფიციენტები გამოითვლებიან წინა პარაგრაფის (4) ფორმულიდან.

18.6. დირიხლეს ამოცანა რგოლში ლაპლასის განტოლებისათვის

დირიხლეს ამოცანა რგოლისათვის ყალიბდება შემდეგნაირად:

$$\Delta u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \ R_1 < r < R_2;$$

$$u|_{r=R_1} = f(\varphi), \ u|_{r=R_2} = g(\varphi), \ 0 \le \varphi < 2\pi. \qquad (1)$$

მის ამოსახსნელად კვლავ ვიყენებთ ზოგად (10) ფორმულას პარაგრაფ 18.3-დან. a_n, b_n, c_n, d_n კოეფიციენტები გამოითვლებიან:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = f_0 \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = g_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = f_n^c \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = g_n^c \end{cases}, \quad \begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = f_n^c \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = g_n^c \end{cases} \qquad (2)$$

განტოლებათა სისტემებიდან.

18.7. პუასონის განტოლება რგოლში

არაერთგვაროვანი ლაპლასის $\Delta u = F$ განტოლება *პუასონის* განტოლების სახელწოდებიდაა ცნობილი. ჩვენ შევისწავლით ამ განტოლებას რგოლში, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი კონცენტრული – r_1 და r_2 რადიუსების მქონე წრეწირებით, ცენტრებით კოორდინატთა სათავეში. ვიგულისხმოთ, რომ $r_1 < r_2$. დავწეროთ პუასონის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = F(r, \varphi). \qquad (1)$$

ლაპლასის განტოლების ანალოგიურად (1) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ:

$$u(r, \varphi) = A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(r) \cos n\varphi + B_n(r) \sin n\varphi \right) \qquad (2)$$

მწკრივის სახით.

დავუშვათ, (2) მწრივი შესაძლებელია გავაწარმოოთ წევრობრივად, მაშინ:

$$u_r = A_0'(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n'(r) \cos n\varphi + B_n'(r) \sin n\varphi \right),$$

$$u_{rr} = A_0''(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n''(r) \cos n\varphi + B_n''(r) \sin n\varphi \right), \qquad (3)$$

$$u_{\varphi\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n^2 A_n(r) \cos n\varphi - n^2 B_n(r) \sin n\varphi \right).$$

ეს ტოლობები შევიტანოთ (1)-ში და შედეგი გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(A_n'' + \frac{1}{r} A_n' - \frac{n^2}{r^2} A_n \right) \cos n\varphi + \left(B_n'' + \frac{1}{r} B_n' - \frac{n^2}{r^2} B_n \right) \sin n\varphi \right) = F(r, \varphi)$$

გარდა ამისა, დავწეროთ $F(r,\varphi)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივად დაშლა φ ცვლადის მიმართ და r ჩავთვალოთ პარამეტრად:

$$F_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(F_n^c(r)\cos n\varphi+F_n^s(r)\sin n\varphi\right)=F(r,\varphi).$$

უკანასკნელი ტოლობების ერთი და იმავე სახის კოეფიციენტების გატოლებით მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$A_0^{//}(r)+\frac{1}{r}A_0^{/}(r)=F(r,\varphi),$$

$$A_n^{//}(r)+\frac{1}{r}A_n^{/}(r)-\frac{n^2}{r^2}A_n(r)=F_n^c(r), \tag{4}$$

$$B_n^{//}(r)+\frac{1}{r}B_n^{/}(r)-\frac{n^2}{r^2}B_n(r)=F_n^s(r).$$

გავიხსენოთ ფურიეს კოეფიციენტების ფორმულა და გამოვიყენოთ იგი r პარამეტრზე დამოკიდებული $F(r,\varphi)$ ფუნქციისათვის $[0,2\pi]$ ინტერვალზე:

$$F_0(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\varphi)d\varphi,$$

$$F_n^c(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi,\quad n=1,2,... \tag{5}$$

$$F_n^s(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(r,\varphi)\sin n\varphi d\varphi,\quad n=1,2,...$$

(4) დიფერენციალურ განტოლებებს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე აქვთ, ერთი რომელიმე ამონახსნის გამოსაყოფად საჭიროა დამატებითი პირობა. ჩვეულებრივ, ასეთი დამატებითი პირობები მოიცემა რგოლის საზღვარზე, ე.ი. $r=r_1$ და $r=r_2$ წრეწირებზე. ამ დამატებით პირობებს, როგორც ვიცით, სასაზღვრო პირობა ეწოდება. სასაზღვრო პირობები მრავალნაირი შეიძლება იყოს, მაგალითისათვის განვიხილოთ შემდეგი:

$$\Delta u=F,\quad u|_{r=r_1}=f(\varphi),\quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=r_2}=g(\varphi), \tag{6}$$

რაც ნიშნავს, რომ მცირერადიუსიან წრეწირზე ცნობილია თვითონ $u(r,\varphi)$ ფუნქცია, ხოლო დიდ წრეწირზე მოცემულია მისი წარმოებული ამ წრეწირის ნორმალის გასწვრივ. აქ იგულისხმება არის მიმართ გარე ნორმალი. გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ ნორმალის მითითებული მიმართულება აირჩევა ისე, რომ იგი ემთხვეოდეს r არგუმენტის ზრდის მიმართულებას. სხვა სიტყვებით, მართებულია ტოლობა: $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{r=r_2}=\frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_2}$. პოლარულ კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის შემდეგ (1), (6) ამოცანა იღებს სახეს:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}=F(r,\varphi),\ \ r_1<r<r_2\,, \tag{7}$$

$$u\big|_{r=r_1}=f(\varphi)\,,\ \ \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=r_2}=g(\varphi)\,. \tag{8}$$

გავიხსენოთ, რომ (7) პუასონის განტოლების ამონახსნს ვეძებთ (2) მწკრივის სახით. ჩავსვათ ამ მწკრივში $r=r_1$ მნიშვნელობა და შედეგი გავუტოლოთ $f(\varphi)$-ს (8) პირობის პირველი ტოლობის თანახმად:

$$A_0(r_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n(r_1)\cos n\varphi+B_n(r_1)\sin n\varphi\big)=f(\varphi)\,.$$

დავწეროთ აგრეთვე $f(\varphi)$-ის ფურიეს მწკრივად დაშლა $[0,2\pi]$ ინტერვალზე:

$$f_0+\sum_{n=1}^{\infty}(f_n^c\cos n\varphi+f_n^s\sin n\varphi)=f(\varphi)\,.$$

უკანასკნელი ორი გამოსახულების შედარება გვაძლევს $r=r_1$-სათვის შემდეგ ტოლობებს:

$$A_0(r_1)=f_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi\,,$$

$$A_n(r_1)=f_n^c=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\,,\ \ n=1,2,\ldots, \tag{9}$$

$$B_n(r_1)=f_n^s=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\sin n\varphi d\varphi\,,\ \ n=1,2,\ldots$$

ანალოგიურად ზემოთ თქმულისა, ჩავსვათ u_r -ში, რომელიც (3) ფორმულითაა წარმოდგენილი, $r=r_2$ მნიშვნელობა და შედეგი გავუტოლოთ $g(\varphi)$ -ს, (8) სასაზღვრო პირობის მეორე ტოლობის თანახმად:

$$A_0^{/}(r_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^{/}(r_2)\cos n\varphi+B_n^{/}(r_2)\sin n\varphi\right)=g(\varphi).$$

პარალელურად ამისა, წარმოვადგინოთ $g(\varphi)$ ფურიეს მწკრივად $[0,2\pi]$ ინტერვალზე:

$$g_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n^c\cos n\varphi+g_n^s\sin n\varphi\right)=g(\varphi).$$

კვლავ ორი უკანასკნელი გამოსახულების შედარება $r=r_2$ -სათვის გვაძლევს ტოლობებს:

$$A_0^{/}(r_2)=g_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)d\varphi\,,$$

$$A_n^{/}(r_2)=g_n^c=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\,,\ \ n=1,2,... \qquad (10)$$

$$B_n^{/}(r_2)=g_n^s=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(r,\varphi)\sin n\varphi d\varphi\,,\ \ n=1,2,...\ .$$

ზემოთ თქმული შევაჯამოთ შემდეგ დებულებაში:

დებულება 1. *იმისათვის, რომ რგოლში (6) სასაზღვრო ამოცანა ამოიხსნას ფურიეს მეთოდით, საჭიროა ივი გადავწეროთ პოლარულ კოორდინატებში, გამოვთვალოთ $F(r,\varphi)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $[0,2\pi]$ ინტერვალზე (5) ფორმულით, გამოვთვალოთ აგრეთვე $f(\varphi)$ და $g(\varphi)$ ფურიეს კოეფიციენტები (9) და (10) გამოსახულებებიდან, შემდეგ ამოვხსნათ (4) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება (9) და (10) თანადობებიდან აღებულ სასაზღვრო პირობასთან ერთად და შედეგები შევიტანოთ (2) ზოგად ამონახსნში.*

19. ჰელმჰოლცის განტოლება

ფიქსირებული ω სიხშირის აკუსტიკური რხევით პროცესს $\mathbf{R}^n$-ში აღწერს განტოლება:

$$\Delta u = -\omega^2 u \, , \tag{1}$$

რომელიც *ჰელმჰოლცის* განტოლების სახელწოდებითაა ცნობილი. თუ (1) განტოლების ფიზიკურ შინაარსს დავივიწყებთ, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\omega = 0$, მაშინ (1) გადადის ლაპლასის განტოლებაში.

გადავწეროთ (1) განტოლება კოორდინატებში:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = -\omega^2 u \, , \tag{2}$$

სადაც $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. (2) (ან, რაც იგივეა, (1) განტოლება) არის ელიფსური განტოლება, ამიტომ მისთვის ისმება ყველა ის სასაზღვრო ამოცანა (დირიხლეს, ნეიმანის), რომელიც, საზოგადოდ, ელიფსური განტოლებების შემთხვევაში გვაქვს. წინა პარაგრაფებიდან გამომდინარე, ბუნებრივია, ვიფიქროთ, რომ (2) განტოლებას (შესაბამის სასაზღვრო პირობებში) გარკვეული $\omega \neq 0$-სათვის ექნება ამონახსნი. ასეთი არანულოვანი ამონახსნი იქნება ლაპლასის ოპერატორის საკუთრივი ფუნქცია (მართლაც, (1) განტოლება ასეთია: $(\Delta + \omega^2)u = 0$). რადგან არსებობს ელიფსური განტოლებების კვლევის ზოგადი თეორია და, მათ შორის, ამოხსნის მეთოდები (რაც ნაწილობრივ განვიხილეთ), (2) განტოლებაც, როგორც კერძო შემთხვევა, შესაძლებელია გამოკვლეულ იქნეს ამ მეთოდებით. მაგრამ, ზოგჯერ, გარკვეული შეზღუდვების შემდეგ, (2) განტოლება დაიყვანება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე. ქვემოთ სწორედ ამ შემთხვევაზე შევჩერდებით.

დავუშვათ, $u = v(wr) = v(\tau)$, სადაც $\tau = wr$, ხოლო $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

გამოვსახოთ $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ ლაპლასის ოპერატორი ახალ ცვლადებში. ამისათვის საჭიროა ახალ ცვლადებში გამოვსახოთ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, i = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(\tau) w \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(\tau) w \frac{x_i}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v'(\tau) w \left[\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right] + \frac{x_i^2}{r^2} w^2 v''(\tau),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v'(\tau) w \left[\frac{n}{r} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{r^3} \right] + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{r^2} w^2 v''(\tau).$$

უკანასკნელი გამოსახულების მარჯვენა მხარის გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$\Delta u = \frac{v'(\tau) w}{r}(n-1) + w^2 v''(\tau).$$

ამის შემდეგ (1) განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$v''(\tau) + \frac{(n-1)}{\tau} v'(\tau) + v(\tau) = 0. \tag{3}$$

მოვახდინოთ უცნობი ფუნქციის გარდაქმნა:

$$v(\tau) = y(\tau) \tau^{\frac{1-n}{r}} \tag{4}$$

თანადობით და გადავწეროთ (3) განტოლება ახალი უცნობი $y(\tau)$ ფუნქციის მიმართ. ამისათვის საჭიროა ვიპოვოთ (4)-დან $v'(\tau)$ და $v''(\tau)$:

$$v'(\tau) = y'(\tau) \tau^{\frac{1-n}{r}} + \frac{1-n}{r} \frac{\tau^{\frac{1-n}{r}}}{\tau} y(\tau) = \tau^{\frac{1-n}{r}} \left[y'(\tau) - \frac{n-1}{2\tau} y(\tau) \right],$$

$$v''(\tau) = \frac{1-n}{r} \frac{\tau^{\frac{1-n}{r}}}{\tau} \left[y'(\tau) - \frac{n-1}{2\tau} y(\tau) \right] +$$

$$+ \tau^{\frac{1-n}{r}} \left[y''(\tau) - \frac{n-1}{r} \frac{y'(\tau)\tau - y(\tau)}{\tau^2} \right] =$$

$$= \tau^{\frac{1-n}{r}} \left[y''(\tau) - \frac{n-1}{r} \frac{y'(\tau)}{\tau} + \frac{(n-1)^2}{4\tau^2} y(\tau) - \frac{n-1}{r} \frac{y'(\tau)}{\tau} + \frac{(n-1)^2}{4\tau^2} y(\tau) \right] =$$

$$= \tau^{\frac{1-n}{r}} \left[y''(\tau) - \frac{n-1}{\tau} y'(\tau) + \frac{(n-1)^2}{4\tau^2} y(\tau) + \frac{(n-1)}{4\tau^2} y(\tau) \right].$$

ჩავსვათ $v(\tau)$, $v^{/}(\tau)$ და $v^{//}(\tau)$ (3) განტოლებაში და მიღებული გამოსახულება გავყოთ საერთო $\tau^{\frac{1-n}{r}}$ მამრავლზე, მივიღებთ:

$$y^{//}(\tau)-\frac{n-1}{\tau}y^{/}(\tau)+\frac{(n-1)^2}{4\tau^2}y(\tau)+\frac{(n-1)}{2\tau^2}y(\tau)+$$

$$+\frac{n-1}{\tau}y^{/}(\tau)-\frac{(n-1)^2}{2\tau^2}y(\tau)+y(\tau)=$$

$$=y^{//}(\tau)+y(\tau)\left(\frac{(n-1)^2}{4\tau^2}+\frac{n-1}{2\tau^2}-\frac{(n-1)^2}{2\tau^2}+1\right)=$$

$$=y^{//}(\tau)+y(\tau)\left(1+\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{n^2-1}{2}-\frac{\left(n-1\right)^2}{4}\right)\right).$$

უკანასკნელი გამოსახულების გამარტივების შემდეგ მივიღებთ განტოლებას:

$$y^{//}(\tau)+\left(1+\frac{\left(n-1\right)^2}{4\tau^2}\right)y(\tau)=0 \tag{5}$$

(5) არის ბესელის განტოლება და მისი ზოგადი ამონახსნი სპეციალური ფუნქციებით გამოისახება.

ამრიგად, თუ შემოვისაზღვრებით (1)-ის $u=v(wr)=v(\tau)$ სახის ამონახსნების ძიებით, ანუ, როგორც ამბობენ, თუ გვაინტერესებს ამოცანის მხოლოდ *სფერულად სიმეტრიული* ამონახსნები, მაშინ ჰელმჰოლცის განტოლება დაიყვანება ბესელის განტოლებაზე.

20. ელიფსურ განტოლებათა სისტემები სიბრტყეზე

წრფივი, პირველი რიგის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა ორი ცვლადის $u(x,y)$ და $v(x,y)$ ფუნქციებისათვის ასეთია:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\dfrac{\partial u}{\partial y}+b_{11}\dfrac{\partial v}{\partial x}+a_{12}\dfrac{\partial v}{\partial y}+a_1u+b_1v=f_1, \\ a_{21}\dfrac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial y}+b_{21}\dfrac{\partial v}{\partial x}+a_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y}+a_2u+b_2v=f_2, \end{cases} \tag{1}$$

სადაც $a_{ij}(x,y), b_{ij}(x,y), a_j(x,y), b_j(x,y), f_j(x,y)$ ორი ცვლადის მოცემული ფუნქციებია $U\subset\mathbf{R^2}$ არეზე. ამ ფუნქციებს, ისევე როგორც საძიებელ ფუნქციებს, რაიმე შეზღუდვებს არ დავადებთ (თუმცა, აქვე აღვნიშნავთ, რომ განტოლებათა სისტემის სრული ანალიზისათვის ეს მნიშვნელოვანია).

ისევე როგორც ერთი განტოლების შემთხვევაში, განტოლებათა სისტემის კლასიფიკაციისათვის გამოვიყენოთ შესაბამისი კვადრატული ფორმა:

$$\mathrm{G}=adx^2+2bdxdy+cdy^2, \tag{2}$$

სადაც

$$(x,y)=\frac{a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12}}{\Delta},$$

$$b(x,y)=-\frac{a_{11}b_{22}+a_{12}b_{21}-a_{21}b_{21}-a_{22}b_{11}}{2\,\Delta},$$

$$c(x,y)=\frac{a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11}}{\Delta},$$

$$\Delta\,=(a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12})(a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11})-$$

$$-\frac{1}{4}(a_{11}b_{22}+a_{12}b_{21}-a_{21}b_{21}-a_{22}b_{11})^2.$$

(1) სისტემას ვუწოდოთ *ელიფსური*, თუ (2) ფორმა დადებითად განსაზღვრულია. ეს მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $a>0$ და $\Delta>0$. Δ-ს ეწოდება განტოლებათა სისტემის დისკრიმინანტი. ქვემოთ მხოლოდ ელიფსურ სისტემებს განვიხილავთ. ამ შემთხვევაში კი დისკრიმინანტი დადებითია, რის გამოც (1) შესაძლებელია გარდაიქმნას შედარებით მარტივ სისტემად:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial y} + a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial u}{\partial y} + a_1 u + b_1 v = f_1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{21}\dfrac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial y} + a_2 u + b_2 v = f_2, \end{cases} \tag{3}$$

რომლის ელიფსურობა ნიშნავს $a_{11} > 0$ და $\Delta > 0$ პირობების დაკმაყოფილებას.

დავუშვათ, რომ $a_{12} = -a_{21}$, $a_{11} = a_{22}$, მაშინ უკანასკნელი სისტემა, ნათელია, მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{a}_{11}\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{a}_{12}\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{a}_1 \mathrm{u} + \mathrm{b}_1 \mathrm{v} = \mathrm{f}_1, \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{a}_{12}\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{a}_{11}\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{a}_2 \mathrm{u} + \mathrm{b}_2 \mathrm{v} = \mathrm{f}_2, \end{cases}$$

რომელიც $U = a_{11}u$ და $V = v + a_{12}v$ ჩასმის შემდეგ მოგვცემს:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial V}{\partial y} + A_1 U + B_1 V = f, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x} + A_2 U + B_2 V = g \end{cases} \tag{4}$$

სისტემას. (4)-ს (3) სისტემის *კანონიკური ფორმა* ეწოდება.

საწყისი სისტემის თითოეული განტოლების მთავარი ნაწილებისაგან შედგენილ სისტემას განტოლებათა *სისტემის მთავარი ნაწილი* ეწოდება. თუ (4) სისტემის მარჯვენა მხარე 0-ია, მაშინ მას *ერთგვაროვანი* ეწოდება. გარდა ამისა, (4)-ში შესაძლებელია რომელიმე კოეფიციენტი ან ყველა ერთად იგივურად 0-ის ტოლი გახდეს. ადვილი შესამჩნევია, რომ (4)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მთავარი ნაწილი კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემაა. ამრიგად, (4) არის კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის განზოგადება.

(1) სახის სისტემების ამოხსნის მეთოდი და მისი ამონახსნების თვისებები კოეფიციენტთა საკმაოდ ფართო კლასისათვის ეკუთვნის ი.ვეკუას. ი.ვეკუამ (4) სისტემა ჩაწერა შემდეგი კომპლექსური ფორმით:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + AW + B\bar{W} = F, \tag{5}$$

სადაც $W(z,\bar{z}) = U(x,y) + iV(x,y)$ საძიებელი ფუნქციაა, $F(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\big(f(x,y) + ig(x,y)\big)$ კი – მოცემული კომპლექსური ფუნქცია.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

დიფერენცირების ოპერატორია, ხოლო განტოლების კოეფიციენტები (4) სისტემით მოცემულ ფუნქციებს უკავშირდებიან თანადობებით:

$$A(z, \bar{z}) = \frac{1}{4}(A_1(x, y) - B_2(x, y) + i(A_2(x, y) + B_1(x, y))),$$

$$B(z, \bar{z}) = \frac{1}{4}(A_1(x, y) + B_2(x, y) - i(B_1(x, y) - A_2(x, y))),$$

რის შემდეგ, ი.ვეკუამ, შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამონახსნის არსებობის შესახებ თეორემის გამოყენებით დაწერა (5) განტოლების ამონახსნი. (5) განტოლების ამონახსნის ვეკუას ფორმულას სამეცნიერო ლიტერატურაში *მსგავსების პრინციპი* ეწოდება, ხოლო (5)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნებს, ვეკუას აზრით, – განზოგადებული *ანალიზური ფუნქციები.*

ნათელია, რომ (1) სახის ზოგადი ელიფსური სისტემის კერძო შემთხვევაა

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \tilde{a}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \tilde{b}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \tilde{b}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \tilde{c}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

სისტემა (კოეფიციენტები ისეა აღებული, რომ სისტემა ელიფსურია), რომელიც კომპლექსურ კოორდინატებში გადაწერის შემდეგ მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - q(z, \bar{z})\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

იგი *ბელტრამის განტოლების* სახელითაა ცნობილი. მის ამონახსნებს *კვაზიკონფორმული* ფუნქციები ეწოდება. ცხადია, რომ ეს განტოლებაც კოშირიმანის (რომელიც კომპლექსურ კოორდინატებში ასე გამოიყურება: $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$) განტოლებათა სისტემის განზოგადებაა. ამის გამოა, რომ ანალიზურ ფუნქციათა თვისებების უმრავლესობა ვრცელდება განზოგადებულ ანალიზურ და კვაზიკონფორმულ ფუნქციებზე.

მეორე რიგის წრფივ, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა სიბრტყეზე ასეთია:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+E(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+$$

$$+F(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}+D(x,y)U=G(x,y), \tag{6}$$

სადაც

$$A(x,y)=\left(a_{ij}(x,y)\right)_{i,j=1}^{n},\ B(x,y)=\left(b_{ij}(x,y)\right)_{i,j=1}^{n},$$

$$C(x,y)=\left(c_{ij}(x,y)\right)_{i,j=1}^{n},\ E(x,y)=\left(e_{ij}(x,y)\right)_{i,j=1}^{n},$$

$$F(x,y)=\left(f_{ij}(x,y)\right)_{i,j=1}^{n},\ D(x,y)=\left(d_{ij}(x,y)\right)_{i,j=1}^{n}$$

მოცემული კვადრატული მატრიც-ფუნქციებია.

$$U(x,y)=\left(u_1(x,y),\dots,u_n(x,y)\right)$$

უცნობი და $g(x,y)=\left(g_1(x,y),\dots,g_n(x,y)\right)$ მოცემული ვექტორული ფუნქციაა.

(6) სისტემას ეწოდება *ელიფსური* $U\subset\mathbf{R}^2$ არეზე, თუ:

$$\det(A(x,y)\lambda^2+2B(x,y)\lambda+C(x,y))\neq 0,\ detA(x,y)\neq 0 \tag{7}$$

λ-ს ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის მოცემულ არეში.

λ-ს იმ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც:

$$\det\left(A(x,y)\lambda^2+2B(x,y)\lambda+C(x,y)\right)=0$$

სისტემის მახასიათებელი რიცხვები ეწოდება.

მეორე რიგის ელიფსური განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანა კორექტული ამოცანაა. რაც შეეხება (6) სახის სისტემებს, მაშინაც კი, როდესაც კოეფიციენტები მუდმივია, დირიხლეს ამოცანას შეიძლება *ჰქონდეს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი.* ასეთი ამოცანის პირველი მაგალითი ეკუთვნის ქართველ მათემატიკოს ა. ბიწაძეს.

განვიხილოთ (6) სახის სისტემა მუდმივი კოეფიციენტებით:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.\end{cases} \tag{8}$$

ეს სისტემა ელიფსურია, რადგან მის მახასიათებელ განტოლებას $(\lambda^2+1)^2=0$ ნამდვილი ფესვები არ აქვს. დავსვათ მისთვის დირიხლეს შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ $D=\{x^2+y^2<R^2\}$ წრეში (8)-ის ისეთი ამონახსნი, რომ D-ს $S^1=\{x^2+y^2=R^2\}$ საზღვარზე იგი 0-ის ტოლი გახდეს.

განტოლებაში უშუალო ჩასმით მოწმდება, რომ ნებისმიერი ნატურალური n-სათვის სისტემის ამონახსნია:

$$u_n(x,y)=\left(r^{n-1}-\frac{r^{n+1}}{R^2}\right)\cos(n-1)\varphi,$$

$$v_n(x,y)=\left(r^{n-1}-\frac{r^{n+1}}{R^2}\right)\sin(n-1)\varphi$$

ფუნქციები, სადაც (r,φ) x-ის და y-ის პოლარული კოორდინატებია. როდესაც $r\to R$, ეს ფუნქციები იგივურად 0-ის ტოლი ხდებიან და ამრიგად, ყველა მათგანი წარმოადგენს დირიხლეს ამოცანის ამონახსნს.

(8) განტოლებათა სისტემა *ბიწაძის განტოლების სახელითაა* ცნობილი. იგი ელიფსური სისტემების შემდგომი კლასიფიკაციის აუცილებლობის სტიმული გახდა, რადგან (6) სახის ელიფსურ სისტემათა უმრავლესობისათვის დირიხლეს ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. ასე სრული კლასიფიკაცია ეკუთვნის ი.ვეკუას მოწაფეს, პოლონელ მათემატიკოს ბ.ბოიარსკის. განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც $n=2$. ბოიარსკიმ აჩვენა, რომ სიბრტყეზე მეორე რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი ელიფსური სისტემების კლასიფიკაცია (დირიხლეს ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თვალსაზრისით) ორი უცნობი ფუნქციისათვის ეკვივალენტურია:

$$P(\lambda)=A\lambda^2+2B\lambda+C=\left(\alpha_{ij}(\lambda)\right)_{i,j=1}^{2} \tag{9}$$

მეორე რიგის პოლინომიალური მატრიცების სიმრავლის კლასიფიკაციის, მისი ბმულობის კომპონენტების მიხედვით. უფრო ზუსტად, განვიხილოთ (9) პოლინომიალური მატრიცების სიმრავლე, რომლებიც (8) პირობებს აკმაყოფილებენ და ვიპოვოთ ამ სიმრავლის ბმული კომპონენტების რაოდენობა. ბოიარსკის თეორემის თანახმად, ამ სიმრავლეს აქვს 6 ბმულობის კომპონენტი და ისინი შეესაბამებიან:

$$\chi(\lambda)=\alpha_{11}(\lambda)+\alpha_{22}(\lambda)+i(\alpha_{21}(\lambda)-\alpha_{12}(\lambda))=0$$

კვადრატული განტოლების λ_1 და λ_2 ფესვების შემდეგ თანადობებს:

1) $detP(\lambda)>0, Im\lambda_1>0, Im\lambda_2>0;$
2) $detP(\lambda)>0, Im\lambda_1>0, Im\lambda_2<0;$

3) $detP(\lambda) > 0, Im\lambda_1 < 0, Im\lambda_2 < 0$;

4) $detP(\lambda) < 0, Im\lambda_1 > 0, Im\lambda_2 > 0$;

5) $detP(\lambda) < 0, Im\lambda_1 > 0, Im\lambda_2 < 0$;

6) $detP(\lambda) < 0, Im\lambda_1 < 0, Im\lambda_2 < 0$.

მეორე რიგის ელიფსურ განტოლებათა სისტემა სიბრტყეზე, რომელიც აკმაყოფილებს 1), 2) და 3) პირობებს, აღვნიშნოთ, შესაბამისად, E_1, E_2 და E_3-ით. მაგალითად, ლაპლასის განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

ეკუთვნის E_2 კლასს. ბიწაძის (8) სისტემა, აგრეთვე სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sqrt{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \sqrt{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

E_3 კლასისაა, ხოლო:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

სისტემა ეკუთვნის E_1 კლასს.

დებულება 1. *თუ ელიფსური სისტემა E_2 კლასისაა, მაშინ მისთვის დირიხლეს ამოცანა კორექტულია.*

რაც შეეხება E_1 და E_3 კლასის ელიფსურ განტოლებებს, მათთვის დირიხლეს ამოცანა შეიძლება კორექტულიც იყოს და არაკორექტულიც. მაგალითად, (10) სისტემისათვის დირიხლეს ამოცანას აქვს მრავალი ამონახსნი:

$$u(x,y) = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad v(x,y) = 1 - \frac{r^2}{R^2},$$

სადაც r x-ის და y-ის პირველი პოლარული კოორდინატია, მეორე φ კოორდინატზე სისტემის ამონახსნი დამოკიდებული არ არის. ეს ფუნქციები იგი-

ვურად 0-ის ტოლია $D=\{x^2+y^2<R^2\}$ დისკის საზღვარზე. საინტერესოა იმის გარკვევა, რამდენად ბევრია ასეთი ამოცანა. სხვა სიტყვებით, ამოცანა მდგომარეობს იმის გარკვევაში, ღიაა თუ არა კორექტული ამოცანების სიმრავლე E_1 და E_3 კლასებში.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. აჩვენეთ, რომ:

$$K(x,y,\xi)=\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}$$

აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას ნებისმიერი ξ -სათვის.

2. იპოვეთ $u\in C^{(2)}$, რომელიც აკმაყოფილებს:

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ლაპლასის განტოლებას და სასაზღვრო პირობებს:

$u|_{y=0}=f(x)$, $u|_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty}$ შემოსაზღვრულია, როდესაც $y\ge 0,-\infty<x<\infty.$

მითითება: გამოიყენეთ წინა ამოცანა და სუპერპოზიციის ინტეგრალური ფორმა (თეორემა 1 წინა პარაგრაფიდან).

პასუხი: $u(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi$.

3. ამოხსენით რგოლში დირიხლეს შემდეგი ამოცანა:

$$\Delta u(x,y)=0, 4<x^2+y^2<9;\ u|_{x^2+y^2=4}=x,\ u|_{x^2+y^2=9}=y.$$

პასუხი: $u=\left(-\frac{4}{5}r+\frac{36}{5}r^{-1}\right)\cos\varphi+\left(\frac{9}{5}r-\frac{36}{5}r^{-1}\right)\sin\varphi.$

4. ამოხსენით წრეში დირიხლეს შემდეგი ამოცანა:

$$\Delta u(x,y)=0, x^2+y^2<4;\ u|_{x^2+y^2=4}=x^2.$$

პასუხი: $u(x,y)=2+\frac{x^2-y^2}{2}.$

5. იპოვეთ ერთეულრადიუსიანი წრის (წრეწირის ცენტრია კოორდინატთა სათავე) შიგნით $u(\varphi, r)$ ჰარმონიული ფუნქცია, ისეთი, რომ:

1) $u(\varphi, r)_{|r=1} = \cos^2\varphi$. პასუხი: $u(\varphi, r) = \frac{1}{2}(1 + r^2\cos 2\varphi)$.

2) $u(\varphi, r)_{|r=1} = \sin^3\varphi$. პასუხი: $u(\varphi, r) = \frac{r}{4}(3\sin\varphi\ - r^2\sin 3\varphi)$.

3) $u(\varphi, r)_{|r=1} = \cos^4\varphi$. პასუხი: $u(\varphi, r) = \frac{3}{8} + \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi\ - \frac{r^4}{8}\cos 4\varphi)$.

6. იპოვეთ R რადიუსის მქონე წრის (წრეწირის ცენტრია კოორდინატთა სათავე) შიგნით $u(\varphi, r)$ ჰარმონიული ფუნქცია, ისეთი, რომ:

1) $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = A\cos\varphi$. პასუხი: $u(\varphi, r) = Ar\cos\varphi + c$.

2) $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = A\sin^3\varphi$ პასუხი: $u(\varphi, r) = \frac{1}{4}(3r\sin\varphi - \frac{r^3}{3R^2}\sin 3\varphi) + c$.

7. აჩვენეთ, რომ, თუ u და v აკმაყოფილებენ კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემას, მაშინ ისინი ჰარმონიულები არიან.

21. განტოლებათა ამოხსნის ოპერაციული მეთოდი

21.1. ინტეგრალური გარდაქმნები

უწყვეტი სპექტრის მქონე ოპერატორების შემთხვევაში მათემატიკური ფიზიკის განტოლებების ამოსახსნელად ხშირად მოსახერხებელია ინტეგრალური გარდაქმნების გამოყენება. ინტეგრალური გარდაქმნის დროს მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას შეესაბამება სხვა ფუნქცია, რომელიც მიიღება მოცემული ფუნქციისა და ბირთვის (რომელიც x-ისა და რაიმე პარამეტრის ფუნქციაა) ნამრავლის ინტეგრებით. ამასთან, ინტეგრალური გარდაქმნები შეიძლება იყოს ნამდვილი ან კომპლექსური, იმის შესაბამისად, რა მნიშვნელობას იღებს პარამეტრი.

დავუშვათ, $K(x,s)$, $a < x < \infty$, $b < s < \infty$ მოცემული, თავისი განსაზღვრის არეზე უწყვეტი ფუნქციაა. გარდა ამისა, დავუშვათ, A რაიმე ფუნქციონალური სივრცეა და $f(x) \in A$. თუ:

$$F(s) = \int_a^\infty K(x,s) f(x) dx \tag{1}$$

ინტეგრალი არსებობს, ასეთ დროს ამბობენ, მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის $F(s)$ *ინტეგრალური გარდაქმნა.* ამასთან, $K(x,s)$-ს ეწოდება ინტეგრალური გარდაქმნის *ბირთვი (ან გული)*; x ცვლადზე დამოკიდებულ f ფუნქციას ეწოდება *ორიგინალი*, ხოლო s დამოუკიდებელი ცვლადის F ფუნქციას კი *ტრანსფორმანტი.* ამრიგად, (1) ინტეგრალური გარდაქმნა არის *ინტეგრალური ოპერატორი* A ფუნქციონალური სივრციდან B ფუნქციონალურ სივრცეში, რომელიც ყოველ $f(x)$-ს შეუსაბამებს $F(s)$ და ეს შესაბამისობა (1) გამოსახულებითაა მოცემული. თუ ეს ოპერატორი შებრუნებადია და შებრუნებული ოპერატორი მოიცემა თანადობით:

$$f(x) = \int_b^\infty M(x,s) F(s) ds, \tag{2}$$

ამ დროს $M(x,s)$ ფუნქციას უწოდებენ *შებრუნებული გარდაქმნის ბირთვს.* შებრუნებული ინტეგრალური ოპერატორის განსაზღვრის არე ჩვეულებრივ B ფუნქციონალური სივრცის ქვესივრცეა. შესაძლებელია A და B ფუნქ-

ციონალური სივრცეები ერთმანეთს ემთხვეოდეს, ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოცემულია $f(x)$ ფუნქციის $F(s)$ *ინტეგრალური გარდაქმნა* A *-ში.*

მოვიყვანოთ ინტეგრალური გარდაქმნის მაგალითები:

1. *ფურიეს გარდაქმნა* ეწოდება შემდეგ ინტეგრალურ გარდაქმნას:

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx\,,-\infty<s<\infty\,, \tag{3}$$

რომლის შებრუნებულ გარდაქმნას აქვს ასეთი სახე:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-isx}ds\,,-\infty<x<\infty\,. \tag{4}$$

ნათელია, რომ (3) და (4) გარდაქმნების ბირთვები, შესაბამისად, არიან e^{isx} და e^{-isx}.

2. ფურიეს ზემოთ მოყვანილი გარდაქმნის კერძო შემთხვევებია სინუს და კოსინუს ფურიეს გარდაქმნები, რომლებიც შემდეგი თანადობით მოიცემიან:

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(x)\sin(sx)dx\,,0<s<\infty\,;\;\; F(s)=\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx\,,\;\; 0<s<\infty\,.$$

მათი შებრუნებული ინტეგრალური გარდაქმნებია, შესაბამისად:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty} F(s)\sin(sx)ds\,,\;\; 0<x<\infty;\, f(x)=\int_{0}^{\infty} F(s)\cos(sx)ds\,,\;\; 0<x<\infty.$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ განიმარტება აგრეთვე *ფურიეს განზოგადებული გარდაქმნა* ფორმულით:

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(x)\frac{s\cos(sx)+h\sin(sx)}{\sqrt{s^2+h^2}}dx\,,\;\; 0<s<\infty\,,$$

რომლის შებრუნებულია

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(s)\frac{s\cos(sx)+h\sin(sx)}{\sqrt{s^2+h^2}}ds\,,\;\; 0<x<\infty.$$

მოყვანილი 2), 3) გარდაქმნები ნამდვილი გარდაქმნების მაგალითებია, რადგან s პარამეტრი ნამდვილ რიცხვთა რაიმე ინტერვალზე იცვლება და, აქედან გამომდინარე, გარდაქმნებში მონაწილე ფუნქციები ნამდვილი ცვლადს ნამდვილ-მნიშვნელობიანი ფუნქციებია. კომპლექსური გარდაქმნის მაგალითებია *ლაპლასისა* და *მელინის* გარდაქმნები, რომლებსაც, საზოგადოდ, აქვთ ასეთი სახე:

$$F(p)=\int_a^\infty K(x,p)f(x)dx, \tag{5}$$

სადაც a მოცემული რიცხვია, $p=\alpha+i\beta$ კომპლექსური პარამეტრია და მისი ცვლილების არეა D კომპლექსურ რიცხვთა ქვესიმრავლე, ხოლო K კი – გარდაქმნის ბირთვია, რომელიც a-სთან ერთად განსაზღვრავს გარდაქმნის სახეს. კერძოდ, თუ $K(x,p)=e^{-xp}$, $a=0$, ხოლო D კი $\alpha=\alpha_1$-ის მარჯვნივ მდებარე ნახევარსიბრტყეა კომპლექსურ სიბრტყეზე, მაშინ (5) გარდაქმნას ეწოდება *ლაპლასის გარდაქმნა*. თუ $K(x,p)=e^{p-1}$, $a=0$, D კი არის ზოლი, მოთავსებული $\alpha=\alpha_1$ და $\alpha=\alpha_2$ პარალელურ წრფეებს შორის, მაშინ (5) გარდაქმნას ეწოდება *მელინის გარდაქმნა*.

ინტეგრალური გარდაქმნების საშუალებით იხსნება მათემატიკური ფიზიკის არაერთგვაროვანი განტოლებები გრინბერგის მეთოდით (არაერთგვაროვანი ამოცანების ამოხსნის ერთ-ერთი მეთოდი). ინტეგრალური გარდაქმნის გამოყენება კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების მიმართ დროებით გამორიცხავს ერთ ცვლადს და ამოცანა დაიყვანება ერთი ცვლადით ნაკლები განტოლების ამოხსნაზე, ხოლო ორი ცვლადის შემთხვევაში კი, – ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე. ბუნებრივია, გარდაქმნილი განტოლების ამოხსნის შემდეგ საჭიროა აღვადგინოთ „დაკარგული" დამოუკიდებელი ცვლადი. ეს პროცედურა ხორციელდება ინტეგრალური განტოლების ამოხსნის საშუალებით, რომელიც, ზოგჯერ, მხოლოდ შებრუნებული ინტეგრალური გარდაქმნაა და სხვა არაფერი, რის გამოც ინტეგრალური გარდაქმნების მეთოდი ეფექტურია პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად.

21.2. ლაპლასის გარდაქმნა

ლაპლასის გარდაქმნა ითვლება მათემატიკური ფიზიკის არასტაციონარული ამოცანების ამოხსნის ეფექტურ მეთოდად, რის გამოც მას დაწვრილებით განვიხილავთ და ყურადღებას გავამახვილებთ ამ გარდაქმნის მრავალმხრივ გამოყენებაზე.

დავუშვათ, $f(t)$, $t\in(0,\infty)$ ნამდვილი ცვლადის ფუნქციაა და განვიხილოთ:

$$\hat{f}(z)=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt \tag{1}$$

სახის ინტეგრალი $\mathrm{Re}(z) > a$ კომპლექსური სიბრტყის ქვესიმრავლეზე, სადაც z კომპლექსური ცვლადია. თუ (1) ინტეგრალი არსებობს რომელიმე a-სათვის, მაშინ ამბობენ, რომ (1) ტოლობა განსაზღვრავს *ლაპლასის გარდაქმნას*. (1) თანადობით მოცემული გარდაქმნა არის ოპერატორი გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის. იმ ფუნქციონალური სივრცის სტრუქტურას, რომელზედაც (1) ტოლობით მოცემული ოპერატორი ყოველთვის არსებობს (ე.ი. ინტეგრალს აზრი აქვს), ქვემოთ მოვიყვანთ, მანამდე შევნიშნოთ, რომ, მაგალითად, $f(t) = e^{t^2}$ ან $f(t) = \frac{1}{t}$ ფუნქციებისათვის (1) ინტეგრალი არ არსებობს (როგორიც არ უნდა იყოს z), მაშინ, როდესაც $f(t) = t^2$ ფუნქციისათვის არსებობს მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\mathrm{Re}(z) > 0$, ხოლო $f(t) = e^{2t}$-სათვის კი, – როდესაც $\mathrm{Re}(z) > 2$.

ახლა შემოვიტანოთ ფუნქციონალური სივრცე, აღვნიშნოთ იგი S_α და ვუწოდოთ α *მაჩვენებლით სასრულად ზრდად ფუნქციათა სივრცე*. f ნამდვილი ცვლადის კომპლექსური ფუნქცია ეკუთვნის S_α-ს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $f(t) = 0$, თუ $t < 0$;

2. f უწყვეტია ყველგან, გარდა იმ სასრული რაოდენობის წერტილებისა, სადაც მას შესაძლებელია ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტა.

3. არსებობს ისეთი $M > 0$ და $s \geq 0$ რიცხვები, რომ ყოველი $t \geq 0$-სათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(t)| < Me^{s}. \tag{2}$$

$\{s\}$ სიმრავლის ქვედა საზღვარს – α-ს, რომლისთვისაც სრულდება (2) უტოლობა, ეწოდება *ზრდის მაჩვენებელი*.

S_α სივრცეზე (1) თანადობით განსაზღვრულ ინტეგრალურ ოპერატორს ეწოდება *ლაპლასის ინტეგრალური ოპერატორი* და ჩაწერის მოხერხებულობისათვის ეს ოპერატორი და მისი შესაბამისი გარდაქმნა აღინიშნება L-ით. ამრიგად, $Lf(t) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$.

ვთქვათ, $Lf(t) = F(z)$. L გარდაქმნის *შებრუნებული* (შექცეული) გარდაქმნა $L^{-1}F(z)$ განიმარტება ფორმულით $f(t) = L^{-1}F(z) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt}dz$,

რომელსაც *რიმან-მელინის ფორმულა* ეწოდება, სადაც $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)e^{zt}dz = lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT} F(z)e^{zt}dz$, ხოლო $c > a$.

ჩამოვთვალოთ ლაპლასის გარდაქმნის ძირითადი თვისებები:

1. ლაპლასის გარდაქმნა წრფივია, ანუ, თუ $Lf_1(t) = g_1(z)$ და $Lf_2(t) = g_2(z)$, მაშინ:

$$L(af_1(t) + bf_2(t)) = ag_1(z) + bg_2(z),$$

სადაც a და b ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვებია.

2. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $Lf(at) = \frac{1}{a} g\left(\frac{z}{a}\right)$, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

3. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $Lf(t-a) = e^{-za}g(z)$, სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

4. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $L(e^{-at}f(t)) = g(z+a)$, სადაც a ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია.

5. თუ $f(t)$-სთან ერთად მისი $f^{/}(t)$ წარმოებულიც S_α სივრცის ელემენტია და $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $Lf^{/}(t) = zg(z) - f(0)$, როდესაც $\mathrm{Re}z > \alpha$, სადაც $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. გარდა ამისა, თუ $f^{/}(t)$, $f^{//}(t),..., f^{(n)}(t) \in S_\alpha$, მაშინ:

$$Lf^{//}(t) = z^2 g(z) - zf(0) - f^{/}(0),$$

$$Lf^{///}(t) = z^3 g(z) - z^2 f(0) - zf^{/}(0) - f^{//}(0),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$Lf^{(n)}(t) = z^n g(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f^{/}(0) - \dots f^{(n-1)}(0).$$

ლაპლასის გარდაქმნის ეს თვისება გამოიყენება წრფივი არაერთგვაროვანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად და ამოხსნის ამ მეთოდს *ოპერატორული მეთოდი* ეწოდება.

6. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $L(-tf(t)) = g^{/}(z)$, როდესაც $\mathrm{Re}z > \alpha$.

7. თუ $Lf(t) = g(z)$, მაშინ $L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_z^\infty g(\tau)d\tau$, როდესაც $\int_0^\infty e^{-zt}\frac{f(t)}{t}dt$ ინტეგრალი არსებობს.

8. თუ $F(t)=\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau$, მაშინ $LF(t)=\dfrac{g(z)}{z}$.

კომპლექსური ცვლადის $\hat{f}(z)$ ფუნქციის ანალიზური ხასიათი მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1. *სასრულად ზრდად ფუნქციათა სივრციდან აღებული ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნა არის კომპლექსური z ცვლადის ანალიზური ფუნქცია $\mathrm{Re}z \geq c$ ნახევარსიბრტყეზე.*

თეორემაში მითითებული არე, რომელზედაც ლაპლასის ტრანსფორმანტი ანალიზურია, აღვნიშნოთ D-თი: $D=\{z:\mathrm{Re}(z)\geq c\}$. D არის გარეთ, საზოგადოდ, (1) ინტეგრალი არ არსებობს. ლაპლასის გარდაქმნის მნიშვნელობას D არის გარეთ პოულობენ ანალიზური გაგრძელების საშუალებით. ნათელია, რომ ამ დროს შესაძლებელია მივიღოთ მრავალსახა ფუნქცია. იმ წერტილებს, სადაც ლაპლასის ტრანსფორმანტის გაგრძელება შეუძლებელია, ეწოდება განსაკუთრებული წერტილები. ლაპლასის გარდაქმნის ანალიზური გაგრძელება შესაძლებელია მაშინ, თუ ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში აიღება. მაგალითად, თუ $f(t)=1$ მუდმივი ფუნქციაა, მაშინ:

$$Lf(t)=\int 1\cdot e^{-zt}dt=\left.\frac{e^{-zt}}{z}\right|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{z},\ \ \mathrm{Re}z>0.$$

$Lf(t)=\dfrac{1}{z}$ კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია ანალიზურად გაგრძელებადია მთელ კომპლექსურ სიბრტყეზე, გარდა კოორდინატთა $O=(0,0)$ სათავისა, რომელიც არის განსაკუთრებული წერტილი, კერძოდ, პირველი რიგის პოლუსი.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარე ისმის კითხვა: აკმაყოფილებს თუ არა რაიმე განტოლებას ანალიზურად გაგრძელებული ფუნქცია? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა თეორემა, რომელიც ანალიზური გაგრძელების პრინციპის სახელწოდებითაა ცნობილი.

თეორემა 2. *თუ რაიმე ფუნქცია აკმაყოფილებს რომელიმე ანალიზურკოეფიციენტებიან განტოლებას, მაშინ მისი ანალიზური გაგრძელებაც აკმაყოფილებს ამ განტოლებას.*

ზემოთ მოყვანილი თეორემები მტკიცდება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის გამოყენებით. მათ შორის, თეორემა 2 ანალიზურკოეფიციენტებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ერთ-ერთი ცენტრალუ-

რი საკითხია. ჩვენი შემდგომი მიზნებისათვის ლაპლასის გარდაქმნის ანალიზური თვისებები საჭირო არ არის. ზემოთ მოყვანილი ფაქტების მხოლოდ დამახსოვრება საკმარისია მომდევნო პარაგრაფში მოყვანილი მასალის ანალიზისათვის. თუმცა აქვე აღვნიშნავთ, რომ ინტეგრალის გამოსათვლელად კომპლექსური ანალიზის (მაგალითად, ნაშთთა თეორიის) მეთოდების გამოყენება ხელსაყრელია.

21.3. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრება ოპერაციული მეთოდით

განვიხილოთ კოშის ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(t)\,,\;\; a_0\neq 0 \tag{1}$$

$$y\,|_{t=t_0}=y_0\,,\;\; y'\,|_{t=t_0}=y_0',\ldots,\;\; y^{(n-1)}\,|_{t=t_0}=y_0^{(n-1)}\;\; . \tag{2}$$

ეს ამოცანა ლაპლასის გარდაქმნის საშუალებით ეფექტურად ამოიხსნება მხოლოდ იმ დაშვებით, რომ არსებობს $f(t)$ და $y'(t)$-ს ლაპლასის გარდაქმნები.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ცვლადკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$a_0(t)y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(t)y'+a_n(t)y=f(t)\,,\;\; a_0\neq 0$$

ოპერაციულ მეთოდს ყოველთვის არ მივყავართ სასურველ შედეგამდე, თუმცა ზოგჯერ ეს მეთოდი საკმაოდ ეფექტურია (იხ. მაგალითი 3).

დავუბრუნდეთ (1), (2) ამოცანას და დავუშვათ, რომ:

$$\hat{y}(z)=\int_0^\infty y(t)e^{-zt}dt\,,\;\; \hat{f}(z)=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt\,, \tag{3}$$

მაშინ

$$\int_0^\infty y'(t)e^{-zt}dt=\hat{y}'=z\hat{y}-y_0\,,\;\; \int_0^\infty y''(t)e^{-zt}dt=\hat{y}''=z^2\hat{y}-zy_0-y_0'\,, \tag{4}$$

$$\ldots\;\ldots\;\ldots$$

$$\int_0^\infty y^{(n)}(t)e^{-zt}dt=\hat{y}^{(n)}=z^n\hat{y}-z^{n-1}y_0-z^{n-2}y_0'-\ldots-y_0^{(n-1)}$$

ლაპლასის გარდაქმნის წრფივობის თვისების და (3), (4) ტოლობების გათვალისწინებით, (1) განტოლება გადავა განტოლებაში:

$$\hat{y}(z)(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n) - Q_{n-1}(z) = \hat{f}(z)$$

ანუ

$$\hat{y}(z)P_n(z) - Q_{n-1}(z) = \hat{f}(z)\,, \tag{5}$$

სადაც $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ n-ხარისხის მრავალწევრია, ხოლო $Q_{n-1}(z)$ არის არაუმეტეს $n-1$-ხარისხის მრავალწევრი, რომელიც (2) საწყისი პირობიდან მიიღება. (5)-დან ვპოულობთ:

$$\hat{y}(z) = \frac{\hat{f}(z) + Q_{n-1}(z)}{P_n(z)}\,,$$

მაშასადამე:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \hat{y}(z)e^{zt}dz\,.$$

ინტეგრების L წრფე გადის $\hat{y}(z)$ ფუნქციის განსაკუთრებული წერტილების მარჯვნივ. თუ საწყისი პირობები ნულოვანია, ე.ი. თუ $y|_{t=0} = 0$, $y'|_{t=0} = 0$,..., $y^{(n-1)}|_{t=t_0} = 0$, მაშინ $Q_{n-1}(z) = 0$ და

$$y(z) = \frac{\hat{f}(z)}{P_n(z)} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\hat{f}(z)e^{zt}}{P_n(z)}dz\,.$$

(1), (2) ამოცანის ამოხსნის ამ მეთოდს *ოპერაციული მეთოდი* ეწოდება.

მოვიყვანთ ოპერაციული მეთოდით კოშის ამოცანის ამოხსნის ორ მაგალითს მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის. მოყვანილი ამოცანების ამოხსნა ტრადიციული გზითაც შეიძლება. მიუხედავად ამისა, ოპერაციული მეთოდით განტოლების ამოხსნის თავისებურებების ჩვენების მიზნით, მათ ამოხსნას დაწვრილებით განვიხილავთ.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ:

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-3t}\,,\quad y(0) = 1\,,\quad y'(0) = -1$$

კოშის ამოცანის ამოხსნა.

დავუშვათ:

$$\hat{y}(z) = \int_0^\infty y(t)e^{-zt}dt\,,$$

მაშინ

$$\int_0^\infty y'(t)e^{-zt}dt = \hat{y}'(z) = z\hat{y}(z) - 1\,,$$

$$\int_0^\infty y''(t)e^{-zt}dt = \hat{y}''(z) = z^2\hat{y}(z) - z + 1\,.$$

მივიღებთ განტოლებას:

$$\hat{y}(z)(z^2+3z+2) = \frac{1}{z+3} + z + 2\,,\ \Rightarrow\ \hat{y}(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1}{z+1}$$

ხევისაიდას ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2} - e^{-2t} + \frac{e^{-3t}}{2} + e^{-t} = \frac{3e^{-t}}{2} - e^{-2t} + \frac{e^{-3t}}{2}\,.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ:

$$y'' + 4y' = 2\sin(2t)\,,\quad y(0) = -1\,,\quad y'(0) = 0$$

კოშის ამოცანის ამონახსნი.

დავუშვათ:

$$\hat{y}(z) = \int_0^\infty y(t)e^{-zt}dt\,,$$

მაშინ

$$\int_0^\infty y''(t)e^{-zt}dt = \hat{y}''(z) = z^2\hat{y}(z) + z\,,$$

ხოლო განტოლება კი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\hat{y}(z)(z^2+4) = \frac{4}{z^2+4} - z\,,$$

საიდანაც ვპოულობთ:

$$\hat{y}(z) = \frac{4}{(z^2+4)^2} - \frac{z}{z^2+4}\,.$$

ცნობილია, რომ $L^{-1}\left(\dfrac{z}{z^2+4}\right)=\cos(2t)$. $L^{-1}\left(\dfrac{z}{(z^2+4)^2}\right)$-ის საპოვნელად ვისარგებლოთ ნახვევის ფორმულით და ლაპლასის გარდაქმნის ცხრილით: $L^{-1}\left(\dfrac{z}{z^2+4}\right)=\sin(2t)$, ამიტომ:

$$L^{-1}\left(\frac{z}{(z^2+4)^2}\right)=L^{-1}\left(\frac{2}{z^2+4}\frac{2}{z^2+4}\right)=\int_0^t \sin(2\tau)\sin(2(t-\tau))d\tau .$$

მაგრამ:

$$\int_0^t \sin(2\tau)\sin(2(t-\tau))d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t [\cos(4\tau-2t)-\cos(2t)]d\tau=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(4\tau-2t)}{4}-\tau\cos(2t)\right]\Bigg|_0^t=\frac{\sin(2t)}{4}-\frac{t}{2}\cos(2t) .$$

ამრიგად:

$$y(t)=\frac{\sin(2t)}{4}-\frac{t}{2}\cos(2t)-\cos(2t)=\frac{\sin(2t)}{4}-\frac{t+2}{2}\cos(2t) .$$

მაგალითი 3. ამოვხსნათ ცვლადკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება:

$$tu''+u'+tu=0 \qquad (1)$$

იმ დაშვებით, რომ $t=0$ წერტილში $u(t)$ და მისი პირველი წარმოებული შემოსაზღვრული ფუნქციებია.

ამოხსნა (1) განტოლება გავამრავლოთ e^{-zt}-ზე და ვაინტეგროთ 0-დან $+\infty$-მდე. მივიღებთ:

$$\int_0^\infty tu''e^{-zt}dt+\int_0^\infty u'e^{-zt}dt+\int_0^\infty tue^{-zt}dt=0 .$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$\hat{u}=\int_0^\infty ue^{-zt}dt ,$$

მაშინ

$$\int_0^\infty tue^{-zt}dt = -\frac{d}{dz}\int_0^\infty ue^{-zt}dt = -\frac{d\hat{u}}{dz}, \quad \int_0^\infty \hat{u}'e^{-zt}dt = z\hat{u} - u\,|_{t=0},$$

$$\int_0^\infty tu''e^{-zt}dt = -\frac{d}{dz}\int_0^\infty u''e^{-zt}dt = -\frac{d\hat{u}''}{dz} = -\frac{d}{dz}\left(z^2\hat{u} - zu\,|_{t=0} - u'\,|_{t=0}\right) =$$

$$= z^2\frac{d\hat{u}}{dz} - 2z\hat{u} + u\,|_{t=0}.$$

მაშასადამე, (1) განტოლების მაგივრად მივიღეთ განტოლება:

$$z^2\frac{d\hat{u}}{dz} - 2z\hat{u} + z\hat{u} - \frac{d\hat{u}}{dz} = 0 \quad \Rightarrow (z^2+1)\frac{d\hat{u}}{dz} + z\hat{u} = 0 \qquad (2)$$

მიღებული (2) განტოლება საწყის (1) განტოლებაზე უფრო მარტივია, რადგან იგი წარმოადგენს პირველი რიგის განცალებადცვლადებიან განტოლებას:

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} + \frac{zdz}{z^2+1} = 0 \Rightarrow \ln(\hat{u}) + \frac{1}{2}\ln(z^2+1) = \ln(C) \Rightarrow \hat{u} = \frac{C}{\sqrt{z^2+1}}.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $C = 1$, მაშინ $u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{zt}dz}{\sqrt{z^2+1}} = u(t) = J_0(t)$.

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ტოლობები:

$$L\left(J_0(at)\right) = \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

და

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right) = J_0(t).$$

21.4. ორიგინალის აღდგენა ტრანსფორმანტის საშუალებით

დავუშვათ, ლაპლასის ტრანსფორმანტი $\hat{f}(z)$ რაციონალური ფუნქციაა და ასე გამოიყურება:

$$\hat{f}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \qquad (1)$$

გარდა ამისა, ვთქვათ, $\deg Q(z) \geq \deg P(z)$ და $Q(z)$, $P(z)$ მრავალწევრებს არ აქვთ საერთო ნულები.

(1) რაციონალური ფუნქციის განსაკუთრებული წერტილებია $Q(z)$ მრავალწევრის $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ნულები, რომლებიც იქნებიან ლაპლასის შებრუნებული

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(z) e^{zt} dz$$

გარდაქმნის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების პოლუსები. მაშინ:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} \hat{f}(z) e^{zt} .$$

თუ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ მარტივი პოლუსებია, მაშინ ნაშთთა თეორიის გამოყენებით მტკიცდება, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(z_k) e^{z_k t}}{Q'(z_k)} .$$

უკანასკნელ იგივეობას *ჰევისაიდის დაშლა* ეწოდება.

21.5. კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრება ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით

დავუშვათ, $u = u(x, y)$. განვიხილოთ განტოლება:

$$L_x(u) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} - cu = F(x,t), \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \qquad (1)$$

სადაც $L_x(u) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - qu \right)$, v, b, c მუდმივებია ან x-ის მიმართ ნამდვილი ფუნქციებია, p, p', q, r x-ის მიმართ უწყვეტი ფუნქციებია $[0, l]$-ზე, ამასთან, $p, r > 0$.

(1) განტოლება ან ჰიპერბოლურია, ან პარაბოლური, მისი ტიპი ამ ორიდან განისაზღვრება v-ს ნიშნის მიხედვით.

დავუშვათ, x-ის მიმართ სრულდება I, II, III გვარის სასაზღვრო პირობები:

I $\qquad u|_{x=0} = f_0(t)$, $u|_{x=l} = f_l(t)$;

II $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = f_0(t)\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = f_l(t)\,;$

III $\quad \frac{\partial u}{\partial x} - h_0 u\Big|_{x=0} = f_0(t)\,,\ \frac{\partial u}{\partial x} + h_l u\Big|_{x=l} = f_l(t)\,.$

გარდა სასაზღვრო პირობისა, დავუშვათ, ჰიპერბოლური განტოლებისათვის საწყის პირობას აქვს ასეთი სახე:

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x)\,,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)\,.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$\hat{u}(x,z) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-zt}dt\,.$$

(1) განტოლება გავამრავლოთ e^{-zt}-ზე და ვაინტეგროთ 0-დან ∞-მდე. მივიღებთ:

$$\int_0^\infty L_x(u)e^{-zt}dt - \frac{1}{v^2}\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}e^{-zt}dt - b\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}e^{-zt}dt - c\int_0^\infty ue^{-zt}dt = \int_0^\infty F(x,t)e^{-zt}dt\,.$$

აქედან:

$$L_x(\hat{u}) - \frac{1}{v^2}\left[z^2\hat{u} - zu\,|_{t=0} - \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}\right] - b[z\hat{u} - u\,|_{t=0}] - c\hat{u} = \hat{F}(x,z)\,, \qquad (2)$$

სადაც: $\hat{F}(x,z) = \int_0^\infty F(x,t)e^{-zt}dt\,.$

(2) განტოლება შესაძლებელია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$L_x(\hat{u}) - \left[\frac{z^2}{v^2} + bz + c\right]\hat{u} = g(x,z)\,, \qquad (3)$$

სადაც $g(x,z) = \hat{F}(x,z) - \frac{z}{v^2}\varphi(x) - \frac{1}{v^2}\psi(x) - b\varphi(x)$ ცნობილი ფუნქციაა. ზემოთ მოყვანილი I, II, III გვარის სასაზღვრო პირობები გარდაიქმნებიან შემდეგნაირად:

$$\hat{u}\,|_{x=0} = \hat{f}_0\,,\ \ \hat{u}\,|_{x=l} = \hat{f}_l\,;\quad \left.\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right|_{x=0} = \hat{f}_0\quad \left.\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right|_{x=l} = \hat{f}_l\,;$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - h_0\hat{u}\Big|_{x=0} = \hat{f}\,,\quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + h_l\hat{u}\Big|_{x=l} = \hat{f}_l\,.$$

(3) განტოლების ამოხსნის ზემოთ მოყვანილ სასაზღვრო პირობებში არის $\hat{u}=\hat{u}(x,z)$ ფუნქცია, ამიტომ $u(x,t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\hat{u}(x,z)e^{zt}dz$.

ამოცანა 1 (ნახევრად სასრული ღეროს განივი რხევა). ნახევრად სასრული ღერო გავაიგივოთ $x\geq 0$ ნამდვილ რიცხვთა $[0,\infty)$ ნახევარღერძთან. ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება ასეთია:

ვიპოვოთ $u=u(x,t)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\;\; v=\sqrt{\frac{E}{\rho}},\;\; 0<x<\infty,\;\; t>0,$$

სასაზღვრო:

$$u\,|_{x=0}=f(t),\;\; u\,|_{x\to 0}=0$$

და საწყის პირობებს:

$$u\,|_{t=0}=0,\;\; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

ამოცანა ამოვხსნათ ლაპლასის გარდაქმნის საშუალებით.

დავუშვათ:

$$\hat{u}(x,z)=\int\limits_{0}^{\infty}u(x,t)e^{-zt}dt.$$

გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა (1) განტოლების მიმართ და გავითვალისწინოთ (2) სასაზღვრო პირობები, გვექნება:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2}-\frac{z^2}{v^2}\hat{u}=0, \tag{4}$$

$$\hat{u}\,|_{x=0}=\hat{f}(z),\;\; \hat{u}\,|_{x\to 0}=0. \tag{5}$$

(4) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა, რომლის ამონახსნი ასეთია:

$$\hat{u}(x,z)=Ae^{-\frac{z}{v}x}+Be^{\frac{z}{v}x}. \tag{6}$$

(5) სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ: $B=0$, $A=\hat{f}$.

ამიტომ (6) მიიღებს სახეს:

$$\hat{u}=\hat{f}(z)e^{-\frac{z}{v}x}.$$

მაშასადამე:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \hat{f}(z)e^{z\left(t-\frac{x}{v}\right)}dz\,,\ \ x>0\,,\ \ t>0. \qquad (7)$$

რიმან-მელინის ფორმულის თანახმად:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \hat{f}(z)e^{zt}dz=\begin{cases} f(t), & t>0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$$

რაც ნიშნავს, რომ (7) შესაძლებელია გადაიწეროს შემდეგნაირად:

$$u(x,t)=\begin{cases} f\left(t-\dfrac{x}{v}\right), & t>\dfrac{x}{v}, \\ 0, & t<\dfrac{x}{v}. \end{cases}$$

ამრიგად, ფიზიკური პროცესი არის მორბენალი ტალღა, რომელიც v სიჩქარით ვრცელდება ნახევარღერძის $x=0$ ბოლოდან.

ამოცანა 2 (სასრული ღეროს განივი რხევა). წინა ამოცანისაგან განსხვავებით, ახლა, ვთქვათ, ღერო შემოსაზღვრულია და $0\le x\le l$. საჭიროა ვიპოვოთ $u=u(x,t)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\,,\ \ v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,,\ \ 0<x<l\,,\ \ t>0,$$

სასაზღვრო:

$$u\,|_{x=0}=f(t)\,,\ \ u\,|_{x=l}=0$$

და საწყის:

$$u\,|_{t=0}=0\,,\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

პირობებს.

ამოხსნა: კვლავ ლაპლასის გარდაქმნა გამოვიყენოთ და დავუშვათ:

$$\hat{u}(x,z)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-zt}dt\,.$$

ანალოგიურად წინა ამოცანისა, მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2}-\frac{z^2}{v^2}\hat{u}=0\,,\quad \hat{u}\,|_{x=0}=\hat{f}(z)\,,\ \hat{u}\,|_{x=l}=0\,,$$

საიდანაც ვპოულობთ:

$$u(x,z)=\hat{f}(z)\frac{\sinh\left(\frac{z}{v}(l-x)\right)}{\sinh\left(\frac{z}{v}x\right)}\,.$$

ამრიგად:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \hat{f}(z)\frac{\sinh\left(\frac{z}{v}(l-x)\right)}{\sinh\left(\frac{z}{v}x\right)}e^{zt}dz\,. \tag{8}$$

უკანასკნელი ინტეგრალის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\frac{\sinh\left(\frac{z}{v}(l-x)\right)}{\sinh\left(\frac{z}{v}x\right)}=\frac{e^{\frac{z}{v}(l-x)}-e^{-\frac{z}{v}(l-x)}}{e^{\frac{z}{v}l}-e^{-\frac{z}{v}l}}=\frac{e^{-\frac{z}{v}x}-e^{-\frac{z}{v}(2l-x)}}{1-e^{-\frac{2z}{v}l}}=\left(e^{-\frac{z}{v}x}-e^{-\frac{z}{v}(2l-x)}\right)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2\frac{z}{v}lk}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{z}{v}(2lk+x)}-e^{-\frac{z}{v}(2lk+2l-x)}\right),\ \left|e^{-2\frac{z}{v}l}\right|<1\,. \tag{9}$$

ჩავსვათ ეს მწკრივი (8)-ში და დავუშვათ, შესაძლებელია წევრობრივი ინტეგრება, მივიღებთ:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{z\left(t-\frac{2lk+x}{v}\right)}\hat{f}(z)dz-\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{z\left(t-\frac{2lk+2l-x}{v}\right)}\hat{f}(z)dz\right).$$

რიმან-მელინის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ (9) მწკრივებიდან თითოეული მათგანი შეიცავს სასრული რაოდენობის წევრებს, რადგან ყოველთვის მოიძებნება ისეთი k რიცხვი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \hat{f}(z)e^{zt}dz=\begin{cases} f(t), & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ მწკრივში გვექნება უსუსრულოდ ბევრი 0-ის ტოლი შესაკრები. მაშასადამე:

$$0 < t < \frac{x}{v} \Rightarrow u = 0\,,$$

$$\frac{x}{v} < t < \frac{2l - x}{v} \Rightarrow u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$\frac{2l - x}{v} < t < \frac{2l + x}{v} \Rightarrow u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{2l - x}{v}\right),$$

$$\frac{2l + x}{v} < t < \frac{4l - x}{v} \Rightarrow u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) - f\left(t - \frac{2l - x}{v}\right) + f\left(t - \frac{2l + x}{v}\right)$$

და ა.შ.

დროის ყოველი ინტერვალისათვის ამონახსნს ვპოულობთ ანალოგიურად. ამრიგად, ღეროში ვრცელდება ბრტყელი ტალღები. ისინი აირეკლებიან კიდ-ლებიდან და მათი თანდათანობით ზედდება ხდება.

ამოცანა 3 (მაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის გან-ტოლება). განვიხილოთ m მასის დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა $\vec{H}$ დაძაბულობის მქონე ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში. ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება იწერება შემდეგნაირად (ჩვენ განტოლების დაწერის დროს ვინარ-ჩუნებთ იმ აღნიშვნებს, რაც, საზოგადოდ, მიღებულია ფიზიკურ ლიტერატუ-რაში):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{H}\,,$$

სადაც c სინათლის სიჩქარეა, e ნაწილაკის მუხტია, ხოლო წერტილი კი, როგორც უკვე აღვნიშნეთ (ავტონომიური სისტემების განმარტების დროს), ნიშნავს წარმოებულს დროითი ცვლადის მიმართ. საკოორდინატო ღერძებზე ამ განტოლების პროექტირის შემდეგ მივიღებთ ($\vec{H} = H\vec{k}$):

$$\ddot{x} = \frac{eH}{mc}\dot{y}\,,\quad \ddot{y} = -\frac{eH}{mc}\dot{x}\,,\quad \ddot{z} = 0\,.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $\omega = \dfrac{eH}{mc}$, მაშინ მოძრაობის განტოლების პრო-ექცია ღერძებზე მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\ddot{x} = \omega\dot{y}\,,\quad \ddot{y} = -\omega\dot{x}\,,\quad \ddot{z} = 0\,. \tag{10}$$

ჩვენი ინტერესის საგანი (10) განტოლებათა სისტემაა. მისი ამოხსნის ერთ მეთოდს უკვე გავეცანით (იხ. პარაგრაფები 7.3 და 7.5). აქ მისი ამოხსნისათვის გამოვიყენებთ ლაპლასის გარდაქმნას.

განვიხილოთ კოშის ამოცანა. ჩავთვალოთ, რომ:

$$x\big|_{t=0}=0\,,\; y\big|_{t=0}=0\,,\; z\big|_{t=0}=0\,,\; \dot{x}\big|_{t=0}=v_0\cos(\alpha)\,,\; \dot{y}\big|_{t=0}=v_0\sin(\alpha)\,,\quad \dot{z}\big|_{t=0}=0\,.$$

ნათელია, რომ ასეთ პირობებში, როდესაც $t\geq 0$, $z(t)=0$. გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა (10)-ის პირველი ორი განტოლებისათვის, მივიღებთ:

$$z^2\hat{x}-zx\,|_{t=0}-\dot{x}\,|_{t=0}=\omega(z\hat{y}-y\,|_{t=0})\,,$$

$$z^2\hat{y}-zy\,|_{t=0}-\dot{y}\,|_{t=0}=-\omega(z\hat{x}-x\,|_{t=0})\,.$$

საწყისი პირობების გამოყენებით გავამარტივოთ ეს გამოსახულებები და მივალთ ალგებრულ განტოლებათა:

$$z^2\hat{x}-\omega z\hat{y}=v_0\cos\alpha\,,$$
$$z^2\hat{y}+\omega z\hat{x}=v_0\sin\alpha$$

სისტემაზე, რომლის ამონახსნებია:

$$\hat{x}=\frac{v_0\cos\alpha}{z^2+\omega^2}+\frac{v_0\omega\sin\alpha}{z(z^2+\omega^2)}\,,\quad \hat{y}=\frac{v_0\sin\alpha}{z^2+\omega^2}+\frac{v_0\omega\cos\alpha}{z(z^2+\omega^2)}\,.$$

$x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციების აღსადგენად დაგვჭირდება რამდენიმე ცნობილი ტოლობა, რომლებსაც ახლა მოვიყვანთ:

$$\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega}=\int_0^t\sin(\omega\tau)d\tau$$

და

$$L(\sin(\omega t))=\frac{\omega}{\omega^2+z^2}\Rightarrow L\left(\int_0^t\sin(\omega\tau)d\tau\right)=\frac{\omega}{z(\omega^2+z^2)}\Rightarrow L\left(\frac{1-\cos(\omega t)}{\omega}\right)=\frac{\omega}{z(\omega^2+z^2)}.$$

გამოსახულებების უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$x=\frac{v_0\cos\alpha}{\omega}\sin(\omega t)+\frac{v_0\sin\alpha}{\omega}(1-\cos(\omega t))\,,$$

$$y=\frac{v_0\sin\alpha}{\omega}\sin(\omega t)-\frac{v_0\cos\alpha}{\omega}(1-\cos(\omega t))\,.$$

მიღებული სისტემა გადავწეროთ მისი ეკვივალენტური ფორმით:

$$x - \frac{v_0 \cos\alpha}{\omega}\sin(\omega t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t - \alpha)\,,$$

$$y + \frac{v_0 \cos\alpha}{\omega} = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t - \alpha)\,,$$

საიდანაც ვწერთ ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლებას:

$$\left(x - \frac{v_0 \sin\alpha}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{v_0 \cos\alpha}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 .$$

ამ განტოლების საფუძველზე კი ვასკვნით, რომ ნაწილაკი მოძრაობს წრეწირზე, რომლის რადიუსია $R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0 mc}{eH}$.

21.6. მათემატიკური ფიზიკის არაერთგვაროვანი განტოლებების შესახებ

მათემატიკური ფიზიკის არაერთგვაროვან ამოცანებს უწოდებენ ამოცანათა ისეთ კლასს, როდესაც ან განტოლებაა არაერთგვაროვანი, ან სასაზღვრო და საწყისი პირობებია ასეთი.

განვიხილოთ განცალებადცვლადებიანი არაერთგვაროვანი განტოლებების ამოხსნის მეთოდები. როგორც აღვნიშნეთ, არაერთგვაროვანი ამოცანაა მოცემული ნიშნავს, რომ მოცემულობის მარჯვენა მხარე 0-ის ტოლი არ არის: მარჯვენა მხარეს ცნობილი ფუნქციაა, ხოლო მარცხენა მხარე კი ერთგვაროვანია. ფურიეს მეთოდი ასეთ ამოცანებზე არ ვრცელდება. ამ ტიპის ამოცანების ანალიზისათვის გამოიყენება ორი მეთოდი: 1) ერთგვაროვან ამოცანაზე მიყვანის მეთოდი და 2) ინტეგრალური გარდაქმნების მეთოდი (რომელსაც ზოგჯერ გრინბერგის მეთოდსაც უწოდებენ). ქვემოთ განვიხილავთ მხოლოდ ერთგვაროვან ამოცანაზე მიყვანის მეთოდს.

არაერთგვაროვანი ამოცანის ერთგვაროვანზე მიყვანის მეთოდის არსი მდგომარეობს საძიებელი u ფუნქციის წარმოდგენაში ორი – u_1 და u_2 ფუნქციების ჯამად: $u = u_1 + u_2$. ამასთან, ერთ-ერთის შერჩევა უნდა მოხდეს ისე, რომ განტოლება და ერთი ცვლადის მიმართ სასაზღვრო პირობა მისთვის იყოს ერთგვაროვანი. ნათელია, რომ ამ პროცედურის გაკეთების ზოგადი რეცეპტი არ არსებობს და ყოველი კონკრეტული ამოცანისათვის

მისი რეალიზება გარკვეულ გამოცდილებას მოითხოვს (რაც ანალოგიური ამოცანების ამოხსნის ტექნიკის განვითარებასთან ერთად მოდის).

განვიხილოთ უსასრულო ფირფიტაში ტემპერატურის გავრცელების ამოცანა. დავუშვათ, z უსასრულო კოორდინატი და ფირტიტის სიგრძეა, ხოლო y კი სიგანეა და a-ს ტოლია. დავუშვათ, მოცემულია ტემპერატურის საწყისი გავრცელება. ფირფიტის ერთ $x=0$ კედელზე ის მუდმივია და T_0-ს ტოლია, ხოლო მეორე $x=a$-ზე კი ტემპერატურა 0-ის ტოლად ჩავთვალოთ. ამოცანა მდგომარეობს ფირფიტაში ტემპერატურის გავრცელების კანონის დადგენაში.

ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება ასეთია:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \;\; 0 < x < a, \;\; \tau = \frac{kt}{c\rho}, \;\; \tau > 0, \tag{1}$$

$$T|_{x=0} = T_0, T|_{x=a} = 0, \tag{2}$$

$$T|_{x=0} = \varphi(x). \tag{3}$$

(1)-(3) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ:

$$T = T_1(x) + T_2(x, \tau)$$

სახის ფუნქციათა შორის. $T_1(x)$ ფუნქცია იმგვარად შევარჩიოთ, რომ იგი აკმაყოფილებდეს (1) განტოლებას და (2) სასაზღვრო პირობას. მივიღებთ შემდეგ ამოცანას $T_1(x)$-ის მიმართ:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = 0, T_1|_{x=0} = T_0, T_1|_{x=a} = T_0 \tag{4}$$

(4) ამოცანის ამონახსნია $T_1(x) = T_0\left(1 - \frac{x}{a}\right)$ (შეამოწმეთ!), რომელიც აღწერს ტემპერატურის გავრცელების სტაციონარულ კანონს. $T_2(x,\tau)$-ის საპოვნელად დავწეროთ შემდეგი ერთგვაროვანი ამოცანა:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = 0, \tag{5}$$

$$T_2|_{x=0} = 0, T_2|_{x=a} = 0, \tag{6}$$

$$T_2|_{x=0} = \varphi(x) - T_1(x). \tag{7}$$

რადგან $T_1(x) = T_0\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, ამიტომ $\varphi(x) - T_1(x)$ ცნობილი ფუნქციაა და, ამგვარად, (5)-(7) ამოცანა შესაძლებელია ამოიხსნას ცვლადთა განცალების მეთოდით.

ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

გამოიყენეთ ინტეგრალური გარდაქმნები და ამოხსენით შემდეგი ამოცანები.

ამოცანა 1. ამოხსენით ამოცანა:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,\ \ u\,|_{t=0} = \varphi(x)\,,\ \ -\infty < x < \infty\,,\ \ t > 0\,.$$

პასუხი: $u(t,x) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2}} d\xi$.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ $u \in C^{(2)}$, რომელიც აკმაყოფილებს:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ლაპლასის განტოლებას და სასაზღვრო პირობებს:

$$u\,|_{y=0} = f(x)\,,\ \ u\,|_{\sqrt{x^2+y^2} \to \infty}$$

შემოსაზღვრულია, როდესაც $y \geq 0, -\infty < x < \infty$.

პასუხი: $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{\infty}^{-\infty} f(\xi) \dfrac{a}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi$.

ამოცანა 3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u = xye^t\,,\ \ u\,|_{t=0} = 0\,,\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,,\ \ -\infty < x, y, z < \infty\,,\ \ t > 0\,.$$

პასუხი: $u(x,y,z,t) = 3x^2 y^2 z^2 t^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) t^4$.

ამოცანა 4. დავუშვათ, $u(x,t)$ ერთგანზომილებიანი არის ტემპერატურაა, ამასთან, $u(x,t) = f(x)$ საწყისი ტემპერატურაა. გამოვიკვლიოთ სითბოგამტარებლობის განტოლების ამონახსნი სხვადასხვა საწყისი ტემპერატურის შემთხვევაში: ა) $f(x) = e^{-x^2}$ – საწყისი ტემპერატურის გაუსის პროფილი, ბ) $f(x) = \theta(x+1) - \theta(x-1)$ – საწყისი ტემპერატურის თანაბარი განაწი-

ლება $[-1,1]$ მონაკვეთზე, სადაც $\theta(x)$ ხევისაიდის (ოლივერ ხევისაიდი (1850-1925), ინგლისელი თვითნასწავლი ინჟინერი, მათემატიკოსი და ფიზიკოსი) ერთეულოვანი ფუნქციაა.

მითითება: ამოცანა დაიყვანება სითბოგამტარებლობის ერთგანზომილებიანი განტოლების ამოხსნაზე უსასრულო არეში:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \;\; u\,|_{t=0} = f(x)\,, \quad u\,|_{x=-\infty} = u\,|_{x=\infty} = 0\,, \;\; -\infty < x < \infty\,, \;\; t > 0\,.$$

გამოიყენეთ ფურიეს გარდაქმნა x ცვლადის მიმართ.

პასუხი: ა) ამოცანის ამონახსნი საწყისი $f(x) = e^{-x^2}$ პირობის შემთხვევაში იქნება: $u(x,t) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{4c^2t+1}}}{\sqrt{4c^2t+1}}$.

ბ) ამონახსნი ასეთია:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x+1}{2c\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-1}{2c\sqrt{t}}\right).$$

ამოცანა 5. ნახევრად სასრული გამტარის $x=0$ ბოლოში დროის $t=0$ მომენტში ირთვება მუდმივი E ელექტრომამოძრავებელი ძალა. ვიპოვოთ ძაბვა გამტარის ყოველ წერტილში. იგულისხმება, რომ $L = g = 0$, ხოლო გამტარის პარამეტრებია R და C.

პასუხი: $u(x,t) = E\left(1 - erf\left(\dfrac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right)\right)$.

მითითება. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, განტოლებათა სისტემას აქვს ასეთი სახე: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + RI = 0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial x} + C\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$

რომლიდანაც დენის გამორიცხვის შემდეგ მივიღებთ:

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0\,, \;\; v^2 = \frac{1}{RC}\,.$$

დავწეროთ საწყისი და სასაზღვრო პირობები: $u|_{t=0}=0$, $u|_{x=0}=E$, $u|_{x\to\infty}\to\infty$. შემდეგ გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა და მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას ლაპლასის ტრანსფორმანტის მიმართ.

ამოცანა 6. ამოხსენით შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები ოპერაციული მეთოდით:

1) $y''+3y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

2) $y''+y=1$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;

3) $y''+4y=\cos(3t)$, $y(0)=2$, $y'(0)=2$.

დავიდ ჰილბერტი

(1865-1943)

ერიკ ივარ ფრედჰოლმი

(1866-1927)

ვიტო ვოლტერა

(1860-1940)

ემილ პიკარი

(1856-1941)

ნიკოლოზ მუსხელიშვილი

(1891-1976)

1900-1901 წლის ზამთარში, შვედი მათემატიკოსი ე.ჰოლმგრენი გეტინგენში წარსდგა დავიდ ჰილბერტის (1865-1943) სემინარზე მოხსენებით თავისი თანამემამულის, ერიკ ივარ ფრედჰოლმის (1866-1927) უახლესი ნაშრომების შესახებ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში. ჰილბერტი მაშინვე მიხვდა ფრედჰოლმის გამოკვლევების მნიშვნელობას. ინტეგრალურ განტოლებებს „რთული“ ისტორია აქვს და მისი პირველი სიუჟეტი დანიელ ბერნულის ეკუთვნის. ორი საუკუნის განმავლობაში მათემატიკოსთა ძალისხმევა მიმართული იყო უწყვეტი ტანის რხევითი პროცესების შესწავლისაკენ და მასთან დაკავშირებულ პოტენციალთა თეორიის სასაზღვრო ამოცანისაკენ. ჟ.ბ. ფურიეს, გ.ა. შვარცის, ა.პუანკარეს და კ.ნეიმანის, ვ.ვოლტერას, ჰელგე ფონ კოხის და სხვათა უმნიშვნელოვანესი გამოკვლევები, დღევანდელი გაგებით, ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის ძალიან მდიდარი შინაარსის მხოლოდ ცალკეული ეპიზოდებია. ჩვეულებრივ, აღმოჩენა მეცნიერებაში ხდება მაშინ, როდესაც „მისი დრო დგება“. მხოლოდ გამონაკლისები ახდიან ხოლმე ფარდას საიდუმლოს რამდენიმე ათეული წლით ადრე, როგორც ეს გააკეთა ფრედჰოლმა და მისმა აღმოჩენამ თითქოს დაიგვიანა კიდეც. თუ მატერიალური წერტილების დინამიკას აღწერს დიფერენციალური განტოლება, რა უნდა იყოს იმაზე მარტივი მისახვედრად, რომ ზღვარზე გადასვლის შემდეგ დისკრეტულ წერტილთა ერთობლიობა უწყვეტ ტანში უნდა გადავიდეს, ხოლო დიფერენციალური განტოლება კი – ინტეგრალურში. მაგრამ, ზოგჯერ, ეს ინტუიციური ფაქტი სამართლიანი არ არის და ეს იყო გარკვეულწილად დამაბნეველი გარემოება. ფრედჰოლმა ეს დაძლია და ამას მაშინვე მიხვდა ჰილბერტი.

ჰილბერტმა დაიწყო ანალიზურ ფუნქციათა სასაზღვრო ამოცანების კვლევა ინტეგრალურ განტოლებათა საშუალებით, რითაც გააღრმავა ბერნარ რიმანის (1826-1866) იდეები და გააგრძელა მისი დაუსრულებელი ნაშრომები. მან ამ თემაზე 1901-1902 წლებში დაიწყო ლექციათა კურსი, რითაც, ფაქტობრივად, მოახდინა ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის კანონიზაცია, შექმნა უსასრულო განზომილებიანი ანალიზი და მის საფუძველზე დაამუშავა მათემატიკური ფიზიკის ახალი მეთოდები.

ანალიზურ ფუნქციათა სასაზღვრო ამოცანები არის ინტეგრალური განტოლებების გამოყენების მხოლოდ ერთ-ერთი მხარე და, კიდევ სხვაც რომ არ იყოს, სრულიად საკმარისია თეორიის ასაღიარებლად და შესასწავლად. მათემატიკის ეს მიმართულება თანამედროვე მათემატიკურ ფიზიკაში ცნობილია რიმან-ჰილბერტის ამოცანების მეთოდის სახელწოდებით და გამოიყენება არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების, კლასიკური და კვანტური მექანიკის გაფანტვის შებრუნებული ამოცანების ანალიზისა და ეფექტური ამონახსნების ასაგებად. ანალიზურ ფუნქციათა სასაზღვრო ამოცანების უფრო ღრმა შესწავლის აუცილებლობამ გააფართოვა ინტეგრალურ განტოლებათა კლასი. მომდევნო წლებში ამგვარი ინტეგრალური განტოლებების მნიშვნელოვანი კლასის – სინგულარულ-ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის შექმნის და დარგად ჩამოყალიბების პრიორიტეტი ქართველ მათემატიკოს ნიკოლოზ მუსხელიშვილს (1891-1976) ეკუთვნის.

კურსის მესამე ნაწილში გადმოცემულია კლასიკური წრფივი ინტეგრალური განტოლებების ზოგადი თეორია, საკითხების განხილვის საუნივერსიტეტო ტრადიციების სრული დაცვით.

ნაწილი III

ინტეგრალური განტოლებები

22. წრფივი ინტეგრალური განტოლებები

22.1. ძირითადი ცნებები და მნიშვნელოვანი მაგალითები

განტოლებას ეწოდება *ინტეგრალური*, თუ უცნობი ფუნქცია, რომელსაც $y(\cdot)$-ით აღვნიშნავთ, შედის ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ:

$$\int_a^b F(s,t,y(t))dt = G(s,y(s)) . \tag{1}$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც (1) განტოლების მარჯვენა მხარეს მდგომი G ფუნქცია დამოკიდებული არ არის $y(s)$ საძიებელ ფუნქციაზე, მაშინ (1) უწოდებენ *პირველი გვარის*, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში, *მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებას.*

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისაგან განსხვავებით, (1) სახის განტოლების ამოსახსნელად საჭირო არ არის დამატებითი პირობების მოცემა, სახელდობრ, საჭირო არ არის ცნობილი იყოს საძიებელი ან მისი წარმოებული ფუნქციების მნიშვნელობები (კოშის პირობები) რაიმე წერტილში. ამ გარემოებას გარკვეული მნიშვნელობა აქვს განტოლებების გამოყენების თვალსაზრისით.

მეორე გვარის განტოლების ცვლადების $a \le s,t \le b$ ცვლილების არეს ეწოდება *ძირითადი კვადრატი.* პირველი გვარის განტოლებებისათვის ცვლილების არეები სავალდებულო არ არის ერთმანეთს დაემთხვეს. თუ საწინააღმდეგო არ ითქმება, ჩვენ ყოველთვის მათ ერთმანეთის ტოლად ჩავთვლით. F ფუნქცია განსაზღვრულად ითვლება ძირითად კვადრატზე. $[a,b]$ ინტერვალს, რომელზედაც იძებნება y ფუნქცია და რომელზედაც განსაზღვრულია G, როგორც თავისი პირველი არგუმენტის ფუნქცია, ეწოდება (1) განტოლების *განსაზღვრის არე.*

$[a,b]$ ინტერვალი შეიძლება იყოს როგორც სასრული, ისე უსასრულო. თუ ორივე საზღვარი სასრულია, მაშინ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძ-

ლია ჩავთვალოთ, რომ $a=0$ და $b=1$. ამ შემთხვევაში (1) განტოლებას ეწოდება *ურისონის განტოლება*:

$$\int_0^1 F(s,t,y(t))dt = G(s,y(s)) \tag{2}$$

ურისონის განტოლების კერძო შემთხვევაა *ჰამერშტეინის განტოლება*:

$$\int_0^1 K(s,t)g(t,y(t))dt = G(s,y(s)) . \tag{3}$$

(3)-ში ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ მოთავსებულ K ფუნქციას ეწოდება *განტოლების ბირთვი* ან *განტოლების გული.*

ყველაზე მარტივი და, ამასთან, კარგად შესწავლილია *წრფივი ინტეგ-რალური განტოლებები.* ეს ის შემთხვევაა, როდესაც g და G ფუნქციები წრფივია უცნობი ფუნქციის მიმართ:

$$g(t,y(t)) = y(t) ,\ \ G(s,y(s)) = \frac{1}{\lambda}(y(s) - f(s)) . \tag{4}$$

ამ შემთხვევაში a და b რიცხვების სასრულობა სავალდებულო არ არის, ხოლო განტოლებას კი აქვს ასეთი სახე:

$$y(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt = f(s) . \tag{5}$$

(5) განტოლებას *წრფივი მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლება* ეწო-დება, λ-ს პარამეტრი ეწოდება, ხოლო f კი – არაერთგვაროვანი წევრი. თუ $f \equiv 0$, მაშინ (5)-ს *ერთგვაროვანი* ეწოდება.

როდესაც g-ს ისეთივე სახე აქვს, როგორც (4)-ში და G დამოკიდებუ-ლი არ არის მეორე არგუმენტზე, ე.ი. $G(s,y(s)) = f(s)$, მივდივართ წრფივ პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\int_a^b K(s,t)y(t)dt = f(s) . \tag{6}$$

განმარტება. დავუშვათ, $a=0$ და $b=1$ სასრული რიცხვებია. ხოლო ბირთვი და არაერთგვაროვანი წევრი კვადრატში ინტეგრებადებია:

$$\| K \| \equiv \left(\int_0^1 \int_0^1 | K(s,t) |^2 \, dtds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty , \tag{7}$$

$$\| f \| \equiv \left(\int_a^b | f(s) |^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} < \infty , \tag{8}$$

მაშინ (5) განტოლებას ეწოდება *ფრედჰოლმის მეორე*, ხოლო (6) კი – *ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლებები.*

(7) და (8) გამოსახულებით განმარტებული $\| K \|$ და $\| f \|$ სიდიდეები, შესაბამისად, არიან ბირთვისა და არაერთგვაროვანი წევრის ნორმები.

შევნიშნოთ, რომ ფრედჰოლმის განტოლებების უფრო ზოგადი განმარტება არსებობს. ჩვენ მხოლოდ ამ კერძო შემთხვევით შემოვისაზღვრებით, თუმცა დებულებები, რომლებსაც მოვიყვანთ, სამართლიანია უფრო ზოგადი განტოლებებისათვის. ერთი ან რამდენიმე ცვლადის ფუნქციათა სივრცე, რომელთა (7), (8) ნორმა სასრულია, აღინიშნება L_2-ით და *კვადრატში ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე* ეწოდება. ფუნქციას ამ სივრციდან შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტის წერტილები. ისინი ინტეგრალზე გავლენას ვერ მოახდენენ. უფრო მეტიც, ამ სივრცის ფუნქციებს შესაძლებელია რაიმე t_0 წერტილში განსაზღვრის არიდან ჰქონდეს $(t-t_0)^{-\nu}$ (ან $\left((s-s_0)^2+(t-t_0)^2\right)^{-\nu}$), $\nu < 1/2$ სახის განსაკუთრებულობები, მაგრამ (7)-(8) ინტეგრალები მაინც კრებადებია.

წრფივი ინტეგრალური განტოლებების კერძო შემთხვევაა ისეთი განტოლებები, რომელთა ბირთვი აკმაყოფილებს პირობას:

$$K(s,t) = 0 , \quad s > t .$$

მიღებულ განტოლებებს:

$$\int_a^s K(s,t) y(t) dt = f(s) \qquad y(s) - \lambda \int_a^b K(s,t) y(t) dt = f(s) \tag{9}$$

ეწოდებათ, შესაბამისად, *ვოლტერას პირველი* და *მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლებები.*

შევნიშნოთ, რომ კოშის ამოცანა წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_n(t)y = \phi(t)\,,$$

საწყისი პირობით:

$$y(0) = c_0\,, y^{/}(0) = c_1\,,\ \ ...\ \ ,\ \ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

მიიყვანება მეორე გვარის (9) ტიპის ვოლტერას განტოლებამდე, როდესაც $\lambda = -1$,

$$K(s,t) = \sum_{m=1}^{n} a_m(s)\frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!}$$

და

$$f(s) = \varphi(s) - c_{n-1}a_1(s) - (c_{n-1}s - c_{n-2})a_2(s) - ... -$$
$$-\left(c_{n-1}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!} + ... + c_1 s + c_0\right)a_n(s).$$

პირველი გვარის განტოლებები მიეკუთვნებიან არაკორექტულ ამოცანათა რიცხვს. მათ ცოტა მოგვიანებით განვიხილავთ. ახლა შევისწავლით მეორე გვარის იმ განტოლებებს, რომლებსაც ზუსტი, ანალიზური ამონახსნი აქვს.

მაგალითები. წრფივი ინტეგრალური განტოლებების მაგალითია:

ა) $\varphi(x) - \int_0^1 e^{xy}\varphi(y)dy = x - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x - 1}{x^2}\,,\ \ 0 \le x \le 1$

განტოლება ან, კიდევ:

ბ) $\int_0^\infty \sin(xy)\varphi(y)dy = f(x)\,,\ \ 0 \le x < \infty\,.$

არაწრფივი ინტეგრალური განტოლებაა:

გ) $\varphi(x) - \int_0^1 \frac{xy\varphi(y)}{1+\varphi^2(y)}dy = f(x)\,,\ \ 0 \le x \le 1\,.$

ზემოთ მოყვანილ განტოლებებში $\varphi(x)$ უცნობი, საძიებელი ფუნქციაა, ხოლო $f(x)$ კი – ბ) და გ) განტოლებებში ცნობილი ფუნქციაა, რომელსაც არაერთგვაროვანი წევრი ეწოდება.

ამოვხსნათ ინტეგრალური განტოლება, ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც განტოლებას იგივეობად აქცევს.

მაგალითად: ა) განტოლების ამონახსნი იგივური $\varphi(x)=x$ ფუნქციაა. მართლაც:

$$\varphi(x)-\int_0^1 e^{xy}\varphi(y)dy = x-\int_0^1 e^{xy}ydy = x-\frac{1}{x}\int_0^1 yd(e^{xy}) =$$

$$= x-\frac{1}{x}\left(ye^{xy}\,\Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 e^{xy}dy \right) = x-\frac{e^x}{x}+\frac{e^x-1}{x^2}.$$

ბ) განტოლება კი $\varphi(x)$ ფუნქციის ფურიეს სინუს-გარდაქმნაა. ფურიეს გარდაქმნის შექცევის (შებრუნების) ფორმულის თანახმად, გვაქვს:

$$\varphi(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(xy)f(x)dx\,,\ \ 0\le y<\infty\,,$$

რაც ნიშნავს, რომ $\varphi(y)$ არის ბ) განტოლების ამონახსნი.

22.2. განტოლებები გადაგვარებული ბირთვით

განსაზღვრება. ინტეგრალური განტოლების $K(s,t)$ ბირთვს ეწოდება *გადაგვარებული*, თუ იგი შესაძლებელია წარმოვადგინოთ ერთი ცვლადის ფუნქციების ნამრავლის სასრულ ჯამად:

$$K(s,t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(s)\psi_i(t)\,. \tag{1}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ φ_i ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებლები არიან. მართლაც, თუ, მაგალითად, $\varphi_n=\gamma\varphi_{n-1}$, სადაც γ რაიმე რიცხვია, მაშინ უკანასკნელი ორი წევრი (1) გამოსახულებაში შესაძლებელია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\varphi_n\psi_n+\varphi_{n-1}\psi_{n-1}=\varphi_{n-1}(\gamma\psi_n+\psi_{n-1})\,.$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ $\gamma\psi_n+\psi_{n-1}$ როგორც ახალი $(n-1)$-ე t ცვლადის ფუნქცია. (1) ჯამში შესაკრებების რაოდენობა ერთით შემცირდება და გახდება $n-1$. ანალოგიურად, შეგვიძლია წრფივად დამოუკიდებლად ჩავთვალოთ ψ_i ფუნქციებიც. ზუსტად ასეთივე შედეგი მიიღება, თუ წრფივ თა-

ნადობით არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული არა ორი, არამედ რამდენიმე ფუნქცია: ყოველი წრფივი დამოკიდებულება φ_i (ან ψ_i) ფუნქციებს შორის ამცირებს ერთი ერთეულით შესაკრებთა რაოდენობას (1) ჯამში.

ჩავსვათ (1) გამოსახულება წინა პარაგრაფის (5) განტოლებაში და მივიღებთ:

$$y(s)-\lambda\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(s)\int_a^b\psi_i(t)y(t)dt=f(s)\,. \tag{2}$$

ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში გვაქვს განსაზღვრული ინტეგრალი. ნათელია, რომ $y(s)$ საძიებელ ფუნქციას აქვს ასეთი სახე:

$$y(s)=\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi_i(s)\,,\ \ \varphi_0(s)\equiv f(s)\,,\ \ a_0\equiv 1\,. \tag{3}$$

ამ ფორმულის (2)-ში ჩასმა მოგვცემს განტოლებას:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\lambda\sum_{j=0}^{n}C_{ij}a_j\right)\varphi_i(s)=0\,,\ \ C_{ij}\equiv\int_a^b\psi_i(t)\varphi_j(t)dt\,. \tag{4}$$

მაგრამ, φ_i, $1\le i\le n$, ფუნქციები, პირობის თანახმად, წრფივად დამოუკიდებლებია. მაშასადამე, (4) ტოლობა შესაძლებელია ყოველი $s\in[a,b]$ შესრულდეს მხოლოდ მაშინ, როდესაც ნულის ტოლია ნებისმიერი φ_i-ს წინ მდგომი კოეფიციენტი. ამრიგად, ვღებულობთ, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას a_i კოეფიციენტებისათვის (3) დაშლიდან:

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-\lambda C_{ij})a_j=\lambda G_{i0}\,,\ \ i=1,...,n\,, \tag{5}$$

სადაც δ_{ij} კრონეკერის სიმბოლოა. ამოვხსნით რა განტოლებათა ამ სისტემას, ვიპოვით a_i კოეფიციენტებს და, მაშასადამე, საძიებელ $y(s)$ ფუნქციასაც.

როგორც ვხედავთ, გადაგვარებულბირთვიანი წრფივი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნა მიიყვანება წრფივი ალგებრული განტოლების ამოხსნაზე. შემდეგ ჩვენ ვნახავთ, რომ ნებისმიერი ბირთვის შემთხვევაში წრფივი ინტეგრალური განტოლება აღმოჩნდება უსასრულო რაოდენობის წრფივი დიფერენციალური განტოლების მსგავსი. ეს ანალოგია სასარგებლოა გვქონდეს მხე-

დველობაში, რადგან ეს წრფივი ინტეგრალური განტოლებების ძირითადი თვისების გააზრების საშუალებას იძლევა.

კერძოდ, თუ (2) განტოლება ერთგვაროვანია, ე.ი. $f(s)\equiv 0$, მაშინ ერთგვაროვანია (5) ალგებრულ განტოლებათა სისტემაც, რადგან ამ დროს $C_{i0}=0$ ყველა i-სათვის. ასეთ პირობებში, როგორც ცნობილია, ამ განტოლების არატრივიალური ამონახსნი არსებობს მხოლოდ მაშინ, როდესაც განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია. აქედან უკვე შესაძლებელია მივიღოთ λ პარამეტრის მნიშვნელობათა ერთობლიობა, რომლებსაც *მახასიათებელი მნიშვნელობები* ეწოდება და რომელთათვისაც სისტემის დეტერმინანტი განულდება. ასეთი მნიშვნელობების რაოდენობა n-ის ტოლია, მახასიათებელი განტოლების ფესვების ჯერადობის გათვალისწინებით.

საზოგადოდ, წრფივი ინტეგრალური განტოლებებისთვისაც λ პარამეტრის მახასიათებელი მნიშვნელობები ანალოგიურად განიმარტება იმ დაშვებით, რომ არსებობს ერთგვაროვანი განტოლების არატრივიალური ამონახსნი, მაგრამ საკუთრივი მნიშვნელობების სიმრავლე, სასრული a-სა და b-ს შემთხვევაშიც კი, უსასრულოა. ამ საკითხს ქვემოთ დავუბრუნდებით.

რადგან ინტეგრალური განტოლება გადაგვარებული ბირთვით ადვილად მიიყვანება ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე, ამიტომ არსებობს ნებისმიერი ბირთვისათვის ინტეგრალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის შესაძლებლობა. ის ეფუძნება ბირთვის აპროქსიმაციას გადაგვარებული ბირთვით: ორი ცვლადის ფუნქცია იცვლება დაახლოებით მისი ტოლი ორი ფუნქციის ნამრავლების სასრული ჯამით, რომელთაგან თითოეული დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ ცვლადზე. ხშირად ხდება, რომ ამ მიახლოების დროს მიღწეული სიზუსტე დამოკიდებულია ამ ფუნქციების გონივრულ შერჩევაზე.

22.3. ფურიე-ნახვევის ტიპის განტოლება

განვიხილოთ განტოლება:

$$y(s)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(s-t)y(t)dt=f(s), \tag{6}$$

რომლის ბირთვი ერთ არგუმენტზეა დამოკიდებული, ბირთვი კი, თავის მხრივ, არის ორი დამოუკიდებელი ცვლადის სხვაობა. (6) განტოლებას, *ფურიეს*

აზრით, ნახვევის განტოლება ეწოდება. ეს განტოლება ადვილად იხსნება ბირთვის, საძიებელი ფუნქციის და არაერთგვაროვანი წევრის შესაბამისი ფურიე-გამოსახულებებით შეცვლის შემდეგ:

$$K(s-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\kappa(z)e^{iz(s-t)}dz\,,\ \ y(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(z)e^{izs}dz\,,$$

$$f(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(z)e^{iz(s-t)}dz\,. \qquad (7)$$

ამ ფორმულების (6)-ში ჩასმის და დირაკის δ-ფუნქციის ფურიეს

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm izs}ds \qquad (8)$$

გარდაქმნის გამოყენების შემდეგ მივიღებთ:

$$\eta(z)=\frac{\phi(z)}{1-\kappa(z)}\,. \qquad (9)$$

(9)-ის საშუალებით წარმოიდგინება მოცემული განტოლების ამონახსნი. მართლაც, მისი ჩასმა (7) გამოსახულებების მეორე ფორმულაში იძლევა საძიებელ $y(s)$ ფუნქციას ცხადი სახით.

ყურადღება მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ (6) ინტეგრალურ განტოლებაში ინტეგრების a და b საზღვრები უსასრულოა. ამის შედეგია ის, რომ (6) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი აქვს. მართლაც, თუ $f(s)\equiv 0$, მაშინ (9), (7) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ $y(s)\equiv 0$.

ანალოგიური გზით იხსნება ინტეგრალური განტოლებები, რომლებიც წარმოადგენენ ნახვევს ლაპლასის აზრით.

ვოლტერას:

$$y(s)-\lambda\int_{0}^{s}K(s-t)y(t)dt=f(s)\,,\ \ s\geq 0$$

განტოლებას აქვს ლაპლასის ნახვევის სახე. მტკიცდება, რომ მისი ამონახსნია:

$$y(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\phi(p)e^{ps}}{1-\lambda\kappa(p)}dp$$

ფუნქცია, სადაც $\phi(p), \kappa(p)$, შესაბამისად, არაერთგვაროვანი წევრისა და ბირთვის ლაპლასის გარდაქმნის ტრანსფორმანტებია, ხოლო γ კი აირჩევა ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნის პოვნის წესების შესაბამისად.

22.4. ფრედჰოლმის მეორე გვარის განტოლება

გადავიდეთ ფრედჰოლმის მეორე გვარის:

$$y(s) - \lambda \int_0^1 K(s-t) y(t) dt = f(s) \tag{1}$$

ინტეგრალური განტოლების ანალიზზე. ეს განტოლება უფრო მარტივად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, თუ შემოვიტანთ $\hat{K}$ ოპერატორს და განვსაზღვრავთ მას L_2 ფუნქციონალური სივრცის ყოველი v ფუნქციისათვის, ფორმულით:

$$\left(\hat{K}x\right)(s) \equiv \int_0^1 K(s,t) x(t) dt\,, \tag{2}$$

მაშინ (1) განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$y - \lambda \hat{K} y = f\,, \tag{3}$$

ამასთან, ცხადად შეგვიძლია არ მივუთითოთ იმ s არგუმენტზე, რომელზედაც დამოკიდებულია განტოლების ორივე მხარე. ეს გაუგებრობას არ გამოიწვევს, რადგან თავისუფლები ვართ არგუმენტის არჩევაში. (1), (2) განტოლებებიდან ჩანს, რომ λ პარამეტრის მცირე მნიშვნელობისათვის შესაძლებელია ჩავთვალოთ, რომ $y \cong f$. ამის შემდეგ, ბუნებრივია, (1) განტოლების ამონახსნის ძიება λ-ს მიმართ მწკრივის სახით, იმ დაშვებით, რომ λ პარამეტრი საკმაოდ მცირეა. ამ მიზნის მისაღწევად შემოვიტანოთ y-ის მიახლოებითი მიმდევრობები (იტერაცია) შემდეგნაირად:

$$y_1 = f + \lambda \hat{K} y_0\,,\ \ .\ .\ .\ .\ ,\ \ y_n = f + \lambda \hat{K} y_{n-1}\,, \tag{4}$$

სადაც $y_0 \in L_2$ რაიმე საწყისი მიახლოებაა. თუ $(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ მისი ზღვარი იქნება განტოლების ამონახსნი.

$\hat{K}$ ოპერატორის კვადრატი განვმარტოთ შემდეგნაირად:

$$\left(\hat{K}^2 x\right)(s) \equiv \int_0^1 dt \int_0^1 dt_2 K(s,t_1) K(t_1,t_2) x(t_2)\,. \tag{5}$$

ოპერატორის უფრო მაღალი ხარისხები ანალოგიურად განიმარტება. მოყვანილი განმარტების შემდეგ (4) ფორმულები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$y_n = f + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^j \hat{K}^j f + \lambda^n \hat{K}^n y_0, \ \ n > 1. \tag{6}$$

$(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის კრებადობა ნიშნავს (6)-ში შემავალი მწკრივის კრებადობას.

მწკრივის კრებადობის ანალიზის გასამარტივებლად დავუშვათ, რომ ინტეგრალური განტოლების ბირთვი და არაერთგვაროვანი წევრი აკმაყოფილებენ უფრო ძლიერ მოთხოვნას, ვიდრე კვადრატში ინტეგრებაა (იხილეთ პარაგრაფ 22.1-ის (7),(8) ფორმულები), კერძოდ, დავუშვათ, რომ ისინი შემოსაზღვრულებია:

$$| K(s,t) | \leq A \quad \forall s,t \in [0,1], \ | f(s) | \leq B \quad \forall s \in [0,1], \tag{7}$$

სადაც A და B ნებისმიერი რიცხვებია.

ასეთ პირობებში ადვილად მიიღება შემდეგი შეფასება:

$$(\hat{K}^n f)(s) = \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 ... \int_0^1 dt_n K(s,t_1) K(t_1,t_2) ... K(t_{n-1},t_n) f(t_n) \leq A^n B. \tag{8}$$

ამრიგად, (6) მწკრივის მაჟორანტული მწკრივია გეომეტრიული პროგრესია, რომლის ზოგადი წევრია $\lambda^n A^n B$. იგი კრებადია, თუ $|\lambda| < 1/A$. ეს უტოლობა მიუთითებს იმაზე, თუ რამდენად მცირე უნდა იყოს λ პარამეტრი, რომ (6) მწკრივი კრებადი იყოს. ჩვენი შეფასება უხეშია ბირთვის და არაერთგვაროვანი წევრის შემოსაზღვრულობის დაშვების გამო. ზოგად შემთხვევაში, როდესაც ბირთვი $K(s,t) \in L_2$, მაშინ მიიღება შეფასება:

$$| \lambda | < \| K \|^{-1}. \tag{9}$$

შევნიშნოთ, რომ იტერაციული პროცესის კრებადობა დამოკიდებული არ არის საწყისი მიახლოების არჩევაზე. ამიტომ, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $y_0 = f$.

ახლა ვაჩვენოთ ამონახსნის ერთადერთობა. ვაჩვენოთ, რომ, თუ (9) სრულდება, მაშინ (3) განტოლების (4) და (6) ფორმულებით მოცემული ამონახსნი ერთადერთია.

დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ z (3) განტოლების სხვა ამონახსნია:

$$z - \lambda \hat{K} z = f.$$

ჩავსვათ (4)-ში y_0-ის მაგივრად z, მივიღებთ:

$$y_1 = f + \lambda\hat{K}z = z\ ,\ \ y_2 = f + \lambda\hat{K}y_1 = z\ ,...\ .$$

სხვა სიტყვებით, $(y_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარია z, რომელიც, დაშვების თანახმად, (3) განტოლების ამონახსნია. ეს ფაქტი ამტკიცებს ამონახსნის ერთადერთობას.

(6) ფორმულა, როდესაც $n \to \infty$, შესაძლებელია გადაიწეროს ასეთი სახით:

$$y = f + \lambda\hat{R}f\ , \tag{10}$$

სადაც

$$\hat{R} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1}\hat{K}^j \tag{11}$$

ოპერატორს ეწოდება *რეზოლვენტა.* $\hat{I} + \lambda\hat{R}$ ოპერატორს, სადაც $\hat{I}$ ერთეულოვანი ოპერატორია, ეწოდება *გრინის ფუნქცია* (უფრო ზუსტი სახელწოდება, ცხადია, იქნებოდა გრინის ოპერატორი). (10) ფორმულა იხმარება ინტეგრალური განტოლების ფორმალური ამონახსნის დასაწერად იმ შემთხვევაში, როდესაც (11) წკრივად ამონახსნის წარმოდგენა შეუძლებელია, ე.ი. როდესაც (9) უტოლობა არ სრულდება.

22.5. ვოლტერას განტოლება

ვოლტერას განტოლებისათვის, ე.ი., როდესაც ბირთვი აკმაყოფილებს პირობას $K(s,t) = 0$, $s > t$, იტერაციული პროცესი შესაძლებელია დაზუსტდეს. კვლავ ჩავთვალოთ, რომ წინა პარაგრაფის (7) პირობა სრულდება, მაშინ (8) შეფასების (წინა პარაგრაფიდან) მაგივრად გვექნება:

$$(\hat{K}f)(s) = \int_0^s dt K(s,t) f(t) \leq ABs\ ;$$

$$(\hat{K}^2 f)(s) = \int_0^s dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 K(s,t_1)K(t_1,t_2) f(t_2) \leq \frac{1}{2}A^2 Bs;$$

$$...\quad\ ...\quad\ ...$$

$$(\hat{K}^n f)(s) = \int_0^s dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 ... \int_0^{t_{n-1}} dt_n K(s,t_1)K(t_1,t_2)...K(t_{n-1},t_n) f(t_n) \leq \frac{1}{n!}A^n Bs^n\ .$$

ამ შეფასებებიდან ჩანს, რომ მიმდევრობითი მიახლოების პარაგრაფ 22.4-ის (6) მწკრივი ყოველთვის, λ პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის, კრებადია. ანალოგიური შედეგი მიიღება უფრო ზოგად შემთხვევაშიც, კერძოდ, L_2-კლასის ბირთვებისთვის.

22.6. თვითშეუღლებული ბირთვი

როგორც ვნახეთ, თუ λ პარამეტრი მცირე არ არის, მაშინ იტერაციული მწკრივი ფრედჰოლმის განტოლებისათვის განშლადია. ამრიგად, ინტეგრალური განტოლების ანალიზისათვის ამ შემთხვევაში საჭიროა სხვა მეთოდების გამოყენება. ასეთი მეთოდები კი კარგადაა დამუშავებული და შესწავლილი თვითშეუღლებული ოპერატორებისათვის.

$\hat{K}$ *ოპერატორის შეუღლებული* ვუწოდოთ ისეთ $\hat{K}^*$ ოპერატორს, რომლის შესაბამისი ბირთვია $\hat{K}$ ოპერატორის ბირთვის შეუღლებული $K^*(s,t)$ ფუნქცია, რომელიც $K(s,t)$ ბირთვისაგან მიიღება კომპლექსური შეუღლებითა და არგუმენტების გადანაცვლებით (ეს უკანასკნელი ოპერაცია ეთანადება მატრიცის ტრანსპონირებას). ოპერატორს ეწოდება *თვითშეუღლებული*, თუ $\hat{K}^* = \hat{K}$. ნამდვილი $K(s,t)$ ფუნქციისათვის, შესაბამისი თვითშეუღლებული ოპერატორი მიიღება $K(s,t)$ ბირთვში არგუმენტების გადანაცვლების მიმართ სიმეტრიულობის პირობის დადებით. ძნელი არ არის იმის დანახვა, რომ ვოლტერას ოპერატორის ბირთვი თვითშეუღლებული არ არის. გადაგვარებულ ბირთვს ეთანადება თვითშეუღლებული ოპერატორი მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\varphi_i^* = \psi_i$.

L_2 ფუნქციონალურ სივრცეში შემოვიტანოთ შემდეგი სკალარული ნამრავლი:

$$\langle y_1 | y_2 \rangle \equiv \int_0^1 y_1^*(s) y_2(s) ds \, . \tag{1}$$

(1) სკალარული ნამრავლის სასრულობა გამომდინარეობს L_2-სათვის კოში-ბუნიაკოვსკის:

$$|\langle y_1 | y_2 \rangle| \le \| y_1 \| \cdot \| y_2 \|$$

უტოლობიდან.

(1) სკალარული ნამრავლი კომუტაციური არ არის:

$$\left\langle y_2 \mid y_1 \right\rangle = \left\langle y_2 \mid y_1 \right\rangle^* .$$

ამიტომ შემდეგ, როდესაც ლაპარაკი იქნება ორი ფუნქციის სკალარულ ნამრავლზე, აუცილებელია დავაზუსტოთ მათი რიგითობა ჩანაწერში. (1) გამოსახულების მარცხენა მხარეს მოთავსებული აღნიშვნა დირაკიდან მოდის. მანვე შემოიტანა *ბრა-ფუნქციის* (ბრა-ვექტორის) და *კეტ-ფუნქციის* (კეტ-ვექტორის) ცნებები. მარცხენა თანამამრავლს $\left\langle y_2 \mid y_1 \right\rangle$ ჩანაწერში ჰქვია ბრა-ფუნქცია, ხოლო მარჯვენას კი – კეტ-ფუნქცია. საზოგადოდ, ბრა, კეტ სახელწოდება მოდის ფრჩხილების ინგლისური სახელწოდებიდან *bracket*.

ჩვენთვის ასეთი აღნიშვნების შემოტანა ხელსაყრელია. მისი საშუალებით თვითშეუღლებული ოპერატორებისათვის მტკიცდება შემდეგი მნიშვნელოვანი ტოლობა:

$$\left\langle y_1 \mid \hat{K} y_2 \right\rangle = \left\langle \hat{K} y_1 \mid y_2 \right\rangle .$$

მართლაც:

$$\left\langle y_1 \mid \hat{K} y_2 \right\rangle = \int_0^1 ds \int_0^1 dt y_1^*(s) K(s,t) y_2(t) = \int_0^1 dt \int_0^1 ds [K(t,s) y_1(s)]^* y_2(t) = \left\langle \hat{K} y_1 \mid y_2 \right\rangle .$$

აქედან გამომდინარეობს კვანტურ მექანიკაში ხშირად გამოყენებადი ჩანაწერის $\left\langle y_1 \mid \hat{K} \mid y_2 \right\rangle$ კორექტულობა.

განმარტება. λ პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ფრედჰოლმის მეორე გვარის

$$y = \lambda \hat{K} y \tag{2}$$

განტოლებას K ბირთვით აქვს არატრივიალური ამონახსნი, ეწოდება $\hat{K}$ ოპერატორის *მახასიათებელი მნიშვნელობა* ან *მახასიათებელი რიცხვი.* ამ არატრივიალურ ამონახსნს კი *ოპერატორის საკუთრივი ფუნქცია* ეწოდება. ყველა მახასიათებელი რიცხვების სიმრავლეს ეწოდება *ოპერატორის სპექტრი.* აქვე შევნიშნოთ, რომ ტერმინები „მახასიათებელი მნიშვნელობა“, „მახასიათებელი რიცხვი“ და „სპექტრალური მნიშვნელობა“ სინონიმებია. მახასიათებელი რიცხვის შებრუნებულ სიდიდეს *საკუთრივი რიცხვი* ეწოდება. საკუთრივი რიცხვის სინონიმია საკუთრივი მნიშვნელობა. ამრიგად, საკუთრივი რიცხვისათვის გვაქვს: $\sigma = 1/\lambda$. ამ შემთხვევაში (2) განტოლება გადაიწერება

$$\hat{K} y = \sigma y \tag{3}$$

სახით. ყველა საკუთრივი რიცხვების სიმრავლეს აგრეთვე ეწოდება სპექტრი. ინტეგრალური ოპერატორები გამოყენების დროს ხშირად გვხვდება როგორც დიფერენციალური ოპერატორების შებრუნებული ოპერატორი, ამიტომ ინტეგრალური ოპერატორის მახასიათებელი რიცხვები ემთხვევა დიფერენციალური ოპერატორის საკუთრივ რიცხვებს (ზოგჯერ ეს ტერმინოლოგიურ აღრევას იწვევს).

(2), (3) განტოლებების საკუთრივი ფუნქციები მამრავლის სიზუსტემდე არიან განსაზღვრულები, ამიტომ ეს მამრავლები შესაძლებელია ისე შევარჩიოთ, რომ საკუთრივი ფუნქციები ნორმირებულები იყვნენ: $\|y\|=1$.

განმარტება. მახასიათებელ მნიშვნელობას ეწოდება *გადაგვარებული*, თუ მას რამდენიმე წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივი ფუნქცია შეესაბამება. ასეთი წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციების რაოდენობას ეწოდება მოცემული მახასიათებელი მნიშვნელობის *გადაგვარების ჯერადობა.*

მახასიათებელი რიცხვებისათვის სამართლიანი არ არის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემა: ტრივიალურ ამონახსნთან ერთად განტოლებას არატრივიალური ამონახსნიც აქვს. ამასთან, გადაგვარებული მახასიათებელი რიცხვისათვის არატრივიალურ ამონახსნთა რაოდენობა რამდენიმეა. მაშასადამე, λ პარამეტრის იმ მნიშვნელობათა ზუსტი ზედა საზღვარი, რომლისთვისაც მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდში შესაბამისი მწკრივი კრებადია, უნდა იყოს $|\lambda|<|\lambda_1|$, სადაც λ_1-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა მინიმალურია მახასიათებელ რიცხვთა აბსოლუტურ მნიშვნელობებს შორის. ეს უტოლობა აზუსტებს უკვე მოყვანილ (9) უტოლობას პარაგრაფ 22.4-დან.

მტკიცდება, რომ თვითშეუღლებულ ოპერატორს აქვს ერთი მაინც მახასიათებელი რიცხვი, თუ შესაბამისი ბირთვი იგივურად ნული არ არის. საზოგადოდ, ნებისმიერი (არა თვითშეუღლებული) ოპერატორებისათვის ანალოგიური დებულება სამართლიანი არ არის. მაგალითად, ვოლტერას განტოლებისათვის, მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდის ნებისმიერი λ-სათვის, კრებადობიდან გამომდინარეობს, რომ შესაბამის ოპერატორს არ აქვს არცერთი მახასიათებელი რიცხვი. მაშასადამე, მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდის კრებადობა ნიშნავს, რომ ინტეგრალურ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამის გამო ერთგვაროვან ვოლტერას განტოლებას ტრივიალურისაგან განსხვავებული ამონახსნი არ აქვს.

თვითშეუღლებული ოპერატორების მნიშვნელოვანი თვისება, რომლის გამოც ისინი ფართოდ გამოიყენებიან ფიზიკურ თეორიებში, არის ის, რომ მათ

აქვთ ნამდვილი მახასიათებელი მნიშვნელობები. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

დებულება 1. *თვითშეუღლებული ოპერატორის ყველა მახასიათებელი მნიშვნელობა ნამდვილი რიცხვია.*

მართლაც, ვთქვათ, y არის $\hat{K}$ ოპერატორის საკუთრივი ფუნქცია, რომელიც λ მახასიათებელ რიცხვს შეესაბამება. გავამრავლოთ (2) ტოლობა სკალარულად მარცხნიდან y-ზე და მიღებული გამოსახულება გამოვაკლოთ მის კომპლექსურ შეუღლებულს. რადგან უკვე მივიღეთ, რომ $\left\langle y_2 \mid y_1 \right\rangle = \left\langle y_2 \mid y_1 \right\rangle^*$ და $\left\langle y_1 \mid \hat{K} y_2 \right\rangle = \left\langle \hat{K} y_1 \mid y_2 \right\rangle$, გავითვალისწინებთ რა $|\lambda| < |\lambda_1|$ უტოლობას, გვექნება:

$$0 = \left\langle y \mid y \right\rangle - \left\langle y \mid y \right\rangle^* = \lambda \left\langle y \mid \hat{K} y \right\rangle - \lambda^* \left\langle y \mid \hat{K} y \right\rangle^* =$$

$$= \lambda \left\langle y \mid \hat{K} y \right\rangle - \lambda^* \left\langle \hat{K} y \mid y \right\rangle^* = (\lambda - \lambda^*) \left\langle y \mid \hat{K} y \right\rangle = \frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda} \| y \| .$$

$\| y \|$ სიდიდე 0-საგან განსხვავებულია (იგი საკუთრივი ფუნქციაა, რომელიც განმარტებით იგივურად ნული არ შეიძლება იყოს), ამიტომ $\lambda - \lambda^* = 0$ და აქედან $\lambda = \lambda^*$.

განსხვავებული მახასიათებელი მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციების ორთოგონალურობა საკუთრივი ფუნქციების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თვისებაა, რის გამოც მას გამოვყოფთ დებულების სახით.

დებულება 2. *თუ λ_i და λ_j თვითშეუღლებული ოპერატორის განსხვავებული მახასიათებელი მნიშვნელობებია და y_i, y_j მათი შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციებია, მაშინ $\left\langle y_i \mid y_j \right\rangle = 0$.*

დავუშვათ, $y_i = \lambda_i \hat{K} y_i$ და $y_j = \lambda_j \hat{K} y_j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. გავამრავლოთ სკალარულად $y_i = \lambda_i \hat{K} y_i$ გამოსახულება მარცხნიდან y_j-ზე, ხოლო $y_j = \lambda_j \hat{K} y_j$ ტოლობის კომპლექსურად შეუღლებული მარჯვნიდან გავამრავლოთ y_i-ზე. ამის შემდეგ ერთი მეორეს გამოვაკლოთ. გამოვიყენოთ დებულება 1. ყოველივე თქმულის გათვალისწინებით გვექნება:

$$0 = \lambda_i \left\langle y_j \mid \hat{K} y_i \right\rangle - \lambda_j \left\langle \hat{K} y_j \mid y_i \right\rangle = (\lambda_i - \lambda_j) \left\langle y_j \mid \hat{K} y_i \right\rangle = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i} \left\langle y_j \mid y_i \right\rangle .$$

რადგან $\lambda_i \neq \lambda_j$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ $\langle y_i \mid y_j \rangle = 0$.

თვითშეუღლებული ოპერატორების სპექტრის თვისებებს, ანუ მახასიათებელი რიცხვების ერთობლიობის დახასიათებას იძლევა ქვემოთ მოყვანილი დებულებები.

თეორემა 1. *თვითშეუღლებული სასრული ნორმის მქონე ოპერატორის სპექტრი ან სასრულია, ან აქვს დაგროვების წერტილი* ∞*-ში.*

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თვითშეუღლებული ოპერატორის მახასიათებელი მნიშვნელობების გადაგვარების ჯერადობა სასრულია.

თეორემა 2. *თუ* $f \in L_2$, *მაშინ:*

$$\| \hat{K} f \| \leq \frac{\| f \|}{| \lambda_1 |}, \tag{4}$$

სადაც λ_1 *არის* $\hat{K}$ *ოპერატორის ისეთი მახასიათებელი მნიშვნელობა, რომელსაც მინიმალური აბსოლუტური მნიშვნელობა აქვს.*

(4) უტოლობაში ტოლობა მიიღწევა მაშინ, როდესაც f ოპერატორის ის საკუთრივი ფუნქციაა, რომელიც შეესაბამება λ_1 მახასიათებელ მნიშვნელობას. ოპერატორი „ძლიერ" მოქმედებს უმცირესი აბსოლუტური მნიშვნელობის მქონე მახასიათებელი მნიშვნელობის შესაბამის საკუთრივ ფუნქციაზე.

ქვემოთ მოყვანილია წრფივი ინტეგრალური განტოლებების ძირითადი თეორემა. ეს თეორემა ჰილბერტ-შმიდტის სახელითაა ცნობილი.

თეორემა 3 (ჰილბერტი, შმიდტი). *თუ* g *ფუნქცია წარმოიდგინება*

$$g(s) = \int_0^1 K(s,t) h(t) dt$$

სახით, სადაც $K, h \in L_2$, *მაშინ იგი დაიშლება* $\hat{K}$ *ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციების მწკრივად, რომელიც საშუალოდ კრებადია. ამასთან, თუ:*

$$\int_0^1 |K(s,t)|^2 dt \leq A, \quad \forall s \in [0,1],$$

მაშინ მითითებული მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრადაა კრებადი.

ჰილბერტ-შმიდტის თეორემა არის საკმარისი პირობა g ფუნქციის მწკრივად წარმოდგენისა $\hat{K}$ ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციების ბაზისში.

ეს პირობა არ არის აუცილებელი, ანუ g შესაძლებელია წარმოდგენილ იქნეს კრებად მწკრივად $\hat{K}$ ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციების ბაზისში, მაშინაც კი, როდესაც $\int_0^1 K(s,t)h(t)dt$ ინტეგრალში შემავალი $h(t)$ ფუნქცია არ არსებობს. $h(t)$-ის არსებობის საკითხს ჩვენ დავუბრუნდებით ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლებების განხილვისას.

22.7. არაერთგვაროვანი განტოლება. ფრედჰოლმის ალტერნატივა

ჰილბერტ-შმიდტის თეორემა საშუალებას გვაძლევს ფრედჰოლმის მეორე გვარის არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი დავწეროთ საკუთრივი ფუნქციების ბაზისში მწკრივის სახით. დავუშვათ:

$$y = f + \lambda \hat{K} y . \tag{1}$$

ვთქვათ, $g = \hat{K}y$. ჰილბერტ-შმიდტის თეორემის თანახმად:

$$g(s) = \sum_{n-1}^{N} \frac{a_n y_n(s)}{\lambda_n}, \quad a_n = \langle y_n \mid y \rangle$$

გამოსახულებაში შემავალი N სასრულია გადაგვარებული ბირთვისათვის და $N = \infty$ გადაუგვარებელი ბირთვის შემთხვევაში. ჩავსვათ ეს გამოსახულება (1)-ში $\hat{K}y$-ის მაგივრად, გავამრავლოთ სკალარულად მარცხნიდან y_m-ზე, გავითვალისწინოთ, რომ $\langle y_i \mid y_j \rangle = \delta_{ij}$ და მივიღებთ ცხადი სახით a_m კოეფიციენტებს:

$$a_m = \frac{\lambda_m \langle y_m \mid f \rangle}{\lambda_m - \lambda} .$$

მათი საშუალებით იწერება (1) განტოლების ამონახსნი:

$$y = f + \lambda \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle y_n \mid f \rangle y_n}{\lambda_n - \lambda} . \tag{2}$$

თუ შემოვიტანთ

$$R(s,t) = \sum_{n-1}^{N} \frac{y_n(s) y_n^*(t)}{\lambda_n - \lambda}$$

რეზოლვენტას და მის შესაბამის $\hat{R}$ ინტეგრალურ ოპერატორს, მაშინ (1) განტოლების ამონახსნი დაიწერება (10) სახით პარაგრაფ 22.4-დან.

როგორც ვხედავთ, რეზოლვენტას პირველი რიგის პოლუსები აქვს λ პარამეტრის იმ მნიშვნელობებისათვის, როდესაც $\lambda = \lambda_m$. პარამეტრის ამ მნიშვნელობებისათვის ამონახსნის (16) ფორმულას აზრი არ აქვს. ეს ფაქტი სავსებით ნათელია შემდეგი მოსაზრების გამოც: როდესაც $\lambda = \lambda_m$ (1) განტოლებას ერთადერთი ამონახსნი არ აქვს: არაერთგვაროვანი განტოლების ნებისმიერ ამონახსნს შესაძლებელია დაემატოს $\hat{K}$ ოპერატორის λ_m მახასიათებელი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ფუნქცია, გამრავლებული მუდმივზე. დასკვნა ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით, რომელიც ცნობილია *ფრედჰოლმის ალტერნატივის* სახელწოდებით.

თეორემა 1. *თვითშეუღლებული ბირთვის მქონე ფრედჰოლმის მეორე გვარის არაერთგვაროვან განტოლებას, ნებისმიერი არაერთგვაროვანი წევრით L_2-დან, აქვს ერთადერთი ამონახსნი L_2-ში ან შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას L_2-ში აქვს არატრივიალური ამონახსნი.*

თეორემის პირობაში მოყვანილი არაერთგვაროვანი წევრის ნებისმიერობა შემთხვევითი არაა. თუ ავირჩევთ f-ს ისეთნაირად, რომ იგი ორთოგონალური იყოს ყველა საკუთრივი ფუნქციისა, რომლებიც შეესაბამებიან მოცემულ λ_m მახასიათებელ მნიშვნელობას, მაშინ (2) მწკრივის ყველა წევრს აქვს აზრი, ამავე დროს, ერთგვაროვან განტოლებას აქვს არატრივიალური ამონახსნი, როდესაც $\lambda = \lambda_m$.

22.8. ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლება

მათემატიკურ ფიზიკაში კარგად ცნობილი ინტეგრალური გარდაქმნები არიან ზუსტად ამოხსნადი ინტეგრალური განტოლებები. მაგალითად, თუ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ist)\, y(t)\, dt = f(s),$$

მაშინ

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ist)\, f(s)\, ds.$$

ეს ფორმულები განსაზღვრავენ პირდაპირ და შებრუნებულ ფურიეს გარდაქმნებს. ზუსტად ასევე ლაპლასის პირდაპირი და შებრუნებული გარდაქმ-

ნა, რომელიც ხშირად გამოიყენება ოპერაციულ აღრიცხვაში, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება. არსებობს აგრეთვე სხვა ინტეგრალური გარდაქმნები, რომელთა ბირთვები არ არიან ელემენტარული ფუნქციები. მაგალითად, *ჰენკელის გარდაქმნა:*

$$f(s)=\int_0^\infty J_\nu(st)\sqrt{st}\,y(t)dt\ ,\ y(t)=\int_0^\infty J_\nu(st)\sqrt{st}\,f(s)ds$$

შეიცავს ბესელის J_ν ფუნქციას. ეს გარდაქმნა იმითაა საინტერესო, რომ იგი თავისი თავის შებრუნებულიცაა: პირდაპირი და შებრუნებული გარდაქმნები ერთმანეთს ემთხვევა.

განვიხილოთ $y(t)$ ფუნქცია, რომელიც ანალიზურია ზედა ნახევარსიბრტყეში. დავუშვათ, მას არა აქვს განსაკუთრებული წერტილები ზედა ნახევარსიბრტყეში ნამდვილი ღერძის ჩათვლით და მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც $|t|\to\infty$ უფრო ნელა, ვიდრე ხარისხოვანი ფუნქცია რაიმე დადებითი მაჩვენებლით. ასეთ პირობებში $y(t)$ შესაძლებელია წარმოვადგინოთ კოშის ინტეგრალური ფორმით:

$$y(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{y(t)}{t-s}dt\ ,\ \ \operatorname{Im}s>0\ , \tag{1}$$

სადაც Γ კონტური შედგება ნამდვილი ღერძის იმ ნაწილისაგან, რომელიც ახდენს ზედა ნახევარსიბრტყეზე შემოწერილი ნახევარწრის შეკვრას. რადგან $y(t)$ ფუნქცია ქრება $|t|$-ს საკმაოდ დიდი მნიშვნელობებისათვის, ამიტომ ნახევარწრის უსასრულოდ დიდი რადიუსისათვის გვაქვს:

$$y(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(t)}{t-s}dt\ ,\ \ \operatorname{Im}s>0\ .$$

გადავიდეთ ზღვარზე $\operatorname{Im}s\to 0$ და გამოვიყენოთ სოხოცკის ფორმულა, რომელშიც $x=t-\operatorname{Re}s$, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}y(s)=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(t)}{t-s}dt\ , \tag{2}$$

სადაც s ნამდვილი რიცხვია, ხოლო ინტეგრალი გაიგება კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით.

დავუშვათ, $y(s)$-ის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, შესაბამისად, არის $u(s)$ და $v(s)$ ფუნქციები. (1)-დან გამოვყოთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, გვექნება:

$$u(s) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{t-s}dt\,,\;\; u(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)}{t-s}dt\,. \tag{3}$$

ეს გამოსახულებები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პირდაპირი და შებრუნებული ინტეგრალური გარდაქმნები, ე.ი. როგორც პირველი რიგის ინტეგრალური განტოლება და მისი ამონახსნი. ანალოგიური ფორმულები შეგვიძლია მივიღოთ ქვედა ნახევარსიბრტყეზე ანალიზური ფუნქციებისათვის, რომლებიც საკმაოდ სწრაფად ქრებიან, როდესაც $|t| \to \infty$. განსხვავება მხოლოდ ის იქნება, რომ გამოვიყენებთ სოხოცკის სხვა ფორმულას.

(3) ფორმულებს *ჰილბერტის ინტეგრალური გარდაქმნები* ეწოდებათ. ჰილბერტის გარდაქმნის გამოყენება შესაძლებელია ფუნქციათა უფრო ფართო კლასისათვის, ვიდრე ახლა ჩვენ განვიხილეთ. $(t-s)^{-1}$ ბირთვს ეწოდება *სინგულარული*, ხოლო ინტეგრალურ განტოლებას ასეთი ბირთვით – *სინგულარული ინტეგრალური განტოლება*. ამასთან, ინტეგრების საზღვრები შესაძლებელია $-\infty$, ∞-საგან განსხვავებული იყოს.

ხშირად ფიზიკური სიდიდეების ისეთნაირი ინტერპრეტაციაა შესაძლებელი, რომ ისინი იყვნენ ერთი კომპლექსური ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები. ეს ეხება, მაგალითად, მატერიალური გარემოს გარდატეხის მაჩვენებელსა და შთანთქმის კოეფიციენტს. ამასთან, t და s ცვლადებს აქვთ ელექტრომაგნიტური ველის სიხშირის შინაარსი, ხოლო (3) ფორმულები გამოხატავენ გარდატეხის მაჩვენებლისა და შთანთქმის კოეფიციენტებს შორის კავშირს, რომელიც ოპტიკაში ცნობილია *კრამერსი-კრონიგის ფორმულის* სახელით.

ახლა გადავიდეთ ზოგადი პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებების ანალიზზე. დავიწყოთ მარტივით. ასეთია ვოლტერას განტოლება. ისტორიულად, უფრო ადრე, მექანიკის ერთი ამოცანისათვის, განხილულ იქნა ვოლტერას განტოლების კერძო შემთხვევა – აბელის განტოლება.

აბელის ინტეგრალური განტოლება ეწოდება ვოლტერას პირველი გვარის შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\int_0^s \frac{y(t)dt}{(s-t)^{\alpha}} = f(s)\,,\;\; s > 0\,,\;\; 0 < \alpha < 1\,. \tag{4}$$

შევამოწმოთ, რომ:

$$y(s)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^s\frac{f^{/}(t)dt}{(s-t)^{1-\alpha}}$$

მართლაც არის (4) განტოლების ამონახსნი. ამისათვის $y(s)$-ის ზემოთ მოყვანილი გამოსახულება ჩავსვათ (4) განტოლებაში და გვექნება:

$$f(s)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^s\frac{dt}{(s-t)^{\alpha}}\int_0^t\frac{f^{/}(t_1)dt_1}{(t-t_1)^{1-\alpha}}.$$

შევცვალოთ ინტეგრების რიგითობა. მივიღებთ:

$$f(s)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^s f^{/}(t_1)dt_1\int_{t_1}^s\frac{dt}{(t-t_1)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}}.$$

dt-ს მიმართ ინტეგრალის გამოსათვლელად მოვახდინოთ:

$$t=(s-t_1)x+t_1$$

ცვლადის გარდაქმნა, რის შემდეგაც მივიღებთ:

$$\int_{t_1}^s\frac{dt}{(t-t_1)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}}=\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}.$$

როგორც ვხედავთ, s-სა და t_1-ს შორის ფუნქციონალური გამოკიდებულება გაქრა, მიღებული ინტეგრალი კი ხარისხის მაჩვენებლების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის (უფრო სწორად, დასაშვები მნიშვნელობებისათვის) ინტეგრალის არსებობის დაშვების შემთხვევაში არის ეილერის B-ფუნქციის ინტეგრალური წარმოდგენა. ჩვენს შემთხვევაში იგი ელემენტარული ფუნქციით გამოისახება და $\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$-ს ტოლია. ამრიგად, მივიღებთ:

$$f(s)=\int_0^s f^{/}(t)dt\ ,$$

რადგან $f(0)=0$ ტოლობა (4)-დან გამომდინარეობს.

ვოლტერას ზოგადი პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება:

$$\int_a^s K(s,t)y(t)dt=f(s)$$

გლუვი K და f ფუნქციებისათვის შესაძლებელია მეორე გვარის განტოლებაზე იქნეს მიყვანილი. ამისათვის საკმარისია ამ განტოლების დიფერენცირება მოვახდინოთ:

$$K(s,s)y(s)+\int_a^s K^{/}(s,t)y(t)dt = f^{/}(s)\,. \qquad (5)$$

თუ $K(s,s)\neq 0$, მაშინ $K(s,s)$-ზე ორივე მხარის გაყოფით მივიღებთ მეორე გვარის განტოლებას. თუკი $K(s,s)=0$, მაშინ $K_s^{/}(s,s)\neq 0$, ამიტომ (5) გამოსახულება კიდევ ერთჯერ გავაწარმოოთ, ხოლო შემდეგ კი გავყოთ $K_s^{/}(s,s)$. აუცილებლობის შემთხვევაში ეს პროცედურა შესაძლებელია გავაგრძელოთ.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება:

$$\int_a^b K(s,t)y(t)dt = f(s)\,,\ \ c\leq s\leq d\,. \qquad (6)$$

ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ, პირველი გვარის განტოლებებისაგან განსხვავებით, s და t ცვლადები დასაშვებია სხვადასხვა რიცხვით ინტერვალებზე იცვლებოდნენ. უფრო მეტიც, მათ შესაძლებელია ჰქონდეთ სხვადასხვა ფიზიკური განზომილება. ყველა შემთხვევაში, თუ a,b,c,d რიცხვები სასრულია, შესაძლებელია ისეთ ახალ ცვლადებზე გადასვლა, რომ $0\leq s,t\leq 1$. ჩავთვალოთ, აგრეთვე, რომ $K(s,t)$ ბირთვი ფრედჰოლმისეულია:

$$\| K \| \equiv \left(\int_0^1 ds\int_0^1 | K(s,t)|^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,, \qquad (7)$$

მისი შესაბამისი $\hat{K}$ ოპერატორი თვითშეუღლებულია და $f\in L_2$. თუ ოპერატორის ბირთვს (7) პირობაზე უფრო მკაცრ მოთხოვნებს წავუყენებთ, კერძოდ, თუ ჩავთვლით, რომ:

$$\int_0^1 | K(s,t)|^2\ ds<\infty\,,\ \ \int_0^1 | K(s,t)|^2\ dt<\infty\,,$$

მაშინ (6) განტოლება მარტივი გარდაქმნებით შესაძლებელია მიყვანილ იქნეს თვითშეუღლებულ განტოლებაზე, თუ ის ასეთი არ იყო. ამისათვის საჭიროა შემოვიტანოთ ახალი:

$$\overline{K}(u,t)=\int_0^1 K^*(s,u)K(s,t)ds\,,\ \ \bar{f}(u)=\int_0^1 K^*(s,u)f(s)ds$$

ფუნქციები. ადვილი საჩვენებელია, რომ $\overline{K}$ აკმაყოფილებს (7) პირობას, $\bar{f}\in L_2$ და $\overline{K}$ ბირთვს ნამდვილად შეესაბამება თვითშეუღლებული ოპერატორი. ამასთან, ახალი განტოლება, რომელიც (6)-საგან მიიღება ორივე მხარის $K^*(s,u)$ გამრავლებით და ინტეგრებით s-ს მიმართ, არ იცვლის სახეს (ე.ი. განტოლება იმავე ტიპისაა, როგორიც იყო გამოსავალი განტოლება). ამიტომ შემდეგ ჩავთვლით, რომ ასეთი გარდაქმნა (თუ საჭიროა) უკვე გაკეთებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ $\hat{K}$ თვითშეუღლებული ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციები სრულ ბაზისს ქმნიან. (6) განტოლების ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის პირობას იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა (ე. პიკარი). *(6) განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობისათვის, როდესაც $\hat{K}$ თვითშეუღლებული ოპერატორია და მისი საკუთრივი ფუნქციები ქმნიან სრულ ბაზისს, აუცილებელია და საკმარისი, რომ:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\,|\,f_n\,|^2$$

მწკრივი იყოს საშუალოდ კრებადი, სადაც λ_n არის $\hat{K}$ ოპერატორის მახასიათებელი მნიშვნელობები, ხოლო f_n კი, $\hat{K}$ ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციების ბაზისში (6) გამოსახულების დაშლის კოეფიციენტებია.

აქვე გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი შენიშვნა. მიზეზი, რომლის გამოც ნებისმიერი არაერთგავროვანი წევრისათვის ფრედჰოლმის პირველი გვარის განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, ინტეგრების პროცედურის განსაკუთრებულობაშია. როგორც ცნობილია, ინტეგრება „ასწორებს“ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის განსაკუთრებულობებს (წყვეტის წერტილებს; წერტილებს, სადაც ფუნქციას არ აქვს წარმოებული და სხვა). ამრიგად, ინტეგრების შემდეგ მიიღება „კარგი“ ფუნქცია. მივიღოთ ამ გზით ფუნქციები, რომლებსაც, მაგალითად, წარმოებული არ აქვთ რაიმე წერტილში, შეუძლებელია, მიუხედავად იმისა, რომ ასეთი ფუნქციები კვადრატში ინტეგრებადები არიან. სიძნელის ძირითადი არსი, რომელიც თან სდევს პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებებს,

არის არა ახლად თქმული, არამედ ის, რომ პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი, როგორც წესი, არ არის *მდგრადი.*

ადამარის აზრით, პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებებისათვის სრულდება ამოცანის კორექტულობის მხოლოდ ნაწილი, კერძოდ, მათ აქვთ ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო, რაც შეეხება ამონახსნის მდგრადობას არაერთგვაროვანი წევრის მიმართ, საზოგადოდ, არ სრულდება. მართლაც, დავუშვათ, y (6) განტოლების ამონახსნია. ჩავსვათ $z(t) = y(t) + A\cos\omega t$ ფუნქცია (6) სახის ისეთ განტოლებაში, რომლის არაერთგვაროვანი წევრი g-ს ტოლია, გვექნება:

$$\int_a^b K(s,t)z(t)dt = g(s)\,,$$

$$A\int_a^b K(s,t)\cos\omega t dt = g(s) - f(s)\,.$$

ფრედჰოლმისეული ბირთვისათვის უკანასკნელ განტოლებაში ინტეგრალი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $\omega \to \infty$, ფურიეს ინტეგრალების თეორიის ძირითადი თეორემის თანახმად. თვისობრივად, ეს დებულება ცხადია: ინტეგრალი გლუვი და სწრაფად ოსცილირებადი ნიშანცვლადი ფუნქციის ნამრავლიდან ძალიან მცირე სიდიდეა. ამრიგად, $f - g$ სხვაობა შესაძლებელია გავხადოთ რაგინდ მცირე, ნებისმიერი სასრული A-სათვის, თუ ω-ს საკმაოდ დიდს ავიღებთ. ეს კი ნიშნავს, რომ z და y ფუნქციებს შორის განსხვავება სასრული რიცხვია სასრული A-ს შემთხვევაში, რაზომ მცირე განსხვავებაც არ უნდა იყოს f და g ფუნქციებს შორის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, არაერთგვაროვანი f წევრის მცირე ცვლილება იწვევს ამონახსნთა შორის ძლიერ განსხვავებას, რაც ნიშნავს, რომ (6)-ის ამონახსნი არამდგრადია და ამოცანა არაკორექტულია.

22.9. მეორე გვარის ვოლტერას განტოლება, რომლის ბირთვი არგუმენტების სხვაობაზეა დამოკიდებული

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x K(x-y)\varphi(y)dy = f(x)\,, \quad a \le x$$

სახის და მისი მსგავსი:

$$\int_a^x K(x-y)\varphi(y)dy = f(x)\,, \quad a \le x$$

განტოლება არის ვოლტერას განტოლებების მნიშვნელოვანი ქვეკლასი, მათ *ნახვევის ტიპის განტოლებები* ეწოდება. ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ K და φ ფუნქციების ნახვევია.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ინტეგრების ქვედა საზღვარი 0-ია. მართლაც, მოვახდინოთ ცვლადების გარდაქმნა: $x-a=\xi$, $y-a=\eta$. მივიღებთ განტოლებას:

$$\varphi(a+\xi)-\lambda\int_0^{\xi} K(\xi-\eta)\varphi(a+\eta)d\eta = f(\xi)\,, \quad \xi \ge 0\,.$$

გავაანალიზოთ:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{x} K(x-y)\varphi(y)dy = f(x)\,, x \ge 0 \tag{1}$$

განტოლება. მსგავსი განტოლებების ამოსახსნელად ხელსაყრელია ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენება, რადგან იგი ნახვევს ნამრავლში გადაიყვანს და ინტეგრალური განტოლების ამოხსნის ამოცანა დაიყვანება ლაპლასის გარდაქმნის შებრუნებაზე.

გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა (1) ინტეგრალური განტოლების მიმართ და მივიღებთ:

$$\hat{\varphi}-\lambda\hat{K}\hat{\varphi}=\hat{f} \Rightarrow \hat{\varphi}(1-\lambda\hat{K})=\hat{f} \Rightarrow \hat{\varphi}=\frac{\hat{f}}{1-\lambda\hat{K}}\,. \tag{2}$$

აქ გამოვიყენეთ აღნიშვნები:

$$\hat{\varphi}=\int_0^{\infty}\varphi(x)e^{-zx}dx\,, \quad \hat{K}=\int_0^{\infty}K(t)e^{-zt}dt\,, \quad \hat{f}=\int_0^{\infty}f(x)e^{-zx}dx\,.$$

(2)-ის უკანასკნელი ტოლობის შექცევით (შებრუნებით) მივიღებთ:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\hat{f}(z)}{1-\lambda\hat{K}(z)}e^{zx}dz\,,$$

სადაც Γ არის წრფე, რომელიც ინტეგრალქვეშა გამოსახულების განსაკუთრებული წერტილების მარჯვნივ მდებარეობს.

$\hat{\varphi} = \dfrac{\hat{f}}{1-\lambda\hat{K}}$ ტოლობა გადავწეროთ ეკვივალენტური ფორმით:

$$\hat{\varphi} = \frac{\hat{f}}{1-\lambda\hat{K}} = \hat{f}\,\frac{(1-\lambda\hat{K})+\lambda\hat{K}}{1-\lambda\hat{K}} = \hat{f} + \frac{\lambda\hat{K}}{1-\lambda\hat{K}}\hat{f}$$

და შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$\hat{R}_\lambda = \frac{\lambda\hat{K}}{1-\lambda\hat{K}}\hat{f}\,,$$

მაშინ

$$\hat{\varphi} = \hat{f} + \lambda\hat{R}_\lambda\hat{f}\,.$$

ჩავთვალოთ $\hat{R}_\lambda$ რომელიმე ფუნქციის ლაპლასის გარდაქმნად:

$$\hat{R}_\lambda = \int_0^\infty \hat{R}_\lambda(t)e^{-zt}dt\,,$$

მაშინ:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^\infty \hat{R}_\lambda(x-y)f(y)dy\,. \tag{3}$$

ამრიგად, თუ ცნობილია $\hat{R}_\lambda(t)$, (3) ფორმულა გვაძლევს ჩვენი ინტეგ-რალური განტოლების ამონახსნს.

გვაქვს:

$$\hat{R}_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\hat{K}(z)}{1-\lambda\hat{K}(z)}e^{zx}dz\,.$$

$\hat{R}_\lambda(x-y)$ ფუნქციას ეწოდება (1) ინტეგრალური განტოლების *რეზოლ-ვენტა*.

მაგალითი. ამოვხსნათ (1) სახის შემდეგი ინტეგრალური განტოლება:

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy = f(x)\,, x \geq 0\,.$$

ჩვენი განტოლების ბირთვია $K(t) = \sin(t)$, მისი ლაპლასის გარდაქმნაა $\hat{K} = \dfrac{1}{z^2+1}$. გამოვთვალოთ $\hat{R}_\lambda(t)$, ხოლო შემდეგ კი აღვადგინოთ ორიგი-ნალი:

$$\hat{R}_\lambda = \frac{\hat{K}}{1-\lambda\hat{K}} = \frac{1}{z^2+1-\lambda} \Rightarrow R_\lambda(t) = \frac{\sin(t\sqrt{1-\lambda})}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

მაშასადამე, განტოლების ამონახსნია:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{\sin\left((x-y)\sqrt{1-\lambda}\right)}{\sqrt{1-\lambda}} f(y)dy \tag{4}$$

ფუნქცია. როდესაც $\lambda = 1$, (4)-ის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება საჭიროა მწკრივად წარმოვადგინოთ განუსაზღვრელობის გახსნის მიზნით. ამრიგად, (4)-ით მოცემული ფუნქცია (1) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნია ნებისმიერი λ-სათვის.

რეზიუმე. *პირველი გვარის* ინტეგრალურ განტოლებაში უცნობი ფუნქცია მხოლოდ ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ შედის.

მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებაში კი უცნობი ფუნქცია შედის როგორც ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ, ასევე მის გარეთ.

თუ პირველი და მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებაში ინტეგრების საზღვრები მუდმივია, მაშინ განტოლებას ეწოდება, შესაბამისად, *ფრედჰოლმის* პირველი და მეორე გვარის განტოლება.

თუ პირველი და მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებაში ინტეგრების ზედა საზღვარი ცვლადია, მაშინ განტოლებას ეწოდება *ვოლტერას* განტოლება.

ფრედჰოლმის პირველი გვარის წრფივი ინტეგრალური განტოლება:

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \le x \le b.$$

ფრედჰოლმის მეორე გვარის წრფივი ინტეგრალური განტოლება:

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \le x \le b.$$

ვოლტერას პირველი გვარის წრფივი ინტეგრალური განტოლება:

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \le x.$$

ვოლტერას მეორე გვარის წრფივი ინტეგრალური განტოლება:

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad a \le x.$$

მეორე გვარის განტოლებები შეიძლება შეიცავდნენ პარამეტრს, ამ დროს გვაქვს არა ერთი განტოლება, არამედ განტოლებათა ოჯახი:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x)\,,\;\; a\le x\le b\,;$$

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x)\,,\;\; a\le x\,.$$

ვოლტერას განტოლებები შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც ფრედჰოლმის განტოლებების კერძო შემთხვევა. ამისათვის საკმარისია ფრედჰოლმის განტოლების ბირთვად ავიღოთ ფუნქცია:

$$K(x,y)=\begin{cases} K(x,y), & y\le x,\\ \quad 0, & y>0.\end{cases}$$

ამის გამო ფრედჰოლმის განტოლებების თვისებები ვრცელდება ვოლტერას განტოლებებზე, მაგრამ ვოლტერას განტოლებებს აქვთ სპეციფიკური თვისებები, რომლებიც მხოლოდ მათთვისაა დამახასიათებელი.

22.10. ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნის მეთოდები

ფრედჰოლმის განტოლება გადაგვარებული გულით. განვიხილოთ განტოლება:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x)\,,\;\; a\le x\le b \tag{1}$$

როგორც ცნობილია, ამ განტოლების ბირთვი გადაგვარებულია, თუ იგი წარმოიდგინება ასეთი ფორმით:

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\beta_i(y)\,, \tag{2}$$

სადაც $\alpha_i(x)\,,\beta_i(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია, n კი სასრული რიცხვია.

$K(x,y)=(x+y)^2\,,K(x,y)=\cos(x+y)\,,K(x,y)=\sin(x+y)\,,K(x,y)=$ $=\sin^3(x+y)\,,\;\; K(x,y)=P(x,y)$ გადაგვარებული ბირთვის მაგალითებია, სადაც $P(x,y)$ ორი ცვლადის ნებისმიერი მრავალწევრია. გადაუგვარებელი ბირთვის მაგალითებია: $K(x,y)=e^{xy}\,,K(x,y)=\dfrac{1}{1+(x+y)^2}\,.$

გადაგვარებული ბირთვის მქონე განტოლებები ცხადად იხსნება. გარდა ამისა, ზოგადი სახის ინტეგრალური განტოლებების აპროქსიმაციაა შესაძლებელი გადაგვარებულბირთვიანი განტოლებების საშუალებით.

დავუშვათ, $f(x)$ უწყვეტია და არსებობს (1) განტოლების ამონახსნი უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეში. ჩავსვათ (2) გამოსახულება (1)-ში, მივიღებთ:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i(x)\beta_i(y)\right)\varphi(y)dy=f(x)\Rightarrow$$

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^n\alpha_i(x)\int_a^b\beta_i(y)\varphi(y)dy=f(x).$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$C_i=\int_a^b\beta_i(y)\varphi(y)dy\,,\ \ i=1,...,n, \tag{3}$$

მაშინ:

$$\phi(x)-\lambda\sum_{i=1}^n C_i\alpha_i(x)=f(x), \tag{4}$$

სადაც, როგორც (3)-დან ჩანს, C_i, $i=1,...,n$ მუდმივებია, ხოლო $\alpha_i(x)$, $i=1,...,n$ და $f(x)$ მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია. ამიტომ ამოცანა დაყვანილ იქნა C_i მუდმივების პოვნაზე. თუ მათ განვსაზღვრავთ, მივიღებთ ამონახსნს (3) ფორმულიდან:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^n C_i\alpha_i(x).$$

ნათელია, რომ $\varphi(x)$ უწყვეტია $[a,b]$-ზე.

C_i მუდმივების საპოვნელად (4) გავამრავლოთ $\beta_j(x)$-ზე, $j=1,...,n$ და ტოლობის ორივე მხარე ვაინტეგროთ a-დან b-მდე, მივიღებთ:

$$\int_a^b\varphi(x)\beta_i(x)dx-\lambda\sum_{i=1}^n C_i\int_a^b\alpha_i(x)\beta_j(y)\varphi(y)dy=\int_a^b f(x)\beta_j(x)dx. \tag{5}$$

კვლავ აღნიშვნები შემოვიტანოთ:

$$C_j = \int_a^b \varphi(x)\beta_i(x)dx\ ,\ \ \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{n} C_i \int_a^b \alpha_i(x)\beta_j(x)dx\ ,\ \ f_j = \int_a^b f(x)\beta_j(x)dx\ .$$

ასეთ აღნიშვნებში (5) გამოსახულება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$C_j - \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} C_i = f_j\ ,\ \ j = 1,2,\ldots,n\ . \tag{6}$$

ამრიგად, მივიღეთ n ალგებრულ განტოლებათა სისტემა n რაოდენობის უცნობების მიმართ. დავწეროთ (6) სისტემის დეტერმინანტი:

$$D(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{21} & \ldots & -\lambda\alpha_{n1} \\ -\lambda\alpha_{12} & 1-\lambda\alpha_{22} & \ldots & -\lambda\alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda\alpha_{1n} & -\lambda\alpha_{2n} & \ldots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

და განვიხილოთ λ-ს მიმართ პოლინომიალური განტოლება:

$$D(\lambda) = 0\ . \tag{7}$$

დავუშვათ, (7) განტოლების ფესვებია $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ და, ვთქვათ, λ პარამეტრი (1) განტოლებიდან განსხვავებულია (7) განტოლების ფესვებისაგან, ე.ი. $\lambda \neq \lambda_j\ ,\ j = 1,2,\ldots,n$. მაშინ (6) განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და იგი მოიცემა კრამერის ფორმულის საშუალებით:

$$C_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)}\ ,\ \ i = 1,2,\ldots,n\ , \tag{8}$$

სადაც $D_i(\lambda)$ არის შემდეგი მრავალწევრი:

$$D_i(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{21} & \ldots & f_1 & \ldots & -\lambda\alpha_{n1} \\ -\lambda\alpha_{12} & 1-\lambda\alpha_{22} & \ldots & f_2 & \ldots & -\lambda\alpha_{n2} \\ \ldots & & \ldots & & & \ldots \\ -\lambda\alpha_{1n} & -\lambda\alpha_{2n} & \ldots & f_n & \ldots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

შევიტანოთ (8) ფორმულით განსაზღვრული მუდმივები ამონახსნის $\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_i(x)$ ფორმულაში და, საბოლოოდ, როდესაც $\lambda \neq \lambda_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, მივიღებთ (1)-ის ამონახსნს:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} \alpha_i(x) \right). \qquad (9)$$

გარდავქმნათ (9) გამოსახულება. ამისათვის დავშალოთ $D_i(\lambda)$ დეტერმინანტი i-ური სვეტის ელემენტებად:

$$D_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} D_{ik}(\lambda) f_k \,, \qquad (10)$$

სადაც $D_{ik}(\lambda)$ მინორებია, რომლებიც $D_i(\lambda)$ დეტერმინანტის ელემენტს შეესაბამება. ჩავსვათ (10) გამოსახულება (9)-ში:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum (-1)^{i+k} \frac{D_{ik}(\lambda)}{D(\lambda)} f_k \alpha_i(x) \,. \qquad (11)$$

ჩვენ მიერ შემოტანილი აღნიშვნების თანახმად, $f_k = \int_a^b f(x) \beta_k(x) dx$, ამიტომ (11)-ში f_k მუდმივების მაგივრად ჩავსვათ ზემოთ მოყვანილი ინტეგრალი და ამის შესაბამისად გადავწეროთ (11) გამოსახულება:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(y) dy \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \frac{D_{ik}(\lambda)}{D(\lambda)} \alpha_i(x) \beta_k(y) \,.$$

აღვნიშნოთ:

$$R_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \frac{D_{ik}(\lambda)}{D(\lambda)} \alpha_i(x) \beta_k(y) \,.$$

მიღებული ორი ცვლადის $R_\lambda(x, y)$ ფუნქცია არის გამოსავალი ინტეგრალური განტოლების რეზოლვენტა. მისი საშუალებით (1)-ის ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_\lambda(x, y) f(y) dy \,, \ \ \lambda \neq \lambda_j \,.$$

გამოყენების თვალსაზრისით, $R_\lambda(x, y)$ რეზოლვენტა შესაძლებელია ჩაიწეროს უფრო მოხერხებული სახით:

$$R_\lambda(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\frac{D_{ik}(\lambda)}{D(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}D_{ik}(\lambda)\beta_k(y)=$$

$$=\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\det\begin{pmatrix}1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{21} & \dots & f_1 & \dots & -\lambda\alpha_{n1}\\ -\lambda\alpha_{12} & 1-\lambda\alpha_{22} & \dots & f_2 & \dots & -\lambda\alpha_{n2}\\ \dots & & \dots & & & \dots\\ -\lambda\alpha_{1n} & -\lambda\alpha_{2n} & \dots & f_n & \dots & 1-\lambda\alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

ახლა დავუშვათ, რომ λ პარამეტრი (10) განტოლებიდან ემთხვევა (7) განტოლების რომელიმე λ_s ფესვს. ეს ნიშნავს, რომ $D(\lambda)=0$. ამიტომ (6) სისტემა ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის არ იქნება ამოხსნადი. ამის გამო (1) ინტეგრალური განტოლებაც არ იქნება ამოხსნადი ნებისმიერი $f(x)$-სათვის.

თუკი $D_i(\lambda_s)=0$ და $D(\lambda)=0$, მაშინ (6) სისტემას ექნება უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი, ამიტომ (1) ინტეგრალურ განტოლებასაც უსასრულო რაოდენობის ამონახსნები ექნება.

თეორემა 1. *(1) ინტეგრალურ განტოლებას (2) გადაგვარებული გულით აქვს ერთადერთი ამონახსნი, თუ* λ *პარამეტრი განსხვავებულია* $D(\lambda)=0$ *მახასიათებელი განტოლების ფესვებისაგან. არ აქვს ამონახსნი ან აქვს უსასრულო რაოდენობის ამონახსნი, თუ* λ *პარამეტრი ემთხვევა* $D(\lambda)=0$ *განტოლების ფესვებს.*

უსასრულო რაოდენობის ამონახსნი გვაქვს იმ შემთხვევაში, როდესაც კრამერის ფორმულაში მნიშვნელი და მრიცხველი ერთდროულად ხდება 0-ის ტოლი. კერძოდ, თუ $f_k=0$, $k=1,\dots,n$, ე.ი., როდესაც (6) სისტემა ერთგვაროვანია. ტოლობა $f_k=0$ ნიშნავს, რომ ან $f(x)\equiv 0$, ე.ი. იგივურად ნულია $[a,b]$-ზე, ან $f(x)\neq 0$, მაგრამ იგი ორთოგონალურია $\beta_k(x)$, $k=1,\dots,n$ ფუნქციების.

მაგალითები.

1. ამოვხსნათ ინტეგრალური განტოლება:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xy\varphi(y)dy=f(x),\quad 0\le x\le 1. \tag{1}$$

ამ განტოლების ბირთვია $K(x,y)=xy$, რომელიც გადაგვარებულია: $n=1$, $\alpha(x)=x$, $\beta(y)=y$.

(1) გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\varphi(x)-\lambda x\int_0^1 y\varphi(y)dy=f(x)$$

და აღვნიშნოთ $C_1=\int_0^1 y\varphi(y)dy$.

გავამრავლოთ (1) $\beta(x)=x$ და ვაინტეგროთ 0-დან 1-მდე:

$$\int_0^1 x\varphi(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx+\lambda C_1\int_0^1 x^2\varphi(x)dx\Rightarrow C_1\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)=\int_0^1 xf(x)dx.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $f_1=\int_0^1 xf(x)dx$. მაშინ უკანასკნელი გამოსახულებიდან მივიღებთ განტოლებას:

$$C_1\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)=f_1, \tag{2}$$

ანუ $D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{3}$. პირველ რიგში განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\lambda\neq 3$. ამ დროს $D(\lambda)\neq 0$, მაშასადამე, (2) განტოლებიდან გვაქვს:

$$C_1=\frac{f_1}{1-\frac{\lambda}{3}},$$

საიდანაც ვპოულობთ ჩვენი ამოცანის ამონახსნს:

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{f_1}{1-\frac{\lambda}{3}}\lambda x,\quad \lambda\neq 3,$$

ანუ

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda x}{1-\frac{\lambda}{3}}\int_0^1 yf(y)dy\quad\Rightarrow\quad \varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{xy}{1-\frac{\lambda}{3}}f(y)dy.$$

ამრიგად, რეზოლვენტა იქნება:

$$R_\lambda(x,y) = \frac{xy}{1 - \frac{\lambda}{3}}, \quad \lambda \neq 3.$$

დავუშვათ, $\lambda = 3$, მაშინ, როგორც უკვე ვიცით, თუ $f_1 \neq 0$, (2) განტოლებას ამონახსნი არ აქვს, ხოლო, თუ:

$$f_1 = \int_0^1 x f(x)dx = 0,$$

მაშინ (2) გადაიქცევა იგივეობად, სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო გამოსავალი განტოლების ამონახსნი იქნება:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda C_1 x.$$

2. ამოვხსნათ ინტეგრალური განტოლება:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x+y)\varphi(y)dy = f(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{1}$$

ამ განტოლების ბირთვი არის $K(x,y) = x + y$. (1) განტოლება გადავწეროთ ეკვივალენტური ფორმით:

$$\varphi(x) - \lambda x \int_0^1 \varphi(y)dy - \lambda \int_0^1 y\varphi(y)dy = f(x).$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$C_1 = \int_0^1 \varphi(y)dy, \quad C_2 = \int_0^1 y\varphi(y)dy,$$

მაშინ

$$\varphi(x) - \lambda C_1 x - \lambda C_2 = f(x). \tag{2}$$

ვაინტეგროთ უკანასკნელი გამოსახულება 0-დან 1-მდე და მივიღებთ:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx - \lambda C_1 \int_0^1 x dx - \lambda C_2 \int_0^1 dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

კვლავ შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$C_1 = \int_0^1 \varphi(x)dx\ ,\ \ f_1 = \int_0^1 f(x)dx\ .$$

გავამრავლოთ (2) x -ზე და ვაინტეგროთ 0-დან 1-მდე:

$$\int_0^1 x\varphi(x)dx - \lambda C_1 \int_0^1 x^2 dx - \lambda C_2 \int_0^1 xdx = \int_0^1 xf(x)dx\ .$$

კვლავ აღვნიშნოთ:

$$C_2 = \int_0^1 x\varphi(x)dx\ ,\ \ f_1 = \int_0^1 xf(x)dx\ .$$

მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას C_1 და C_2 მუდმივების მიმართ:

$$\begin{cases} C_1\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right) - \lambda C_2 = f_1, \\ -\dfrac{\lambda}{3}C_1 + C_2\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right) = f_2. \end{cases} \tag{3}$$

(3) სისტემის დეტერმინანტი იქნება:

$$D(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\dfrac{\lambda}{2} & -\lambda \\ -\dfrac{\lambda}{3} & 1-\dfrac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}\ .$$

აქვე გამოვთვალოთ $D_1(\lambda)$ და $D_2(\lambda)$ დეტერმინანტები:

$$D_1(\lambda) = \det\begin{pmatrix} f_1 & -\lambda \\ f_2 & 1-\dfrac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)f_1 + \lambda f_2\ ,$$

$$D_2(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\dfrac{\lambda}{2} & f_1 \\ -\dfrac{\lambda}{3_2} & f_2 \end{pmatrix} = \left(1-\frac{\lambda}{3}\right)f_2 + \frac{\lambda}{3}f_1\cdot$$

რადგან $D(\lambda) = 1 - \lambda - \dfrac{\lambda^2}{12}$, ამიტომ $D(\lambda) = 0$ განტოლების ფესვები იქნება:

$$\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3}\ ,\ \ \lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}\ .$$

დავუშვათ, $\lambda_1 \neq \lambda$ და $\lambda = \lambda_2$, მაშინ $D(\lambda) \neq 0$, რაც ნიშნავს, რომ (1) აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$C_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) f_1 + \lambda f_2}{D}, \quad C_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) f_2 + \lambda f_2}{D}.$$

(1) განტოლების ამონახსნს ექნება სახე:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) f_1 x + \lambda f_1 x + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) f_2 + \frac{\lambda}{3} f_1}{D(\lambda)},$$

ანუ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)(x+y) + \lambda xy + \frac{\lambda}{3}}{1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}} f(y)dy, \quad \lambda \neq \lambda_1, \quad \lambda \neq \lambda_2.$$

ამრიგად, (1) განტოლების რეზოლვენტას ექნება ასეთი სახე:

$$R_\lambda(x,y) = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)(x+y) + \lambda xy + \frac{\lambda}{3}}{1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{12}}.$$

დავუშვათ, ახლა $\lambda = \lambda_1$ ან $\lambda = \lambda_2$, მაშინ ნებისმიერი $f(x)$ -სათვის (1) განტოლებას ამონახსნი არ ექნება. განვიხილოთ შემთხვევა: $f_1 = f_2 = 0$.

$$f_1 = \int_0^1 f(x)dx = 0, \quad f_2 = \int_0^1 xf(x)dx = 0.$$

ამ შემთხვევაში, (3) სისტემის ანალოგიურად გვექნება:

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \lambda C_2 = 0, \\ -\frac{\lambda}{3} C_1 + C_2\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

(4)-ის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases} C_1\left(1-\dfrac{\lambda_1}{2}\right)=\lambda_1 C_2, \\ C_1\left(1-\dfrac{\lambda_2}{2}\right)=\lambda_2 C_2. \end{cases} \tag{5}$$

(5)-ის ჩასმით (2)-ში კი გვექნება:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda_1 C_1 x+C_1\left(1-\frac{\lambda_1}{2}\right),\ \ \varphi(x)=f(x)+\lambda_2 C_1 x+C_1\left(1-\frac{\lambda_2}{2}\right),$$

სადაც C_1 ნებისმიერი მუდმივია. ამრიგად, ამ შემთხვევაში (1) განტოლებას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი.

22.11. სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

ინტეგრალურ განტოლებათა მნიშვნელოვანი კლასია აგრეთვე *სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები,* რომლის ზოგადი თეორია თვისობრივად განსხვავდება ზემოთ მოყვანილი ინტეგრალური განტოლებების თეორიისაგან.

ეს პარაგრაფი მხოლოდ საცნობარო ხასიათს ატარებს, ამიტომ მხოლოდ ფორმალური განმარტებით შემოვიფარგლებით.

განვიხილოთ წრფივი ინტეგრალური განტოლება:

$$a(\tau)f(\tau)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} K(\tau,t)f(t)\,dt=g(\tau) \tag{1}$$

და დავუშვათ, რომ მის ბირთვს აქვს შემდეგი სახე:

$$K(\tau,t)=\frac{M(\tau,t)}{(t-\tau)^{\alpha}},\quad 0\le\alpha<1,$$

სადაც $M(\tau,t)$ უწყვეტი ფუნქციაა. ასეთ პირობებში ცნობილია, რომ (1) ინტეგრალური განტოლება იტერაციით შესაძლებელია მიყვანილ იქნეს უწყვეტი ბირთვის მქონე ინტეგრალურ განტოლებაზე. ასეთი განტოლებების ანალიზი კი ფრედჰოლმის განტოლებათა თეორიის ფარგლებში წარმატებით ხორციელდება. ხოლო, როდესაც $\alpha=1$, ინტეგრალურ განტოლებათა ზოგადი, ფრედჰოლმის თეორია აღარ ,,მუშაობს“.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლება f უცნობი ფუნქციის მიმართ ეწოდება:

$$a(\tau)f(\tau)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{M(\tau,t)f(t)}{t-\tau}dt=g(\tau) \qquad (2)$$

სახის ინტეგრალურ განტოლებას, სადაც $\frac{M(\tau,t)}{t-\tau}$ განტოლების გულია (*კოშის გული*), γ მარტივი წირია სიბრტყეზე, t და τ წერტილებია γ-ზე, ხოლო g კი მოცემული ფუნქციაა, რომელიც შესაძლებელია იყოს 0-ის ტოლი (ამ შემთხვევაში განტოლება იქნება ერთგვაროვანი), ინტეგრალი კი გაიგება კოშის მთავარი მნიშვნელების აზრით.

განტოლების სირთულე გამოწვეულია განტოლების $\frac{K(\tau,t)}{t-\tau}$ გულის რთული ყოფაქცევით. $\tau=t$ წერტილი ამ ფუნქციისათვის განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილია, რის გამოც ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნის ზოგადი თეორია, რომელიც ძირითადად ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიას ემყარება, საკმარისი არ არის მისი ანალიზისათვის.

(2) განტოლების ამოსახსნელად ხდება მისი დაშლა ორ განტოლებად, რომელთაგან ერთ-ერთი იხსნება ფრედჰოლმის თეორიის ფარგლებში, ხოლო მეორე კი, რომელსაც *მახასიათებელი განტოლება* ეწოდება და რომელსაც, საზოგადოდ, აქვს ასეთი სახე:

$$a(\tau)f(\tau)+\frac{b(\tau)}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{t-\tau}dt=g(\tau) \qquad (3)$$

იხსნება ანალიზური ფუნქციის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შემდეგ. კერძოდ, შემოვიტანოთ ფუნქცია:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{t-\tau}dt.$$

$F(z)$ ვიპოვოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანიდან:

$$F^{+}(t)=G(t)F^{-}(t)+r(t), \qquad (4)$$

სადაც

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \quad r(t)=\frac{g(t)}{a(t)+b(t)}.$$

(4) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის საკითხი დამოკიდებულია ამოცანის ერთადერთ ინვარიანტზე, $G(t)$ ფუნქციის *ინდექსზე*, რომელსაც (3) *ინტეგრალური განტოლების ინდექსი* ეწოდება. ამასთან, თუ საძიებელი ფუნქ-

ციისაგან მოვითხოვთ $F^{-}(\infty)=0$ პირობის დაკმაყოფილებას, (4) სასაზღვრო ამოცანა ცხადად იხსნება და:

$$f(t)=F^{+}(t)-F^{-}(t), \quad \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{t-\tau}dt=F^{+}(t)-F^{-}(t). \qquad (5)$$

ამრიგად, (3) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ამოსახსნელად ვპოულობთ (4) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს (5) ფორმულით, რომელიც აგრეთვე არის (3) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი.

სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის

1. იპოვეთ ვოლტერას შემდეგი განტოლებების ამონახსნები:

1. $\int_0^x \cos(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = x+x^2$

2. $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^x (x-\xi)e^{x-\xi}\varphi(\xi)d\xi$

3. $\varphi(x)=x+2\int_0^x (x-\xi)\varphi(\xi)d\xi-2\int_0^x \sin(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi$

2. ა) შეამოწმეთ, რომ $\varphi(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ ფუნქცია არის:

$$\varphi(x)=\frac{3x+2x^2}{3(1+x^2)^2}-\int_0^x \frac{3x+2x^2-y}{(1+x^2)^2}\varphi(y)dy$$

ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი.

ბ) შეამოწმეთ, რომ $\varphi(x)=xe^x$ ფუნქცია არის:

$$\varphi(x)=e^x\sin(x)+2\int_0^x \cos(x-y)\varphi(y)dy$$

ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი.

3. ამოხსენით ინტეგრალური განტოლებები:

1) $\varphi(x)=\frac{5x}{6}+\frac{1}{2}\int_0^1 xy\varphi(y)dy$;

2) $\varphi(x)=3x-2+3\int_0^1 xy\varphi(y)dy$.

დამატება

1. შტურმ-ლიუვილის ამოცანის რეალიზაცია Maple-ზე

კომპიუტერული ალგებრის სისტემა Maple შეიცავს სტანდარტულ ბრძანებას *mapde(eq,canom)*, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია მუდმივკოეფიციენტებიანი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების მიყვანა კანონიკურ სახემდე, ხოლო ბრძანება *pdsolve*-ს საშუალებით ხდება განტოლების ზოგადი ამონახსნის პოვნა. აქვე შევნიშნოთ, რომ *mapde(eq,canom)* საშუალებით არა მარტო მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლება მიიყვანება კანონიკურ სახემდე, არამედ ზოგჯერ ცვლადკოეფიციენტებიანიც. იმისათვის, რომ ბრძანებით ვისარგებლოთ, საჭიროა მის შესრულებამდე ჩავრთოთ Maple-ს პაკეტი *PDEtools*. ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ ცვლადკოეფიციენტებიანი განტოლების შემთხვევაში ყოველთვის ბრძანებამ შესაძლებელია არ იმუშაოს!

ამოცანა 1. ვიპოვოთ საკუთრივი ფუნქციები და საკუთრივი რიცხვები შემდეგი შტურმ-ლიუვილის ამოცანისათვის:

$$y^{//}+\lambda y=0,$$
$$y(a)=0, y^{/}(a)=0,$$
$$x\in[a,b].$$

ქვემოთ მოყვანილია პროგრამა Maple-ზე განმარტებებით:

> restart;

*diff(y(x),`$`(x,2))+lambda*y(x) = 0;, y(a) = 0;, D(y)(b) = 0;.*

განტოლების შეტანა:

*eq:=diff(y(x),x,x)+lambda*y(x)=0;*

განტოლების ზოგადი ამონახსნის პოვნა:

> dsolve(eq,y(x));y:=unapply(rhs(%),x);

$$y(x)=c_1\sin(\sqrt{\lambda}x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}x)$$
$$y:=x\to c_1\sin(\sqrt{\lambda}x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

სასაზღვრო პირობების მოცემა:

> assume(b>a):

> eq1:=y(a)=0; eq2:=D[1](y)(b)=0;

$$eq1 = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}a) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}a) = 0$$
$$eq2 = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}b)\sqrt{\lambda} - c_2 \sin(\sqrt{\lambda}a)\sqrt{\lambda} = 0$$

c_1, c_2-სათვის განტოლებათა სისტემის შედგენა და მისი დეტერმინანტის გამოთვლა:

> linalg[genmatrix]({eq1,eq2},{_C1,_C2});

> linalg[det](%);Delta:=combine(%);

$$\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}a) & \cos(\sqrt{\lambda}a) \\ \cos(\sqrt{\lambda}a) & -\sin(\sqrt{\lambda}a)\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} =$$
$$= -\sin(\sqrt{\lambda}a)\sin(\sqrt{\lambda}a)\sqrt{\lambda} - \cos(\sqrt{\lambda}a)\cos(\sqrt{\lambda}a)\sqrt{\lambda}$$
$$\Delta := -\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a - \sqrt{\lambda}b)$$

მახასიათებელი განტოლების *ამოხსნა:*

> Delta:=select(has,Delta,[cos]);

$$\Delta := \cos(\sqrt{\lambda}a - \sqrt{\lambda}b)$$

> _EnvAllSolutions:=true:

> lambda:=solve(Delta,lambda);

$$\lambda := \frac{\pi^2(1+2\_z1)^2}{4(-b+a)^2},$$

$$\lambda := \frac{\pi^2(1+2k)^2}{4(-b+a)^2}$$

>lambda:=subs(_Z1='k',lambda);

$$\lambda := \frac{\pi^2(1+2k)^2}{4(-b+a)^2}$$

საკუთრივი ფუნქციების პოვნა:

> assume(k,posint):y(x);

$$-c1\sin\left(\frac{\sqrt{4}\sqrt{\frac{\pi^2(1+2k)^2}{4(-b+a)^2}}x}{4}\right) + \_c2\cos\left(\frac{\sqrt{4}\sqrt{\frac{\pi^2(1+2k)^2}{4(-b+a)^2}}x}{4}\right)$$

> C1:=solve(eq1,_C1);

$$c1 := \frac{\_c2\cos\left(\dfrac{\pi(1+2k)a}{2(-b+a)}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi(1+2k)a}{2(-b+a)}\right)}$$

> *simplify(subs(_C1=C1,y(x)));*
> *combine(%);*

$$\frac{\_c2\sin\left(\dfrac{-\pi a+\pi x-2\pi ak+2\pi xk}{-2b+2a}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi a+2\pi ka}{-2b+2a}\right)}$$

> *Yn:=unapply(select(has,%,[x]),x,k);*

$$Yn := (x,k) \to \sin\left(\frac{-\pi a+\pi x-2\pi ak+2\pi xk}{-2b+2a}\right)$$

დიფერენციალური განტოლების მიღებული ამონახსნის შემოწმება:

> *y:='y':Yn(x,k);simplify(subs(y(x)=%,eq));*

სასაზღვრო პირობების შემოწმება:

> *Yn(a,k)=0;simplify(D[1](Yn)(b,k))=0;*

საკუთრივი ფუნქციების ორთოგონალურობის შემოწმება *[a,b]* სეგმენტზე:

> *assume(n,posint):assume(m,posint):*
> *Int(Yn(x,n)*Yn(x,m),x=a..b);simplify(value(%));*

$$\int_a^b \sin\left(\frac{-\pi a+\pi x-2\pi ak+2\pi xk}{-2b+2a}\right)\sin\left(\frac{-\pi a+\pi x-2\pi ak+2\pi xk}{-2b+2a}\right)dx$$

საკუთრივი ფუნქციების ნორმის გამოთვლა:

> *Norma:=Int(Yn(x,n)^2,x=a..b);simplify(value(%));*

$$Norma := \int_a^b \sin\left(\frac{-\pi a+\pi x-2\pi ak+2\pi xk}{-2b+2a}\right)^2 dx$$

$$\frac{b}{2}-\frac{a}{2}$$

საკუთრივი ფუნქციის არგუმენტის ხელსაყრელ ფორმაში გადატანა:

> *simplify(collect((-Pi*a+Pi*x-2*Pi*a*k+2*Pi*x*k)/(-2*b+2*a),x));*

ამრიგად, ამოცანის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ფუნქციები იქნება:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, k = 1,2,3...$$

$$y_k(x) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi(a-x)a}{2(b-a)}\right), k = 1,2.3...$$

თავიდან ჩვენ ვიგულისხმეთ, რომ $\lambda \neq 0$, ახლა ვაჩვენოთ, რომ მოცემული ამოცანის სპექტრში 0 არ შედის.

დავუშვათ, $\lambda = 0$:

```
> lambda:=0;eq;
```

$$\lambda := 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = 0$$

```
> dsolve(eq,y(x));assign(%):y0:=unapply(y(x),x);
> eq0_1:=y0(a)=0; eq0_2:=D(y0)(b)=0;
> linalg[genmatrix]({eq0_1,eq0_2},{_C1,_C2});
> Delta0:=linalg[det](%);
```

შტურმ-ლიუვილის ამოცანაზე დაყრდნობით, გამოვიკვლიოთ რხევის განტოლება, კერძოდ, განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

ამოცანა 2. განვიხილოთ ღეროს ისეთი რხევა, რომლის $x=0$ ბოლო დამაგრებულია, ხოლო თავისუფალ $x=l$ ბოლოში ხდება სიმის შეშფოთება დროის საწყისი მომენტისათვის გასწვრივი დარტყმითი P იმპულსით.

ამრიგად, საჭიროა ვიპოვოთ რხევის განტოლების:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad l > 0$$

ამონახსნი:

$$u\Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$$

სასაზღვრო და

$$u\Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, 0 < x < l-\varepsilon, \\ v_0 = \dfrac{P}{\rho\varepsilon S}, l-\varepsilon < x < l. \end{cases}$$

საწყისი პირობების შემთხვევაში, ρ და S აღნიშნავენ, შესაბამისად, სიმკვრივესა და ფართობს.

პროგრამის კოდი კომენტარებით.

```
eq:=diff(u(x,t),t,t)/v^2-diff(u(x,t),x,x)=0: 0<x,x<1,t>0;
init_c:=u(x,0)=0,D[2](u)(x,0)=phi;
phi1:=piecewise(0<x and x<1-epsilon,0,1-epsilon<x and x<1,
    P/rho/epsilon/S):
phi2:=x->P/rho/S*Dirac(x-1):
bound_c:=u(0,t)=0,D[1](u)(0,t)=0;
subs(u(x,t)=X(x)*T(t),eq):
expand(lhs(%)/X(x)/T(t)=0;
s1:=op(l,lhs(%))=-lambda:s2:=op(2,lhs(%%))=lambda.
```

ამ ოპერაციების შესრულების შემდეგ მივიღებთ ორ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{\frac{d^2}{dt^2}T(t)}{T(t)v^2}=-\lambda, \qquad \frac{\frac{d^2}{dx^2}X(x)}{X(x)v^2}=\lambda,$$

რომელთათვისაც შესაძლებელია შტურმ-ლიუვილის ამოცანის დასმა. ამის შემდეგ ვიმეორებთ იმ ალგორითმს, რომელიც ზემოთ უკვე გვქონდა და საბოლოოდ ვპოულობთ საკუთრივ რიცხვებსა და ნორმირებულ საკუთრივ ფუნქციებს შტურმ-ლიუვილის ამოცანისათვის (მაგალითად, მე-2 განტოლებისათვის):

$$\frac{\pi^2(1+2k)^2}{4l^2}, \ \frac{\sin\left(\frac{\pi(1+2k)x}{2l}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{l}}.$$

ამის გათვალისწინებით, პირველი განტოლების ზოგადი ამონახსნი ღებულობს ასეთ სახეს:

$$T(t)=\_c1\sin\left(\frac{\pi v(1+2k)t}{2l}\right).$$

ფურიეს კოეფიციენტების გამოთვლა მოხდება შემდეგი პროგრამით:

```
assume(l>0):
Ckl:=P/rho/epsilon/S*Int(ef(k,x), x=1-epsilon..1)/ev(k)*(1/2)/v.
```

გამარტივების შემდეგ, რომელიც სრულდება ბრძანებით:

```
Ck1:=simplify(value(Ck1))),
```

მიიღება:

$$Ck1 := \frac{4P\sqrt{2}l^{3/2}(-1)^k\left(\sin(\frac{\pi\varepsilon}{2l})\cos(\frac{\pi\varepsilon k}{l})+\cos(\frac{\pi\varepsilon}{2l})\sin(\frac{\pi\varepsilon k}{2l})\right)}{\rho\varepsilon S\pi^2(1+2k)^2 v}.$$

ამის შემდეგ ხდება ზღვარზე გადასვლა ბრძანებით: *Ck1:=Limit(Ck1,epsilon=0): Ck1:=factor(value(Ck1)).*

ღეროს მასის (რომელიც სიმკვრივისა და ფართობისაგან გამოითვლება) გათვალისწინებით, საბოლოო ამონახსნს აქვს ასეთი სახე:

$$u(x,t)=\frac{4Pl}{\pi vM}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}vt\right)\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right)}{2k+1}.$$

ამოცანა 3. ამოვხსნათ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა b -რადიუსიანი ბირთვისათვის:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u\,, \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0}=0\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b}=A\cos\theta\sin\omega t\,. \tag{2}$$

ამოხსნა: რადგან ამოცანის არცერთი მონაცემი არ შეიცავს φ ცვლადს, ამიტომ უნდა ველოდოთ, რომ ამონახსნი დამოკიდებული არ არის φ-ზე და ვეძებოთ ამონახსნი $u=u(r,\theta,t)$ სახის ფუნქციათა შორის. ხელსაყრელია, გავთავისუფლდეთ არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობისაგან, ამიტომ დავუშვათ, რომ:

$$u(r,\theta,t)=Ar\cos\theta\sin\omega t+w(r,\theta,t)\,. \tag{3}$$

მაშინ $w(r,\theta,t)$ ფუნქციისათვის ვღებულობთ შემდეგ ამოცანას:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\Delta w+\frac{A\omega^2 r}{a^2}\cos\theta\sin\omega t\,, \tag{4}$$

$$w\,|_{t=0}=0\,,\ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=-A\omega r\cos\theta\,,\ \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b}=0\,. \tag{5}$$

ამრიგად, ჩვენ გადავედით (1)-(2) ამოცანიდან, რომელშიც გვაქვს არა-ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობა, (4)-(5) ამოცანაზე, უკვე ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით, მაგრამ არაერთგვაროვანი საწყისი პირობით. დავუშვათ, (4)-(5) ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება $u(r,\theta,t)=w_1(r,t)\cos(\theta)$ სა-ხით. ასეთ პირობებში $w_1(r,t)$ -სათვის გვექნება ამოცანა:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=\Delta w_1+\frac{A\omega^2 r}{a^2}\sin\omega t\,, \tag{6}$$

$$w_1\,|_{t=0}=0\,,\;\left.\frac{\partial w_1}{\partial t}\right|_{t=0}=-A\omega r\,,\;\left.\frac{\partial w_1}{\partial r}\right|_{r=b}=0 \tag{7}$$

(6)-(7) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ გრინბერგის მეთოდით, ე.ი. დავუ-შვათ, რომ:

$$w_1(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)R_n(r),$$

სადაც $R_n(r)$ შტურმ-ლიუვილის შესაბამისი ამოცანის საკუთრივი ფუნქციაა. იმისათვის, რომ ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ, საჭიროა განვიხილოთ (6) განტო-ლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება და მოვახდინოთ მისი ანალი-ზი ცვლადების განცალების მეთოდით. შუალედურ გამოთვლებს ვაწარმოებთ Maple-ს გამოყენებით.

(6)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების შეტანა:

*> PDE_2_0:=diff(w1(r,t),`$`(t,2))/a^2=(2*diff(w1(r,t),r)+r^2*diff(w1(r,t), `$`(r,2))-2*w(r,t))/r^2;*

$$PDE\_2\_0 := \frac{\frac{\partial^2 w1(r,t)}{\partial t^2}}{a^2}=\frac{2\left(\frac{\partial}{\partial r}w1(r,t)\right)+r^2\left(\frac{\partial^2 w1(r,t)}{\partial r^2}\right)-2w(r,t)}{r^2}$$

მოვახდინოთ ცვლადების განცალება:

*> res:=pdsolve(PDE_2_0,HINT=R(r)*T(t));*

$res := \big(w1(r,t)=R(r)T(t)\big)\&where$

$$\left[\left\{\frac{d^2}{dt^2}T(t)=T(t)a^2_{c_1},\frac{d^2}{dr^2}R(r)=R(r)\,\_c_1+\frac{2\left(-\left(\frac{d}{dr}R(r)\right)+R(r)\right)}{r^2}\right\}\right]$$

მივიღებთ ორ დიფერენციალურ განტოლებას:

> deT:=op(1,op(1,op(2,res)));

$$deT := \frac{d^2}{dt^2}T(t) = T(t)a^2\_c_1$$

> deT:=lhs(deT)-subs(_c[1]=-lambda,rhs(deT))=0;

$$deT := \left(\frac{d^2}{dt^2}T(t)\right) + T(t)a^2\lambda = 0$$

> deR:=op(2,op(1,op(2,res)));

$$deR := \frac{d^2}{dr^2}R(r) = R(r)\ \_c_1 + \frac{2\left(-\left(\frac{d}{dr}R(r)\right) + R(r)\right)}{r^2}$$

*> deR:=collect(simplify((lhs(deR)-subs(_c[1]=-lambda, rhs(deR)))*r^2), R(r))=0;*

$$deR := (\lambda r^2 - 2)R(r) + \left(\frac{d^2}{dr^2}R(r)\right)r^2 + 2\left(\frac{d}{dr}R(r)\right) = 0.$$

ამრიგად, შტურმ-ლიუვილის ამოცანა ამ შემთხვევაში მდგომარეობს:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} + (\lambda r^2 - 2)R = 0 \qquad (8)$$

განტოლების ნულში შემოსაზღვრული ამონახსნის ძიებაში, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას:

$$\left.\frac{dR}{dr}\right|_{r=b} = 0\,. \qquad (9)$$

ვიპოვოთ (8) განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

> assume(lambda>0);dsolve(deR,R(r));

$$R(r) = \frac{\_C1e^{\sqrt{\lambda}rI}(\sqrt{\lambda}I + \lambda r)}{r^2} + \frac{\_C2e^{-\sqrt{\lambda}rI}(-\sqrt{\lambda}I + \lambda r)}{r^2}.$$

განტოლების ამონახსნთან ამ სახით მუშაობა მოხერხებული არ არის, საჭიროა ნამდვილ ფუნქციებზე გადავიდეთ. შევნიშნოთ, რომ საწყისი განტოლება არის:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + (\lambda r^2 - n(n+1))R = 0 \qquad (10)$$

განტოლების კერძო შემთხვევა $(n=1)$. განვიხილოთ უკანასკნელი განტოლება:

> *_De:=(r^2*diff(R(r),`$`(r,2)))+2*r*diff(R(r),r)+(lambda*r^2-n*(n+1))*R(r)=0;*

$$r^2\left(\frac{d^2}{dr^2}R(r)\right)+2\left(\frac{d}{dr}R(r)\right)r+(\lambda r^2-n(n+1))R(r)=0$$

ვიპოვოთ განტოლების ამონახსნი:

> *assume(n,posint);dsolve(_De,R(r));*

$$R(r)=\frac{\_C1BesselJ(n+\frac{1}{2},\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}+\frac{\_C2BesselY(n+\frac{1}{2},\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$$

> *assign(%);R:=R(r);*

$$R:=\frac{\_C1BesselJ(n+\frac{1}{2},\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}+\frac{\_C2BesselY(n+\frac{1}{2},\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}.$$

ამრიგად, (10) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$R(r)=\frac{C_1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)+\frac{C_2}{\sqrt{r}}Y_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r).$$

ცნობილია, რომ პირველი გვარის ბესელის ფუნქცია შემოსაზღვრულია 0-ში, ხოლო მეორე გვარის კი – არა. შევამოწმოთ ჩვენი ამონახსნის შემოსაზღვრულობა 0-ში.

> L*imit(1/r^(1/2)*BesselJ(3/2,sqrt(lambda)*r),r=0)=limit(1/r^(1/2)* BesselJ (3/2,sqrt(lambda)*r),r=0);*

$$\lim_{r\to 0}-\frac{\sqrt{2}(\cos(\sqrt{\lambda}r)\sqrt{\lambda}r-\sin(\sqrt{\lambda}r))}{r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\sqrt{\sqrt{\lambda}r}\sqrt{\lambda}}=0$$

> *Limit(1/r^(1/2)*BesselY(3/2,sqrt(lambda)*r),r=0)=limit(1/r^(1/2)* BesselY(3/2,sqrt(lambda)*r),r=0);*

$$\lim_{r\to 0}-\frac{\sqrt{2}(\sin(\sqrt{\lambda}r)\sqrt{\lambda}r+\cos(\sqrt{\lambda}r))}{r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\sqrt{\sqrt{\lambda}r}\sqrt{\lambda}}=-\infty.$$

თუ გამოვალთ პირობიდან, რომ ჩვენი ამონახსნი შემოსაზღვრული უნდა იყოს ნულში, მივიღებთ, რომ $C_2 = 0$.

> RR:=subs(_C1=1,_C2=0,n=1,R);

$$RR := \frac{BesselJ\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\lambda} r\right)}{\sqrt{r}}.$$

ვისარგებლოთ (9) სასაზღვრო პირობით და ამოვხსნათ ამოცანა:

> RR:=unapply(RR,r,lambda);

$$RR := (r, \lambda) \to -\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda} r\right) \sqrt{\lambda} r - \sin\left(\sqrt{\lambda} r\right)\right)}{r^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \sqrt{\sqrt{\lambda} r} \sqrt{\lambda}}$$

> eq:=simplify(diff(RR(r,lambda),r))=0;

$$eq := \frac{\sqrt{2}\left(2\lambda r \cos\left(\sqrt{\lambda} r\right) - 2\sin\left(\sqrt{\lambda} r\right)\sqrt{\lambda} + \sin\left(\sqrt{\lambda} r\right)\lambda^{\frac{3}{2}} r^2\right.}{r^3 \sqrt{\pi} \lambda^{\frac{5}{4}}}$$

> eq:=simplify(subs(r=b,lhs(eq)))=0;

$$eq := \frac{\sqrt{2}\left(2\lambda b \cos\left(\sqrt{\lambda} b\right) - 2\sin\left(\sqrt{\lambda} b\right)\sqrt{\lambda} + \sin\left(\sqrt{\lambda} b\right)\lambda^{\frac{3}{2}} b^2\right.}{b^3 \sqrt{\pi} \lambda^{\frac{5}{4}}}$$

ამრიგად, საკუთრივი რიცხვების საპოვნელად გვაქვს მახასიათებელი განტოლება:

> eq1:=numer(lhs(eq))/sqrt(2)=0;

$$eq1 := \sqrt{2}\left(2\lambda b \cos\left(\sqrt{\lambda} b\right) - 2\sin\left(\sqrt{\lambda} b\right)\sqrt{\lambda} + \sin\left(\sqrt{\lambda} b\right)\lambda^{\frac{3}{2}} b^2 = 0.\right.$$

ხელსაყრელია შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\lambda = \mu/b$ *და მოვახდინოთ ზემოთ მიღებულის გამარტივება:*

> assume(mu>0,b>0);

> eq1:=simplify(subs(sqrt(lambda)=mu/b,lambda=(mu/b)^2,lhs(eq1)))=0;

$$eq1 := \frac{\mu\left(2\mu \cos(\mu) - 2\sin(\mu) + \sin(\mu)\mu^2\right)}{b} = 0$$

> eq1:=numer(lhs(eq1))/mu=0;char:=unapply(lhs(%),mu);

$$eq1 := 2\mu \cos(\mu) - 2\sin(\mu) + \sin(\mu)\mu^2 = 0$$
$$char := \mu \to 2\mu \cos(\mu) - 2\sin(\mu) + \sin(\mu)\mu^2$$

განვიხილოთ მიღებული

$$2\mu \cos(\mu) + \sin(\mu)(\mu^2 - 2) = 0$$

განტოლების დადებითი ფესვები. მაშინ საკუთრივი რიცხვების საპოვნელად გვაქვს გამოსახულება:

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{b} \right)^2, n = 1,2,3...,$$

ხოლო საკუთრივი ფუნქციები კი იქნება:

$$R = R_n(r) = -\frac{\cos\left(\frac{\mu_n b}{r}\right)\mu_n r - \sin\left(\frac{\mu_n r}{b}\right) b}{r^2}.$$

შევიტანოთ საკუთრივი რიცხვებისა და ფუნქციების ზემოთ მოყვანილი მნიშვნელობები:

> lambda:=n->(mu[n]/b)^2;

$$\lambda := n \to \frac{\mu_n^2}{b^2}$$

> assume(mu[n]>0);

> simplify(RR(r,lambda(n))).

რადგან საკუთრივი ფუნქციები განისაზღვრებიან მუდმივი მამრავლის სიზუსტით, ამიტომ გავამარტივოთ ნაპოვნი ფუნქციები არასაჭირო მამრავლების უგულებელყოფით. შედეგად მივიღებთ:

*> R:=(r,n)->-(cos(mu[n]/b*r)*mu[n]*r-sin(mu[n]/b*r)*b)/r^2;*

$$R := (n, r) \to -\frac{\cos\left(\frac{\mu_n r}{b}\right)\mu_n r - \sin\left(\frac{\mu_n r}{b}\right) b}{r^2}.$$

ზოგადი თეორიის თანახმად, ნაპოვნი საკუთრივი ფუნქციები ორთოგონალურები არიან $[0,b]$ სეგმენტზე წონით r^2. შევამოწმოთ:

*> integral:=int(r^2*R(r,n)*R(r,m),r=0..b):*

> eqm:=char(mu[m])=0: eqn:=char(mu[n])=0:

> simplify(integral,{eqn,eqm});

$$0$$

ამრიგად მივიღეთ:

$$\int_0^b r^2 R_n(r) R_m(r) dr = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \| R_n(r) \|^2, & m = n, \end{cases}$$

ამასთან:

$$\| R_n(r) \|^2 = \int r^2 R_n^2(r) dr = \frac{b}{2} \mu_n \cos(\mu_n) \sin(\mu_n) - b + b\cos^2(\mu_n) + \frac{b}{2} \mu_n^2 .$$

რადგან (6)-(7) ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ $w_1(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) R_n(r)$ მწკრივის სახით, მწკრივად დავშალოთ აგრეთვე (6)-(7) ამოცანაში შემავალი $F(r,t) = \frac{A\omega^2 r}{a^2} \sin(\omega t)$ ფუნქცია:

$$F(r,t) = \frac{A\omega^2 r}{a^2} \sin(\omega t) = \frac{A\omega^2}{a^2} \sin(\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r) ,$$

სადაც:

$$C_n = \frac{\int_0^b r^3 R_n(r) dr}{\| R_n(r) \|^2} .$$

გამოვთვალოთ ეს კოეფიციენტები:

*> intF:=simplify(int(r*r^2*R(r,n),r=0..b));*

$$intF := -\frac{b^3(-3\sin(\mu_n) + sin(\mu_n)\mu_n^2 + 3\mu_n cos(\mu_n)}{\mu_n^2}$$

> Cn:=simplify(intF/norma,{eqn});

$$C_n := \frac{2b^2 \sin(\mu_n) - 2b^2 \mu_n cos(\mu_n) \mu_n^2}{\mu_n^4 - 2{\mu_n}^2 \sin(\mu_n) + 2\mu_n cos(\mu_n) sin(\mu_n)}$$

> Cn:=factor(Cn);

$$C_n := \frac{2b^2(\sin(\mu_n) - \mu_n cos(\mu_n)\mu_n^2)}{\mu_n(\mu_n^3 - 2\mu_n \sin(\mu_n) + 2cos(\mu_n)sin(\mu_n))}$$

*> C:=(n)->2*b*(sin(mu[n])-mu[n]*cos(mu[n]))/mu[n]/(mu[n]^3-2*mu[n]+2*cos(mu[n])*sin(mu[n]));*

$$C := n \to \frac{2b(\sin(\mu_n) - \mu_n \cos(\mu_n))}{\mu_n(\mu_n^3 - 2\mu_n + 2cos(\mu_n)sin(\mu_n))}$$

ამრიგად, მივიღეთ:

$$C_n = \frac{2b^2(\sin(\mu_n) - \mu_n \cos(\mu_n))}{\mu_n(\mu_n^3 - 2\mu_n + \cos(\mu_n)\sin(\mu_n))}. \tag{11}$$

თუ

$$w_1(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) R_n(r)$$

და

$$F(r,t) = \frac{A\omega^2 r}{a^2}\sin(\omega t) = \frac{A\omega^2}{a^2}\sin(\omega t)\sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r)$$

გამოსახულებებს ჩავსვამთ (6) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 T_n(t)}{a^2 dt^2} R_n(r) - \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\left[\frac{d^2 R_n(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_n(r)}{dr} - \frac{2}{r^2} R_n(r)\right] =$$

$$= \frac{A\omega^2}{a^2}\sin(\omega t)\sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r)$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება $-\lambda R_n(r)$ -ის ტოლია (8) ტოლობის გამო. ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა იქნება ასეთი:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{d^2 T_n(t)}{a^2 dt^2} + \lambda T_n(t)\right] R_n(r) = \frac{A\omega^2}{a^2}\sin(\omega t)\sum_{n=1}^{\infty} C_n R_n(r),$$

საიდანაც ვღებულობთ განტოლებას $T_n(t)$ -სათვის:

$$\frac{d^2 T_n(t)}{a^2 dt^2} + \lambda T_n(t) = C_n \frac{A\omega^2}{a^2}\sin(\omega t). \tag{12}$$

ამოვხსნათ მიღებული განტოლება $T_n(0) = 0$ საწყის პირობებში:

> *DEt:=diff(T(t),t$2)+lambda(n)*a^2*T(t)=_Cn*A*omega^2*sin(omega*t);*

$$DEt := \left(\frac{d^2}{dt^2}T(t)\right) + \frac{\mu_n^2 a^2 T(t)}{b^2} = \_CnA\omega^2 \sin(\omega t)$$

> *dsolve({DEt,T(0)=0},T(t));*

$$T(t) = sin\left(\frac{\mu_n a t}{b}\right) C2 + \frac{CnA\omega^2 \sin(\omega t) b^2}{\mu_n^2 a^2 - \omega^2 b^2}.$$

ამრიგად, (12) განტოლების ამონახსნი $T_n(0)=0$ საწყისი პირობების შემთხვევაში არის:

$$T_n(t)=C_2\sin\left(\frac{\mu_n at}{b}\right)-\frac{C_n A\omega^2 b^2\sin(\omega t)}{\omega^2b^2-\mu_n^2a^2}.$$

ამასთან, ვუშვებთ, რომ რეზონანსს ადგილი არ აქვს, ე.ი. ყოველი n-სათვის $\omega^2b^2\neq\mu_n^2a^2$. დაგვრჩა გამოსათვლელი C_2 მუდმივი. მის განსასაზღვრად უფრო დაწვრილებით ჩავწეროთ $w_1(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)R_n(r)$ მწკრივი:

$$T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_2\sin\left(\frac{\mu_n at}{b}\right)-\frac{C_n A\omega^2 b^2\sin(\omega t)}{\omega^2b^2-\mu_n^2a^2}\right)R_n(r),$$

რომლის წარმოებული $t=0$ -ში არის:

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial t}\right|_{t=0}=-A\omega r=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_2\frac{\mu_n a}{b}-\frac{C_n A\omega^2 b^2}{\omega^2b^2-\mu_n^2a^2}\right)R_n(r),$$

საიდანაც ვპოულობთ:

$$C_2\frac{\mu_n a}{b}-\frac{C_n A\omega^2 b^2}{\omega^2b^2-\mu_n^2a^2}=\frac{-A\omega\int_o^b r^3R_n(r)dr}{\|R_n(r)\|^2}.$$

ამ უკანასკნელიდან კი გამომდინარეობს ტოლობა:

$$C_2\frac{\mu_n a}{b}-\frac{C_n A\omega^2 b^2}{\omega^2b^2-\mu_n^2a^2}=-A\omega C_n,$$

საიდანაც გვაქვს:

$$C_2=\frac{C_n A\omega\mu_n ab}{\omega^2b^2-\mu_n^2a^2}.$$

საბოლოოდ მივიღეთ შემდეგი გამოსახულებები:

$$w_1(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A\omega bC_n}{\mu_n^2a^2-\omega^2b^2}\left(\mu_n a\sin\left(\frac{\mu_n at}{b}\right)-\omega b\sin(\omega t)\right)R_n(r),$$

$$w(r,\theta,t)=\cos(\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A\omega bC_n}{\mu_n^2a^2-\omega^2b^2}\left(\mu_n a\sin\left(\frac{\mu_n at}{b}\right)-\omega b\sin(\omega t)\right)R_n(r),$$

$$u(r,\theta,t) = Ar\cos(\theta)\sin(\omega t) +$$
$$+\cos(\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A\omega bC_n}{\mu_n^2a^2-\omega^2b^2}\left(\mu_n a\sin\left(\frac{\mu_n at}{b}\right)-\omega b\sin(\omega t)\right)R_n(r),$$

სადაც C_n განიმარტება (11) გამოსახულებიდან.

ამოცანა 4 (დირიხლეს ამოცანა). ვიპოვოთ R-რადიუსიანი წრეწირის შიგნით ისეთი u ჰარმონიული ფუნქცია, რომ $u|_{r=R}=f(\varphi)$, სადაც:

1) $f(\varphi)=\cos^2(\varphi)$, $R=1$;

2) $f(\varphi)=\sin^3(\varphi)$, $R=1$;

3) $f(\varphi)=\cos^6(\varphi)+\sin^6(\varphi)$, $R=1$;

4) $f(\varphi)=\cos(3\varphi)$, $R=1$.

ამოხსნა: პირველ რიგში, მოვიყვანთ პროცედურა-ფუნქციის კოდს Maple-ზე, რომელიც საშუალებას იძლევა წრეწირისათვის უკვე ცნობილი დირიხლეს ამოცანის გამოყენებით ამოიხსნას დირიხლეს სხვა, მათ შორის, ზემოთ მოყვანილი ამოცანები:

```
> Dirichlet:=proc(f,R)
> local a,b;
> a:=n->1/Pi*Int(f*cos(n*phi),phi=-Pi..Pi);
> b:=n->1/Pi*Int(f*sin(n*phi),phi=-Pi..Pi);
> a(0)/2+add(r^n/R^n*(a(n)*cos(n*phi)+b(n)*sin(n*phi)),n=1..Order);
> RETURN(map(simplify,value(%))); end proc:
```

ახლა ამოვხსნათ ზემოთ მოყვანილი მაგალითები:

1) `> f:=cos(phi)^2;R:=1;`

$$f := \cos(\varphi)^2$$
$$R := 1$$

`> sol:=Dirichlet(f,R);`

$$sol := \frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^2\cos(2\varphi)$$

შემოწმება:

`> linalg[laplacian](sol,[r,phi],coords=polar);`

$$0$$

`> simplify(subs(r=R,sol)-f);`

$$0$$

2) > *f:=sin(phi)^3;R:=1;*

$$f := \cos(\varphi)^3$$
$$R := 1$$

> *sol:=Dirichlet(f,R);*

$$sol := \frac{3}{4} rsin(\varphi) - \frac{1}{4} r^3 \sin(3\varphi).$$

შემოწმება:

> *combine(linalg[laplacian](sol,[r,phi],coords=polar));*

$$0$$

> *simplify(subs(r=R,sol)-f);*

$$0$$

3) > *f:=sin(phi)^6+cos(phi)^6;R:=1;sol:=Dirichlet(f,R);*

$$f := \sin(\varphi)^6 + \cos(\varphi)^6$$
$$R := 1$$
$$sol := \frac{5}{8} + \frac{3}{8} r^4 cos(4\varphi)$$

შემოწმება:

> *linalg[laplacian](sol,[r,phi],coords=polar);simplify(subs(r=R,sol)-f);*

$$0$$
$$0$$

4) > *f:=cos(3*phi);R:=1;sol:=Dirichlet(f,R);*

$$f := \cos(3\varphi)$$
$$R := 1$$
$$sol := r^3 cos(3\varphi)$$

შემოწმება:

> *linalg[laplacian](sol,[r,phi],coords=polar);simplify(subs(r=R,sol)-f).*

$$0$$
$$0$$

განვიხილოთ კიდევ რამდენიმე მაგალითი.

1) დავუშვათ, $f(\varphi)$ შემთხვევითი მრავალწევრია,ხოლო $R=3$.

ამოხსნა: > *f:=randpoly([x,y]);R:=3;*

$$f := -4x - 89y^2 - 77x^2y + 69x^4 + 80x^5 + 28xy^4$$
$$R := 3$$

> *f:=subs(x=r*cos(phi),y=r*sin(phi),r=R,f);*

$$f := -12\cos(\varphi) - 801\sin(\varphi)^2 - 2079\cos(\varphi)^2\sin(\varphi) + \\ +5589\cos(\varphi)^4 + 19440\cos(\varphi)^5 + 6804\cos(\varphi)\sin(\varphi)^4$$

> *sol:=Dirichlet(f,R);*

$$sol := \frac{13563}{8} - \frac{7}{4}r(-2474\cos(\varphi) + 99\sin(\varphi)) + 355r^2\cos(2\varphi) +$$

$$+\frac{1}{4}r^3(711\cos(3\varphi) - 77\sin(3\varphi)) + \frac{69}{4}r^4\cos(4\varphi) + \frac{27}{4}r^5\cos(5\varphi).$$

შემოწმება:

> *combine(linalg[laplacian](sol,[r,phi],coords=polar));simplify(subs (r=R,sol)-f);*

$$0$$
$$0$$

2) $f(\varphi) = \varphi^2 + \varphi + 1$, $R = 1$.

> *f:=phi^2+phi+1;R:=1;*

$$f := \varphi^2 + \varphi + 1$$
$$R := 1$$

> *Order:=6:sol6:=Dirichlet(f,R);*

$$sol6 := \frac{\pi^2}{3} + 1 - 2r(2\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) + r^2(\cos(2\varphi) - \sin(2\varphi)) -$$
$$-\frac{2}{9}r^3(2\cos(3\varphi) - 3\sin(3\varphi)) + \frac{1}{4}r^4(\cos(4\varphi) - 2\sin(4\varphi)) -$$
$$-\frac{2}{25}r^5(2\cos(5\varphi) - 5\sin(5\varphi)) + \frac{1}{9}r^6(\cos(6\varphi)) - 3\sin(6\varphi))$$

2. ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნა Maple-ს საშუალებით

1. ამოვხსნათ ინტეგრალური განტოლება:

$$\varphi(x) = x^2 + 2\int_0^1 (1 + 3xy)\varphi(y)dy .$$

ამოხსნა: გვაქვს ინტეგრალური განტოლება გადაგვარებული ბირთვით. გადავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$\varphi(x) = x^2 + 2\int_0^1 \varphi(y)dy + 6x\int_0^1 y\varphi(y)dy .$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$C_1=\int_0^1\varphi(y)dy\ ,\ \ C_2=\int_0^1 y\varphi(y)dy\,.$$

გამოსავალი განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\varphi(x)=x^2+2C_1+6xC_2\,.$$

თავიდან ვაინტეგროთ უკანასკნელი განტოლება. შემდეგ გავამრავლოთ იგი x-ზე და კვლავ ვაინტეგროთ. მივიღებთ ორ განტოლებას C_1 და C_2 მუდმივების მიმართ:

$$\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1 x^2dx+2C_1\int_0^1 dx+6C_2\int_0^1 xdx\ \ \Rightarrow\ \ C_1=\frac{1}{3}+2C_1+6C_2\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 x\varphi(x)dx=\int_0^1 x^3dx+2C_1\int_0^1 xdx+6C_2\int_0^1 x^2dx\Rightarrow C_2=\frac{1}{4}+2C_1\frac{1}{2}+6C_2\frac{1}{3}\,.$$

შემდგომ გამოთვლებს Maple-ს საშუალებით გავაგრძელებთ. პირველ რიგში შევიტანოთ განტოლება:

> *restart:*

> *with(Student[Calculus1]):*

> *eq:=phi(x)=x^2+2*int((1+3*x*y)*phi(y),y=0..1);*

$$eq:=\varphi(x)=x^2+2\int_0^1(1+3xy)\varphi(y)dy$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები C_1 *და* C_2*:*

> *phi(x)=x^2+2*int(phi(y),y=0..1)+6*x*int(y*phi(y),y=0..1);*

$$\varphi(x)=x^2+2\int_0^1\varphi(y)dy+6x\int_0^1 y\varphi(y)dy$$

> *sol:=subs(int(phi(y),y=0..1)=C1,int(y*phi(y),y=0..1)=C2,%);*

$$sol:=\varphi(x)=x^2+2C1+6xC2$$

C_1 *და* C_2 *მუდმივებისათვის, როგორც უცნობებისათვის, შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:*

> *e1:=int(lhs(sol),x=0..1)=rhs(Rule[`+`](Int(rhs(sol),x=0..1)));*

$$e1:=\int_0^1\varphi(x)dx=2\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 2C1dx+\int_0^1 6xC2dx$$

*> e2:=int(x*lhs(sol),x=0..1)=rhs(Rule[`+`](Int(expand(x*rhs(sol)),x=0..1)));*

$$e2 := \int_0^1 x\varphi(x)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 2xC1dx + \int_0^1 6xC2dx$$

> e1:=subs(int(phi(x),x=0..1)=C1,lhs(e1))=value(rhs(e1));

$$e1 := C1 = \frac{1}{3} + 2C1 + 3C2$$

*> e2:=subs(int(x*phi(x),x=0..1)=C2,lhs(e2))=value(rhs(e2));*

$$e2 := C2 = \frac{1}{4} + C1 + 2C2.$$

ამოვხსნათ მიღებული სისტემა:

> res:=solve({e1,e2},{C1,C2});assign(res);

$$res := \left\{C2 = -\frac{1}{24}, C1 = -\frac{5}{24}\right\}.$$

მაშასადამე, განტოლების ამონახსნს აქვს ასეთი სახე:

> sol;

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{5}{12} - \frac{1}{4}x$$

შევამოწმოთ მიღებული ამონახსნი:

> phi:=unapply(rhs(%),x);

$$\varphi := x \to x^2 - \frac{5}{12} - \frac{1}{4}x$$

> simplify(lhs(eq)-rhs(eq));

0

2. ამოვხსნათ ინტეგრალური განტოლება:

$$\varphi(x) - 4\int_0^1 \sin^2(x)\varphi(y)dy = 2x - \pi .$$

ამოხსნა: კომენტარის გარეშე მოვიყვანთ Maple-ზე პროგრამის გამოსავალ კოდს:

> restart:

> with(Student[Calculus1]):

*> eq:=phi(x)-4*int(sin(x)^2*phi(y),y=0..Pi/2)=2*x-Pi;*

$$eq := \varphi(x) - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2 \varphi(y)\, dy = 2x - \pi$$

> *phi(x)-4*sin(x)^2*int(phi(y),y=0..Pi/2)=2*x-Pi;*

$$\varphi(x) - 4sin(x)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(y)\, dy = 2x - \pi$$

> *eqn:=subs(int(phi(y),y=0..Pi/2)=C,%);*

$$\varphi(x) - 4sin(x)^2 C = 2x - \pi$$

> *Rule[`+`](Int(lhs(%),x=0..Pi/2));*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x) - 4\sin(x)^2 C dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\sin(x)^2 C\, dx$$

value(subs(Int(phi(x),x=0..Pi/2)=C,rhs(%)))=simplify(int(rhs(eqn),x=0..Pi/2));

$$C - C\pi = -\frac{\pi^2}{4}$$

> *res:=solve(%,C);*

$$res := \frac{\pi^2}{4(-1+\pi)}$$

> *C:=%;*

$$C := \frac{\pi^2}{4(-1+\pi)}$$

> *solve(eqn,phi(x));*

$$\frac{\sin(x)^2\pi^2 - 2x + 2x\pi + \pi - \pi^2}{-1+\pi}$$

> *collect(%,sin);*

$$\frac{\sin(x)^2\pi^2}{-1+\pi} + \frac{-2x + 2x\pi + \pi - \pi^2}{-1+\pi}$$

> *op(1,%)+normal(op(2,%));*

$$\frac{\sin(x)^2\pi^2}{-1+\pi} + 2x - \pi$$

> phi:=unapply(%,x);

$$\varphi := x \to \frac{\sin(x)^2\pi^2}{-1+\pi} + 2x - \pi$$

> simplify(eq);

$$2x - \pi = 2x - \pi$$

ამრიგად, განტოლების ამონახსნია: $\varphi(x) = \dfrac{\pi^2 \sin^2(x)}{\pi - 1} + 2x - \pi$.

3. ამოვხსნათ ვოლტერას ინტეგრალური განტოლება:

$$\varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy .$$

ამოხსნა: განტოლების ბირთვი დამოკიდებულია სხვაობაზე. განტოლება ლაპლასის გარდაქმნის საშუალებით ამოვხსნათ. შუალედური გარდაქმნები ვაწარმოოთ Maple-ს საშუალებით.

განტოლების შეტანა:

> restart:

> with(inttrans,laplace,invlaplace):

*> eq:=phi(x)=exp(-x)+int(sin(x-y)*phi(y),y=0..x);*

$$eq := \varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-y)\,\varphi(y)dy$$

გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა და მივიღებთ განტოლებას ლაპლასის ტრანსფორმანტისათვის:

> laplace(eq,x,z);

$$laplace(\varphi(x),x,z) = \frac{1}{1+z} + \frac{laplace(\varphi(x),x,z)}{z^2+1}$$

> subs(laplace(phi(x),x,z)=Phi,%);

$$\Phi = \frac{1}{1+z} + \frac{\Phi}{z^2+1}.$$

ამოვხსნათ ტრანსფორმანტისათვის მიღებული განტოლება:

> solve(%,Phi);

$$\frac{z^2+1}{z^2(z+1)}.$$

შევასრულოთ ლაპლასის შებრუნებული გარდაქმნა:

> invlaplace(%,z,x);

$$2e^{-x} + x - 1$$

> phi:=unapply(%,x);

$$\varphi := x \to 2e^{-x} + x - 1$$

მოვახდინოთ მიღებული შედეგის შემოწმება:

> simplify(lhs(eq)-rhs(eq));

$$0$$

მაშასადამე, განტოლების ამონახსნია:

$$\varphi(x) = 2e^{-x} + x - 1 .$$

სხვაობაზე დამოკიდებული ბირთვის მქონე ვოლტერას განტოლებების ამოსახსნელად ქვემოთ მოყვანილია პროცედურა, სახელწოდებით Voltera, გამოსავალი კოდი, რომლის შემავალი პარამეტრია ვოლტერას განტოლება, ხოლო გამოსავალი პარამეტრი კი – განტოლების ამონახსნი.

```
> Voltera:=proc(eq,phi)
> print(`Equation:`);print(eq):
> inttrans[laplace](eq,x,z):
> print(`Equation for transformante:`):
> subs(laplace(phi(x),x,z)=Phi,%);
> print(%):
> solve(%,Phi):
> print(`Solution the equation for transformante:`):
> print(%):
> inttrans[invlaplace](%,z,x):
> print(`Solution:`):
> phi:=unapply(%,x):
> end proc:
```

ამ პროცედურის გამოყენებით ამოვხსნათ რამდენიმე განტოლება.

მაგალითები.

1. ვიპოვოთ:

$$\int_0^x e^{2x-2\xi}\varphi(\xi)d\xi = x^2 e^x$$

ვოლტერას განტოლების ამონახსნი.

ამოხსნა: განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი პრო-ცედურა. პროგრამის გამოსავალი კოდია:

> eq:=int(exp(2(x-xi))*phi(xi),xi=0..x)=x^2*exp(x);*
> phi:=`phi`:
> Voltera(eq,phi);

პროგრამის შესრულების შედეგი იქნება:

$$Equation:$$

$$\int_0^x e^{2x-3\xi}\varphi(\xi)d\xi = x^2e^x$$

$$Equation\ for\ transformante:$$

$$\frac{\Phi}{2\left(\frac{z}{2}-1\right)} = \frac{2}{(z-1)^3}$$

$$Solution\ the\ equation\ for\ transformante:$$

$$\frac{2(z-2)}{(z-1)^3}$$

$$Solution:$$

$$x \to -e^x(x^2-2x)$$

ამრიგად, განტოლების ამონახსნია $\varphi(x) = -e^x(x^2-2x)$ ფუნქცია.

2. ამოვხსნათ ვოლტერას განტოლება:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \sin(2x-2\xi)\varphi(\xi)d\xi\ .$$

ამოხსნა: ზემოთ მოყვანილი მაგალითის ანალოგიურად, ვიყენებთ Voltera-პროცედურას:

> phi:=`phi`:
> Voltera(eq,phi);

ვიღებთ:

$$Equation:$$

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \sin(2x-2\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$Equation\ for\ transformante:$$
$$\Phi = \frac{1}{z} + \frac{\Phi}{4\left(\frac{z^2}{4} - 1\right)}$$
$$Solution\ the\ equation\ for\ transformante:$$
$$\frac{z^2 + 4}{z(z^2 + 3)}$$
$$Solution:$$
$$x \to -\frac{1}{3}\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{4}{3}.$$

განტოლების ამონახსნია: $\varphi(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(\sqrt{3}x\right) + \frac{4}{3}$.

3. ამოვხსნათ ვოლტერას განტოლება:

$$\int_0^x J(0, x - \xi)\varphi(\xi)d\xi = \sin(x) .$$

ამოხსნა:

> phi:=`phi`;

>Voltera(eq,phi);

პროგრამის მუშაობის შედეგი:

$$Equation:$$
$$\int_0^x \mathrm{BesselJ}(0, x - \xi)\, \varphi(\xi) d\xi = \sin(x)$$
$$Equation\ for\ transformante:$$
$$\frac{\Phi}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{1}{z^2 + 1}$$
$$Solution\ the\ equation\ for\ transformante:$$
$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}$$
$$Solution:$$
$$x \to BesselJ(0, x).$$

ამრიგად, განტოლების ამონახსნი არის ბესელის ფუნქცია $\varphi(x) = J(0, x)$.

3. ლაპლასის გარდაქმნის ცხრილი

$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\hat{f}(z)e^{zt}dz$	$\hat{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}f(t)e^{-zt}dt$
$\theta(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$	$\frac{1}{z}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{z+\alpha}$
$\cos(\beta t)$	$\frac{z}{z^2+\beta^2}$
$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{z^2+\beta^2}$
t^{ν}	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}$
$\sin(at)\sinh(at)$	$\frac{2a^2z}{z^4+4a^4}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{z}}$
$J_0(\alpha t)$	$\frac{1}{\sqrt{z^2+\alpha^2}}$
$\begin{cases}1, & t<T\\ 0, & t>T\end{cases}$	$\frac{1-e^{-zT}}{z}$
$\sin(at)\cosh(at)$	$\frac{a(z^2+2a^2)}{z^3+4a^4}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$
$\frac{1}{2a}(\sin(at)-at\cos(at))$	$\frac{a^2}{(z^2+a^2)^2}$
$\frac{t}{2a}\sin(at)$	$\frac{z}{(z^2+a^2)^2}$
$\cos(at)\cosh(at)$	$\frac{z^3}{z^4+4a^4}$

$e^{-\lambda t}\cos(\omega t)$	$\dfrac{z+\lambda}{(z+\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(z+\lambda)^2+\omega^2}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$
$\cos(at)\sinh(at)$	$\dfrac{a(z^2-2a^2)}{z^4+4a^4}$
$1-\Phi\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{z}}}{z}$
$\dfrac{1+2at}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{z+a}{z\sqrt{z}}$
$\dfrac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{z+a}}$

ძირითადი და დამხმარე ლიტერატურა

1. J.Marsden, A.Weinstein. *Calculus,*Vol.1, 2, 3, Springer, 1985
2. G. Arfken, H. Weber, F. Harris. Mathematical Methods for Physicists. Acad.Press, Elsevier, 2013
3. W.Appel. Mathematics for Physics and Physicist. Princeton Uni.Press, Oxford, 2007
4. H.Weber,G.Arfken. Essential Mathematical Methods for Physicist. Academic Press, 2003
5. K.Riley, M.Hobson, S.Bence. Mathematical Methods for Physics and Enginering, 3rd Edition, Campridge, 2006.
6. F.Ayres, E.Mentelson. *Schaum's outline of theory and problems of differential and integral CALCULUS. 3-th Edition, McGraw-Hill Comp.1990*
7. E.Mentelson. *Schaum's outline 3000 solved problems in Calculus, McGraw-Hill Comp.1988*
8. Л.С. *Понтрягин.* Обыкновенные *дифференциальные уравнения*. Наука, Издание четвертое, 1974
9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Том 1. М.-Л.: ГТТИ, 1933; Том 2. М.-Л.: ГТТИ, 1945
10. Б. А.Зон. Лекции по интегральным уравнениям. Наука, 2004
11. А.Ф. *Филиппов.* Введение в теорию *дифференциальных уравнений*. 2-е изд., испр. – М.: 2007. – 240 с.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения Математической Физики , изд. «Наука», Москва 1977
13. Голоскоков Д.П. *Уравнения математической физики*, Решение задач в системе *Maple*, 2004.
14. В.В. *Степанов* . Курс *дифференциальных уравнений*. Москва, 1958
15. А.Ф. *Филиппов.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000
16. А.К. Боярчук, Г.П. Головач. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: Эдиториал УРСС, 2001
17. Д. *Эрроусмит*, К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. *Качественная теория* с приложениями, Мир, 1979

18. И. Кигурадзе, Начальная и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений I. Тбилиси, 1997.
19. Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
20. В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциалные уравнения. М. Наука, 1975
21. Э.А.Коддинктон, Н.Левинсон, Теория обыкновенные дифференциалные уравнений. М. Изд-во Инос. Лит., 1958
22. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными (3-е изд.). М.: Наука, 1961
23. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том 1. М.: ИЛ, 1958;Том 2. М.: ИЛ, 1960
24. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964
25. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966
26. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. ОГИЗ, 1948
27. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики – изд. «Наука» – Москва – 1976
28. И.Г. *Петровский*. Лекции по теории *интегральных уравнений*. Гостехиздат, 1948, стр. 120.
29. С.Г. Михлин. Лекции по линейныым интегральным уравнениям. Наука, 1959.
30. ა.ფ.ფილიპოვი, დიფერენციალური განტოლებების ამოცანების კრებული, თსუ, 2000
31. გ. ხაჟალია, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები. ,,ცოდნა‘‘, თბილისი, 1961
32. თ. ჯანგველაძე, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდები. თსუ, 2005
33. ნ. ჩინჩალაძე, გ.ჯაიანი. უმაღლესი მათემატიკა, დიფერენციალური მოდელები II, თსუ, 2009
34. თ. თადუმაძე, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები (ლექციების კურსი), თსუ, 2015, თსუ ზსმფ ,,Moodle”
35. რ. კოპლატაძე, არაწრფივი ჩვეულებრივი დეფერენციალური განტოლებები, თსუ, 2014, თსუ ზსმფ ,,Moodle”

36. ა.ხარაძე, ორთოგონალურ პოლინომთა ელემენტები, თსუ, 1996
37. გ. კვინიკაძე. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანათა კრებული, ნაწილი 1, 1997; ნაწილი 2, 2001
38. თ. გეგელია, მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები, ნაკვეთი 1, 1987; ნაკვეთი 2, 1989.
39. ა. გაგნიძე, მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები, თსუ, 2003.
40. გ. ჯაიანი, უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები, თსუ, 2018
41. ი. თავხელიძე, ლექციების კურსი კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებში. 2014, თსუ ზსმფ, ,,Moodle“.
42. ნ. მუსხელიშვილი. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები, თბილისი, 1980
43. თ. გეგელია, ინტეგრალური და ფუნქციური განტოლებები, ნაკვეთი 1, 2, 1985.
44. რ. გამყრელიძე, ოპტიმალური მართვის თეორიის საფუძვლები, ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი, 2017.

გამომცემლობის რედაქტორი **მარინე ვარამაშვილი**
გარეკანის დიზაინი **ნინო ებრალიძე**
კომპიუტერული უზრუნველყოფა **ლალი კურდღელაშვილი**

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel: +995 (32) 2250484, 6284; 6278
www.press.tsu.edu.ge