ნამდვილ ცვლადთა ფუნქციების უწყვეტობა და დიფერენცირებადობა

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ომარ ძაგნიძე

ნამდვილ ცვლადთა ფუნქციების უწყვეტობა და დიფერენცირებადობა

თბილისის
უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

მრავალი ნამდვილი ცვლადის ფუნქციებისთვის ამ მონოგრაფიულ სახელმძღვანელოში დადგენილია: უწყვეტობის და დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები, ორი ცვლადის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის თითქმის ყველგან დიფერენცირებადობა, ლებეგის ინტენსურ წერტილებზე სასრული ძლიერი გრადიენტის არსებობა ცვლადსაზღვრებიანი ორმაგი ინტეგრალისთვის. პარამეტრის შემცველი ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრალი გამოკვლეულია დიფერენცირებადობაზე. მრავალი კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური ფუნქციისთვის დადგენილია $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის ($\mathbb{C}^n$-ანალიზურობის) აუცილებელი და საკმარისი პირობები მათი გამოყენებით ჰარტოგსის თეორემის მოკლე დამტკიცებისთვის. შემოღებული და შესწავლილია ფართო აზრით უწყვეტობა და ზღვრის არსებობა. ორი ცვლადის ფუნქცია გამოკვლეულია სიმეტრიულ უწყვეტობასა და სიმეტრიულ დიფერენცირებადობაზე.

წიგნი გამიზნულია მათემატიკური ანალიზის სპეციალობის დოქტორანტებისთვის, მაგისტრანტებისთვის, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მაღალკურსელთათვის.

რედაქტორი ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ სრული პროფესორი **უშანგი გოგინავა**

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ ასოცირებული პროფესორი **თეიმურაზ ახობაძე**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, თსუ ასოცირებული პროფესორი **თენგიზ კოპალიანი**

ISBN 978-9941-13-146-2

ა ვ ტ ო რ ი ს გ ა ნ

მე-19 საუკუნის ბოლო მეოთხედში უკვე ცნობილი იყო, მოცემულ წერტილზე წყვეტილი და ამავე წერტილზე თითოეული ცვლადით უწყვეტი ორი ცვლადის ფუნქციები.

იმავდროულად, ცნობილი იყო ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის მისი კერძო წარმოებულების უწყვეტობის სიჭარბე და იმავე კერძო წარმოებულების სასრულობის უკმარისობა.

თითოეული ეს "პათოლოგია", ამგვარ ფუნქციათა უმრავლესობას გააჩნია თითო წერტილზე.

მე-20 საუკუნის შუა წლებში ტოლსტოვმა დაადგინა არსებობა ორი ცვლადის ისეთი ფუნქციებისა, რომელთა "პათოლოგიურ" წერტილთა სიმრავლე საკმაოდ მასიურია. ეს ფაქტები გახდა სერიოზული საბაბი მრავალი ნამდვილი ცვლადის ფუნქციების შესწავლისა უწყვეტობასა და დიფერენცირებადობაზე.

ამრიგად, მრავალი ნამდვილი ცვლადის ფუნქციებისთვის დიდი ხანია გამოიკვეთა ორი ამოცანა მათზე აუცილებელი და საკმარისი პირობების შესახებ: ერთი მხრივ, უწყვეტობისთვის და, მეორე მხრივ, დიფერენცირებადობისთვის.

ცხადი იყო, რომ ამ ამოცანების გადაწყვეტა ხელს შეუწყობდა სხვა ამოცანების გადაწყვეტასაც, რომელნიც შეადგენენ საკითხების მესამე ჯგუფს. სახელდობრ, ამ ჯგუფს განეკუთვნებიან აქ შემოტანილი ცნებანი ფართო აზრით უწყვეტობის და ფართო აზრით ზღვრისა, რომელნიც არსებით კავშირშია უწყვეტობასთან და ზღვრის არსებობასთან.

ამავე ჯგუფს მიეკუთვნება დიფერენციალის არსებობის დამტკიცება ცვლადსაზღვრებიანი ორმაგი ინტეგრალისთვის და ორი ცვლადის აბსოლუტურად უწყვეტი, კერძოდ, ლიპშიცის კლასის ფუნქციებისთვის. უკანასკნელი ორი ფაქტი რეალიზებულია თითქმის ყველგან. სახელდობრ იმ წერტილებზე, რომელთაც ლებეგის ინტენსური წერტილები ვუწოდეთ.

მრავალი ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქციისთვის დიფერენციალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების საფუძველზე დადგენილია n კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. ამ პირობებზე დაყრდნობით, მიღებულია ჰარტოგსის მთავარი თეორემის (1906 წ.) ერთი ახალი დამტკიცება.

ასეთ და მათთან მჭიდროდ დაკავშირებულ საკითხებზეა საუბარი წინამდებარე მონოგრაფიულ სახელმძღვანელოში, რომელიც შედგება ოთხი თავისგან.

თითოეულ თავს წამძღვარებული აქვს რეზიუმე და შესავალი.

ყოველი თავი დაყოფილია პარაგრაფებად, რომელთა უმრავლესობა შედგება რამდენიმე პუნქტისგან. თითოეულ პუნქტს აქვს ინდივიდუალური და ერთიანი ნუმერაცია განსაზღვრებების, წინადადებების, თეორემების, ფორმულების და ასე შემდეგ. ციტირება პუნქტის შიგნით ერთთანრიგიანია. პუნქტის გარედან მოხმობილი ციტირება მრავალთანრიგიანია, სათანადო თავის მითითებითაც კი აუცილებლობის შემთხვევაში. წიგნს თან ერთვის ლიტერატურა, საძიებელი (პირთა და საგნობრივი) და სპეციალურ სიმბოლოთა ნუსხა.

თ ა ვ ი I

განცალებით კერძო უწყვეტობის სახეობანი და უწყვეტობა

ამ თავში ძირითადია მრავალი ნამდვილი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ შემდეგი ამოცანის დადებითად გადაწყვეტა.

მრავალი ნამდვილი ცვლადის ფუნქციისთვის, არსებობს თუ არა ცალკე აღებული დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ ისეთი ცნება-თვისება, რომლის ერთდროული შესრულება ყოველი დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ იქნება აუცილებელი და საკმარისი უწყვეტობის-თვის?

ამ ამოცანასთან დაკავშირებით შემოღებულია განცალებით კერ-ძო უწყვეტობის ორი ახალი სახეობა და დადგენილია, რომ თითო-ეული მათგანი ეკვივალენტურია უწყვეტობის.

ამ შედეგებზე დაყრდნობით, გამოვლენილია მრავალი ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა ზოგიერთი სხვა ახალი თვისება.

შესავალი

ერთი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის ცნება, ორგვარად ვრცელდება მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცი-აზე: უწყვეტობა (რასაც ზოგჯერ უწოდებენ დამოუკიდებელ ცვლად-თა ერთობლიობით უწყვეტობას) და თითოეული დამოუკიდებელი ცვლადით კერძო უწყვეტობა.

დიდი ხანია ცნობილია, რომ უწყვეტობა იწვევს თითოეული ცვლა-დით კერძო უწყვეტობას შებრუნების გარეშე. ამიტომ ბუნებრივად ის-მება ამოცანა: შესაძლებელია თუ არა უწყვეტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა გამოთქმულ იქნას თითოეული ცვლადის მიმართ რაიმე თვისებით?

ეს ამოცანა დადებითად არის გადაწყვეტილი პირველ თავში, რომლის მასალა პარაგრაფებში გადანაწილებულია შემდეგნაირად.

§ 3 და § 4. აქ შემოღებულია ორი ახალი ცნება: განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობა და განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობა.

დამტკიცებულია, რომ თითოეული ეს ცნება ეკვივალენტურია უწყვეტობის ცნების.

§ 5. ურთიერთმიმართება უწყვეტობასა და სასრული ზღვრის არსებობას შორის ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის ამოიწურება იმით, რომ უწყვეტობა იწვევს სასრული ზღვრის არსებობას შებრუნების გარეშე.

მაგრამ მრავალი ცვლადის ფუნქციისთვის შესაძლებელია მითითებულ იქნას უწყვეტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, თუკი განსახილველ ფუნქციას სასრული ზღვარი აქვს.

§ 6. ორი ცვლადის ფუნქციებს გამორჩეული ადგილი და როლი აქვთ მათემატიკურ ანალიზში, თუნდაც კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციებთან კავშირის გამო. ამიტომ n ნამდვილი ცვლადის ფუნქციებისთვის უკვე მიღებული შედეგები აქ ფორმულირებულია ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის, რათა ადვილი იყოს მიღებული შედეგების გამოყენება.

§ 7. ფუნქციის სრული ნაზრდი უმეტესად დაკავშირებულია ამ ფუნქციის უწყვეტობასთან. განსხვავებული სახეობის ნაზრდი მიიღება ძლიერი კერძო ნაზრდის თანდათანობითი გამოყენებით ყველა დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ. ასეთნაირადაა მიღებული ფართო აზრით ნაზრდი.

ამ ცნების მეშვეობით შემოღებულია ფართო აზრით უწყვეტობის ცნება და დადგენილია, რომ უწყვეტობიდან გამომდინარეობს ფართო აზრით უწყვეტობა შებრუნების გარეშე.

აქვე დამტკიცებულია, რომ ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობისთვის აუცილებელი და საკმარისია მისი ერთდროულად უწყვეტობა როგორც თითოეული ცვლადით, ისე ფართო აზრითაც. ეს შედეგი გავრცელებულია $n > 2$ ცვლადის ფუნქციებზე.

ამით გამოვლენილია ფართო აზრით უწყვეტობის ცნების სასარგებლო ინფორმაციული დატვირთვა.

§ 8. კლასიკურ ანალიზში, როგორც წესი, უწყვეტობის ცნებას უსწრებს ზღვრის ცნება. აქაც, ფართო აზრით უწყვეტობის ცნებისთვის მოძებნილია მისი წინმსწრები ცნება – ფართო აზრით ზღვრის ცნება.

დამტკიცებულია, რომ სასრული ზღვრის არსებობიდან გამომდინარეობს მასთან ტოლი ფართო აზრით ზღვრის არსებობა შებრუნების გარეშე.

დადგენილია, რომ რაიმე რიცხვი იქნება ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს რიცხვი ამ ფუნქციისთვის შეასრულებს როგორც განცალებული კერძო ზღვრების როლს, ისე ფართო აზრით ზღვრის როლსაც. დამტკიცებულია ამ თეორემის ანალოგი $n > 2$ ცვლადის ფუნქციებისთვის.

ეს ფაქტი ადასტურებს ფართო აზრით ზღვრის ცნების სასარგებლო თვისებას.

§ 9. აქ მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის საკმარისი შემდეგი პირობები: ერთ-ერთი ცვლადით კერძო უწყვეტობა თანაბრად დარჩენილი ცვლადის მიმართ და დარჩენილი ცვლადით კი მისი კერძო უწყვეტობა.

§ 10. უწყვეტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების გამოყენებით შემოღებულია ცალმხრივი ზღვრის და ცალმხრივი უწყვეტობის ახალი ცნებანი ორი ცვლადის ფუნქციისთვის. სახელდობრ, მოცემულია ცალმხრივი ძლიერი ზღვრის და ცალმხრივი ძლიერი უწყვეტობის ცნებები. შემოღებულია მოცემული ცვლადით კუთხური ზღვარი და კუთხური უწყვეტობა, ცალმხრივი კუთხური ზღვარი და ცალმხრივი კუთხური უწყვეტობა. დადგენილია ამ ცნებების მიმართება ზღვრის და უწყვეტობის ცნებებთან.

§ 11. ერთგანზომილებიან ჰარმონიულ ანალიზში გარკვეულ როლს ასრულებს, მაგალითად ფატუს თეორემის სახით, სიმეტრიული წარმოებული და მას უსწრებს სიმეტრიული უწყვეტობის ცნება.

ამ პარაგრაფში განხილულია სიმეტრიული უწყვეტობის საკითხები ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის.

§ 12. უწყვეტობის შესახებ მიღებული შედეგების საფუძველზე, აქ მრავალცვლადის ფუნქციებისთვის დადგენილია ზემოდან (ქვემოდან) ნახევრადუწყვეტობის საკმარისი პირობები.

§ 13. ფორმულირებულია დანჟუას (1915 წ.) და სტეპანოვის (1924 წ.) თეორემები ფუნქციის აპროქსიმატულ უწყვეტობასა და იმავე ფუნქციის ზომადობას შორის კავშირის შესახებ.

§ 1. აუცილებელი ცნებანი

1.1. ნორმა $\mathbb{R}^n$-ში

ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე აღვნიშნოთ $\mathbb{R}$-ით. $\mathbb{R}$-ის ყოველ a ელემენტს, სიმბოლურად $a \in \mathbb{R}$, შეესაბამება არაუარყოფითი $|a| = \max\{a, -a\}$ რიცხვი, რასაც ეწოდება a რიცხვის **აბსოლუტური მნიშვნელობა**. ამასთან მიღებულია, რომ $-0 = 0$.

$a_0 \in \mathbb{R}$ რიცხვის δ-მიდამო ეწოდება ყველა იმ $a \in \mathbb{R}$ რიცხვის სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეულს აქვს $|a-a_0|<\delta$ თვისება, $\delta>0$.

$\mathbb{R}$-ის ელემენტებისგან შეიძლება შეიქმნას დალაგებული ნაკრები $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. **კოორდინატული n-განზომილებიანი სივრცე**, სიმბოლურად A^n, ეწოდება ყველა შესაძლო $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ნაკრების სიმრავლეს. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ელემენტს ეწოდება A^n-ის წერტილი ან ვექტორი, ხოლო $x_1, \ldots, x_n$ რიცხვები იწოდებიან x-ის კოორდინატებად ან კომპონენტებად.

A^n-ის ორი ელემენტის ტოლობა ნიშნავს მათ კომპონენტობრივ ტოლობას, ე. ი. მათი ერთსახელა კომპონენტების ტოლობას.

ყოველ ორ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ და $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ ელემენტს შეესაბამება $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in A^n$ ელემენტი, რასაც ეწოდება **x-ის და y-ის ჯამი**. λx სიმბოლო აღნიშნავს $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in A^n$ ელემენტს და მას ეწოდება ნამდვილი λ **რიცხვის ნამრავლი $x \in A^n$ ელემენტზე**.

ყოველ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ ელემენტს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთ-ერთი **ნორმა** შემდეგი სამიდან

$$\|x\|_1 = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \tag{1}$$

$$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \tag{2}$$

$$\|x\|_3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}. \tag{3}$$

თითოეულ ამ ნორმათაგანს შეესაბამება $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ და $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ **წერტილებს შორის მანძილი**:

$$\|x - y\|_1 = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|, \tag{4}$$

$$\|x - y\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \tag{5}$$

$$\|x - y\|_3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}. \tag{6}$$

თუ კოორდინატული A^n სივრცე აღჭურვილია ერთ-ერთი ამ ნორმით, მაშინ მიიღება **ევკლიდეს $\mathbb{R}^n$ სივრცე**. ცხადია, რომ $n = 1$ მნიშვნელობისას (1)–(3) ნორმები ემთხვევა x რიცხვის აბსოლუტურ მნიშვნელობას.

1.2. დამოკიდებულებანი $\mathbb{R}^n$-ის ნორმებს შორის

ახლა ვნახავთ, რომ ამ სამი ნორმიდან თითოეული შეიძლება შეფასდეს დანარჩენი ორით მუდმივი მამრავლის სიზუსტით.

განხილვა დავიწყოთ 1.1.(1) და 1.1.(2) ნორმების შედარებით. ცხადია

$$\|x\|_1 \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_2,$$

$$\|x\|_2 \leq n \cdot \max_{1\leq i\leq n} |x_i| = n\|x\|_1.$$

მაშასადამე, ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისთვის გვაქვს

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq n\|x\|_1. \tag{1}$$

ახლა განვიხილოთ 1.1.(1) და 1.1.(3) ნორმები. ვთქვათ $|x_1|, \dots, |x_n|$ რიცხვებს შორის უდიდესია $|x_k|$. ამიტომ

$$\|x\|_1 = |x_k| = (x_k^2)^{1/2} \leq (x_1^2 + \cdots + x_k^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} = \|x\|_3.$$

ასევე

$$\|x\|_3 \leq \sqrt{n}\,\max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \sqrt{n}\,\|x\|_1.$$

ამრიგად, ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისთვის

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_3 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2. \tag{2}$$

(1) და (2) დამოკიდებულებანი იწვევს შეფასებას

$$\|x\|_2 \leq n\|x\|_3. \tag{3}$$

შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია (3) შეფასების გაუმჯობესება მუდმივი მამრავლის შემცირების თვალსაზრისით. მართლაც, $\lambda \in \mathbb{R}$ და $t \in \mathbb{R}$ რიცხვებისთვის გვაქვს

$$0 \leq (|\lambda| \cdot |t| - 1)^2 = \lambda^2 t^2 + 1 - 2|\lambda| \cdot |t|.$$

აქედან $2|\lambda| \cdot |t| \leq \lambda^2 t^2 + 1$, საიდანაც $\lambda > 0$ და $t = x_i$ შემთხვევისთვის ვიღებთ

$$2|x_i| \leq \lambda x_i^2 + \frac{1}{\lambda}\,, \quad 2\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{n}{\lambda}\,.$$

ამრიგად,

$$2\|x\|_2 \leq \lambda(\|x\|_3)^2 + \frac{n}{\lambda}\,.$$

ახლა $\lambda > 0$ შეიძლება შეირჩეს ისე, რომ უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა მხარის ორივე შესაკრები ურთიერთტოლი იყოს. ამისთვის კი საჭიროა ავიღოთ $\lambda = \sqrt{n}/\|x\|_3$. მაშასადამე,

$$\|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_3. \tag{4}$$

(1)–(4) შეფასებანი საშუალებას იძლევა, რომ 1.1.(1)–1.1.(3) ნორმებიდან თითოეული, ზემოდან შევაფასოთ დანარჩენი ორი ნორმით ცალ-ცალკე და შეფასებაში მამრავლად იქნება აბსოლუტური მუდმივი, ან $\mathbb{R}^n$ სივრცის n განზომილებაზე დამოკიდებული რიცხვი.

ამრიგად, თუ $\mathbb{R}^n$ სივრციდან აღებულ წერტილთა მიმდევრობა კრებადია ნულისკენ 1.1.(1)–1.1.(3) ნორმებიდან ერთ-ერთით, მაშინ ეს მიმდევრობა კრებადია ნულისკენ დანარჩენი ორი ნორმითაც. 1.1.(1)–1.1.(3) ნორმების ამ თვისებას მოკლედ ასე გამოთქვამენ: 1.1.(1)–1.1.(3) **ნორმები ურთიერთეკვივალენტურებია**.

მაშასადამე, $\mathbb{R}^n$ სივრცეში ზღვრის ცნების შემოსაღებად შეიძლება ვისარგებლოთ 1.1.(1)–1.1.(3) ნორმებიდან ნებისმიერით და ზღვრის ცნება იქნება ერთი და იგივე, ე. ი. ერთ-ერთი ნორმით ზღვრის მქონე მიმდევრობა იგივე ზღვრის მქონე იქნება დანარჩენი ორი ნორმითაც. ნორმის არჩევა კი დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენად მოხერხებულია ის განსახილველი საკითხის შესწავლისას.

შემდეგში სიმბოლო $\|x\|$ აღნიშნავს $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისთვის 1.1.(1)–1.1.(3) ნორმებიდან ერთ-ერთს.

$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ **წერტილის δ-მიდამო**, სიმბოლურად $U(x^0,\delta)$, ეწოდება δ რადიუსიან $U(x^0,\delta)=\{x\in\mathbb{R}^n :\ \|x-x^0\|<\delta\}$ **ღია ბირთვს** ანუ, რაც იგივეა, **ღია ბურთოს** ([1], გვ. 164) ცენტრით x^0-ში. **ღია უცენტრო δ რადიუსიან**

$$U^0(x^0,\delta) = U(x^0,\delta)\setminus\{x^0\} = \big\{x\in\mathbb{R}^n :\ 0<\|x-x^0\|<\delta\big\}$$

ბირთვს ანუ **ბურთოს** კი ვუწოდოთ x^0 **წერტილის უცენტრო δ-მიდამო***.

* “უცენტრო მიდამო” კარგად ეხამება დამკვიდრებულ ტერმინს “უცენტრო წრიი”. ამასთან გვაქვს: punctured disc – круг без центра.

სიმბოლოებით $U(x^0)$ და $U^0(x^0)$ ავღნიშნოთ $x^0 \in \mathbb{R}^n$ **წერტილის მიდამო** და **უცენტრო მიდამო**, საზოგადოდ.

თვალსაჩინოების მიზნით განვიხილოთ $\mathbb{R}^2$ სივრციდან აღებული $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის δ-მიდამოს სახეობანი, რომელნიც შეესაბამებიან 1.1.(4)–1.1.(6) მანძილებს.

$U(x^0, \delta)_1$ არის **ღია კვადრატი**, ე. ი. კვადრატი საზღვრის გარეშე, რომლის ცენტრია x^0 და წვეროებია

$$A_1 = (x_1^0 + \delta, x_2^0 + \delta), \quad B_1 = (x_1^0 - \delta, x_2^0 + \delta),$$
$$C_1 = (x_1^0 - \delta, x_2^0 - \delta), \quad D_1 = (x_1^0 + \delta, x_2^0 - \delta)$$

წერტილები.

ამ კვადრატის გვერდები პარალელურია საკოორდინატო ღერძების და მისი საზღვარია $x_1 = x_1^0 \pm \delta$ და $x_2 = x_2^0 \pm \delta$ ოთხი წრფის გადაკვეთით მიღებული სასრული შეკრული ტეხილი. ამ ტეხილის ყოველ (x_1, x_2) წერტილს აქვს $\max\{|x_1 - x_1^0|, |x_2 - x_2^0|\} = \delta$ თვისება.

$U(x^0, \delta)_2$ არის ღია კვადრატი x^0 ცენტრით და $A_2 = (x_1^0 + \delta, x_2^0)$, $B_2 = (x_1^0, x_2^0 + \delta)$, $C_2 = (x_1^0 - \delta, x_2^0)$ და $D_2 = (x_1^0, x_2^0 - \delta)$ წვეროებით. ამ კვადრატის საზღვარია შეკრული ტეხილი, რომლის ყოველი (x_1, x_2) წერტილი აკმაყოფილებს $|x_1 - x_1^0| + |x_2 - x_2^0| = \delta$ პირობას.

$U(x^0, \delta)_3$ არის δ რადიუსიანი **ღია წრე** $(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 < \delta^2$, რომლის ცენტრია x^0 წერტილი და საზღვარს კი წარმოადგენს δ რადიუსიანი $(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 = \delta^2$ წრეწირი.

ამათგან ყოველი მიდამოსთვის არსებობს მისი მომცველი და, აგრეთვე, მის მიერ მოცული, ორივე სხვა ტიპის მიდამო.

1.3. ფუნქციის ზღვრის ცნება

შემდეგში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, თუ საწინააღმდეგო არ არის ნათქვამი, რომ $\mathbb{R}^n$-ის წერტილებისგან შედგენილ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია იღებს მხოლოდ ნამდვილ სასრულ მნიშვნელობებს, ე. ი. ფუნქციის მნიშვნელობანი ეკუთვნის $\mathbb{R}$ სივრცეს.

ვთქვათ, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ წერტილის უცენტრო $U^0(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრულია $u = f(x)$ ფუნქცია, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U^0(x^0)$, $u \in \mathbb{R}$.

სასრულ $A \in \mathbb{R}$ რიცხვს ეწოდება f **ფუნქციის ზღვარი** x^0 წერტილზე, სიმბოლურად,

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = A \ \text{ან} \ \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, \ldots, x_n) = A, \tag{1}$$

თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი დადებითი $\delta = \delta(\varepsilon, x^0, f)$ რიცხვი, რომ ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad x \in U^0(x^0, \delta). \tag{2}$$

როგორც ვხედავთ, (2) უტოლობაში არ მონაწილეობს f ფუნქციის $f(x^0)$ მნიშვნელობა თვით x^0 წერტილზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ x^0 წერტილზე f ფუნქციისთვის ზღვრის არსებობა-არარსებობაზე გავლენას ვერ ახდენს $f(x^0)$ მნიშვნელობა. f ფუნქციისთვის x^0 წერტილზე A ზღვრის არსებობისთვის გადამწყვეტია $f(x)$ მნიშვნელობების ნებისმიერად ახლოს ყოფნა A რიცხვთან, როცა $x \neq x_0$ წერტილები საკმარისად ახლოს არიან x^0 წერტილთან.

$+\infty$ [ან $-\infty$] არის f ფუნქციის ზღვარი $x^0 \in \mathbb{R}^n$ წერტილზე, თუ ყოველი ნებისმიერად დიდი დადებითი $M \in \mathbb{R}$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta_1 > 0$ რიცხვი [შესაბამისად $\delta_2 > 0$ რიცხვი] ისეთი, რომ ყოველი $x \in U^0(x^0, \delta_1)$ წერტილისთვის [შესაბამისად ყოველი $x \in U^0(x^0, \delta_2)$ წერტილისთვის] მართებულია $f(x) > M$ უტოლობა [შესაბამისად $f(x) < -M$ უტოლობა].

გამოთქმა "ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს **უსასრულო ზღვარი**" ნიშნავს, რომ ამ ფუნქციას x^0 წერტილზე ზღვრად აქვს ან $+\infty$ ან $-\infty$, ე. ი. ნიშნიანი უსასრულობა.

ცხადია, რომ $+\infty$ ან $-\infty$ ვერ იქნება f ფუნქციის ზღვარი x^0 წერტილზე, თუ არსებობს x^0-სკენ კრებად წერტილთა ისეთი მიმდევრობა, რომლის გასწვრივაც $f(x)$ მნიშვნელობანი ისწრაფვიან სასრული რაიმე რიცხვისკენ.

1.4. წერტილზე უსასრულოდ მცირე ფუნქცია

$u = \varphi(x)$ ფუნქციას, $x \in U^0(x^0)$, ეწოდება **უსასრულოდ მცირე ფუნქცია** x^0 წერტილზე, თუ ადგილი აქვს

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0 \tag{1}$$

ტოლობას და ამას მოკლედ ასე წერენ:

$$\varphi(x) = o(1), \ \ x \to x^0. \tag{2}$$

ცხადია, თუ $u = f(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე ზღვრად აქვს სასრული A რიცხვი, მაშინ $\alpha(x) = f(x) - A$ ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა x^0 წერტილზე. ამ ფაქტის გამოყენებით ვიღებთ $f(x) = A + \alpha(x)$ წარმოდგენას, სადაც $\alpha(x)$ არის უსასრულოდ მცირე ფუნქცია x^0 წერტილზე: $\alpha(x) = o(1)$, $x \to x^0$.

ვთქვათ, $\beta(x)$ არის უსასრულოდ მცირე ფუნქცია x^0 წერტილზე, ე. ი. $\lim\limits_{x \to x^0} \beta(x) = 0$. მაშინ "$o(\beta(x))$, $x \to x^0$" სიმბოლოთი აღინიშნება კლასი ყველა იმ $\psi(x)$ ფუნქციისა, რომელთაგან თითოეულს აქვს თვისებები:

$$\lim_{x \to x^0} \psi(x) = 0, \quad \lim_{x \to x^0} \frac{\psi(x)}{\beta(x)} = 0.$$

ამ შემთხვევაში წერენ "$\psi(x) = o(\beta(x))$, $x \to x^0$" და ამბობენ, რომ x^0 წერტილზე $\psi(x)$ ფუნქცია უფრო მცირეა, ვიდრე $\beta(x)$ ფუნქცია.

ამბობენ, რომ x^0 წერტილზე უსასრულოდ მცირე $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფუნქციებს აქვთ ერთი და იგივე სიმცირე x^0 წერტილზე, თუ მათ შეფარდებას x^0 წერტილზე აქვს არანულოვანი სასრული ზღვარი.

თუკი x^0 წერტილზე უსასრულოდ მცირე $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფუნქციების შეფარდებას x^0 წერტილზე ზღვრად აქვს რიცხვი 1, მაშინ ამბობენ, რომ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფუნქციები **ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია** x^0 წერტილზე.

მაგალითად, $\sin t$ და t ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია $t = 0$ წერტილზე.

1.5. ფუნქციის უწყვეტობის ცნება

$x^0 \in \mathbb{R}^n$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრულ სასრულ f ფუნქციას ეწოდება **უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ f-ს სასრული ზღვარი აქვს x^0 წერტილზე და თუ ეს ზღვარი ტოლია $f(x^0)$ მნიშვნელობის.

ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს დადებითი $\delta = \delta(x^0, \varepsilon, f)$ რიცხვი თვისებით

$$|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon, \ \ x \in U(x^0, \delta). \tag{1}$$

ასეთ შემთხვევაში x^0 წერტილს ჰქვია f **ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი** და წერენ, 1.3.(1) ჩანაწერის შესაბამისად,

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0) \ \text{ანუ}^* \ \lim_{x \to x^0} f(x) - f(x^0) = 0. \tag{2}$$

რადგანაც $x^0 = \lim\limits_{x \to x^0} x$, ამიტომ x^0 წერტილზე f ფუნქციის უწყვეტობის (2) პირობა ასეც იწერება

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(\lim_{x \to x^0} x). \tag{3}$$

ამრიგად, ფუნქციის უწყვეტობის წერტილზე შეიძლება ფუნქციის არგუმენტში ზღვარზე გადასვლა და პირიქით.

$E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ $u = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **უწყვეტი E სიმრავლეზე**, თუ f უწყვეტია E სიმრავლის ყოველ წერტილზე, ე. ი. თუ (2) ტოლობა შესრულებულია ყველა $x^0 \in E$ წერტილზე.

სიმრავლეზე უწყვეტობის ამ ცნებასთან დაკავშირებით უნდა ითქვას შემდეგი. f ფუნქციის უწყვეტობა $x^0 \in E$ წერტილზე მხოლოდ მაშინ ნიშნავს (1) უტოლობას ანუ, რაც იგივეა, (2) ტოლობას, როცა

---

*უწყვეტობის მეორე ფორმით ჩაწერისას, $f(x^0)$-ის სასრულობა თავისთავადია.

x^0 არის E **სიმრავლის შიგა წერტილი** (რაც ნიშნავს x^0 წერტილის ისეთი $U(x^0)$ მიდამოს არსებობას, რომლის ყოველი წერტილი ეკუთვნის E სიმრავლეს: $U(x^0) \subset E$).

თუკი $x^0 \in E$ წერტილი არაა შიგა წერტილი E სიმრავლისთვის, მაგრამ არის E **სიმრავლის დაგროვების წერტილი** (რაც ნიშნავს ურთიერთგანსხვავებულ $b_k \in E, b_i \neq b_j, j \neq i$, წერტილთა მიმდევრობის არსებობას, რომელიც კრებადია x^0 წერტილისკენ), მაშინ f ფუნქციის უწყვეტობა x^0 წერტილზე ნიშნავს $|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$ უტოლობის შესრულებას ყველა $x \in U(x^0, \delta) \cap E$ წერტილზე რაიმე $\delta > 0$ რიცხვისთვის. ასეთ შემთხვევაში f ფუნქციას ეწოდება E **სიმრავლის გასწვრივ** (E **სიმრავლის მიმართ**) **უწყვეტი** x^0 წერტილზე და წერენ

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in E}} f(x) = f(x^0). \tag{4}$$

იგივე უნდა ითქვას x^0 წერტილზე f ფუნქციის ზღვრის შესახებაც E სიმრავლის გასწვრივ იმ განსხვავებით, რომ ახლა x^0 წერტილი შეიძლება აღარ ეკუთვნოდეს E სიმრავლეს.

მაგალითად, ერთი ცვლადის φ ფუნქციის უწყვეტობა ჩაკეტილ $[a, b]$ ინტერვალზე ანუ $[a, b]$ სეგმენტზე ნიშნავს φ ფუნქციის უწყვეტობას ღია (a, b) ინტერვალის ყველა წერტილზე (ის შიგა წერტილია $[a, b]$ სეგმენტისთვის) და ამავე დროს a წერტილზე φ-ს მარჯვნიდან და b წერტილზე მარცხნიდან უწყვეტობას.

ასეთი გადახვევა გვაქვს, როცა ფუნქცია უწყვეტია არაღია სიმრავლეზე ამ სიმრავლის გასწვრივ.

თუ $x^0 \in E$ არის **იზოლირებული წერტილი** E სიმრავლისთვის (ეს ნიშნავს x^0 წერტილის ისეთი $U(x^0, \delta)$ მიდამოს არსებობას, რომ თანაკვეთა $U(x^0, \delta) \cap E$ შედგება მხოლოდ ერთი x^0 წერტილისგან), მაშინ E სიმრავლეზე განსაზღვრული ყოველი სასრული ფუნქცია ითვლება უწყვეტად x^0 წერტილზე.

$M \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული სასრული ψ ფუნქცია იწოდება M **სიმრავლის გასწვრივ წყვეტილ** ფუნქციად $x^0 \in M$

წერტილზე, როცა x^0 კი არის M სიმრავლის დაგროვების წერტილი, მაგრამ ψ ფუნქცია არ არის M-ის გასწვრივ უწყვეტი x^0 წერტილზე. ეს ნიშნავს, რომ არსებობენ დადებითი $\eta = \eta(x^0, \psi, M)$ რიცხვი და x^0 წერტილისკენ კრებადი ურთიერთგანსხვავებული $x_k \in M$ წერტილებისგან შედგენილი $\{x_k\}$ მიმდევრობა ისეთები, რომ

$$|\psi(x_k) - \psi(x^0)| \geq \eta, \quad k = 1, \ldots . \tag{5}$$

აქედან გამომდინარეობს

წინადადება 1.5.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული სასრული ψ ფუნქცია წყვეტილი იქნება $x^0 \in M$ წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იარსებებს ერთი მაინც ქვესიმრავლე $e \subset M$ ზღვრული x^0 წერტილით, რომლის გასწვრივაც ψ იქნება წყვეტილი x^0 წერტილზე.

თუკი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის დაგროვების რაიმე x^0 წერტილი არ ეკუთვნის რომელიმე φ ფუნქციის, არააუცილებლად სასრულის, განსაზღვრის სიმრავლეს, მაშინ φ-ს ზოგჯერ თვლიან E სიმრავლის გასწვრივ წყვეტილად x^0 წერტილზე. უმჯობესია ვთქვათ: φ ფუნქცია E სიმრავლის გასწვრივ არაა უწყვეტი x^0 წერტილზე.

1.6. ფუნქციის ნაზრდი

ვთქვათ $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრულია სასრული $u = f(x)$ ფუნქცია, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U(x^0)$.

f **ფუნქციის სრული ნაზრდი** ანუ, მოკლედ, **ნაზრდი** x^0 წერტილზე ეწოდება

$$\Delta_{x^0} f(x) = f(x) - f(x^0) \;\text{ ანუ, მოკლედ, }\; \Delta_{x^0} f = f - f(x^0) \tag{1}$$

სხვაობას.

ცხადია, რომ $u = f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია

$$\lim_{x \to x^0} \Delta_{x^0} f(x) = 0 \tag{2}$$

ტოლობა. (2) ტოლობას ეწოდება f **ფუნქციის** x^0 წერტილზე **უწყვეტობის სხვაობითი ფორმა**.

1.7. ფუნქციის შეზღუდვა

ვთქვათ, სასრული ψ ფუნქცია განსაზღვრულია $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე (ეს ნიშნავს, რომ ყოველი $x^0 \in E$ წერტილისთვის $\psi(x^0)$ მნიშვნელობა სასრულია) და e იყოს E სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე, სიმბოლურად $e \subset E$.

არის შემთხვევები, როცა ψ ფუნქციას e სიმრავლის გასწვრივ აქვს უფრო კარგი თვისება, ვიდრე მთლიანი E სიმრავლის გასწვრივ.

ამიტომ ზოგჯერ განიხილება $\psi|e$ ფუნქცია, რომელსაც ეწოდება ψ **ფუნქციის შეზღუდვა** e სიმრავლეზე.

ამრიგად, $(\psi|e)(x) = \psi(x)$ ყველა $x \in e$ წერტილზე.

ასეთ შემთხვევაში იტყვიან აგრეთვე, რომ ψ ფუნქცია არის **გაგრძელება (განვრცობა)** $\psi|e$ ფუნქციისა e სიმრავლიდან E სიმრავლეზე.

შეზღუდვების სხვადასხვა თვისების შესახებ ზოგიერთი მაგალითი განხილული იქნება ქვემოთ, როცა e სიმრავლის როლში წრფე ან გარკვეული წირია (იხ. 2.2 ქვემოთ).

აქ კი ჩამოვაყალიბოთ ბლუმბერგის შემდეგი თეორემა (1922 წ.).

თეორემა 1.7.1 ([127], გვ. 99)**.** ყოველი $f :]0,1[\to]0,1[$ ფუნქციისთვის არსებობს ყველგან მკვრივი ისეთი $D \subset]0,1[$ სიმრავლე, რომ $f|D$ შეზღუდვა უწყვეტია.

შევნიშნოთ, რომ ცნობილია ამ თეორემის სხვადასხვა ვერსია-განზოგადება ([127], გვ. 100–112).

1.8. ზოგადი თეორემა ფუნქციის უწყვეტობის და სასრული ზღვრის შესახებ

თეორემა 1.8.1. $x^0 \in \mathbb{R}^n$ წერტილის მიდამოში სასრული f ფუნქცია იქნება უწყვეტი ან ექნება სასრული A ზღვარი x^0 წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იარსებებს ისეთი $U(x^0, \delta)$

მიდამო, რომლის წარმოდგენა შესაძლებელია სასრული რაოდენობის M_k სიმრავლეების გაერთიანების სახით, რომელთაგან თითოეულისთვის $f|M_k$ ფუნქცია-შეზღუდვა იქნება M_k სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი x^0 წერტილზე, ან M_k სიმრავლის გასწვრივ ზღვრად x^0 წერტილზე ექნება A რიცხვი, $k = 1, \dots, p$; $p = p(x^0, f) < +\infty$.

დამტკიცება. თუ x^0 წერტილზე f ფუნქცია უწყვეტია, ან მისი ზღვარია A რიცხვი, მაშინ p რიცხვად გამოდგება რიცხვი 1.

შებრუნებით, ვთქვათ $f|M_k$ შეზღუდვები M_k სიმრავლეების გასწვრივ უწყვეტი ფუნქციებია x^0 წერტილზე, $k = 1, \dots, p$. ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს რიცხვი $\delta_k > 0$ ისეთი, რომ

$$\left|(f|M_k)(x) - f(x^0)\right| < \varepsilon, \ \ x \in U(x^0, \delta_k) \cap M_k.$$

ცხადია, რომ $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$ რიცხვი დადებითია (p რიცხვის სასრულობის გამო) და ამიტომ

$$\left|(f|M_k)(x) - f(x^0)\right| < \varepsilon,$$

როცა

$$x \in U(x^0, \delta) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{p} M_k\right) = U(x^0, \delta) \cap U(x^0, \delta) = U(x^0, \delta).$$

მაშასადამე, $|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$, როცა $x \in U(x^0, \delta)$. ეს კი ნიშნავს f ფუნქციის უწყვეტობას x^0 წერტილზე.

ანალოგიურად განიხილება სასრული A ზღვრის შემთხვევაც.

მაგალითი 1.8.1. ფუნქციის

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1^3 - x_2^3} \tag{1}$$

განსაზღვრის სიმრავლე აღვნიშნოთ E-თი. რადგანაც $x_1^3 = x_2^3$ ტოლობის შესასრულებლად აუცილებელი და საკმარისი პირობაა $x_2 = x_1$, ამიტომ E სიმრავლე შეიცავს $\mathbb{R}^2$-ის ყველა წერტილს, გარდა $x_2 = x_1$ წრფის წერტილებისა.

$\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლის ყველა წერტილზე, როგორც მისი განსაზღვრის სიმრავლის შიგა წერტილზე.

$x_2 = x_1$ წრფის წერტილებზე $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობაზე საუბარს აზრი არ აქვს, რადგან ამ წრფის წერტილებზე $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქცია განსაზღვრული არ არის. ამიტომ ფუნქცია $\lambda(x_1, x_2)$ არაა უწყვეტი $x_2 = x_1$ წრფის წერტილებზე.

ახლა განვიხილოთ იმავე $x_2 = x_1$ წრფის წერტილებზე $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობის საკითხი. $x_2 = x_1$ წრფეზე ავიღოთ კოორდინატთა $O = (0, 0)$ სათავისგან განსხვავებული რაიმე $N = (a, a)$ წერტილი, სადაც $a \neq 0$. გვაქვს ტოლობა

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(a,a)\\(x_1,x_2)\in E}} \lambda(x_1, x_2) = \lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(a,a)\\(x_1,x_2)\in E}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2} = \frac{1}{3a^2}\,. \quad (2)$$

ამრიგად, $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქციას $N = (a, a)$, $a \neq 0$, წერტილზე E სიმრავლის გასწვრივ ზღვრად აქვს $1/3a^2$ რიცხვი.

თუ განვიხილავთ ახალ $\lambda^*(x_1, x_2)$ ფუნქციას, რომელიც E სიმრავლეზე ემთხვევა $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქციას, ხოლო $N = (a, a)$, $a \neq 0$, წერტილებზე კი ტოლია ამ წერტილებზე $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქციისთვის E სიმრავლის გასწვრივ არსებული სასრული $1/3a^2$ ზღვრის, მაშინ ასე მიღებული $\lambda^*(x_1, x_2)$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან, გარდა კოორდინატთა სათავისა. ამიტომ $x_2 = x_1$ წრფის ყველა წერტილი, გარდა $O = (0, 0)$ წერტილისა, $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქციისთვის **ასაცილებელი წყვეტის წერტილია**.

ფუნქციის შესწორებას ასაცილებელი წყვეტის წერტილზე მისივე სასრული ზღვრით ამ წერტილზე, შეიძლება ეწოდოს ამ **ფუნქციის უწყვეტიზება** აღებულ წერტილზე.

ბოლოს, რადგანაც E სიმრავლის (x_1, x_2) წერტილებზე

$$\lambda(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1 + \frac{1}{2}\,x_2)^2 + \frac{3}{4}\,x_2^2}\,,$$

ამიტომ

$$\lim_{\substack{(x_1,x_2)\to(0,0)\\(x_1,x_2)\in E}} \lambda(x_1,x_2)=+\infty. \tag{3}$$

მაშასადამე, $O=(0,0)$ წერტილი არ არის **ასაცილებელი წყვეტის წერტილი** $\lambda(x_1,x_2)$ ფუნქციისთვის.

1.9. ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობა

როგორც ვნახეთ, $E\subset\mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ სასრულ f ფუნქციას ეწოდება E **სიმრავლის გასწვრივ უწყვეტი** $x^0\in E$ წერტილზე, თუკი ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს დადებითი $\delta=\delta(x^0,\varepsilon,f,E)$ რიცხვი ისეთი, რომ $|f(x)-f(x^0)|<\varepsilon$ უტოლობა სრულდება ყველა $x\in U(x^0,\delta)\cap E$ წერტილზე.

აქედან ჩანს, რომ δ დამოკიდებულია x^0 წერტილზე: f ფუნქციის უწყვეტობის სხვადასხვა წერტილისთვის, δ-ს როლში გამოდის სხვადასხვა რიცხვი საზოგადოდ. თუ f ფუნქციის მნიშვნელობანი მკვეთრად იცვლებიან მისი უწყვეტობის რომელიმე წერტილის მიდამოში, მაშინ ამ წერტილის შესაბამისი δ უფრო მცირეა, ვიდრე იმ წერტილის შესაბამისი δ, რომლის მიდამოშიც f-ის მნიშვნელობანი მდოვრედ იცვლებიან.

მიუხედავად ამისა არსებობს ფუნქცია, რომლის უწყვეტობის ყველა წერტილს ერთი და იგივე δ შეესაბამება. ასეთი თვისების მქონე ფუნქციას ეწოდება თანაბრად უწყვეტი. უფრო ზუსტად, მიღებულია შემდეგი

განსაზღვრა 1.9.1. $E\subset\mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ სასრულ f ფუნქციას ეწოდება **თანაბრად უწყვეტი** E-ზე, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი დადებითი $\delta=\delta(\varepsilon,f,E)$ რიცხვი, რომ E სიმრავლიდან აღებული ყოველი x' და x'' წერტილებისთვის ადგილი აქვს

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{1}$$

უტოლობას, როგორც კი შესრულდება $\|x'-x''\|<\delta$ უტოლობა.

აქედან აშკარაა, რომ მოცემულ სიმრავლეზე თანაბრად უწყვეტი ფუნქცია უწყვეტიცაა ამავე სიმრავლეზე.

შებრუნებულ ფაქტს ადგილი არ აქვს საზოგადოდ, რაც შეიძლება შევამოწმოთ $\lambda(t) = 1/t$ ფუნქციაზე, სადაც $0 < t < 1$. ღია $(0,1)$ ინტერვალზე განსაზღვრული და სასრული ეს ფუნქცია უწყვეტია $(0,1)$-ის ყოველ წერტილზე, მაგრამ არ არის თანაბრად უწყვეტი $(0,1)$ ინტერვალზე.

ამის შესამოწმებლად ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ნებისმიერი t_0 წერტილი, $0 < t_0 < 1$. ავიღოთ რომელიმე დადებითი $\delta < \min\{\frac{1}{2}t_0, \frac{1}{2}\varepsilon t_0^2\}$ რიცხვი. ახლა t იყოს ნებისმიერი რიცხვი $(0,1)$-დან, რომელსაც აქვს $t_0 - \delta < t < t_0 + \delta$ თვისება. რადგან

$$|\lambda(t_0) - \lambda(t)| = \Big|\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t}\Big| = \frac{|t - t_0|}{t_0 t}$$

და $t > t_0 - \delta > t_0 - \frac{1}{2}t_0 = \frac{1}{2}t_0$, ამიტომ

$$|\lambda(t) - \lambda(t_0)| < \frac{|t - t_0|}{t_0(t_0 - \delta)} < \frac{2|t - t_0|}{t_0^2} < \frac{2\delta}{t_0^2} < \frac{\varepsilon t_0^2}{t_0^2} = \varepsilon.$$

ამრიგად, λ ფუნქცია უწყვეტია ყოველ $t_0 \in (0,1)$ წერტილზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ იგივე λ ფუნქცია არ არის თანაბრად უწყვეტი ღია $(0,1)$ ინტერვალზე. ამის საჩვენებლად ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი η რიცხვი. t რიცხვი იყოს $0 < t < \eta$ თვისების და ავიღოთ მეორე $t^* = \frac{1}{2}\,t$ რიცხვი. მაშინ $0 < t - t^* = \frac{1}{2}\,t < \frac{1}{2}\,\eta < \eta$ და

$$\lambda(t^*) - \lambda(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} > 1.$$

მაშასადამე, ყოველი $\eta > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $(0,1)$ ინტერვალზე ორი t და t^* წერტილი, რომელთა შორის მანძილი ნაკლებია η-ზე და ამავე დროს $|\lambda(t^*) - \lambda(t)| > 1$. ეს ნიშნავს $\lambda(t)$ ფუნქციის **უწვეტობის არათანაბრობას** ღია $(0,1)$ ინტერვალზე.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ეს λ ფუნქცია თანაბარად უწვეტია ყოველ $[\alpha, \beta] \subset (0,1)$ სეგმენტზე, თანახმად გ. კანტორის ქვემოთ მოყვანილი 1.9.1 თეორემისა.

მაშასადამე, არსებობს ღია E სიმრავლეზე უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად უწყვეტია ყოველ ჩაკეტილ $e \subset E$ ქვესიმრავლეზე, მაგრამ არაა თანაბრად უწყვეტი თვით E-ზე.

ცხადია, რომ რაიმე $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე თანაბრად უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ყოველ $e \subset E$ ქვესიმრავლეზე.

ღია $(0,1)$ ინტერვალზე უწყვეტი $\mu(t) = \sin(1/t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულიცაა $(0,1)$-ზე, მაგრამ არ არის თანაბრად უწყვეტი $(0,1)$ ინტერვალზე.

ახლა მოვახდინოთ იმის ფორმულირება, თუ რას ნიშნავს **თანაბარი უწყვეტობის თვისების უქონლობა**.

$M \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე უწყვეტი φ ფუნქცია არ არის თანაბრად უწყვეტი M სიმრავლეზე, თუ არსებობს M-ის და φ-ს შესაბამისი ისეთი $\varepsilon_0 > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება $x' \in M$ და $x'' \in M$ წერტილები $\|x' - x''\| < \delta$ და $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \geq \varepsilon_0$ თვისებებით.

კარგადაა ცნობილი გ. კანტორის შემდეგი კლასიკური

თეორემა 1.9.1 (გ. კანტორი, [3], გვ. 277)**.** შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ სიმრავლეზე უწყვეტი ყოველი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია იმავე სიმრავლეზე.

ამ თეორემის მოთხოვნაა ფუნქციის უწყვეტობის **სიმრავლის შემოსაზღვრულობა** (რაც ნიშნავს ამ სიმრავლის მიკუთვნებას რაიმე სასრულრადიუსიანი ბურთოსადმი) და **ჩაკეტილობა** (ეს კი ნიშნავს, რომ ამავე სიმრავლეს ეკუთვნის ყველა წერტილი, რომლებიც ამავე სიმრავლის დაგროვების წერტილებია).

თითოეული ეს პირობა არ არის აუცილებელი ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობისთვის, როგორც ამას გვიჩვენებს შემდეგი მაგალითები.

მაგალითი 1.9.1. წრფივი ფუნქცია $\varphi(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + C$ თანაბრად უწყვეტია მთელს $\mathbb{R}^2$ სიბრტყეზე.

ამის დასადგენად ავიღოთ ნებისმიერი ორი $x' = (x_1', x_2')$ და $x'' = (x_1'', x_2'')$ წერტილი. განვიხილოთ

$$\varphi(x') - \varphi(x'') =$$

$$= \varphi(x_1', x_2') - \varphi(x_1'', x_2'') = A(x_1' - x_1'') + B(x_2' - x_2'')$$

სხვაობა. $|A| + |B| > 0$ დაშვება ბუნებრივია (წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა $\varphi(x_1, x_2) = C$, რომლის თანაბარი უწყვეტობა $\mathbb{R}^2$ სიბრტყეზე აშკარაა) და ნებისმიერად აღებულ $\varepsilon > 0$ რიცხვს შევუსაბამოთ დადებითი $\delta = \varepsilon/2(|A| + |B|)$ რიცხვი. $\|x' - x''\| < \delta$ პირობიდან გამომდინარეობს $|x_1' - x_1''| < \delta$ და $|x_2' - x_2''| < \delta$ უტოლობანი, 1.1.(4)–1.1.(6) ტოლობების გათვალისწინებით. ამიტომ

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon.$$

მაშასადამე, $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია შემოუსაზღვრელ $\mathbb{R}^2$ სიმრავლეზე.

იგივე თვისება შენარჩუნებულია $\mathbb{R}^n$-ში წრფივი ფუნქციისთვის.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\mu(x) = x^2$ ფუნქცია არ არის თანაბრად უწყვეტი $(-\infty, +\infty)$-ზე.

ამრიგად, $(-\infty, +\infty)$-ზე თანაბრად უწყვეტი $a(x) = x$ ფუნქციის კვადრატი $b(x) = x^2$ აღარ არის თანაბრად უწყვეტი $(-\infty, +\infty)$-ზე.

ცხადია, ასეთ ფაქტს არ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ სიმრავლეზე უწყვეტი ფუნქციების ნამრავლისთვის.

მაგალითი 1.9.2. ფუნქცია

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} \tag{2}$$

თანაბრად უწყვეტია

$$E = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$$

სიმრვალეზე, რომელიც **არც ღიაა და არც ჩაკეტილი**.

ამ ფუნქციის უწყვეტობა E სიმრავლეზე გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ψ არის E-ზე უწყვეტი ორი ფუნქციის შეფარდება და მნიშვნელი $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$, როცა $(x_1, x_2) \in E$. ამ ფუნქციის მიმართ ვერ გამოვიყენებთ კანტორის 1.9.1 თეორემას, რადგანაც შემოსაზღვრული E სიმრავლე არ არის ჩაკეტილი (E სიმრავლე არ შეიცავს თავის ზღვრულ $(0, 0)$ წერტილს).

ახლავე დავრწმუნდებით, რომ შესაძლებელია ψ **ფუნქციის უწყვეტიზება** $O = (0,0)$ წერტილზე და ასე მიღებული ახალი ფუნქცია უწყვეტი იქნება ჩაკეტილ $E \cup \{0\} = \overline{E}$ სიმრავლეზე, როგორც E სიმრავლის ჩაკეტვაზე.

ამ მიზნით გადავიდეთ პოლარულ (r, θ) კოორდინატებზე $x_1 = r\cos\theta$ და $x_2 = r\sin\theta$ ტოლობებით. მაშინ $\psi(x_1, x_2)$ გაუტოლდება $r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$ მნიშვნელობას, რაც ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $r \to 0$. ეს ნიშნავს, რომ $\psi(x_1, x_2)$ ფუნქციას ნულოვანი ზღვარი აქვს $(0,0)$ წერტილზე.

შემოვიღოთ ახალი $\overline{\psi}(x_1, x_2)$ ფუნქცია, რომელიც E სიმრავლეზე ემთხვევა $\psi(x_1, x_2)$-ს და ნულის ტოლია $(0,0)$ წერტილზე, ე. ი. მოვახდინეთ $\psi(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტიზება $(0,0)$ წერტილზე. ამიტომ $\overline{\psi}$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ $\overline{E}$ სიმრავლეზე. $\overline{\psi}(x_1, x_2)$ ფუნქციის მიმართ კანტორის თეორემის გამოყენებით ვრწმუნდებით $\overline{\psi}(x_1, x_2)$ ფუნქციის თანაბარ უწყვეტობაში $\overline{E}$ სიმრავლეზე, კერძოდ, $E \subset \overline{E}$ სიმრავლეზე. ეს კი ნიშნავს $\psi(x_1, x_2)$ ფუნქციის თანაბარ უწყვეტობას E სიმრავლეზე.

ანალოგიურად დავადგენთ $\nu(x) = x\sin\frac{1}{x}$ ფუნქციის თანაბარ უწყვეტობას ღია $(0,1)$ ინტერვალზე. ამისთვის $x = 0$ წერტილზე მას მივანიჭოთ ამ წერტილზე მისი ზღვრული მნიშვნელობა ნული, ხოლო $x = 1$ წერტილზე იგი ტოლია $\sin 1$ რიცხვის. ასე მიღებული ახალი $\nu^*(x)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტზე, კერძოდ, $(0,1)$ ინტერვალზე, სადაც იგი ემთხვევა $\nu(x)$ ფუნქციას.

მაგალითი 1.9.3 (თეორიული). ვთქვათ, ერთი ნამდვილი θ ცვლადის ნამდვილი $\psi(\theta)$ ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$-ზე და 2π-**პერიოდული**: $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ ყოველი θ-თვის. $\psi(\theta)$ ფუნქციას შეესაბამება ერთეულოვან ღია $D = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$ წრეში ჰარმონიული $u_\psi(r, \theta)$ ფუნქცია, ე. წ. პუასონის ინტეგრალი $\psi(\theta)$ ფუნქციისთვის.

კარგად ცნობილია, რომ $\psi(\theta)$ ფუნქცია არის ჰარმონიული $u_\psi(r, \theta)$ ფუნქციის სასაზღვრო ფუნქცია ერთეულოვან $C =$

$\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ x_1^2+x_2^2=1\}$ წრეწირზე. ეს ნიშნავს, რომ ჩაკეტილ ერთეულოვან $\overline{D}=D\cup C$ წრეზე უწყვეტია ის ფუნქცია, რომელიც ემთხვევა $u_\psi(r,\theta)$-ს ღია D წრეში და $\psi(\theta)$-ს კი ჩაკეტილ C წრეწირზე. ასე მიღებული ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია $\overline{D}$-ზე, კერძოდ, D-ში.

მაშასადამე, $u_\psi(r,\theta)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია D-ში. ყველაფერი ეს შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

ერთეულოვან წრეწირზე უწყვეტი ფუნქციის შესაბამისი პუასონის ინტეგრალი წარმოადგენს თანაბრად უწყვეტ ფუნქციას ერთეულოვან ღია წრეში.

დაბოლოს, ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წინადადება, რის სისწორეში დარწმუნება ადვილია.

წინადადება 1.9.1. ვთქვათ, n ცვლადის $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ წერტილის მიდამოში. ავიღოთ ნებისმიერი $x_{n+1}^0,\dots,x_m^0$ სასრული რიცხვები და $\overline{x}^0=(x_1^0,\dots,x_n^0,x_{n+1}^0,\dots,x_m^0)\in\mathbb{R}^{n+m}$ წერტილის მიდამოში განვსაზღვროთ F ფუნქცია

$$F(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m)=f(x_1,\dots,x_n)$$

ტოლობით. მაშინ:

1) $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის უწყვეტობა x^0 წერტილზე იწვევს $F(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m)$ ფუნქციის უწყვეტობას $\overline{x}^0$ წერტილზე;

2) თუ $f(x_1,\dots,x_m)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს სასრული A ზღვარი, მაშინ $F(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m)$ ფუნციასაც იგივე A რიცხვი აქვს ზღვრად $\overline{x}^0$ წერტილზე.

1.10. ფუნქციის ზედა და ქვედა ზღვრები

ვთქვათ, $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, ფუნქცია განსაზღვრულია $E\subset\mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე და $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ იყოს E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, რომელიც შესაძლოა არ ეკუთვნოდეს E სიმრავლეს.

შესაძლებელია f ფუნქციას სასრული ან უსასრულო ზღვარი არ ჰქონდეს x^0 წერტილზე, მაგრამ f-ს მაინც გააჩნდეს გარკვეული თვისება x^0 წერტილის მახლობელი წერტილების გასწვრივ. ამ თვისების შესახებ იქნება საუბარი ახლა.

მაშ ვუშვებთ, რომ x^0 წერტილი არის f ფუნქციის განსაზღვრის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ან არ ეკუთვნის E-ს. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი δ რიცხვი და განვიხილოთ x^0 წერტილის $U(x^0,\delta)$ მიდამოს E სიმრავლესთან $U(x^0,\delta)\cap E$ თანაკვეთა.

1. $m_\delta(x^0,f)$-ით და $M_\delta(x^0,f)$-ით აღინიშნება $f(x)$ მნიშვნელობების, $x\in U(x^0,\delta)\cap E$, ზუსტი ქვედა და ზუსტი ზედა საზღვრები x^0 წერტილზე შესაბამისად:

$$m_\delta(x^0,f)=\inf\big\{f(x):\ x\in U(x^0,\delta)\cap E\big\},$$
$$M_\delta(x^0,f)=\sup\big\{f(x):\ x\in U(x^0,\delta)\cap E\big\}.$$

როცა δ კლებით ისწრაფვის ნულისკენ, მაშინ $m_\delta(x^0,f)$ არ იკლებს და $M_\delta(x^0,f)$ არ იზრდება. ამიტომ არსებობენ სასრული ან უსასრულო

$$\lim_{\delta\to0+} m_\delta(x^0,f) \ \text{ და } \ \lim_{\delta\to0+} M_\delta(x^0,f)$$

ზღვრები, რომელთაც შესაბამისად აღნიშნავენ

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x),\quad \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) \tag{1}$$

სიმბოლოებით და მათ ეწოდებათ f **ფუნქციის ქვედა** და **ზედა ზღვრები** x^0 წერტილზე. ამრიგად,

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x)=\lim_{\delta\to0^+} m_\delta(x^0,f),\quad \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x)=\lim_{\delta\to0^+} M_\delta(x^0,f). \tag{2}$$

ცხადია $M_\delta(x^0, f) \geq m_\delta(x^0, f)$ და

$$\varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) \geq \varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x).$$

თუ

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x),$$

მაშინ f ფუნქციას E სიმრავლის გასწვრივ აქვს სასრული ან უსასრულო ზღვარი x^0 წერტილზე და

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x). \tag{3}$$

თუ ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისთვის f ფუნქცია ზემოდან შემოუსაზღვრელია $U(x^0, \delta) \cap E$ სიმრავლეზე, მაშინ წერენ

$$\varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = +\infty. \tag{4}$$

ასევე, f ფუნქციის ქვემოდან შემოუსაზღვრელობის შემთხვევაში $U(x^0, \delta) \cap E$ სიმრავლეზე, წერენ

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = -\infty. \tag{5}$$

თუ $M_\delta(x^0, f) \to -\infty$, როცა $\delta \to 0+$, მაშინ

$$\varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = -\infty. \tag{6}$$

ასევე, თუ $m_\delta(x^0, f) \to +\infty$, როცა $\delta \to 0+$, მაშინ

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = +\infty. \tag{7}$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 1.10.1 ([3], გვ. 284 ან [10], გვ. 146). ვთქვათ, φ და g წარმოადგენენ $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციებს და x^0 იყოს E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, რომელიც შეიძლება ეკუთვნოდეს ან არ ეკუთვნოდეს E-ს. მაშინ მართებულია დამოკიდებულებანი

$$\begin{gathered}\varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} \varphi(x) + \varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} g(x) \le \\ \le \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}[\varphi(x)+g(x)] \le \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} \varphi(x) + \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} g(x),\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} \varphi(x) + \varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} g(x) \le \\ \le \varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}[\varphi(x)+g(x)] \le \varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} \varphi(x) + \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} g(x).\end{gathered} \tag{9}$$

ხშირი გამოყენება აქვთ (8) და (9) დამოკიდებულებიდან გამომდინარე შემდეგ ტოლობებს, თუ იქ დავუშვებთ g ფუნქციისთვის E სიმრავლის გასწვრივ სასრული ზღვრის არსებობას x^0 წერტილზე.

შედეგი 1.10.1 ([10], გვ. 146; [11], გვ. 222). თუ g ფუნქციისთვის შესრულებულია სასრულწევრებიანი (3) ტოლობები, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}[\varphi(x)+g(x)] = \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} \varphi(x) + \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} g(x), \tag{10}$$

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}}[\varphi(x)+g(x)] = \varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} \varphi(x) + \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} g(x). \tag{11}$$

2. ფუნქციის ზედა და ქვედა ზღვრების პრაქტიკული გამოყენების მიზნით, სასარგებლოა მათი განსაზღვრა შემდეგი თვისებებით (იხ. [3], გვ. 280–285; [7], გვ. 78–81; [21], გვ.13).

ვთქვათ ისევ, f ფუნქცია განსაზღვრულია $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე და x^0 იყოს E-ს დაგროვების წერტილი. ამასთან, x^0 წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს ან არ ეკუთვნოდეს E სიმრავლეს.

სასრულ B რიცხვს ეწოდება f **ფუნქციის ზედა ზღვარი** x^0 წერტილზე E სიმრავლის გასწვრივ, იგივე (1) სიმბოლოკით, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ორ თვისებას:

1) $f(x) < B + \varepsilon$ ყოველი $x \in U(x^0, \delta) \cap E$ წერტილისთვის;

2) არსებობს x^0 წერტილისკენ კრებად წერტილთა ისეთი $x'_k \in U(x^0, \delta) \cap E$ მიმდევრობა, რომ $f(x'_k) > B - \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$.

ანალოგიურად, სასრულ A რიცხვს ეწოდება f **ფუნქციის ქვედა ზღვარი** x^0 წერტილზე E სიმრავლის გასწვრივ, თუ:

3) $f(x) > A - \varepsilon$ ყოველი $x \in U(x^0, \delta) \cap E$ წერტილისთვის;

4) არსებობს x^0 წერტილისკენ კრებად წერტილთა ისეთი $x''_j \in U(x^0, \delta) \cap E$ მიმდევრობა, რომ $f(x''_j) < A + \varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots$.

მაშასადამე, $A \leq B$.

თუ $A < B$, მაშინ დადებითი $\varepsilon < \frac{1}{2}(B - A)$ რიცხვისთვის გვექნება $A + \varepsilon < B - \varepsilon$. ასეთ შემთხვევაში $f(x)$, $x \in U(x^0, \delta) \cap E$, მნიშვნელობანი ირხევიან $A + \varepsilon$ და $B - \varepsilon$ რიცხვებს შორის და f ფუნქციას ზღვარი არ აქვს x^0 წერტილზე.

თუ $B = A$, მაშინ $f(x)$, $x \in U(x^0, \delta) \cap E$, მნიშვნელობანი მიეკუთვნებიან $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ ინტერვალს და f ფუნქციას x^0 წერტილზე ზღვრად აქვს A რიცხვი.

ამრიგად, მართებულია შემდეგი წინადადება (იხ. [3], გვ. 282; [7], გვ. 80; [21], გვ. 14).

წინადადება 1.10.1. f ფუნქციას E **სიმრავლის გასწვრივ სასრული ზღვარი** x^0 წერტილზე ექნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)$ მნიშვნელობანი შემოსაზღვრულია $U(x^0, \delta) \cap E$ სიმრავლეზე რომელიმე დადებითი δ რიცხვისთვის და თუ, ამასთან ერთად, ადგილი აქვს

$$\underline{\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in E}}} f(x) = \overline{\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in E}}} f(x) \tag{12}$$

ტოლობას. ამ პირობებში არსებობს

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) \tag{13}$$

ზღვარი და იგი ტოლია (12) ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეთა საერთო მნიშვნელობისა.

თუ f ფუნქციას E **სიმრავლის გასწვრივ ზღვრად** x^0 წერტილზე აქვს $+\infty$[ან $-\infty$], მაშინ f-ის ზედა და ქვედა ზღვრები E სიმრავლის გასწვრივ x^0 წერტილზე მიღებულია $+\infty$-ის ტოლად [შესაბამისად $(-\infty)$-ის ტოლად].

ასეთი შეთანხმებისას, შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი

წინადადება 1.10.2 ([21], გვ. 14)**.**

$$\underline{\lim}_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = \overline{\lim}_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) \tag{14}$$

ტოლობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ f ფუნქციას x^0 წერტილზე ჰქონდეს ზღვარი, სასრული ან უსასრულო, რომელიც (14) ტოლობის მხარეთა საერთო მნიშვნელობის ტოლია.

ფუნქციის ზედა და ქვედა ზღვრების დამახასიათებელი თვისებაა: განვიხილოთ x^0 წერტილისკენ კრებადი ყველა შესაძლო მიმდევრობა $U(x^0,\delta)\cap E$ სიმრავლიდან. თითოეული ამ მიმდევრობის წევრებზე f ფუნქციის მნიშვნელობანი შექმნიან გარკვეულ სიმრავლეს და განვიხილოთ ასეთი სიმრავლეების გაერთიანება ყველა შესაძლო მიმდევრობების მიხედვით. მაშინ ამ გაერთიანება-სიმრავლის დაგროვების წერტილთა შორის უდიდესი და უმცირესი წარმოადგენენ f **ფუნქციის ზედა და ქვედა ზღვრებს** x^0 წერტილზე.

ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი ორი მაგალითი.

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \sin\frac{1}{t} = 1, \quad \underline{\lim}_{t\to 0} \sin\frac{1}{t} = -1 \tag{15}$$

და

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \left(\frac{1}{t^2}\,\sin\frac{1}{t}\right) = +\infty, \quad \underline{\lim}_{t\to 0} \left(\frac{1}{t^2}\,\sin\frac{1}{t}\right) = -\infty. \tag{16}$$

აქვე აღვნიშნოთ დამოკიდებულება f და $-f$ ფუნქციების ზედა და ქვედა ზღვრებს შორის ერთსა და იმავე x^0 წერტილზე ([21], გვ. 17):

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = -\varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} [-f(x)], \tag{17}$$

$$\varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = -\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} [-f(x)]. \tag{18}$$

დასასრულ აღვნიშნოთ ერთი წინადადება, რომელსაც სხვადასხვა გამოყენება აქვს (იხ. მაგალითად, 1.17.(11) და 1.17.(12) ტოლობანი II თავიდან).

წინადადება 1.10.3. ვთქვათ, f ფუნქციის განსაზღვრის $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე წარმოდგენილია $E_1, E_2, \dots, E_n$ სიმრავლეების გაერთიანების სახით ისე, რომ $x^0 \in \mathbb{R}^n$ არის დაგროვების წერტილი თითოეული E_i სიმრავლისთვის, $i = 1, \dots, n$. მაშინ მართებულია ტოლობანი:

$$\varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = \max\Big\{ \varlimsup_{\substack{x\to x^0\\ x\in E_i}} f(x),\ i = 1, \dots, n\Big\}, \tag{19}$$

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E}} f(x) = \min\Big\{ \varliminf_{\substack{x\to x^0\\ x\in E_i}} f(x),\ i = 1, \dots, n\Big\}. \tag{20}$$

1.11. ნახევრადუწყვეტი ფუნქციები

ფუნქციის ზედა და ქვედა ზღვრებს ბუნებრივად უკავშირდება მისი ზემოდან და ქვემოდან ნახევრადუწყვეტობა.

f ფუნქციის ზემოდან და ქვემოდან ნახევრადუწყვეტობის ცნების აუცილებელი მოთხოვნაა, რომ f ფუნქციის განსაზღვრის E სიმრავლის დაგროვების წერტილი უნდა ეკუთვნოდეს თვით E სიმრავლეს.

განსხვავება უწყვეტობისგან (იხ. 1.5) ისაა, რომ უწყვეტობისას მნიშვნელობა $f(x^0)$ აუცილებლად სასრულია. ზემოდან და ქვემოდან ნახევრადუწყვეტობისას კი, $f(x^0)$ მნიშვნელობის სასრულობა სავალდებულო არ არის. შესაბამისი ცნებანი ასეთია.

განსაზღვრა 1.11.1 ([45], გვ. 385). $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება **ზემოდან ნახევრადუწყვეტი** $x^0 \in E$ წერტილზე, თუ სრულდება

$$\varlimsup_{\substack{x\to x^0 \\ x\in E}} f(x) = f(x^0) \tag{1}$$

ტოლობა და f-ს ეწოდება **ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი** $x^0 \in E$ წერტილზე, როცა

$$\varliminf_{\substack{x\to x^0 \\ x\in E}} f(x) = f(x^0). \tag{2}$$

თუ f ფუნქცია უწყვეტია $x^0 \in E$ წრტილზე, მაშინ f ერთდროულად არის ზემოდან და ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი x^0 წერტილზე.

შებრუნებით, თუ $f(x^0)$ მნიშვნელობა სასრულია და f წარმოადგენს $x^0 \in E$ წერტილზე ნახევრადუწყვეტ ფუნქციას როგორც ზემოდან ისე ქვემოდან, მაშინ f ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე.

რადგანაც x^0 წერტილი ეკუთვნის f ფუნქციის განსაზღვრის E სიმრავლეს, ამიტომ ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისთვის ადგილი აქვს $m_\delta(x^0, f) \le f(x^0) \le M_\delta(x^0, f)$ დამოკიდებულებებს და, მაშასადამე,

$$m_\delta(x^0, f) \le \varliminf_{\substack{x\to x^0 \\ x\in E}} f(x) \le f(x^0) \le \varlimsup_{\substack{x\to x^0 \\ x\in E}} f(x) \le M_\delta(x^0, f). \tag{3}$$

$\varlimsup\limits_{\substack{x\to x^0 \\ x\in E}} f(x) - \varliminf\limits_{\substack{x\to x^0 \\ x\in E}} f(x)$ სხვაობას ეწოდება E **სიმრავლის გასწვრივ f ფუნქციის რხევა x^0 წერტილზე**.

ფუნქციის რხევა მისი უწყვეტობის წერტილზე ნულის ტოლია.

ბუნებრივად შემოდის ზემოდან და ქვემოდან ნახევრადუწყვეტობის ცნებანი სიმრავლეზე: როცა შესაბამისი თვისება ფუნქციას გააჩნია აღებული სიმრავლის ყოველ წერტილზე.

თუ ცნობილია, რომ $f(x^0)$ მნიშვნელობა სასრულია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ზემოდან [ქვემოდან] ნახევრადუწყვეტობა x^0 წერტილზე ეკვივალენტურია გარკვეული უტოლობის. სახელდობრ, მართებულია

თეორემა 1.11.1 ([45], გვ. 386). $f(x^0)$ მნიშვნელობის სასრულობის შემთვევაში, f ფუნქციის ზემოდან [ქვემოდან] ნახევრადუწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელია და საკმარისი ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობდეს ისეთი დადებითი $\delta = \delta(x^0, \varepsilon, f)$ რიცხვი, რომ ყველა $x \in E \cap U(x^0, \delta)$ წერტილზე სრულდებოდეს

$$f(x) < f(x^0) + \varepsilon \tag{4}$$

უტოლობა [შესაბამისად

$$f(x) > f(x^0) - \varepsilon \tag{5}$$

უტოლობა].

საკმარისობა. (4) უტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\overline{\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in E}}} f(x) \le f(x^0),$$

დამოკიდებულება, რომელიც (3) დამოკიდებულებებში მონაწილე

$$f(x^0) \le \overline{\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in E}}} f(x)$$

უტოლობასთან ერთად იძლევა (1) ტოლობას.

აუცილებლობა. (4) უტოლობა გამომდინარეობს ზედა ზღვრის მახასიათებელი ერთ-ერთი თვისებიდან (იხ. 1.10, 2, თვისება 1), რომელშიც $B = f(x^0)$).

ამ თეორემიდან აშკარაა, რომ x^0 წერტილზე უწყვეტი რაიმე $\varphi(x)$ ფუნქციის $\varphi(x^0)$ მნიშვნელობის შეცვლა $\varphi(x^0)$-ზე მეტი (ნაკლები) რაიმე მნიშვნელობით, მოგვცემს x^0 წერტილზე ზემოდან (ქვემოდან) ნახევრადუწყვეტ ახალ ფუნქციას.

შევნიშნოთ, რომ არსებობს ნახევრადუწყვეტობის წერტილის არმქონე შემოსაზღვრული ფუნქცია ([23], გვ. 37).

დასასრულ, განვიხილოთ შემდეგი ორი მაგალითი.

მაგალითი 1.11.1. $[0,1]$ სეგმენტზე განვიხილოთ ფუნქცია

$$\lambda(t)=\begin{cases} t, & \text{როცა } \ 0\le t\le \dfrac{1}{2}\,,\\ 0, & \text{როცა } \ \dfrac{1}{2}<t\le 1. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტის ყველა წერტილზე, გარდა $t=\frac{1}{2}$ წერტილისა. ამასთან ერთად

$$\overline{\lim_{t\to 1/2}}\,\lambda(t)=\frac{1}{2}=\lambda\Big(\frac{1}{2}\Big),\quad \underline{\lim}_{t\to 1/2}\,\lambda(t)=0\neq\Big(\frac{1}{2}\Big). \tag{5}$$

ამიტომ λ ფუნქცია ზემოდან ნახევრადუწყვეტია $t=\frac{1}{2}$ წერტილზე. კერძოდ, λ ზემოდან ნახევრადუწყვეტია მთელს $[0,1]$ სეგმენზე.

მაგალითი 1.11.2. ფუნქცია

$$\mu(t)=\begin{cases} t, & \text{როცა } \ 0\le t< \dfrac{1}{2}\,,\\ 0, & \text{როცა } \ \dfrac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

უწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტის ყველა წერტილზე, გარდა ისევ $t=\frac{1}{2}$ წერტილისა. ამჯერად,

$$\overline{\lim_{t\to 1/2}}\,\mu(t)=\frac{1}{2}\neq\mu\Big(\frac{1}{2}\Big),\quad \underline{\lim}_{t\to 1/2}\,\mu(t)=0=\mu\Big(\frac{1}{2}\Big). \tag{6}$$

მაშასადამე, μ ფუნქცია ქვემოდან ნახევრადუწყვეტია $[0,1]$ სეგმენტზე.

შევნიშნოთ, რომ არსებობს ყველგან ზემოდან ნახევრადუწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია და ყველგან ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი $g(x)$ ფუნქცია, რომელთა $f(x)+g(x)$ ჯამი არ არის ნახევრადუწყვეტი $x=0$ წერტილზე ([23], გვ. 220).

§ 2. განცალებით კერძო უწყვეტი ფუნქციები

2.1. განცალებით კერძო ზღვრები და განცალებით კერძო უწყვეტობა

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ და $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ წერტილებს დავუკავშიროთ შემდეგი სიმბოლო-წერტილები

$$x(x_i^0) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_n), \tag{1}$$

$$x^0(x_j) = (x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0), \tag{2}$$

რომელთა მეშვეობით გრძელი გამოსახულებანი იწერება მოკლედ.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია, $x = (x_1, \dots, x_n)$, განსაზღვრულია x^0 წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში.

ერთი x_i ცვლადის $f(x^0(x_i))$ ფუნქციას ეწოდება f **ფუნქციის** i**-ური კერძო ფუნქცია** ან i**-რი საკოორდინატო ფუნქცია** x^0 წერტილზე და მას ზოგჯერ აღნიშნავენ ${}^i f(x_i)$ სიმბოლოთი. მაშასადამე, მივიღეთ ერთი x_i ცვლადის

$${}^i f(x_i) = f(x^0(x_i)) \tag{3}$$

ფუნქცია. თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო (ფიქსირებული ნიშნის)

$$\lim_{x_i \to x_i^0} {}^i f(x_i) = \lim_{x_i \to x_i^0} f(x^0(x_i)) \tag{4}$$

ზღვარი, მაშინ მას ეწოდება x^0 წერტილზე f **ფუნქციის** i**-რი კერძო ზღვარი** ან x_i **ცვლადით კერძო ზღვარი**. ცხადია, რომ

$${}^i f(x_i^0) = f(x^0) = f(x^0(x_i^0)). \tag{5}$$

განსაზღვრა 2.1.1 ([103], [107])**.** ვიტყვით, რომ $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს **განცალებითი კერძო ზღვრები**, შესაძლოა არატოლებიც, თუ (4) ზღვარი არსებობს ყველა მნიშვნელობისთვის $i = 1, \dots, n$.

f ფუნქციის ზღვრის არარსებობა x^0 წერტილზე აშკარაა, თუ (4) ზღვარი არ არსებობს ერთი რომელიმე i-თვის.

განცალებითი კერძო ზღვრების არსებობიდან და მათი ტოლობიდან (არატოლი განცალებითი კერძო ზღვრები აქვს 3.2.(6) ტოლობით მოცემულ $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქციას და ეს ფაქტი ნაჩვენებია 5.1-ში) არ გამომდინარეობს, საზოგადოდ, f ფუნქციის ზღვრის არსებობა x^0 წერტილზე (იხ. 2.2 ქვემოთ).

ადვილი მისახვედრია, რომ f ფუნქციის ზღვრის არსებობა x^0 წერტილზე იწვევს f-თვის x^0-ზე განცალებითი კერძო ზღვრების არსებობას და მათ ტოლობას f-ის ზღვართან ამავე წერტილზე.

ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ f-ის ზღვრის არსებობა x^0 წერტილზე იწვევს f ფუნქციისთვის x^0-ზე იგივე ზღვრის არსებობას ყოველი ისეთი ქვესიმრავლის გასწვრივ (მიმართ), რომლისთვისაც x^0 დაგროვების წერტილია.

თუ x^0 წერტილზე f ფუნქციის i-რი კერძო ${}^i f(x_i) = f(x^0(x_i))$ ფუნქცია უწყვეტია $x_i^0 \in \mathbb{R}$ წერტილზე, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება x_i **ცვლადით კერძო უწყვეტი** x^0 წერტილზე. ასეთ შემთხვევაში მნიშვნელობა $f(x^0)$ სასრულია და (5) ტოლობის ძალით გვაქვს

$$\lim_{x_i \to x_i^0} {}^i f(x_i) = f(x^0) = \lim_{x_i \to x_i^0} f(x^0(x_i)). \tag{6}$$

(6) ტოლობა ნიშნავს ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი $\delta_i = \delta_i(x_i^0, \varepsilon, f) > 0$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$\left| {}^i f(x_i) - f(x^0) \right| < \varepsilon \tag{7}$$

უტოლობა სრულდება ყველა x_i-თვის $(x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i)$ ინტერვალიდან.

f ფუნქციისთვის x^0 წერტილზე x_k ცვლადით **კერძო**

$$\Delta_{x_k^0} f(x) = f(x^0(x_k)) - f(x^0) \tag{8}$$

ნაზრდის მეშვეობით, რომელიც ${}^k f(x_k)$ ფუნქციის მოშველიებით ასეც იწერება

$$\Delta_{x_k^0} f(x) = {}^k f(x_k) - f(x^0), \tag{9}$$

(6) და (7) დამოკიდებულებანი შესაბამისად მიიღებენ

$$\lim_{x_i \to x_i^0} \Delta_{x_i^0} f(x) = 0, \tag{10}$$

$$\left|\Delta_{x_i^0} f(x)\right| < \varepsilon, \ \ x_i \in (x_i^0 - \delta_i, x_i^0 + \delta_i) \tag{11}$$

სახეს. თუ (6) ტოლობას ადგილი აქვს ყველა $i = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის, ანუ, თუ f ფუნქცია ყოველი x_i ცვლადითაა კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება **განცალებით კერძო უწყვეტი** ანუ **თითოეული ცვლადით კერძო უწყვეტი** x^0 წერტილზე.

განცალებით კერძო უწყვეტობისგან განსხვავებით, უწყვეტობა (იხ. 1.5) ზოგჯერ იწოდება **ცვლადთა ერთობლიობით უწყვეტობად**.

ამრიგად, $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრულ $u = f(x)$ ფუნქციას შეესაბამება ერთცვლადიანი ფუნქციებისგან წარმოქმნილი $({}^1f(x_1), \dots, {}^nf(x_n))$ სისტემა.

f ფუნქციის განცალებით კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე ნიშნავს, რომ ამ სისტემის ყოველი ერთცვლადიანი ${}^if(x_i)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი ისწრაფვიან ერთი და იგივე სასრული $f(x^0) = {}^if(x_i^0)$ მნიშვნელობისკენ, როცა x_i ისწრაფვის x^0 წერტილისკენ საკოორდინატო Ox_i ღერძის თანამიმართულად x^0 წერტილზე გამავალი ღერძის გასწვრივ, $x_i \to x_i^0$.

ცხადია, რომ x^0 წერტილზე განცალებით კერძო უწყვეტ ყოველ ψ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს $\psi(x^0)$ მნიშვნელობის ტოლი სასრული განცალებითი კერძო ზღვრები.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ x^0 წერტილზე უწყვეტი ყოველი ფუნქცია განცალებით კერძო უწყვეტიცაა ამავე წერტილზე.

მართლაც, $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის უწყვეტობა $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე ნიშნავს 1.5.(2) ტოლობას. $1, \dots, n$ მნიშვნელობებიდან ავიღოთ i რიცხვი ნებისმიერად და 1.5.(2) ტოლობაში ჩავსვათ $x_j = x_j^0$ კერძო მნიშვნელობანი ყველა j-თვის, რომელნიც განსხვავდებიან i-სგან. შედეგად მივიღებთ (6) დამოკიდებულებას, რაც ნიშნავს $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის x_i ცვლადით კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე. რადგან i ნებისმიერია $1, \dots, n$ რიცხვებიდან, ამიტომ f ფუნქცია განცალებით კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე.

ამის შებრუნებული წინადადება მცდარია. მაგალითებზე ქვემოთ ვნახავთ, რომ ფუნქციის განცალებით კერძო უწყვეტობა მოცემულ წერტილზე არის შესამჩნევად სუსტი თვისება, ვიდრე ამ ფუნქციის უწყვეტობა იმავე წერტილზე.

ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი და მათზე ციტირება იქნება მომავალშიც. ამ მაგალითებში O აღნიშნავს $(0, 0)$ წერტილს – კოორდინატთა სათავეს $\mathbb{R}^2$-ში.

2.2. განცალებით კერძო უწყვეტი, მაგრამ წყვეტილი ფუნქციების მაგალითები

მაგალითი 2.2.1. O წერტილზე წყვეტილი და განცალებით კერძო უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც ზღვარიც კი არ აქვს O წერტილზე.

ორი ცვლადის

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \;\; x_1 \cdot x_2 = 0, \\ 1, & \text{როცა} \;\; x_1 \cdot x_2 \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

ფუნქცია საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ უწყვეტია O წერტილზე, მაგრამ აქ იგი წყვეტილია. ეს ფაქტი ასეც გამოითქმის: $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის შეზღუდვები საკოორდინატო ღერძებზე წარმოადგენენ O წერტილზე უწყვეტ ფუნქციებს, თუმცა $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია წყვეტილია O წერტილზე.

ამ ფაქტის წარმოსაჩენად შევნიშნოთ, რომ საკოორდინატო ღერძების ყოველი წერტილის ერთი მაინც კოორდინატი ნულია და, ამიტომ, ასეთი წერტილები აკმაყოფილებენ $x_1 \cdot x_2 = 0$ პირობას.

მაშასადამე, საკოორდინატო ღერძებზე ეს ფუნქცია ნულია და ამიტომ ღერძების გასწვრივ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციას ზღვრადაც ნული ექნება O წერტილზე, რაც ემთხვევა φ ფუნქციის მნიშვნელობას O წერტილზე. ეს კი ნიშნავს $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის განცალებით კერძო უწყვეტობას O წერტილზე.

$\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის O წერტილზე წყვეტილობა გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ O წერტილის ნებისმიერად მცირე რადიუსიან მიდამოში არის ისეთი წერტილი (საკოორდინატო ღერძზე მდებარე), რომელზეც φ ფუნქცია ნულია და არის ისეთი წერტილიც (საკოორდინატო ღერძზე არამდებარე), რომელზეც φ ტოლია 1-ის. ეს ნიშნავს, რომ O წერტილის მიდამოში ყოველ ორ მეზობელ წერტილზე $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის მნიშვნელობების სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა ვერ გახდება წინასწარ დასახელებულ მცირე დადებით რიცხვზე ნაკლები, მიდამოს რადიუსის შემცირების ხარჯზე. ეს კი ადასტურებს $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის წყვეტილობას O წერტილზე.

უფრო მეტიც, ახლა ჩატარებული მსჯელობიდან ჩანს, რომ $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციას ზღვარიც კი არ აქვს O წერტილზე.

როგორც ვხედავთ, საკოორდინატო ღერძების თანამიმართულად $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე გამავალ წრფეებზე ფუნქციის შეზღუდვების უწყვეტობა x^0 წერტილზე არ იწვევს ამ ფუნქციის ზღვრის არსებობას და, მით უფრო, უწყვეტობას x^0 წერტილზე.

ახლა დავასახელებთ ფუნქციას, რომელსაც O წერტილზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივ სასრული ზღვარი აქვს ამ წერტილზე, არის განცალებით კერძო უწყვეტი O წერტილზე, მაგრამ მას ზღვარი არ აქვს და, მაშასადამე, იგი წყვეტილია O წერტილზე.

მაგალითი 2.2.2. O წერტილზე წყვეტილი, განცალებით კერძო უწყვეტი და O-ზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივ ამ წრფეზე დამოკიდებული სასრული ზღვრის მქონე ფუნქცია, რომელსაც ზღვარი არ აქვს O წერტილზე.

ფუნქცია

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{როცა } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{როცა } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases} \tag{2}$$

$x_1 = r\cos\theta$ და $x_2 = r\sin\theta$ ჩასმებით გაუტოლდება $\frac{1}{2}\sin 2\theta$-ს. თუ l_θ აღნიშნავს სხივს სათავით O წერტილში, რომელიც Ox_1 ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს θ კუთხეს, მაშინ l_θ სხივის

ყველა წერტილზე ψ ფუნქციას აქვს ერთი და იგივე $\frac{1}{2}\sin 2\theta$ მნიშვნელობა. იგივე მნიშვნელობა ψ-ს აქვს $l_{\theta+\pi}$ სხივის წერტილებზეც. ამიტომ ψ ფუნქციას საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ O წერტილზე ზღვრად აქვს ნული, რაც ψ ფუნქციის მნიშვნელობაა ამავე წერტილზე.

თუ l_θ განსხვავებულია საკოორდინატო ნახევარღერძებისგან, მაშინ ψ ფუნციის შეზღუდვებს l_θ და $l_{\theta+\pi}$ სხივებზე, ზღვრად O წერტილზე აქვს $\frac{1}{2}\sin 2\theta \neq 0$ მნიშვნელობა.

მაშასადამე, $\psi(x_1, x_2)$ ფუნქციას არ აქვს ზღვარი O წერტილზე, კერძოდ, იგი წყვეტილია ამ წერტილზე, თუმც განცალებით კერძო უწყვეტია O წერტილზე.

ამავე დროს, როგორც ვნახეთ, ψ ფუნქციას O წერტილზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივ ზღვარი აქვს ამ წერტილზე. კერძოდ, მას აქვს ურთიერთტოლი, ნულოვანი, განცალებითი კერძო ზღვრები O წერტილზე.

მაგალითი 2.2.3. O წერტილზე წყვეტილი, განცალებით კერძო უწყვეტი და O-ზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივ ამავე წერტილზე უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც ზღვარი არ აქვს O-ზე.

ფუნქცია

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{როცა } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{როცა } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases} \tag{3}$$

საკოორდინატო ღერძების გაერთიანებაზე იღებს ნულოვან მნიშვნელობას, რაც ემთხვევა $g(0,0)$-ს. ამიტომ $g(x_1, x_2)$ ფუნქცია განცალებით კერძო უწყვეტია კოორდინატთა სათავეზე.

ახლა საკოორდინატო ღერძებისგან განსახვავებული და O წერტილზე გამავალი წრფე იყოს $x_2 = kx_1$, სადაც $0 < |k| < +\infty$. ამ წრფის ყოველი (x_1, kx_1) წერტილისთვის, რომელიც განსხვავებულია O წერტილისგან, გვაქვს

$$g(x_1, kx_1) = \frac{x_1^2 \cdot kx_1}{x_1^4 + k^2 x_1^2} = \frac{kx_1^2}{x_1^2 + k^2}, \quad x_1 \neq 0.$$

აქედან ჩანს, რომ $g(x_1, kx_1)$ ისწრაფვის მნიშვნელობისკენ $0 = g(0,0)$, როცა $x_1 \to 0$.

მაშასადამე, O წერტილზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივ $g(x_1, x_2)$ ფუნქცია უწყვეტია კოორდინატთა სათავეზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $g(x_1, x_2)$ ფუნქცია $x_2 = px_1^2$ პარაბოლის გასწვრივ წყვეტილია O წერტილზე, $p \neq 0$. მართლაც,

$$g(x_1, px_1^2) = \frac{x_1^2 \cdot px_1^2}{x_1^4 + p^2 x_1^4} = \frac{p}{1+p^2}\,, \quad x_1 \neq 0.$$

ამიტომ $g(x_1, px_1^2)$ მუდმივობით ისწრაფვის მნიშვნელობისკენ

$$\frac{p}{1+p^2} \neq 0 = g(0,0), \ \text{ როცა } \ 0 \neq x_1 \to 0.$$

ეს ნიშნავს ასეთი პარაბოლების გასწვრივ $g(x_1, x_2)$ ფუნქციის წყვეტილობას O წერტილზე.

ამრიგად, $g(x_1, x_2)$ ფუნქცია მოკლებულია ზღვარს კოორდინატთა სათავეზე, კერძოდ, წყვეტილია ამ წერტილზე. ამავე დროს იგი O წერტილზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივ, საკოორდინატო ღერძების ჩათვლით, უწყვეტია ამავე წერტილზე (შთამბეჭდავი ფაქტია!).

მაგალითი 2.2.4. ფუნქცია

$$\omega(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^6 + x_2^2}\,, & \text{როცა } \ (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{როცა } \ (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases} \tag{4}$$

კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივაა უწყვეტი O წერტილზე და ამ წერტილის მახლობლობაში შემოუსაზღვრელია $x_2 = x_1^3$ წირის გასწვრივ, რადგანაც

$$\omega(x_1, x_1^3) = \frac{1}{2x_1} \to \pm\infty, \ \text{ როცა } \ x_1 \to 0\pm.$$

მაშასადამე, $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქციას ზღვარი არ აქვს O წერტილზე, არც სასრული და არც ნიშნიანი უსასრულო (ფიქსირებული ნიშნის

უსასრულო). ამიტომ $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქცია წყვეტილია O წერტილზე. მისი განცალებით კერძო უწყვეტობა O წერტილზე კი აშკარაა.

დასასრულს აღვნიშნოთ, რომ ასეთ საკითხებზე უფრო ვრცელი ინფორმაცია მოცემულია [153] შრომაში.

2.3. ფუნქციის უწყვეტობის პირობა, ყოველი წრფის გასწვრივ მისი უწყვეტობისას

ვთქვათ, $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $\psi(x)$ ფუნქცია, $x = (x_1, x_2)$, x^0 წერტილზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივაა უწყვეტი x^0 წერტილზე.

ისმის კითხვა: რა დამატებითი პირობა უზრუნველყოფს ψ ფუნქციის უწყვეტობას x^0 წერტილზე?

x^0 და $x^* \neq x^0$ წერტილებზე გამავალი $l(x^0, x^*)$ წრფის გასწვრივ ψ ფუნქციის უწყვეტობა x^0 წერტილზე ნიშნავს ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი $\delta = \delta(x^0, \varepsilon, l, \psi) > 0$ რიცხვის არსებობას, რომ $|\psi(x) - \psi(x^0)| < \varepsilon$ უტოლობა სრულდება ყოველი x წერტილისთვის, რომელიც ეკუთვნის $l(x^0, x^*)$ წრფეზე მდებარე 2δ სიგრძის მონაკვეთს ცენტრით x^0 წერტილში.

$\delta(x^0, \varepsilon, l, \psi)$ რიცხვების ზუსტი ქვედა საზღვარი ყველა შესაძლო $l(x^0, x^*)$ წრფის მიმართ, ე. ი. ყველა შესაძლო x^* წერტილის მიმართ იყოს $\eta = \eta(x^0, \varepsilon, \psi)$ რიცხვი. თუ η რიცხვი დადებითია, მაშინ $|\psi(x) - \psi(x^0)| < \varepsilon$ უტოლობა შესრულდება ყველა x წერტილისთვის $U(x^0, \eta)$ მიდამოდან. ეს კი მაჩვენებელია ψ ფუნქციის უწყვეტობის x^0 წერტილზე.

რადგანაც x^0 წერტილზე გამავალი ყველა შესაძლო $l(x^0, x^*)$ წრფის სიმრავლე უსასრულოა, ამიტომ შესაძლებელია $\eta(x^0, \varepsilon, \psi)$ რიცხვი არ იყოს დადებითი. როცა $\eta = 0$, მაშინ ψ ფუნქცია წყვეტილია x^0 წერტილზე. სწორედ ეს იყო მიზეზი 2.2-ში განხილული ფუნქციების წყვეტილობის O წერტილზე.

თუ $L(x^0)$ აღნიშნავს x^0 წერტილზე გამავალი ყველა წრფის სიმრავლეს, მაშინ ზემოთქმული შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს.

წინადადება 2.3.1. $L(x^0)$ სიმრავლიდან აღებული ყოველი წრფის გასწვრივ x^0 წერტილზე უწყვეტი ψ ფუნქცია უწყვეტი იქნება x^0-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ზემოთ აღნიშნული $\delta(x^0, \varepsilon, l) > 0$ რიცხვი ფაქტობრივად არაა დამოკიდებული $l \in L(x^0)$ წრფეზე, ე. ი. როცა იარსებებს ყველა $l \in L(x^0)$ წრფისთვის გამოსადეგი $\delta(x^0, \varepsilon) > 0$ რიცხვი.

2.4. წყვეტილობა წირების გასწვრივ უწყვეტობისას

$g(x_1, x_2)$ და $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქციების განხილვით უკვე დავრწმუნდით, რომ ფუნქციის უწყვეტობას მოცემულ წერტილზე ვერ უზრუნველყოფს ამ წერტილზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივ მისი უწყვეტობა იმავე წერტილზე.

ამასთან ერთად, $g(x_1, x_2)$ და $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქციები წყვეტილია სათავეზე გამავალი გარკვეული სახის წირების გასწვრივ. ეს კი ბუნებრივი ბიძგია იქითკენ, რომ გავაფართოვოთ წრფეთა კლასი და განვიხილოთ წირების გასწვრივ უწყვეტობაც.

ამ მიმართულებით უარყოფითი ხასიათის პირველი შედეგი ეკუთვნის ლებეგს. მან დაადგინა $O=(0,0)$ წერტილზე წყვეტილი $L(x_1, x_2)$ ფუნქციის არსებობა, რომელიც არა მხოლოდ O წერტილზე გამავალი ყოველი წრფის გასწვრივ არამედ, ყოველი ანალიზური წირის გასწვრივაც უწყვეტია O წერტილზე ([133]).

$x_2 = \lambda(x_1)$ წირის ანალიზურობა $x_1 = 0$ წერტილზე ნიშნავს, რომ $\lambda(x_1)$ წარმოადგენს x_1-ის მიმართ ხარისხოვანი მწკრივის ჯამს $x_1 = 0$ წერტილის მიდამოში.

როგორც ვხედავთ, ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობისთვის საკმარისი არ არის მისი უწყვეტობა ყველა ანალიზური წირის გასწვრივაც კი. მაშასადამე, გვჭირდება ანალიზურ წირთა კლასის გაფართოება. ერთი ასეთი გაფართოება ეკუთვნის როზენტალს.

თეორემა 2.4.1 (159]). 1) $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე საკმარისია მისი უწყვეტობა ამ წერტილზე გამავალი ერთჯერ დიფერენცირებადი ყველა წირის გასწვრივ;

2) არსებობს x^0 წერტილზე წყვეტილი $R(x_1, x_2)$ ფუნქცია, რომელიც ამ წერტილზე გამავალი ორჯერ დიფერენცირებადი ყველა წირის გასწვრივაა უწყვეტი x^0-ზე.

შენიშვნა 2.4.1. მხების გასწვრივ ფუნქციის უწყვეტობიდან რაიმე წერტილზე, არ გამომდინარეობს შესაბამისი წირის გასწვრივ მისი უწყვეტობა იგივე წერტილზე.

მართლაც, ზემოგანხილული $g(x_1, x_2)$ და $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქციები $x_2 = px_1^2$ და $x_2 = x_1^3$ წირების გასწვრივ წყვეტილია O წერტილზე, თუმც ამ წირების საერთო მხების – Ox_1 ღერძის გასწვრივ უწყვეტია O წერტილზე.

2.5. ტოლსტოვის თეორემა განცალებით კერძო უწყვეტობის და წყვეტის სიმრავლეებისთვის

აქამდე განხილულ ორი ცვლადის ფუნქციებს "პათოლოგიური" თვისება ჰქონდათ თითო წერტილზე: თითოეული ასეთი ფუნქცია წყვეტილია თითო წერტილზე და განცალებით კერძო უწყვეტია ამავე წერტილზე.

ბუნებრივია ამოცანა: რამდენად ფართო შეიძლება იყოს ასეთ "პათოლოგიურ" წერტილთა სიმრავლე?

ეს ამოცანა გადაწყვიტა ტოლსტოვმა, რომლის ამ შედეგის თეორემის სახით ჩამოყალიბება მიზანშეწონილია მისი დიდი მნიშვნელობის გამო.

თეორემა 2.5.1 ([62], გვ. 432–433)**.** არსებობს ერთეულოვანი $K_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\big\}$ კვადრატის ყოველ შიგა წერტილზე განცალებით კერძო უწყვეტი $\phi(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია ამ კვადრატის თითქმის ყველა წერტილზე*.

ტოლსტოვს აქვს უფრო ძლიერი შედეგი, რომლის ჩამოსაყალიბებლად დაგვჭირდება შემდეგი

---

*ტოლსტოვის ეს ფუნქცია, თითქმის ყველა წერტილზე მოკლებულია ფართო აზრით უწყვეტობის თვისებასაც კი (იხ. შედეგი 7.6.2. ქვემოთ).

განსაზღვრა 2.5.1 ([61], გვ. 17). $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$ მართკუთხედზე განსაზღვრულ $\omega(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **განცალებით აბსოლუტურად უწყვეტი** Q მართკუთხედზე, თუ ყოველი ფიქსირებული y_0-თვის $[c,d]$-დან $\omega(x,y_0)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $[a,b]$-ზე და ყოველი ფიქსირებული x_0-თვის $[a,b]$-დან კი, $\omega(x_0,y)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $[c,d]$-ზე.

თეორემა 2.5.2 ([61], გვ. 47–55). არსებობს ერთეულოვან $K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$ კვადრატზე განცალებით აბსოლუტურად უწყვეტი $\Psi(x,y)$ ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია K_2-ის თითქმის ყველა წერტილზე.

ამ თეორემაში ნახსენები $\Psi(x,y)$ ფუნქციის სტრუქტურის შესახებ საჭიროა ითქვას, რომ იგი K_2-ზე წარმოიდგინება ლებეგის აზრით განმეორებითი

$$\Psi(x,y) = \int_0^x dt \int_0^y g(t,\tau)\, d\tau \tag{1}$$

ინტეგრალის სახით, სადაც $g(t,\tau)$ ფუნქცია განმეორებით ინტეგრებადია K_2 კვადრატზე.

K_2 კვადრატზე ზომად $g(t,\tau)$ ფუნქციას ეწოდება **განმეორებით ინტეგრებადი** K_2-ზე, თუ ყოველი $r_{x,y} = \{(t,\tau) \in K_2 : \ 0 < t \leq x, \ 0 < \tau \leq y\} \subset K_2$ მართკუთხედისთვის სრულდება

$$\int_0^x dt \int_0^y g(t,\tau)\, d\tau = \int_0^y d\tau \int_0^x g(t,\tau)\, dt \tag{2}$$

ტოლობა.

K_2 კვადრატზე ჯამებადი ყოველი ფუნქცია განმეორებით ინტეგრებადია K_2-ზე, ფუბინის თეორემის ძალით ([3], გვ. 487).

განმეორებით ინტეგრებადობის ცნებას აზრი აქვს შემდეგი მნიშვნელოვანი ფაქტის გამო. ფიხტენჰოლცმა დაადგინა K_2-ზე ზომადი

ისეთი $\nu(x,y)$ ფუნქციის არსებობა, რომელიც განმეორებით ინტეგრებადია K_2-ზე, მაგრამ არაჯამებადია ყოველ $G\subset K_2$ არეზე ([112], [61], გვ. 14]):

$$\int\limits_G |\nu(x,y)|\,dx\,dy = +\infty. \tag{3}$$

ფიხტენჰოლცის ეს შედეგი შეიძლება ჩამოყალიბდეს სხვაგვარადაც, თუ ვისარგებლებთ წერტილზე ფუნქციის არაჯამებადობის შემდეგი ცნებით.

ფუნქციას ეწოდება **არაჯამებადი მოცემულ წერტილზე**, თუ ამ წერტილის შემცველ ყოველ არეზე ეს ფუნქცია არაჯამებადია (ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის ეს ცნება შემოიღო დანჟუამ 1912 წელს (იხ. [41], გვ. 128).

ფიხტენჰოლცის შედეგი ახლა ასე ჩამოყალიბდება: არსებობს ერთეულოვან კვადრატზე განმეორებით ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც არაჯამებადია ამ კვადრატის ყოველ წერტილზე.

ტოლსტოვმა აჩვენა, რომ განმეორებით ინტეგრებადი ფუნქციებისთვის მარტივად წყდება ის ამოცანები, რომლებშიც ჯამებადობა მოთხოვნილია მხოლოდ ინტეგრების რიგის შეცვლის მიზნით ([61], გვ. 12–18 და 47–55).

განმეორებით ინტეგრებადობის თვისება წარმატებით გამოიყენება იმ ფუნქციების მიმართ, რომელთაც გააჩნიათ ურთიერთტოლი შერეული კერძო წარმოებულები, თუნდაც ჯამებადი არ იყოს ეს უკანასკნელი ([61], გვ. 15 და 56–63).

განმეორებითი ინტეგრალებისადმი მიძღვნილია რამდენიმე საინტერესო გამოკვლევა (იხ. [61], გვ. 12–17, 47–55, 64–100; [75], გვ. 64–75, 195–206; [50], [127], გვ. 199–201).

შენიშვნა 2.5.1. ადვილი ასაგებია ორი ცვლადის ყველგან წყვეტილი ფუნქცია, რომელიც ერთი ცვლადით ყველგან უწყვეტია ყოველი ფიქსირებული მეორე ცვლადისთვის.

მართლაც, $[0,1]^2$ კვადრატზე განვსაზღვროთ $\omega(x,y)$ ფუნქცია ასე: რაციონალური y-თვის და ყველა x-თვის $\omega(x,y)=1$, ხოლო

ირაციონალური y-თვის და ყველა x-თვის კი – $\omega(x,y)=0$. ეს ფუნქცია უწყვეტად არის დამოკიდებული x-ზე ყოველი ფიქსირებული y-თვის.

ასეთივე თვისებისაა $[0,1]^2$-ზე $\psi(x,y) = a(x)\cdot b(y)$ ფუნქცია, როცა $a(x)$ და $b(y)$ ფუნქციებიდან ერთ-ერთი ყველგან უწყვეტია $[0,1]$-ზე, ხოლო მეორე კი ყველგან სასრული და წყვეტილი $[0,1]$-ზე.

2.6. ლებეგის და ბერის თეორემები განცალებით კერძო უწყვეტი ფუნქციებისთვის

წყვეტილი ფუნქციების მრავალმხრივი გამოკვლევა ეკუთვნის ბერის, შემოიღო რა ე. წ. ბერის კლასები შემდეგნაირად ([20], [45], გვ. 367).

ვთქვათ, Q არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის **სრულყოფილი სიმრავლე**. ეს ნიშნავს, რომ Q არის ჩაკეტილი და **თვითმკვრივი** (თავისთავში მკვრივი) სიმრავლე ([3], გვ. 201).

Q სიმრავლის ყველა წერტილზე უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე მიჩნეულია ბერის ნულოვან კლასად, სიმბოლურად $B_0(Q)$.

ყველგან Q-ზე განსაზღვრული ფუნქცია მიეკუთვნება ბერის პირველ $B_1(Q)$ კლასს, თუ ეს ფუნქცია არ ეკუთვნის $B_0(Q)$-ს, მაგრამ მისთვის არსებობს $B_0(Q)$ კლასის ფუნქციების მიმდევრობა, რომელიც Q-ზე კრებადია ამ ფუნქციისკენ. ასევე, ბერის მეორე $B_2(Q)$ კლასს განეკუთვნება ფუნქცია, თუ ის არ ეკუთვნის გაერთიანებას $B_0(Q) \cup B_1(Q)$, მაგრამ არის $B_1(Q)$ კლასის ფუნქციების ზღვარი Q-ზე და ა. შ.

განცალებით კერძო უწყვეტი ფუნქციებისთვის ადგილი აქვს ლებეგის შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2.6.1 ([133], [38], გვ. 387)**.** n-განზომილებიანი $K_n = [0,1]^n$ კუბის ყველა წერტილზე განცალებით კერძო უწყვეტი $f(x_1,\ldots,x_n)$ ფუნქცია ეკუთვნის ბერის არაუმაღლეს $B_{n-1}(K_n)$ კლასს.

$n = 2$ მნიშვნელობისთვის 2.6.1 თეორემა ნიშნავს, რომ $K_2 = [0,1]^2$ კვადრატზე განცალებით კერძო უწყვეტი $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია განეკუთვნება ბერის არაუმაღლეს პირველ $B_1(K_2)$ კლასს და, მაშასადამე, $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია K_2 კვადრატზე წარმოიდგინება K_2-ზე უწყვეტი ფუნქციების ზღვრის სახით.

ამ უკანასკნელი ფაქტის ერთი რეალიზება მოცემულია [95] შრომაში.

ბერის პირველი კლასის ფუნქციებისთვის კი ადგილი აქვს ბერის შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2.6.2 ([11], გვ. 213; [45], გვ. 380)**.** $B_1(K_n)$ კლასის სასრული ფუნქციის უწყვეტობის წერტილთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია K_n-ზე.

K_2-ზე განცალებით კერძო უწყვეტი და თითქმის ყველგან წყვეტილი $\phi(x, y)$ და $\Psi(x, y)$ ფუნქციები 2.5.1 და 2.5.2 თეორემებიდან, განეკუთვნებიან ბერის არაუმაღლეს პირველ $B_1(K_2)$ კლასს. ამიტომ ისინი არ შეიძლება ყველგან წყვეტილნი იყვნენ, ბერის 2.6.2 თეორემის ძალით.

§ 3. უწყვეტობა ეკვივალენტურია განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობის

3.1. განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობა

$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში მოცემული სასრული $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U(x^0)$, ფუნქციისთვის შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრებანი 2.1.(1) და 2.1.(2) აღნიშვნების მეშვეობით.

განსაზღვრა 3.1.1 ([103], [104])**.** $x_1, \dots, x_n$ ცვლადებზე დამოკიდებულ

$$\Delta_{[x_k^0]} f(x) = f(x) - f(x(x_k^0)) \tag{1}$$

სხვაობას ვუწოდოთ x_k ცვლადით **ძლიერი კერძო ნაზრდი** x^0 წერტილზე f ფუნქციისთვის (შეადარე 2.1.(8) ტოლობით მოცემულ

x_k ცვლადით კერძო ნაზრდს x^0 წერტილზე, რომელიც დამოკიდებულია ერთადერთ x_k ცვლადზე.).

განსაზღვრა 3.1.2 ([99], [101], [103], [107]). $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ x_k ცვლადით **ძლიერ კერძო უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ სრულდება

$$\lim_{x \to x^0} \Delta_{[x_k^0]} f(x) = 0 \tag{2}$$

ტოლობა. ეს ტოლობა ნიშნავს ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი $\delta_k = \delta_k(x^0, \varepsilon, f) > 0$ რიცხვის არსებობას, რომ ყოველი $x \in U(x^0, \delta_k)$ წერტილისთვის ადგილი აქვს

$$|\Delta_{[x_k^0]} f(x)| < \varepsilon \tag{3}$$

უტოლობას.

წინადადება 3.1.1. $f(x)$ ფუნქციის x_k ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე იწვევს $f(x)$-ის x_k ცვლადით კერძო უწყვეტობას იმავე x^0 წერტილზე, შებრუნების გარეშე.

დამტკიცება. (2) ტოლობის შესრულება ნიშნავს, რომ n ცვლადზე დამოკიდებულ $\lambda(x_1, \dots, x_n) = \Delta_{[x_k^0]} f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია-სხვაობას $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე აქვს ნულოვანი ზღვარი. კერძოდ, $\lambda(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციას ნულოვანი ზღვარი აქვს Ox_k ღერძის გასწვრივ, ე. ი. კერძო მნიშვნელობებისთვის $x_j = x_j^0$, როცა $j \neq k$. მაშასადამე, $f(x^0(x_k)) - f(x^0) \to 0$, როცა $x_k \to x_k^0$. ეს კი ნიშნავს 2.1.(10) ტოლობის შესრულებას $i = k$ შემთხვევისთვის.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა შევამოწმოთ 2.2.(1) ტოლობით მოცემული ფუნქციისთვის $O = (0, 0)$ წერტილზე. ამ ფუნქციისთვის (2) ტოლობა O წერტილზე დარღვეულია ორივე $k = 1, 2$ მნიშვნელობისთვის. ეს გამომდინარეობს

$$\varphi(x_1, x_2) - \varphi(0, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } \ x_2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } \ x_2 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

და

$$\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, 0) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } \ x_1 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } \ x_1 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

ტოლობებიდან. მაშასადამე, O წერტილზე არ არსებობს

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}} \Delta_{[x_k^0]} \varphi(x_1, x_2), \quad k = 1, 2,$$

ზღვრები. ამრიგად, $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციას O წერტილზე არ აქვს ძლიერი კერძო უწყვეტობის თვისება x_1 და x_2 ცვლადების მიმართ.

ამით დადგინდა x^0 წერტილზე განცალებით კერძო უწყვეტი ფუნქციის არსებობა, რომელიც ძლიერი კერძო უწყვეტობის თვისებას მოკლებულია ორივე ცვლადის მიმართ x^0 წერტილზე.

ახლა, 3.1.2 განსაზღვრის მიმართ გავაკეთოთ შემდეგი შენიშვნები:

შენიშვნა 3.1.1. 1) ერთი ცვლადის ყოველი $a(x_1)$ ფუნქცია შეიძლება განხილულ იქნას $x_1, \dots, x_n$ ცვლადების ფუნქციად, $n > 1$. ამისთვის საკმარისია განვიხილოთ $A(x_1, \dots, x_n) = a(x_1)$ ფუნქცია. ამიტომ $A(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის x_1 ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობა $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე, არის $a(x_1)$-ის უწყვეტობა x_1^0-ზე.

2) (2) ტოლობის შესრულება იწვევს იმავე ტოლობის შესრულებას $f + \omega$ სახის ყველა ფუნქციისთვის, როცა ω ნებისმიერი სასრული ფუნქციაა, რომელიც არ არის დამოკიდებული x_k ცვლადზე.

განსაზღვრა 3.1.3 ([99], [101], [103], [107])**.** f ფუნქციას ვუწოდოთ **განცალებით ძლიერ კერძო უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ იგი ყოველი ცვლადითაა ძლიერ კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე, ე. ი. თუ (2) ტოლობა შესრულებულია ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის.

შენიშვნა 3.1.2. (2) ტოლობაში $x_j = x_j^0$, $j \neq k$, კერძო მნიშვნელობების ჩასმით მიიღება ტოლობა

$$\lim_{x_k \to x_k^0} [f(x^0(x_k)) - f(x^0)] = 0, \quad k = 1, \dots, n. \tag{6}$$

აქედან ჩანს, რომ x^0 წერტილზე სასრული A ზღვრის მქონე f ფუნქციისთვის (6) ტოლობის შესასრულებლად აუცილებელია $A = f(x^0)$ ტოლობა.

3.2. უწყვეტობის პირველი ძირითადი თეორემა

თეორემა 3.2.1 ([99], [101], [107]). f ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელია და საკმარისი მისი განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობა x^0-ზე.

დამტკიცება. თეორემის პირობის აუცილებლობის დადგენის მიზნით ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვი, $1 \leq k \leq n$ და დავწეროთ შემდეგი იგივეობა

$$f(x) - f(x(x_k^0)) = \big[f(x) - f(x^0)\big] + \big[f(x^0) - f(x(x_k^0))\big]. \tag{1}$$

დაშვების თანახამად, f ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე. ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი დადებითი $\delta = \delta(x^0, \varepsilon, f)$ რიცხვი, რომ $\|x - x^0\| < \delta$ უტოლობა იწვევს

$$\big|f(x) - f(x^0)\big| < \varepsilon \tag{2}$$

უტოლობას. თუ ამ უტოლობაში ჩავსვამთ $x_k = x_k^0$ კერძო მნიშვნელობას, მაშინ მივიღებთ

$$\big|f(x(x_k^0)) - f(x^0)\big| < \varepsilon, \ \ \|x - x^0\| < \delta. \tag{3}$$

ორი უკანასკნელი უტოლობის ძალით, (1) ტოლობიდან ვიღებთ

$$\big|f(x) - f(x(x_k^0))\big| < 2\varepsilon, \ \ \|x - x^0\| < \delta. \tag{4}$$

ეს კი აღებული k-თვის ნიშნავს 3.1.(2) ტოლობას. მაგრამ k აღებული იყო ნებისმიერად. ამიტომ 3.1.(2) ტოლობა შესრულებულია ყველა

$k = 1, \ldots, n$ მნიშვნელობისთვის. მაშასადამე, f ფუნქცია განცალებით ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე.

თეორემის პირობის საკმარისობის დადგენა დავიწყოთ იმით, რომ f ფუნქცია x_1 ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე. ამიტომ მართებულია

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_1^0, x_2, \ldots, x_n)\right] = 0 \tag{$5)_1$}$$

ტოლობა. ასევე, f ფუნქციის x_2 ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე ეკვივალენტურია

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_1, x_2^0, x_3, \ldots, x_n)\right] = 0$$

ტოლობის, რაც კერძო $x_1 = x_1^0$ მნიშვნელობისთვის იღებს

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, x_3, \ldots, x_n)\right] = 0 \tag{$5)_2$}$$

სახეს და ასე შემდეგ. ეს პროცესი დამთავრდება შემდეგი ტოლობით, f ფუნქციის x_n ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობის გამო x^0 წერტილზე,

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)\right] = 0.$$

აქედან კი კერძო $x_j = x_j^0$ მნიშვნელობებისთვის, $j = 1, \ldots, n-1$, ვიღებთ

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n) - f(x^0)\right] = 0. \tag{$5)_n$}$$

ახლა $(5)_1$–$(5)_n$ ტოლობებიდან ადვილად მიიღება $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x^0)\right] = 0$ ტოლობა, რაც ნიშნავს f ფუნქციის უწყვეტობას x^0 წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 3.2.1. 3.2.1 თეორემაში არსებითია იმის მოთხოვნა, რომ 3.1.(2) ტოლობა უნდა შესრულდეს ყველა $k = 1, \ldots, n$ მნიშვნელობისთვის. თუკი 3.1.(2) ტოლობა შესრულებულია დამოუკიდებელ ცვლადთა მხოლოდ $n-1$ რაოდენობისთვის, მაშინ ფუნქცია შეიძლება წყვეტილი აღმოჩნდეს x^0 წერტილზე.

ამის საილუსტრაციოდ, ნებისმიერი x_1-თვის განვიხილოთ

$$\mu(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & \text{როცა } \ x_2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } \ x_2=0\end{cases} \tag{6}$$

ფუნქცია. ცხადია, რომ $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქცია წყვეტილია Ox_1 ღერძის ყველა $(x_1,0)$ წერტილზე.

ამასთან ერთად, $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქცია x_1 ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტია ყველა $(x_1^0,0)$ წერტილზე.

მართლაც, 3.3.(1) ტოლობის მიხედვით შევადგინოთ სხვაობა

$$\Delta_{[x_1^0]}\mu(x_1,x_2)=\mu(x_1,x_2)-\mu(x_1^0,x_2). \tag{7}$$

ეს სხვაობა არის $1-1=0$, როცა $x_2\neq 0$ და არის $0-0=0$, როცა $x_2=0$. ამიტომ

$$\Delta_{[x_1^0]}\mu(x_1,x_2)=0 \tag{8}$$

ყველა $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ წერტილზე.

მაშასადამე, $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქცია x_1 ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტია Ox_1 ღერძის ყოველ $(x_1^0,0)$ წერტილზე.

რადგანაც ყოველი (x_1,x_2) წერტილისთვის, როცა $x_2\neq 0$, გვაქვს ტოლობა $\mu(x_1,x_2)-\mu(x_1,0)=1-0=1$, ამიტომ $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქცია არ აკმაყოფილებს 3.1.(2) ტოლობას $(x_1^0,0)$ წერტილებზე $k=2$ მნიშვნელობისთვის.

ამრიგად, $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქციას არ აქვს ძლიერი კერძო უწყვეტობის თვისება x_2 ცვლადის მიმართ $(x_1^0,0)$ წერტილებზე.

3.3. უწყვეტობის პირველი ძირითადი თეორემის შედეგები

იგივეობა 3.2.(1)-დან უშუალოდ მიიღება შემდეგი

თეორემა 3.3.1 ([101], [103], [107])**.** f ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1) $f(x)$ ფუნქცია ერთი რომელიმე x_k ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე;

2) x^0 წერტილზე უწყვეტია ყველა დანარჩენი $n-1$ რაოდენობის ცვლადისგან შემდგარი $x(x_k^0)$ ნაკრების $f(x(x_k^0))$ ფუნქცია.

ეს თეორემა შეიძლება გამოყენებულ იქნას ამავე თეორემის $f(x(x_k^0))$ ფუნქციის მიმართ და ასე შემდეგ. ამიტომ მართებულია შემდეგი თეორემა, რომელშიც

$$x(x_k^0, x_j^0), \quad k \neq j, \tag{1}$$

სიმბოლოთი აღნიშნულია ის წერტილი, რომელიც მიიღება $x = (x_1, \dots, x_n)$ წერტილისგან ერთდროული $x_k = x_k^0$ და $x_j = x_j^0$, $j \neq k$, ჩასმით.

თეორემა 3.3.2 ([103], [107])**.** n ცვლადის $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია უწყვეტია $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი პირობები:

i_p) $f(x)$ ფუნქცია რომელიმე x_p ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე, $x = (x_1, \dots, x_n)$;

i_{pq}) $n-1$ ცვლადის $f(x(x_p^0))$ ფუნქცია რომელიმე x_q ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე, $q \neq p$;

i_{pqs}) $n-2$ ცვლადის $f(x(x_p^0, x_q^0))$ ფუნქცია რომელიმე x_s ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე, $s \neq p$, $s \neq q$;

და ასე შემდეგ, ამ პროცედურის დასასრულს მიღებული ერთი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე (იხ. 2.1.(6) ტოლობა).

ქვემოთ დაგვჭირდება შემდეგი

წინადადება 3.3.1 ([103], [107])**.** $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის ძლიერი კერძო უწყვეტობა რომელიმე x_l ცვლადით $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე, იწვევს იმავე x_l ცვლადით $f(x(x_k^0))$ ფუნქციების ძლიერ კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე ყოველი $k \neq l$ მნიშვნელობისთვის.

დამტკიცება. რომელიმე $\phi(x)$ ფუნქციისთვის სასრული ზღვრის არსებობა x^0 წერტილზე რაიმე $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის გასწვრივ, ჩვენს შემთხვევაში ზღვრის ნულობა, იწვევს $\phi(x)$-თვის x^0-ზე

იგივე ზღვრის არსებობას ნებისმიერი $M \subset E$ ქვესიმრავლის გასწვრივ, რომლისთვისაც x^0 დაგროვების წერტილია.

ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის x_l ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე (იხ. 3.1.(2) ტოლობა x_l^0-თვის) იწვევს ყოველი $k \neq l$ მნიშვნელობისთვის $f(x(x_k^0))$ ფუნქციის x_l ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე. უფრო დაწვრილებით, x_l^0-თვის დაწერილ 3.1.(2) ტოლობაში ზოგადი x წერტილი შევცვალოთ კერძო $x(x_k^0)$ წერტილით და მივიღებთ

$$\lim_{x \to x^0} \left[f(x(x_k^0)) - f(x(x_k^0, x_l^0))\right] = 0 \tag{2}$$

ტოლობას. ეს კი ნიშნავს $f(x(x_k^0))$ ფუნქციის x_l ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე. წინადადება დამტკიცებულია.

ამ წინადადების გამოყენებით 3.3.2 თეორემიდან მიიღება შემდეგი

თეორემა 3.3.3 ([103], [107]). თუ $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია ერთი რომელიმე ცვლადით კერძო უწყვეტია $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე (იხ. 2.1.(6) ტოლობა) და დარჩენილი $n-1$ ცვლადთაგან თითოეულის მიმართ კი არის ძლიერ კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე, მაშინ $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე და, მაშასადამე, $f(x_1, \dots, x_n)$ არის იმ ცვლადითაც ძლიერ კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე, რომელიც ნახსენებია თეორემის დასაწყისში (თეორემა 3.2.1-ის ძალით).

§ 4. უწყვეტობა ეკვივალენტურია განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობის

4.1. განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობა

წინა პარაგრაფის ზღვარით დამოკიდებულებებში ცვლადი წერტილი ისწრაფვის ფიქსირებული წერტილისკენ შეუზღუდავად. ამ ფაქტის გამოხატვა ხდებოდა სიტყვა “ძლიერი”-ს მეშვეობით.

ახლა საქმე გვექნება შეზღუდული მისწრაფების ერთ ახალ სახეობასთან.

ვთქვათ, სასრული $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in U(x^0)$. აქაც გამოყენებული იქნება 2.1.(1), 2.1.(2) და 3.3.(1) სიმბოლოები.

განსაზღვრა 4.1.1. $x_1,\ldots,x_n$ ცვლადებზე დამოკიდებულ

$$\Delta^c_{\widehat{x}_k^0} f(x) = f(x) - f(x(x_k^0)) \tag{1}$$

სხვაობას,

$$|x_j - x_j^0| \le c_j |x_k - x_k^0|$$

პირობებით ყველა $j \neq k$ მნიშვნელობისთვის, ვუწოდოთ $f(x)$ ფუნქციის x_k ცვლადით **კუთხური კერძო ნაზრდი** x^0 წერტილზე, რომელიც შეესაბამება დადებით c_j მუდმივთა $c=(c_1,\ldots,c_{k-1},c_{k+1},\ldots,c_n)$ ნაკრებს.

განსაზღვრა 4.1.2 ([99], [101], [107])**.** $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ x_k ცვლადით **კუთხურად კერძო უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ დადებით მუდმივთა ყოველი $c=(c_1,\ldots,c_{k-1},c_{k+1},\ldots,c_n)$ ნაკრებისთვის შესრულებულია

$$\lim_{x_k\to x_k^0} \Delta^c_{\widehat{x}_k^0} f(x) = 0 \tag{2}$$

ტოლობა*.

აქაც მართებულია 3.1.1 წინადადების ანალოგი.

წინადადება 4.1.1. $f(x)$ ფუნქციის x_k ცვლადით კუთხური კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე იწვევს $f(x)$-ის x_k ცვლადით კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე, შებრუნების გარეშე.

ადვილი მისახვედრია, რომ მართებულია შემდეგი

წინადადება 4.1.2. $f(x)$ ფუნქციის x_k ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე იწვევს $f(x)$-ის x_k ცვლადით კუთხურ კერძო უწყვეტობას იმავე x^0-ზე.

---

*(1)-დან ცხადია: 1) ცალკე აღებული ცვლადით კუთხური კერძო უწყვეტობა განისაზღვრება $n-1$ რაოდენობის ნებისმიერი დადებითი მუდმივით; 2) როცა $x_k \to x_k^0$, მაშინ $x_j \to x_j^0$ ყოველი j-თვის.

აქაც შევნიშნოთ, რომ ერთცვლადიანი ფუნქციის უწყვეტობა და ამ ცვლადით კუთხური კერძო უწყვეტობა ერთი და იგივეა, თუ ერთი ცვლადის ამ ფუნქციას განვიხილავთ მრავალცვლადის ისეთ ფუნქციად, რომელიც მუდმივია შემოტანილი ახალი ცვლადების მიმართ.

განსაზღვრა 4.1.3 ([99], [101], [107]). $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ **განცალებით კუთხურად კერძო უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ $f(x)$ ყოველი x_k ცვლადითაა კუთხურად კერძო უწყვეტი x^0-ზე, ე. ი., თუ (2) ტოლობა შესრულებულია ყველა $k=1,\ldots,n$ მნიშვნელობისთვის და დადებით მუდმივთა ყოველი $c=(c_1,\ldots,c_{k-1},c_{k+1},\ldots,c_n)$ ნაკრებისთვის.

4.2. უწყვეტობის მეორე ძირითადი თეორემა

თეორემა 4.2.1 ([99], [101], [107]). f ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია f-ის განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. თეორემის პირობის აუცილებლობა გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ f ფუნქციის უწყვეტობა x^0 წერტილზე იწვევს f-ის განცალებით ძლიერ კერძო უწყვეტობას x^0-ზე, თეორემა 3.2.1-ის თანახმად. ეს კი, თავის მხრივ, იწვევს წინადადება 4.1.2-ის ძალით, f-ის განცალებით კუთხურ კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე.

ახლა დავადგინოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ f ფუნქცია განცალებით კუთხურად კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე. ეს ნიშნავს, რომ f ყოველი დამოუკიდებელი ცვლადით კუთხურად კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე. ამიტომ 4.1.(2) ტოლობა შესრულებულია ყოველი დამოუკიდებელი ცვლადისთვის და დადებით მუდმივთა ყოველი ნაკრებისთვის, კერძოდ, მუდმივებისთვის $c_j=1$, $j\neq k$.

ახლა $\mathbb{R}^n$ სივრცე წარმოვადგინოთ როგორც გაერთიანება $P_1,\ldots,P_n$ პირამიდებისა, რომელთა საერთო წვეროა x^0 წერტილი. ყოველი P_k პირამიდა განსაზღვრულია უტოლობათა $|x_j-x_j^0|\leq|x_k-x_k^0|$ სისტემით, როცა j ღებულობს ყველა მნიშვნელობას გარდა

k მნიშვნელობისა. პირამიდა მისი x^0 წვეროდან შემოუსაზღვრელად ვრცელდება ორივე მხარეს. f ფუნქციის x^0 წერტილზე უწყვეტობის დასადგენად აუცილებელია და საკმარისი, 1.8.1 თეორემის ძალით, რომ

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in P_k}} f(x) = f(x^0) \tag{1}$$

ტოლობა შესრულდეს ყოველი ფიქსირებული k-თვის, $k = 1, \ldots, n$.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება დავკმაყოფილდეთ (1) ტოლობის მართებულობის დადგენით $k = 1$ მნიშვნელობისთვის და შემდგომი მსჯელობა მორგებული იქნება ამ შემთხვევაზე.

მაშასადამე, ვუშვებთ, რომ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U(x^0)$ წერტილი ეკუთვნის P_1-ს და ასე ისწრაფვის x^0 წერტილისკენ.

$f(x)$ ფუნქციის x_1 ცვლადით კუთხური კერძო უწყვეტობის გამო x^0 წერტილზე, გვაქვს

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in P_1}} \left[f(x) - f(x(x_1^0))\right] = 0 \tag*{$(2)_1$}$$

ტოლობა. $x(x_1^0) = (x_1^0, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილი მიეკუთვნება $P_2, \ldots, P_n$ პირამიდებიდან* რომელიმეს.

დავუშვათ, რომ ეს $x(x_1^0)$ წერტილი ეკუთვნის P_{l_1}-ს, სადაც $l_1 \neq 1$. ამიტომ $(2)_1$ ტოლობასთან ერთად გვექნება შემდეგი ტოლობა, რადგანაც $f(x)$ არის x_{l_1} ცვლადით კუთხურად კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე,

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x(x_1^0)\in P_{l_1}}} \left[f(x(x_1^0)) - f(x(x_1^0, x_{l_1}^0))\right] = 0, \tag*{$(2)_{l_1}$}$$

---

*$n = 2$ შემთხვევისას გვაქვს წერტილები $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, $x = (x_1, x_2) \in P_1$ და $x(x_1^0) = (x_1^0, x_2)$ წერტილი ეკუთვნის P_2-ს, რომელიც არის სიმრავლე (ორი ვერტიკალური კუთხის გაერთიანება [99]) $\left\{(x_1, x_2) :\ |x_2 - x_2^0| \geq |x_1 - x_1^0|\right\}$. უფრო ზუსტად, $x(x_1^0)$ წერტილი ეკუთვნის $x_1 = x_1^0$ წრფეს.

$n = 3$ შემთხვევისას გვაქვს წერტილები $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in P_1$ და წერტილი $x(x_1^0) = (x_1^0, x_2, x_3)$ მიეკუთვნება P_2-ს ან P_3-ს.

სადაც $x(x_1^0, x_{l_1}^0)$-ით აღნიშნულია ის $(x_1^0, \dots) \in P_{l_1}$ წერტილი, რომლის l_1 კოორდინატია $x_{l_1}^0$ (იხ. 3.3.(1) სიმბოლო).

ახლა $x(x_1^0, x_{l_1}^0)$ წერტილი მიეკუთვნება რომელიმე P_{l_2}-ს, სადაც $l_2 \neq 1$ და $l_2 \neq l_1$.

ამ პროცედურის დასასრულს მივიღებთ ისეთ წერტილს, რომლის კოორდინატთაგან ფიქსირებულია ყველა, გარდა ერთი კოორდინატისა. ეს ერთადერთი ცვლადი კოორდინატი იქნება $x_{l_{n-1}}$. ამიტომ ეს წერტილი ეკუთვნის $P_{l_{n-1}}$-ს და ამ წერტილს აქვს სახე $x^0(x_{l_{n-1}})$. მაშასადამე, ადგილი აქვს

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x^0(x_{l_{n-1}}) \in P_{l_{n-1}}}} \left[f(x^0(x_{l_{n-1}})) - f(x^0)\right] = 0 \qquad (2)_{l_{n-1}}$$

ტოლობას. ამგვარად, დავიწყეთ რა მოძრაობა x^0-ის მახლობელი ნებისმიერი $x = (x_1, \dots, x_n) \in P_1$ წერტილიდან, მივედით x^0 წერტილზე ისე, რომ ყოველი P_m-დან, $m = 2, \dots, n$, ვიღებდით x^0-ის მახლობელ წერტილს. სწორედ ასე იქნა გათვალისწინებული f ფუნქციის ყოფაქცევა ყოველი დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ x^0 წერტილის მიდამოში.

$(2)_1$, $(2)_{l_1} - (2)_{l_{n-1}}$ ტოლობების შეჯერებით მიიღება (1) ტოლობა $k = 1$ მნიშვნელობისთვის.

ამრიგად, f ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

4.3. უწყვეტობის მესამე თეორემა

უწყვეტობის მეორე ძირითადი 4.2.1 თეორემის პირობის საკმარისობის დამტკიცებისას გამოვლენილ იქნა საყურადღებო ფაქტი, რომლის ჩამოყალიბება ცალკე თეორემის სახით მიზანშეწონილია. ამ თეორემას აქვს პრაქტიკული გამოყენება ფუნქციის უწყვეტობაზე გამოკვლევისას.

თეორემა 4.3.1 ([107]). $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, ფუნქციის უწყვეტობისთვის $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\lim_{\substack{x_k\to x_k^0\\ |x_j-x_j^0|\le|x_k-x_k^0|\\ j\ne k}}\big[f(x)-f(x(x_k^0))\big]=0 \tag{1}$$

ტოლობა შესრულდეს ყველა $k=1,\dots,n$ მნიშვნელობისთვის.

განსაზღვრა 4.3.1. (1) ტოლობის შესრულებისას ვიტყვით, რომ f ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს x_k ცვლადით **არაინტენსური კუთხური კერძო უწყვეტობის თვისება**.

ახლა 4.3.1 თეორემა ასე ყალიბდება

თეორემა 4.3.2. f ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ მას x^0-ზე ჰქონდეს **განცალებით არაინტენსური კუთხური კერძო უწყვეტობის თვისება**.

4.4. დასკვნითი პირველი თეორემა უწყვეტობაზე

3.2.1, 4.2.1, 4.3.1 და 4.3.2 თეორემების საფუძველზე მიიღება

თეორემა 4.4.1 ([101], [107]). შემდეგი 1)–4) წინადადებებიდან თითოეული მათგანი ეკვივალენტურია დანარჩენი სამის:

1) f ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე;

2) f ფუნქცია განცალებით ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე;

3) f ფუნქცია განცალებით კუთხურად კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე;

4) f ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს განცალებით არაინტენსური კუთხური კერძო უწყვეტობის თვისება.

შენიშვნა 4.4.1. 2, 3 და 4 პარაგრაფებიდან ჩანს, რომ ერთცვლადიანი ფუნქციებისთვის კლასიკურ ანალიზში დამკვიდრებული

უწყვეტობის ცნების მრავალცვლადის ფუქნციებზე უფრო მისაღები გავრცელებაა განცალებით ძლიერი კერძო და განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობანი, ვიდრე თითოეული ცვლადით კერძო უწყვეტობა ანუ, რაც იგივეა, ვიდრე განცალებით კერძო უწყვეტობა. ამასთან, როგორც უკვე ითქვა, ძლიერი და კუთხური კერძო უწყვეტობანი ერთცვლადიანი ფუნქციისთვის ემთხვევა მის უწყვეტობას კლასიკური აზრით.

შენიშვნა 4.4.2. თუ k-ს თუნდაც ერთი რომელიმე მნიშვნელობისთვის $1, \dots, n$ რიცხვებიდან არ სრულდება

$$\lim_{\substack{x_k \to x_k^0 \\ |x_j - x_j^0| = |x_k - x_k^0| \\ j \neq k}} \left[f(x) - f(x(x_k^0))\right] = 0 \tag{1}$$

ტოლობა, მაშინ $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია არ არის უწყვეტი $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე.

§ 5. ზღვრის არარსებობა და უწყვეტობა

5.1. ზღვრის არარსებობა

3.2.1 თეორემის ძალით, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე გამომდინარეობს შემდეგი ორი ფაქტიდან (აქაც $x = (x_1, \dots, x_n)$):

1) $f(x)$ ფუნქცია ერთი რომელიმე x_j ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე;

2) ყველა დანარჩენი $n-1$ რაოდენობის ცვლადისგან შემდგარი $x(x_j^0)$ ნაკრების $f(x(x_j^0))$ ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე.

ბუნებრივად ისმება შემდეგი კითხვა: ექნება თუ არა $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ და $n > 1$, ფუნქციას ზღვარი x^0 წერტილზე, თუ შესრულებულია 1) პირობა, ხოლო 2) პირობა შეცვლილია შემდეგი პირობით:

2′) $f(x(x_j^0))$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს სასრული ზღვარი.

პასუხი ამ კითხვაზე უარყოფითია. ამის საილუსტრაციოდ გამოდგება 3.2.(6) ტოლობით მოცემული $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქცია. იქ დადგენილია, რომ $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქცია 1) პირობას აკმაყოფილებს ყველა $(x_1^0, 0)$ წერტილზე $j = 1$ მნიშვნელობისთვის.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქციას ზღვარი არ აქვს $(x_1^0, 0)$ წერტილებზე. მართლაც, ყველა x_1^0-თვის $\mu(x_1^0, x_2) = 1$, როცა $x_2 \neq 0$. ამიტომ ყველა x_1^0-თვის გვაქვს

$$\lim_{x_2 \to 0} \mu(x_1^0, x_2) = 1, \quad x_2 \neq 0 \tag{1}$$

ტოლობა. ეს ნიშნავს, რომ $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქციას x_2 ცვლადის მიმართ კერძო ზღვრად $(x_1^0, 0)$ წერტილებზე აქვს რიცხვი 1. გარდა ამისა, ყველა x_1^0-თვის გვაქვს

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \mu(x_1, 0) = 0 \tag{2}$$

ტოლობა. მაშასადამე, $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქციას x_1 ცვლადის მიმართ კერძო ზღვრად $(x_1^0, 0)$ წერტილებზე აქვს რიცხვი ნული.

ამრიგად, $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქციას ყოველ $(x_1^0, 0)$ წერტილზე აქვს ურთიერთგანსხვავებული სასრული განცალებითი კერძო ზღვრები.

აქედან აშკარაა, რომ $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქციას ზღვარი არ აქვს $(x_1^0, 0)$ წერტილზე.

ყველაფერი ეს ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წინადადების სახით.

წინადადება 5.1.1 ([103], [107]). ერთი რომელიმე x_j ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობა $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n > 1$, ფუნქციისა $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე და დანარჩენ $n-1$ ცვლადზე დამოკიდებული $f(x(x_j^0))$ ფუნქციისთვის სასრული ზღვრის არსებობა იმავე x^0 წერტილზე, არ იწვევს $f(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობას x^0 წერტილზე, არც სასრულის და არც უსასრულოსი.

ამ ფაქტთან დაკავშირებით უნდა აღინიშნოს, რომ 8.3 და 8.4 პუნქტებში მოცემული იქნება სასრული ზღვრის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

5.2. უწყვეტობა სასრული ზღვრის არსებობისას

კარგად ცნობილია, რომ კლასიკურ ანალიზში ზღვრის ცნება უსწრებს უწყვეტობის ცნებას. უფრო ზუსტად: უწყვეტობის ცნება შემოდის სასრული ზღვრის ცნების მეშვეობით და ეს ხდება ერთნაირად, როგორც ერთცვლადიანი, ისე მრავალცვლადის ფუნქციებისთვის. ისიც კარგადაა ცნობილი, რომ სასრული ზღვრის არსებობა არ იწვევს, საზოგადოდ, უწყვეტობას. ამით ამოიწურება, ძირითადად, ურთიერთმიმართება უწყვეტობასა და სასრული ზღვრის არსებობას შორის ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის.

მრავალი ცვლადის ფუნქციისთვის სასრული ზღვრის არსებობისას, აქ მოცემული იქნება უწყვეტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

მაშასადამე, ვიხილავთ საკითხს: მრავალი ცვლადის ფუნქციისთვის სასრული ზღვრის არსებობისას, რა დამატებითი პირობა იწვევს მის უწყვეტობას?

პასუხს ამ კითვაზე იძლევა შემდეგი თეორემა, რომელიც ერთცვლადიანი ფუნქციისთვის ემთხვევა უწყვეტობის ცნებას.

თეორემა 5.2.1 ([103], [107])**.** $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, ფუნქციის უწყვეტობისთვის $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი ორი პირობა:

1) f არის ერთი რომელიმე ცვლადით კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე (იხ. 2.1.(6) ტოლობა);

2) f-ს აქვს სასრული ზღვარი x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$\lim_{x\to x^0} f(x)=A,\quad |A|<+\infty \tag{1}$$

და ვთქვათ $1,\dots,n$ რიცხვებიდან რომელიმე i-თვის შესრულებულია

$$\lim_{x_i\to x_i^0} f(x^0(x_i))=f(x^0) \tag{2}$$

ტოლობა. ზღვრის ერთადერთობის გამო, (1) და (2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{x \to x^0} f(x) - f(x^0) = 0 \tag{3}$$

ტოლობა. ეს კი ნიშნავს f ფუნქციის უწყვეტობას x^0 წერტილზე.

შებრუნებით, თუ f ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე, მაშინ მას x^0-ზე ზღვრად აქვს სასრული $f(x^0)$ მნიშვნელობა და თითოეული ცვლადით კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე (იხ. 2.1). თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 5.2.1 ([103], [107]). პირობები:

1) ერთი რომელიმე ცვლადით f არის ძლიერ კერძო უწყვეტი ან კუთხურად კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე,

2) f-ს აქვს სასრული ზღვარი x^0 წერტილზე,

წარმოადგენენ აუცილებელ და საკმარის პირობებს f ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე.

§ 6. შედეგთა ნაკრები ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობისთვის

კარგად ცნობილი ფაქტია, რომ ორი ცვლადის ფუნქციებს ხშირი და მრავალმხრივი გამოიყენება აქვთ სხვადასხვა საკითხში. ეს ჩანს თუნდაც იმ ფაქტიდან, რომ ორი ცვლადის ფუნქციები მჭიდროდ უკავშირდებიან კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციებს.

ამიტომ მიზანშეწონილია n ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციების უწყვეტობისთვის უკვე დადგენილი ფაქტები ცალკე ჩამოვაყალიბოთ ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის, რათა ადვილი იყოს მათი გამოყენება*.

ეს სასურველია იმიტომაც, რომ ორგანზომილებიანი სივრცე თავისი ნაწილებით ადვილი წარმოსადგენია გეომეტრიულად.

---

*ორი ცვლადის ფუნქციების უწყვეტობის შესახებ კიდევ გვექნება საუბარი, სხვა თვისებებთან მიმართებაში.

მაშ ასე, ვთქვათ ორი ცვლადის $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში.

6.1. უწყვეტობა და განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობა

$\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის x_1 **ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობა** $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე ნიშნავს

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} \left[\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2)\right] = 0 \tag{1}$$

ტოლობას, ხოლო x_2 **ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობა** იმავე წერტილზე კი ნიშნავს

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} \left[\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2^0)\right] = 0 \tag{2}$$

ტოლობას. $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციას ეწოდება **განცალებით ძლიერ კერძო უწყვეტი** x^0 წერტილზე (იხ. განსაზღვრა 3.1.3), თუ ერთდროულად შესრულებულია (1) და (2) ტოლობანი.

უწყვეტობის პირველ ძირითად 3.2.1 თეორემას, ამ შემთხვევისთვის აქვს შემდეგი სახე.

თეორემა 6.1.1 ([99], [101], [107])**.** $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე, ესე იგი

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} \varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2^0) = 0 \tag{3}$$

ტოლობის შესასრულებლად, აუცილებელია და საკმარისი $\varphi(x_1, x_2)$ იყოს განცალებით ძლიერ კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე.

3.3.1 და 3.3.2 თეორემები განსაკუთრებით მარტივ სახეს იღებენ $n = 2$ შემთვევაში, რომლებიც ახლა ერთიმეორეს ემთხვევიან და აქვთ შემდეგი სახე.

თეორემა 6.1.2 ([99], [101], [107]). $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ x^0 წერტილზე $\varphi(x_1,x_2)$ იყოს ერთი რომელიმე ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტი და დარჩენილი ცვლადით კი კერძო უწყვეტი. ესე იგი, აუცილებელი და საკმარისია (1) ტოლობასთან ერთად სრულდებოდეს

$$\lim_{x_2\to x_2^0} \varphi(x_1^0,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2^0)=0 \tag{4}$$

ტოლობა, ან (2) ტოლობასთან ერთად სრულდებოდეს

$$\lim_{x_1\to x_1^0} \varphi(x_1,x_2^0)-\varphi(x_1^0,x_2^0)=0 \tag{5}$$

ტოლობა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს

შედეგი 6.1.1 ([101], [107]). ვთქვათ, $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქცია განცალებით კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე, ესე იგი $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციისთვის შესრულებულია (4) და (5) ტოლობები. მაშინ $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\varphi(x_1,x_2)$ ერთი რომელიმე ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტი იყოს x^0-ზე.

ამ შედეგიდან და 6.1.1 თეორემიდან გამომდინარეობს

შედეგი 6.1.2 ([101], [107]). თუ $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქცია x^0 წერტილზე არის ერთი რომელიმე ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტი და დარჩენილი ცვლადით კი კერძო უწყვეტი, მაშინ $\varphi(x_1,x_2)$ დარჩენილი ცვლადითაც ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე.

$n=2$ შემთხვევისთვის თეორემა 5.2.1 ასე ყალიბდება.

თეორემა 6.1.3 ([103], [107]). $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი ორი პირობა:

1) $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს სასრული ზღვარი;

2) (4) და (5) ტოლობებიდან შესრულებულია ერთ-ერთი.

6.2. უწყვეტობა და განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობა

$\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის x_1 ცვლადით **კუთხური კერძო უწყვეტობა** $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე ნიშნავს

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ |x_2 - x_2^0| \leq c_2 |x_1 - x_1^0|}} \Big[\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2)\Big] = 0 \tag{1}$$

ტოლობას* ყოველი $c_2 > 0$ მუდმივისთვის.

$\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის x_2 ცვლადით **კუთხური კერძო უწყვეტობა** x^0 წერტილზე კი ნიშნავს

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ |x_1 - x_1^0| \leq c_1 |x_2 - x_2^0|}} \Big[\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2^0)\Big] = 0 \tag{2}$$

ტოლობის შესრულებას ყოველი $c_1 > 0$ მუდმივისთვის.

$\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის **განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობა** x^0 წერტილზე ნიშნავს, x^0-ზე $\varphi(x_1, x_2)$-ის კუთხურ კერძო უწყვეტობას როგორც x_1 ცვლადით, ისე x_2 ცვლადით.

უწყვეტობის მეორე ძირითად 4.2.1 თეორემას, $n = 2$ შემთხვევისთვის აქვს შემდეგი სახე.

თეორემა 6.2.1 ([101], [107]). $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელია და საკმარისი $\varphi(x_1, x_2)$-ის განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე.

მართებულია აგრეთვე შემდეგი

თეორემა 6.2.2 ([101], [107]). $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს ერთი მაინც ისეთი $c > 0$ მუდმივი, რომ ერთდროულად სრულდებოდეს

---

*(1) ტოლობაში $x_2 \to x_2^0$, რადგანაც $|x_2 - x_2^0| \leq c_2 |x_1 - x_1^0|$. ანალოგიური მდგომარეობაა (2) ტოლობაშიც.

შემდეგი ორი ტოლობა:

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ |x_2-x_2^0|\le c|x_1-x_1^0|}} \big[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)\big]=0, \tag{3}$$

$$\lim_{\substack{x_2\to x_2^0\\ |x_2-x_2^0|\ge c|x_1-x_1^0|}} \big[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2^0)\big]=0. \tag{4}$$

უწყვეტობის მესამე 4.3.1 თეორემას კი აქვს სახე.

თეორემა 6.2.3 ([107]). $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციის x^0 წერტილზე უწყვეტობისთვის აუცილებელი და საკმარისია სრულდებოდეს

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ |x_2-x_2^0|\le |x_1-x_1^0|}} \big[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)\big]=0 \tag{5}$$

და

$$\lim_{\substack{x_2\to x_2^0\\ |x_1-x_1^0|\le |x_2-x_2^0|}} \big[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2^0)\big]=0 \tag{6}$$

ტოლობები.

განსაზღვრა 6.2.1. (5) და (6) ტოლობების შესრულებისას ვიტყვით, რომ ორი ცვლადის $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციას (x_1^0,x_2^0) წერტილზე აქვს **განცალებით არაინტენსური კუთხური კერძო უწყვეტობის თვისება**.

უწყვეტობის მესამე თეორემა, როცა $n=2$ შემდეგია:

თეორემა 6.2.4. ორი ცვლადის $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია φ-ს x^0-ზე ჰქონდეს განცალებით არაინტენსური კუთხური კერძო უწყვეტობის თვისება.

შენიშვნა 6.2.1. 1) ცალკე აღებული (3) ტოლობის შესრულება ერთი რომელიმე $c>0$ მუდმივისთვის, კერძოდ, (5) ტოლობის შესრულება ცალკე, არ ნიშნავს $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციის x_1 ცვლადით კუთხურ

კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე. ანალოგიურ მდგომარეობას აქვს ადგილი, ცხადია, x_2 ცვლადის მიმართაც.

2) ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, როცა სასრულია მისი ერთ-ერთი ძლიერი კერძო წარმოებული, მოცემული იქნება II თავში 4.6.1 წინადადების სახით.

3) ორი ცვლადის განცალებით კერძო უწყვეტი ფუნქციის უწყვეტობის ერთი საკმარისი პირობა, მითითებული იქნება III თავში 3.4.3 თეორემიდან მტკიცება 1)-ის სახით.

4) x და y ცვლადების $f(x,y)$ ფუნქციისთვის (5) და (6) ტოლობანი შესაბამისად ეკვივალენტურია შემდეგი

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ -|x-x_0|\le y-y_0\le|x-x_0|}}\Big[f(x,y)-f(x_0,y)\Big]=0, \tag{7}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ -|y-y_0|\le x-x_0\le|y-y_0|}}\Big[f(x,y)-f(x,y_0)\Big]=0 \tag{8}$$

ტოლობების. (7) ტოლობაში $x_0=0$ და $y_0=0$ შემთხვევისას (x,y) წერტილი ისწრაფვის $(0,0)$ წერტილისკენ ისე, რომ (x,y) მუდმივად რჩება $y=|x|$ და $y=-|x|$ ტეხილებით შემოსაზღვრულ იმ სიმრავლეზე ტეხილების ჩათვლით, რომელიც შეიცავს Ox ღერძს. ტოლობა (8)-ში კი (x,y) ისწრაფვის $(0,0)$ წერტილისკენ იმავე ტეხილებით შემოსაზღვრული იმ სიმრავლის გასწვრივ ტეხილების ჩათვლით, რომელიც შეიცავს Oy ღერძს.

§ 7. ფართო აზრით უწყვეტობა და მისი გამოყენება

7.1. ფართო აზრით ნაზრდის და ფართო აზრით უწყვეტობის ცნებანი

მოვიგონოთ, რომ $x_1,\dots,x_n$ ცვლადებზე დამოკიდებული ფუნქციისთვის სრული ნაზრდის, მოკლედ ნაზრდის, $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე შესადგენად საჭიროა ყოველ x_j^0 კოორდინატს მივანიჭოთ

ნაზრდი $x_j - x_j^0$ და ეს ხდება ერთბაშად ყველა j-თვის, $j = 1, \ldots, n$ (იხ. პუნქტი 1.6).

ახლა განვიხილოთ სხვაგვარი ნაზრდი და მას ვუწოდოთ ფართო აზრით ნაზრდი.

ვთქვათ სასრული $f(x)$ ფუნქცია, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, განსაზღვრულია $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში.

თავდაპირველად, 3.1.(1) ტოლობის მიხედვით, f ფუნქციისთვის შევადგინოთ ერთი რომელიმე ცვლადით ძლიერი კერძო ნაზრდი x^0 წერტილზე. $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადებზე დამოკიდებული ეს სხვაობა განვიხილოთ ახალ ფუნქციად და მისთვისაც, იმავე წესით, შევადგინოთ x^0 წერტილზე ძლიერი კერძო ნაზრდი უკვე სხვა რომელიმე ცვლადით და ასე შემდეგ. ამ პროცედურას ვაგრძელებთ მანამ, ვიდრე არ ამოიწურება ყველა ცვლადით ძლიერი კერძო ნაზრდის შედგენა x^0 წერტილზე.

საბოლოო შედეგს ვუწოდოთ n ცვლადის $f(x)$ ფუნქციის ფართო აზრით ნაზრდი x^0 წერტილზე და იგი ავღნიშნოთ $\Delta^n_{[x^0]} f(x)$ სიმბოლოთი.

ამ პროცედურაში საგულისხმოა ის, რომ საბოლოო შედეგი ერთი და იგივეა, მიუხედავად იმისა, თუ როგორია დამოუკიდებელ ცვლადთა მიმართ x^0 წერტილზე ძლიერი კერძო ნაზრდების შედგენის თანმიმდევრობა. ამის გათვალისწინებით ახლა შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა.

განსაზღვრა 7.1.1 ([101], [104], [107]). $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრული სასრული $f(x)$ ფუნქციის, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U(x^0)$, **ფართო აზრით ნაზრდი** x^0 წერტილზე ვუწოდოთ

$$\Delta^n_{[x^0]} f(x) = \big(\Delta_{[x_1^0]} \circ \Delta_{[x_2^0]} \circ \cdots \circ \Delta_{[x_n^0]}\big)(f)(x) \tag{1}$$

სიდიდეს, სადაც (იხ. 3.1.(1) ტოლობა)

$$\Delta_{[x_k^0]} F(x) = F(x) - F(x(x_k^0)). \tag{2}$$

მაშასადამე, (1) ტოლობით განსაზღვრული $\Delta^n_{[x^0]}f(x)$-ის მისაღებად საჭიროა (2) ტოლობაში F-ის როლში და k-თვის თანმიმდევრობით ავიღოთ f და $k=n$, $\Delta_{[x_n^0]}f$ და $k=n-1$ და ასე შემდეგ, ბოლოს $\Delta_{[x_2^0]}\circ\cdots\circ\Delta_{[x_n^0]}(f)$ და $k=1$.

განსაზღვრა 7.1.2 ([101], [104], [107]). f ფუნქციას ვუწოდოთ **ფართო აზრით უწყვეტი** x^0 წერტილზე, როცა შესრულებულია

$$\lim_{x\to x^0}\Delta^n_{[x^0]}f(x)=0 \tag{3}$$

ტოლობა.

7.2. ფართო აზრით ნაზრდი და ფართო აზრით უწყვეტობა ორცვლადიანი ფუნქციისთვის

ვთქვათ $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილის მიდამოში მოცემულია ორცვლადიანი სასრული $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქცია. მაშინ $\varphi(x_1,x_2)$-თვის x^0 წერტილზე **ძლიერი კერძო ნაზრდი** x_1 ცვლადის მიმართ არის

$$\Delta_{[x_1^0]}\varphi(x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2) \tag{1}$$

და x_2 ცვლადის მიმართაა

$$\Delta_{[x_2^0]}\varphi(x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2^0), \tag{2}$$

ხოლო

$$\Delta^2_{[x^0]}\varphi(x_1,x_2)=$$
$$=\big(\Delta_{[x_1^0]}\circ\Delta_{[x_2^0]}\big)(\varphi)(x_1,x_2)=\big(\Delta_{[x_2^0]}\circ\Delta_{[x_1^0]}\big)(\varphi)(x_1,x_2).$$

ამიტომ $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციისთვის x^0 წერტილზე **ფართო აზრით ნაზრდია**

$$\Delta^2_{[x^0]}\varphi(x_1,x_2)=$$
$$=\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)-\varphi(x_1,x_2^0)+\varphi(x_1^0,x_2^0). \tag{3}$$

ორი ცვლადის ფუნქციისთვის ფართო აზრით უწყვეტობის ცნება სასურველია, შემდგომი გამოყენების მიზნით, ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ორი ურთიერთეკვივალენტური განსაზღვრის სახით.

განსაზღვრა 7.2.1 ([107]). $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილის მიდამოში სასრულ $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციას ვუწოდოთ **ფართო აზრით უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ შესრულებულია ტოლობა

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0}}\left[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)-\varphi(x_1,x_2^0)+\varphi(x_1^0,x_2^0)\right]=0. \quad (4)$$

განსაზღვრა 7.2.2 ([107]). $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილის მიდამოში მოცემულ $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციას ვუწოდოთ **ფართო აზრით უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ მნიშვნელობა $\varphi(x_1^0,x_2^0)$ სასრულია და

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0}}\left[\varphi(x_1^0,x_2)+\varphi(x_1,x_2^0)-\varphi(x_1,x_2)\right]=\varphi(x_1^0,x_2^0). \quad (5)$$

7.3. ფართო აზრით ნაზრდი ჯამისთვის [107]

თუ $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)$ მოცემული სასრულმნიშვნელობებიანი ფუნქციებია $U(x^0)$-ში, $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$, მაშინ

$$\Delta^n_{[x^0]}\sum_{j=1}^m f_j(x)=\sum_{j=1}^m\Delta^n_{[x^0]}f_j(x),\quad x=(x_1,\dots,x_n). \qquad (1)$$

7.4. ფართო აზრით ნაზრდი სპეციალური ჯამისთვის [107]

განვიხილოთ სპეციალური სახის სასრულმნიშვნელობებიანი

$$\psi_k:\ \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R},\quad k=1,\dots,n,$$

ფუნქციები, რომელთაგან თითოეული დამოკიდებულია $n-1$ რაოდენობის ცვლადზე.

განვიხილოთ $x=(x_1,\dots,x_n)$-ზე დამოკიდებული **ჯამური ფუნქცია**

$$\psi(x)=\psi_1(x_2,x_3,\dots,x_n)+\psi_2(x_1,x_3,x_4,\dots,x_n)+$$

$$+\cdots+\psi_n(x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}). \tag{1}$$

რადგანაც ψ_k ფუნქცია არ არის დამოკიდებული x_k ცვლადზე, ამიტომ 3.1.(1) ტოლობის საფუძველზე მიიღება

$$\Delta_{[x_k^0]}\psi_k(x)=0,\ \ k=1,\ldots,n \tag{2}$$

ტოლობები. აქედან კი იმის გათვალისწინებით, რომ 7.1.(1) ტოლობაში თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ აქვს, ვიღებთ (რადგანაც k-რი ძლიერი კერძო ნაზრდი ნულია)

$$\Delta^n_{[x^0]}\psi_k(x)=0,\ \ k=1,\ldots,n \tag{3}$$

ტოლობებს. ამ უკანასკნელის ჩასმით 7.3.(1) ტოლობაში მივიღებთ

$$\Delta^n_{[x^0]}\psi(x)=0. \tag{4}$$

მაშასადამე, (1) სახის ყოველი ფუნქცია ფართო აზრით უწყვეტია ნებისმიერ $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ წერტილზე, თუნდაც ψ_k ფუნქციები წყვეტილი იყოს x^0-ზე.

7.5. ფართო აზრით უწყვეტობის საკმარისი პირობა*

თეორემა 7.5.1 ([101], [104], [107]). თუ $f(x)$ ფუნქცია ერთი რომელიმე ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტია x^0 წერტილზე, მაშინ $f(x)$ ფართო აზრით უწყვეტია x^0 წერტილზე. შებრუნებული წინადადება მცდარია.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია x_j ცვლადის მიმართაა ძლიერ კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე. მაშინ შესრულებულია (იხ.3.1.(1) და 3.1.(2) ტოლობანი)

$$\lim_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x(x_j^0))\right]=0 \tag{1}$$

---

*ორი ცვლადის ფუნქციის ფართო აზრით უწყვეტობის სხვა საკმარისი პირობა მოცემული იქნება თავ III-ში, წინადადება 3.4.1-დან მტკიცება 1)-ის სახით.

ტოლობა. რადგანაც $\Delta^n_{[x^0]} f(x)$ არ არის დამოკიდებული ძლიერი კერძო ნაზრდების შედგენის თანმიმდევრობაზე, ამიტომ 7.1.(1) ტოლობაში $\Delta^n_{[x^0]} f(x)$-ის შედგენა დავიწყოთ $\Delta_{[x_j^0]} f(x)$-ის შედგენით. შემდგომი მოქმედებით, x^0 წერტილზე უნდა შევადგინოთ ძლიერი კერძო ნაზრდი $\Delta_{[x_j^0]} f(x)$ ფუნქციისთვის სხვა რომელიმე x_l ცვლადით, $l \neq j$. შედეგად მივიღებთ დამოკიდებულებებს (იხ. 2.1.(1), 2.1.(2) და 3.3.(1) სიმბოლოები)

$$\begin{aligned}
\Delta_{[x_l^0]}(\Delta_{[x_j^0]} f(x)) &= \Delta_{[x_j^0]} f(x) - (\Delta_{[x_j^0]} f(x))_{x_l = x_l^0} = \\
&= \big[f(x) - f(x(x_j^0))\big] - \big[f(x) - f(x(x_j^0))\big]_{x_l = x_l^0} = \\
&= \big[f(x) - f(x(x_j^0))\big] - \big[f(x(x_l^0)) - f(x(x_j^0, x_l^0))\big].
\end{aligned}$$

როცა $x \to x^0$, მაშინ პირველ კვადრატულ ფრჩხილში ჩასმული სხვაობა ისწრაფვის ნულისკენ, ტოლობა (1)-ის თანახმად. აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს ნულისკენ სწრაფვა მეორე კვადრატულ ფრჩხილებში ჩასმული სხვაობისაც, როცა $x \to x^0$.

სასრული რაოდენობის ნაბიჯისგან შემდგარი ეს პროცესი, დასრულდება 7.1.(3) ტოლობის მიღებით.

შებრუნებული წინადადების მცდარობაში გვარწმუნებს პუნქტ 7.4-ის მასალა, კერძოდ, (2) ტოლობით ქვემოთ მოცემული $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქცია. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 7.5.1. თეორემა 7.5.1-ის რეალიზება მარტივად შეიძლება ორი ცვლადის ფუნქციისთვის. მართლაც, ვთქვათ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია არის $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე x_1 ცვლადით ან x_2 ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტი. x_1 ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობისას, 7.2.(3) ტოლობის მარჯვენა მხარე გადავწეროთ ასე

$$\big[\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2)\big] - \big[\varphi(x_1, x_2^0) - \varphi(x_1^0, x_2^0)\big],$$

რაც ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $x \to x^0$.

ანალოგიური მსჯელობა შეიძლება ჩატარდეს, იგივე $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის x_2 ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობისას x^0 წერტილზე.

მაშასადამე, აღნიშნულ პირობებში $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია ფართო აზრით უწყვეტია x^0 წერტილზე.

ამ წინადადების შებრუნებულის მცდარობა ადვილად მოწმდება ფუნქციისთვის

$$\omega(x_1, x_2) = \alpha(x_1) + \beta(x_2), \tag{2}$$

სადაც $\alpha(x_1)$ და $\beta(x_2)$ წარმოადგენენ ნებისმიერ სასრულ ფუნქციებს.

ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ყოველ $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე ადგილი აქვს

$$\Delta^2_{[x^0]}\omega(x_1, x_2) = 0 \tag{3}$$

ტოლობას. ეს ნიშნავს, რომ (2) სახის ნებისმიერი სასრული ფუნქცია ფართო აზრით უწყვეტია ნებისმიერ x^0 წერტილზე. შენიშვნა დამთავრებულია.

მიზანშეწონილია აქვე განვიხილოთ იგივე $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქციის x^0 წერტილზე უწყვეტობის საკითხი. გვაქვს ტოლობანი

$$\omega(x_1, x_2) - \omega(x_1^0, x_2) = \alpha(x_1) - \alpha(x_1^0), \tag{4}$$

$$\omega(x_1, x_2) - \omega(x_1, x_2^0) = \beta(x_2) - \beta(x_2^0). \tag{5}$$

(4) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქცია იქნება x_1 ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტი (x_1^0, x_2^0) წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha(x_1)$ ფუნქცია უწყვეტია x_1^0 წერტილზე.

ანალოგიური მდგომარეობაა $\omega(x_1, x_2)$-ის x_2 ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობისთვის, $\beta(x_2)$ ფუნქციასთან მიმართებაში.

ამრიგად, თუ $\alpha(x_1)$ და $\beta(x_2)$ წყვეტილი ფუნქციებია x_1^0 და x_2^0 წერტილებზე შესაბამისად, მაშინ $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქცია არ არის რომელიმე ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტი (x_1^0, x_2^0) წერტილზე.

აქ ჩატარებული მსჯელობა და 6.1.1 თეორემა, საფუძველს გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ ასეთი

შედეგი 7.5.1. (2) ტოლობით მოცემული $\omega(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის რაიმე (x_1^0, x_2^0) წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია $\alpha(x_1)$ და $\beta(x_2)$ ფუნქციების უწყვეტობა x_1^0 და x_2^0 წერტილებზე, შესაბამისად.

3.2.1 და 7.5.1 თეორემებიდან გამომდინარეობს

შედეგი 7.5.2 ([101], [104], [107]). თუ $f(x)$ ფუნქცია, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, უწყვეტია რაიმე $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე, მაშინ $f(x)$ ფართო აზრითაც უწყვეტია იმავე წერტილზე. შებრუნებული წინადადება მცდარია.

შენიშვნა 7.5.2 ([107]). 3.2.(6) ტოლობით მოცემული $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქცია ფართო აზრით უწყვეტია ყოველ წერტილზე.

მართლაც, მისი ფართო აზრით უწყვეტობა $(x_1^0, 0)$ წერტილზე გამომდინარეობს ამ წერტილზე მისი x_1 ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობიდან 7.5.1 თეორემის ძალით. ყველა სხვა წერტილზე $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქცია უწყვეტია და ამიტომ ასეთ წერტილზე იგი ფართო აზრითაც უწყვეტია, შედეგი 7.5.2-ის ძალით.

7.6. ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა მისი ფართო აზრით უწყვეტობისას

ახლა ჩვენ კარგად ვართ ინფორმირებული იმის შესახებ, რომ მრავალცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა არ გამომდინარეობს მისი არც განცალებით კერძო უწყვეტობიდან (იხ. პუნქტი 2.2) და არც ფართო აზრით უწყვეტობიდან (იხ. შენიშვნა 7.5.1).

ახლა დავრწმუნდებით, რომ ორივე ეს თვისება ერთად აღებული ეკვივალენტურია ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის, თუმცა ცალ-ცალკე ისინი უწყვეტობისგან საკმაოდ მოშორებული თვისებებია.

ამით პასუხი გაეცემა კითხვას, თუ რა დადებით ინფორმაციულ როლს ასრულებს ფართო აზრით უწყვეტობის ცნება.

თეორემა 7.6.1 ([104], [107]). $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის მიდამოში სასრული $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელია და საკმარისი შემდეგი ორი პირობის შესრულება:

1) $\varphi(x_1, x_2)$-ის განცალებით კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე;

2) $\varphi(x_1, x_2)$-ის ფართო აზრით უწყვეტობა x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. თუ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე, მაშინ იგი x^0 წერტილზე არის განცალებით კერძო უწყვეტი (იხ. პუნქტი 2.1) და ფართო აზრითაც უწყვეტი (იხ. შედეგი 7.5.2).

შებრუნებული წინადადების მართებულობა უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი იგივეობიდან

$$\varphi(x_1^0 + h, x_2^0 + k) - \varphi(x_1^0, x_2^0) =$$
$$= \big[\varphi(x_1^0 + h, x_2^0 + k) - \varphi(x_1^0, x_2^0 + k) - \varphi(x_1^0 + h, x_2^0) + \varphi(x_1^0, x_2^0)\big] +$$
$$+ \big[\varphi(x_1^0 + h, x_2^0) - \varphi(x_1^0, x_2^0)\big] + \big[\varphi(x_1^0, x_2^0 + k) - \varphi(x_1^0, x_2^0)\big]. \quad (1)$$

უკანასკნელი თეორემიდან მიიღება

შედეგი 7.6.1. 1) $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე განცალებით კერძო უწყვეტი $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0-ზე, აუცილებელი და საკმარისია $\varphi(x_1, x_2)$-ის ფართო აზრით უწყვეტობა იმავე წერტილზე;

2) $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე ფართო აზრით უწყვეტი $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0-ზე, აუცილებელი და საკმარისია $\varphi(x_1, x_2)$-ის განცალებით კერძო უწყვეტობა იგივე წერტილზე (ამის კერძო შემთხვევაა შედეგი 7.5.1).

შედეგი 7.6.2. ტოლსტოვის ფუნქცია თეორემა 2.5.1-დან, მისი წყვეტის წერტილზე (ე. ი. თითქმის ყველა წერტილზე) მოკლებულია ფართო აზრით უწყვეტობის თვისებას.

7.7. უწყვეტობა და $(n-1)$-განცალებით კერძო უწყვეტობა

ჩვენი მიზანია თეორემა 7.6.1-ის განზოგადება მრავალი ცვლადის ფუნქციებზე. ამის რეალიზებისთვის გვჭირდება განცალებითი კერძო

უწყვეტობის ცნების განზოგადება. როგორც ვიცით, $f(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციის x_k ცვლადით კერძო უწყვეტობა $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე ნიშნავს

$$\lim_{x_k \to x_k^0} f(x^0(x_k)) - f(x^0) = 0 \tag{1}$$

ტოლობის შესრულებას, სადაც

$$x^0(x_k) = (x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

ცხადია, რომ $f(x^0(x_k)) - f(x^0)$ სხვაობა დამოკიდებულია ერთადერთ x_k ცვლადზე. f ფუნქციის განცალებით კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე ნიშნავს ტოლობა (1)-ის შესრულებას ყველა დამოუკიდებელი $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადისთვის ცალ-ცალკე (იხ. პუნქტი 2.1). f-ის ამ თვისებას შემდგომში ვუწოდებთ f ფუნქციის 1-განცალებით კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე, ვინაიდან განსახილველ სხვაობაში ერთი კოორდინატია ცვლადი.

1. ახლა $x^0(x_j, x_k)$ სიმბოლოთი, როცა $j \neq k$, აღვნიშნოთ x^0 წერტილის x_j^0 და x_k^0 კოორდინატების x_j-თი და x_k-თი შეცვლით მიღებული წერტილი. ცხადია, რომ $f(x^0(x_j, x_k)) - f(x^0)$ სხვაობა დამოკიდებულია ორ x_j და x_k ცვლადზე, $n > 1$.

თუ $j = 1, \ldots, n$ და $k = 1, \ldots, n$ მნიშვნელობებისთვის, როცა $j \neq k$, სრულდება

$$\lim_{\substack{x_k \to x_k^0 \\ x_j \to x_j^0}} f(x^0(x_j, x_k)) - f(x^0) = 0 \tag{2}$$

ტოლობა, მაშინ $f(x_1, \ldots, x_n)$-ს ვუწოდოთ **2-განცალებით კერძო უწყვეტი** ფუნქცია x_0 წერტილზე, $n > 1$. ცხადია, რომ ორი ცვლადის ფუნქციისთვის 2-განცალებით კერძო უწყვეტობა არის მისი უწყვეტობა, ისევე როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის 1-განცალებით კერძო უწყვეტობა ნიშნავს ამ ფუნქციის უწყვეტობას.

ადვილი დასანახია, რომ x^0 წერტილზე 2-განცალებით კერძო უწყვეტი $f(x_1,\ldots,x_n)$ ფუნქცია არის 1-განცალებით კერძო უწყვეტი x^0-ზე, შებრუნების გარეშე. მართლაც, მტკიცების პირველი ნაწილი მიიღება (2) ტოლობებიდან კერძო $x_j = x_j^0$ შემთხვევაში, რაც მოგვცემს (1) ტოლობას. მტკიცების მეორე ნაწილის საილუსტრაციოდ ავიღოთ ისეთი $g(x_1,x_2,x_3)$ ფუნქცია, რომელიც ნულია საკოორდინატო ღერძებზე და დანარჩენ წერტილებზე კი ტოლია ნულისგან განსხვავებული რაიმე მუდმივის. აშკარაა, რომ $g(x_1,x_2,x_3)$ ფუნქცია კოორდინატთა სათავეზე არის 1-განცალებით კერძო უწყვეტი და არ არის 2-განცალებით კერძო უწყვეტი.

წინადადება 7.7.1 ([9])**.** თუ $f(x_1,\ldots,x_n)$ ფუნქცია უწყვეტია $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ წერტილზე, მაშინ f არის 2-განცალებით კერძო უწყვეტი x^0-ზე, $n>1$. შებრუნებული წინადადება მცდარია.

დამტკიცება. f ფუნქციის უწყვეტობა x^0 წერტილზე ნიშნავს

$$\lim_{x\to x^0} f(x_1,\ldots,x_n) - f(x^0) = 0 \tag{3}$$

ტოლობას, რომლის კერძო შემთხვევაა (2) ტოლობა.

შებრუნებული წინადადების მცდარობა ჩანს სამი ცვლადის იმ ფუნქციის მაგალითზე, რომელიც ნულია საკოორდინატო სიბრტყეებზე და ტოლია 1-ის ყველა დანარჩენ წერტილზე.

2. ზოგადი თეორემის ჩამოყალიბებამდე დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 7.7.1 ([9])**.** $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\in\mathbb{R}^3$ წერტილის მიდამოში სამი ცვლადის სასრული $\psi(x_1,x_2,x_3)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი ორი პირობა:

1) $\psi(x_1,x_2,x_3)$ ფუნქციის 2-განცალებით კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე;

2) $\psi(x_1,x_2,x_3)$ ფუნქციის ფართო აზრით უწყვეტობა x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. ფართო აზრით ნაზრდის შედგენის წესის გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ (იხ. 7.1 და 7.2 პუნქტები)

$$\begin{gathered}\Delta^3_{[x^0]}\psi(x_1,x_2,x_3)=\\ =\psi(x_1,x_2,x_3)-\psi(x_1^0,x_2,x_3)-\psi(x_1,x_2^0,x_3)+\\ +\psi(x_1^0,x_2^0,x_3)-\psi(x_1,x_2,x_3^0)+\psi(x_1^0,x_2,x_3^0)+\\ +\psi(x_1,x_2^0,x_3^0)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\end{gathered}\tag{4}$$

ტოლობას. ამის გათვალისწინებით, $\psi(x_1,x_2,x_3)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$ სხვაობა წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{gathered}\psi(x_1,x_2,x_3)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)=\\ =\Big[\psi(x_1,x_2,x_3)-\psi(x_1^0,x_2,x_3)-\psi(x_1,x_2^0,x_3)+\\ +\psi(x_1^0,x_2^0,x_3)-\psi(x_1,x_2,x_3^0)+\psi(x_1^0,x_2,x_3^0)+\\ +\psi(x_1,x_2^0,x_3^0)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\Big]+\\ +\big[\psi(x_1^0,x_2,x_3)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\big]+\big[\psi(x_1,x_2^0,x_3)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\big]+\\ +\big[\psi(x_1,x_2,x_3^0)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\big]+\big[\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3)\big]+\\ +\big[\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)-\psi(x_1^0,x_2,x_3^0)\big]+\big[\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)-\psi(x_1,x_2^0,x_3^0)\big].\end{gathered}\tag{5}$$

აქედან, (4) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{gathered}\psi(x_1,x_2,x_3)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)=\Delta^3_{[x^0]}\psi(x_1,x_2x_3)+\\ +\big[\psi(x_1^0,x_2,x_3)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\big]+\big[\psi(x_1,x_2^0,x_3)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\big]+\\ +\big[\psi(x_1,x_2,x_3^0)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\big]+\big[\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)-\psi(x_1^0,x_2^0,x_3)\big]+\\ +\big[\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)-\psi(x_1^0,x_2,x_3^0)\big]+\big[\psi(x_1^0,x_2^0,x_3^0)-\psi(x_1,x_2^0,x_3^0)\big].\end{gathered}\tag{6}$$

საკმარისობა. თეორემის 2) პირობა ნიშნავს

$$\lim_{x\to x^0}\Delta^3_{[x^0]}\psi(x_1,x_2,x_3)=0\tag{7}$$

ტოლობას. თეორემის 1) პირობა კი ეკვივალენტურია (2) ტოლობის შესრულების სამცვლადიანი $\psi(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციისთვის, რაც ნიშნავს ψ ფუნქციის 2-განცალებით კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე ანუ შემდეგი ტოლობების შესრულებას

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ x_3 \to x_3^0}} \psi(x_1^0, x_2, x_3) - \psi(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_3 \to x_3^0}} \psi(x_1, x_2^0, x_3) - \psi(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} \psi(x_1, x_2, x_3^0) - \psi(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0. \tag{10}$$

როგორც უკვე ვნახეთ, 2-განცალებით კერძო უწყვეტობა იწვევს 1-განცალებით კერძო უწყვეტობას ანუ (8)–(10) ტოლობანი იწვევენ ტოლობა (6)-ის მარჯვენა მხარეში, ბოლო სამ კვადრატულ ფრჩხილში ჩასმული სხვაობების ზღვრის ნულობას.

მაშასადამე, ტოლობა (6)-ის მარცხენა მხარის ზღვარი ნულია x^0 წერტილზე, რაც ნიშნავს ψ ფუნქციის უწყვეტობას x^0 წერტილზე.

აუცილებლობა. ψ ფუნქციის უწყვეტობა x^0 წერტილზე იწვევს ფართო აზრით მის უწყვეტობას x^0-ზე, შედეგი 7.5.2-ის ძალით. ამავე დროს, უწყვეტობა იწვევს 2-განცალებით კერძო უწყვეტობას წინადადება 7.7.1-ის თანახმად. თეორემა დამტკიცებულია.

3. ზოგადი შემთხვევა. ახლა შემოვიღოთ $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე $(n-1)$-განცალებით კერძო უწყვეტობის ცნება $f(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციისთვის.

$x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილის მხოლოდ თითო კოორდინატი დავტოვოთ უცვლელად თანდათანობით, ხოლო ყველა დანარჩენი $n-1$ კოორდინატი კი ჩავანაცვლოთ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ წერტილის შესაბამისი კოორდინატებით. ამ წესით მიიღება $x^0(x_1^0, x_2 \ldots, x_n)$ სახის წერტილების E_1 სიმრავლე. ასევე, $x^0(x_1, x_2^0, x_3, \ldots, x_n)$ სახის წერტილების სიმრავლე აღვნიშნოთ E_2-ით. ამ პროცედურის ბოლო

ეტაპზე მივიღებთ $x^0(x_1,\dots,x_{n-1},x_n^0)$ სახის წერტილების E_n სიმრავლეს. ახლა შემოვიღოთ შემდეგი.

განსაზღვრა 7.7.1 ([9]). თუ $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციას ყოველი E_k სიმრავლის გასწვრივ ზღვრად $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე აქვს ერთი და იგივე სასრული $f(x^0)$ მნიშვნელობა, სიმბოლურად

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in E_k}} f(x)=f(x^0),\quad k=1,\dots,n, \tag{11}$$

მაშინ f-ს ვუწოდოთ $(n-1)$-**განცალებით კერძო უწყვეტი ფუნქცია** x^0 წერტილზე.

წინას ანალოგიურად, $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე უწყვეტი $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქცია არის $(n-1)$-განცალებით კერძო უწყვეტი x^0-ზე და შებრუნებული გამოთქმა მცდარია.

სამცვლადიანი ფუნქციისთვის უკვე დამტკიცებული 7.7.1 თეორემის მსაგავსად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 7.7.2 ([9]). $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი ორი თვისება:

1) $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის $(n-1)$-განცალებით კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე;

2) $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის ფართო აზრით უწყვეტობა x^0 წერტილზე.

§ 8. ფართო აზრით ზღვარი და მისი გამოყენება

8.1. ფართო აზრით ზღვრის ცნება

ზღვრის ცნება კლასიკური აზრით, კლასიკური აზრით უწყვეტობის ცნების წინმსწრებია. ფართო აზრით უწყვეტობის ცნებასაც მოეძებნება თავისი წინმსწრები – ფართო აზრით ზღვრის ცნება, რაც შემოღებული იქნება ქვემოთ. ამ მიზნით გამოვიყენოთ ფართო აზრით ნაზრდი.

$f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციისთვის $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე ფართო აზრით $\Delta^n_{[x^0]}f(x)$ ნაზრდის განმსაზღვრელი 7.1.(1) ტოლობის მარჯვენა მხარე, ცხადია, შეიცავს $f(x_1^0,\dots,x_n^0)=f(x^0)$ მნიშვნელობას. თუ $\Delta^n_{[x^0]}f(x)$-ში მნიშვნელობა $f(x^0)$-ს შევცვლით რაიმე სასრული B მუდმივით, მაშინ ასე მიღებული გამოსახულება აღვნიშნოთ

$$\Delta^n_{[x^0]}f(x)\big|_{f(x^0)=B} \tag{1}$$

სიმბოლოთი. ახლა შემოვიღოთ ფართო აზრით ზღვრის ცნება.

განსაზღვრა 8.1.1 ([104], [107]). სასრულ B რიცხვს ვუწოდოთ **ფართო აზრით ზღვარი** $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციისთვის, თუ ადგილი აქვს

$$\lim_{x\to x^0}\left(\Delta^n_{[x^0]}f(x)\big|_{f(x^0)=B}\right)=0 \tag{2}$$

ტოლობას.

ცხადია შემდეგი

წინადადება 8.1.1. x^0 წერტილზე ფართო აზრით უწყვეტ f ფუნქციას, x^0 წერტილზე აქვს $f(x^0)$-ის ტოლი ფართო აზრით ზღვარი.

ახლა განსაზღვრა 7.1.2 მიიღებს შემდეგ სახეს.

განსაზღვრა 8.1.2 ([104], [107]). f ფუნქციას ეწოდება ფართო აზრით უწყვეტი x^0 წერტილზე, თუ $f(x^0)$ მნიშვნელობა სასრულია და f-ს ფართო აზრით ზღვრად x^0 წერტილზე აქვს $f(x^0)$.

გამომდინარე 7.2.(3) ტოლობიდან, ორი ცვლადის $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციას $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილზე ფართო აზრით ზღვრად ექნება სასრული B რიცხვი, თუ შესრულებულია ტოლობა

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(x_1^0,x_2^0)}\left[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)-\varphi(x_1,x_2^0)+B\right]=0. \tag{3}$$

საზოგადოდ, L რიცხვი, სასრული ან უსასრულო, $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციისთვის იქნება ფართო აზრით ზღვარი (x_1^0, x_2^0) წერტილზე, თუ

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(x_1^0,x_2^0)} \left[\varphi(x_1^0, x_2) + \varphi(x_1, x_2^0) - \varphi(x_1, x_2)\right] = L. \qquad (4)$$

წინადადება 8.1.2 ([104], [107]). თუ f ფუნქციას ფართო აზრით ზღვრად x^0 წერტილზე აქვს სასრული რიცხვი, მაშინ იგი ერთადერთია.

ამის შესამჩნევად საკმარისია ტოლობა 8.1.(2) დავწეროთ B და B_1 სასრული რიცხვებისთვის და შემდეგ განვიხილოთ ამ ტოლობათა სხვაობა. მივიღებთ $B - B_1 = 0$.

8.2. ფართო აზრით ზღვრის არსებობა

თეორემა 8.2.1 ([104], [107]). თუ f ფუნქციას x^0 წერტილზე ზღვრად აქვს სასრული B რიცხვი, მაშინ f-თვის B არის ფართო აზრითაც ზღვარი x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. თუ f ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე, მაშინ f არის ფართო აზრითაც უწყვეტი x^0-ზე, შედეგი 7.5.2-ის ძალით. შემდეგ კი გამოვიყენოთ განსაზღვრა 8.1.2, რის ძალითაც $f(x^0)$ მნიშვნელობა არის ფართო აზრით ზღვარი f ფუნქციისთვის x^0 წერტილზე.

ახლა ვთქვათ, f ფუნქცია წყვეტილია x^0 წერტილზე და x^0-ზე მისი ზღვარია სასრული B რიცხვი. f ფუნქციის x^0 წერტილზე უწყვეტიზებით (იხ. პუნქტი 1.8-ის დასასრული) მიღებული ფუნქცია აღვნიშნოთ $f^*(x)$-ით. მაშინ $f^*(x^0) = B$ და x^0 წერტილის მიდამოში უტოლობა $f^*(x) \neq f(x)$ შესრულებულია მხოლოდ $x = x^0$ წერტილზე. ამიტომ გვაქვს

$$\Delta^n_{[x^0]} f(x) - \Delta^n_{[x^0]} f^*(x) = f(x^0) - f^*(x^0) = f(x^0) - B.$$

აქედან ვიღებთ

$$\Delta^n_{[x^0]} f(x)|_{f(x^0)=B} - \Delta^n_{[x^0]} f^*(x) = B - B = 0. \qquad (1)$$

f^* ფუნქციის უწყვეტობის გამო, x^0 წერტილზე გვაქვს ტოლობაც (იხ. შედეგი 7.5.2)

$$\lim_{x\to x^0} \Delta^n_{[x^0]} f^*(x) = 0. \tag{2}$$

ახლა 8.1.(2) ტოლობა გამომდინარეობს (1) და (2) ტოლობებიდან. თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

წინადადება 8.2.1 ([104], [107]). $\mu(x_1,\ldots,x_n)$, $n>1$, ფუნქციისთვის x^0 წერტილზე ფართო აზრით სასრული ზღვრის არსებობიდან არ გამომდინარეობს არც სასრული და არც უსასრულო ზღვრის არსებობა $\mu(x_1,\ldots,x_n)$ ფუნქციისთვის იმავე x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. განვიხილოთ ტოლობა 3.2.(6)-ით განსაზღვრული $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქცია, რომელიც ფართო აზრით უწყვეტია ყოველ $(x_1^0,0)$ წერტილზე (იხ. შენიშვნა 7.5.2) და $\mu(x_1^0,0)=0$. ახლა განსაზღვრა 8.1.2-ის თანახმად, $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქციას $(x_1^0,0)$ წერტილებზე აქვს ფართო აზრით ნულოვანი ზღვარი. ამავე დროს, $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქციას $(x_1^0,0)$ წერტილებზე ზღვარი არ აქვს, არც სასრული და არც უსასრულო (იხ. 5.1.(1) და 5.1.(2) ტოლობანი).

მეორე მაგალითად გამოდგება 7.5.(2) ტოლობით მოცემული სასრული $\omega(x_1,x_2)$ ფუნქცია, რომელიც ფართო აზრით უწყვეტია ყველა (x_1^0,x_2^0) წერტილზე და ამ წერტილებზე მას ფართო აზრით ზღვრად აქვს მნიშვნელობანი $\alpha(x_1^0)+\beta(x_2^0)$. ეს მაშინ, როცა $\alpha(x_1)$ და $\beta(x_2)$ ფუნქციებს შესაძლოა არც კი ჰქონდეთ სასრული ან უსასრულო ზღვრები x_1^0 და x_2^0 წერტილებზე, შესაბამისად.

8.3. ორი ცვლადის ფუნქციის სასრული ზღვრის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ სასრული ზღვრის არსებობა არ გამომდინარეობს არც ურთიერთტოლი სასრული განცალებითი კერძო ზღვრების არსებობიდან (იხ. პუნქტი 2.2) და არც ფართო აზრით სასრული ზღვრის არსებობიდან (იხ. წინადადება 8.2.1).

აღსანიშნავია ის, რომ ეს ორივე თვისება ერთად უზრუნველყოფს სასრული ზღვრის არსებობას და შებრუნებით.

ამით გამოვლენილია ფართო აზრით ზღვრის ცნების სასარგებლო ინფორმაციული დატვირთვა.

თეორემა 8.3.1 ([104], [107]). სასრული A რიცხვი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის ზღვარი (x_1^0, x_2^0) წერტილზე, როცა $\varphi(x_1, x_2)$-თვის A არის როგორც განცალებითი კერძო ზღვრები, ისე ფართო აზრითაც ზღვარი x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. თუ $\varphi(x_1, x_2)$-თვის A არის ზღვარი (x_1^0, x_2^0) წერტილზე, მაშინ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციისთვის A იქნება როგორც ფართო აზრით ზღვარი (იხ. 8.2.1 თეორემა), ისე განცალებითი კერძო ზღვრებიც (x_1^0, x_2^0) წერტილზე (იხ. პუნქტი 2.1).

შებრუნებული ფაქტის მართებულობა გამომდინარეობს იმ ტოლობიდან, რომელიც მიიღება 7.6.(1) ტოლობაში $\varphi(x_1^0, x_2^0)$-ის შეცვლისას A რიცხვით. თეორემა დამტკიცებულია.

8.4. $(n-1)$-განცალებითი კერძო ზღვრები და ზღვრის არსებობა

განსაზღვრა 8.4.1 ([9]). ვიტყვით, რომ $f(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციას $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე აქვს $(n-1)$-განცალებითი კერძო ზღვრები*, თუ 7.7.1 განსაზღვრაში მონაწილე ყოველი E_k სიმრავლის გასწვრივ f-ს ზღვარი აქვს x^0 წერტილზე, სიმბოლურად

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in E_k}} f(x) = A_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

შევნიშნოთ, რომ A_k რიცხვები სხვადასხვაა, საზოგადოდ.

მართებულია 8.3.1 თეორემის შემდეგი ანალოგი მრავალი ცვლადის ფუნქციისთვის.

თეორემა 8.4.1 ([9]). სასრული A რიცხვი იქნება $f(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციის ზღვარი $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე მაშინ და მხოლოდ

---

*განსაზღვრა 2.1.1-ში ნახსენები განცალებითი კერძო ზღვრები, ახლა უნდა მოვიხსენიოთ როგორც 1- განცალებითი კერძო ზღვრები.

მაშინ, როცა f-თვის A არის როგორც $(n-1)$-განცალებითი კერძო ზღვრები, ისე ფართო აზრითაც ზღვარი x^0 წერტილზე.

§ 9. ერთ-ერთი ცვლადით კერძო უწყვეტობა, თანაბრად დარჩენილი ცვლადის მიმართ

ჩვენთვის უკვე ცნობილია ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები (იხ. § 6 და პუნქტი 7.6). აქ კი მოცემული იქნება განსხვავებული ხასიათის საკმარისი პირობა და ამ მიმართულებით დადგენილი ფაქტები გამოყენებას ჰპოვებს სხვა საკითხებშიც (იხ. IV, § 6, § 7).

ვთქვათ, ორი ცვლადის $\varphi(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია

$$Q=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\big\}$$

მართკუთხედზე და ვთქვათ, (x_0,y_0) წერტილი ეკუთვნის Q-ს.

განსაზღვრა 9.1 ([99], [107]). $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ვუწოდოთ **x-ით კერძო უწყვეტი x_0-ზე თანაბრად y-ის მიმართ $[c_1,d_1]$-ზე**, $c\le c_1<d_1\le d$, თუ

$$\lim_{x\to x_0}\big[\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)\big]=0 \tag{1}$$

ტოლობას ადგილი აქვს თანაბრად y-ის მიმართ $[c_1,d_1]$-ზე.

ანალოგიურად, $\varphi(x,y)$ არის y-ით კერძო უწყვეტი y_0-ზე თანაბრად x-ის მიმართ $[a_1,b_1]$-ზე, $a\le a_1<b_1\le b$, თუ

$$\lim_{y\to y_0}\big[\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)\big]=0 \tag{2}$$

ტოლობა შესრულებულია თანაბრად x-ის მიმართ $[a_1,b_1]$-ზე.

წინადადება 9.1 ([99], [107]). თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია არის x-ით კერძო უწყვეტი x_0-ზე თანაბრად y-ის მიმართ $[c_1,d_1]$-ზე, მაშინ $\varphi(x,y)$ არის x ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტი ყოველ (x_0,y^*) წერტილზე, როცა $c_1<y^*<d_1$.

დამტკიცება. საკმარისად მცირე k-თვის, $y^* + k$ წერტილები მიეკუთვნებიან $[c_1, d_1]$-ს და ტოლობა (1)-ის ძალით გვექნება

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ k\to 0}} \Big[\varphi(x, y^*+k) - \varphi(x_0, y^*+k)\Big] = 0.$$

ამრიგად, 6.1.(1) ტოლობა შესრულებულია (x_0, y^*) წერტილზე.

წინადადება 9.2 ([99], [107])**.** თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია არის x-ით კერძო უწყვეტი x_0-ზე თანაბრად y-ის მიმართ $[c_1, d_1]$-ზე და ერთი ცვლადის $\varphi(x_0, y)$ ფუნქცია უწყვეტია რომელიმე y^* წერტილ-ზე, სადაც $c_1 < y^* < d_1$, მაშინ ორი ცვლადის $\varphi(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია (x_0, y^*) წერტილზე.

დამტკიცება. საკმარისია, გამოვიყენოთ 9.1 წინადადება და 6.1.2 თეორემა.

შენიშვნა 9.1. $\varphi(x_0, y)$ ფუნქციის წყვეტილობისას y^* წერტილ-ზე, შესაძლებელია ფუნქცია $\varphi(x,y)$ წყვეტილი აღმოჩნდეს (x_0, y^*) წერტილზე.

მართლაც, ვთქვათ $\alpha(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილზე და სასრული $\beta(y)$ ფუნქცია კი წყვეტილი რომელიმე $y^* \in (c_1, d_1)$ წერ-ტილზე. მაშინ $g(x,y) = \alpha(x) + \beta(y)$ ფუნქცია წყვეტილია (x_0, y^*) წერტილზე, თუმცა

$$\begin{gathered} g(x,y) - g(x_0, y) = \\ = \alpha(x) + \beta(y) - \alpha(x_0) - \beta(y) = \alpha(x) - \alpha(x_0) \end{gathered}$$

აკმაყოფილებს (1) ტოლობას თანაბრად y-ის მიმართ $[c_1, d_1]$-ზე.

თეორემა 9.1 ([99], [107])**.** ვთქვათ, $\varphi(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია Q მართკუთხედზე. მაშინ $\varphi(x,y)$ არის:

1) x-ით კერძო უწყვეტი ყოველ x_0-ზე $[a,b]$-დან, თანაბრად y-ის მიმართ $[c,d]$-ზე;

2) y-ით კერძო უწყვეტი ყოველ y_0-ზე $[c,d]$-დან, თანაბრად x-ის მიმართ $[a,b]$-ზე.

დამტკიცება. რადგანაც $\varphi(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ Q სიმრავლეზე, ამიტომ კანტორის 1.9.1 თეორემის ძალით $\varphi(x,y)$ თანაბრად უწყვეტია Q-ზე. ეს კი ნიშნავს ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon,\varphi) > 0$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$\left|\varphi(x_1,y_1) - \varphi(x_2,y_2)\right| < \varepsilon \tag{3}$$

უტოლობა შესრულებულია ყველა $(x_1,y_1) \in Q$ და $(x_2,y_2) \in Q$ წერტილისთვის, თუკი $|x_1 - x_2| < \delta$ და $|y_1 - y_2| < \delta$.

ახლა ნებისმიერად ავიღოთ $x_0 \in [a,b]$ და $y_0 \in [c,d]$ წერტილები. (3) უტოლობაში ჩავსვათ $x_2 = x_0$ და x_1 შევცვალოთ ნებისმიერი $x \in [a,b]$ წერტილით, სადაც $|x - x_0| < \delta$. გარდა ამისა, ნებისმიერად ავიღოთ წერტილი $y \in [c,d]$ და (3) უტოლობაში ჩავსვათ $y_1 = y = y_2$. ამის შედეგად (3) უტოლობა მიიღებს

$$\left|\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y)\right| < \varepsilon, \ \text{ როცა } \ |x - x_0| < \delta \ \text{ და } \ c \le y \le d, \tag{4}$$

სახეს. ამით მტკიცება 1) დადგენილია.

ანალოგიურად მიიღება

$$\left|\varphi(x,y) - \varphi(x,y_0)\right| < \varepsilon, \ \text{ როცა } \ a \le x \le b \ \text{ და } \ |y - y_0| < \delta, \tag{5}$$

უტოლობა. ამრიგად, ადგილი აქვს 2) მტკიცებასაც.

(4) და (5) უტოლობანი გვიჩვენებენ (1) და (2) ტოლობების თანაბრად შესრულებას y-ის და x-ის მიმართ $[c,d]$ და $[a,b]$ სეგმენტებზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 9.1 ([99], [107]). თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია არის x-ით კერძო უწყვეტი ყოველ $x_0 \in [a,b]$ წერტილზე, თანაბრად y-ის მიმართ $[c,d]$-ზე და თუ $\varphi(x_0,y)$ უწყვეტია ყოველ $y_0 \in [c,d]$ წერტილზე, მაშინ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია Q მართკუთხედზე.

დამტკიცება. ჩამოთვლილ პირობებში $\varphi(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია ყოველ $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე და ამიტომ თანაბრად უწყვეტია Q-ზე, კანტორის თეორემის ძალით.

შედეგი 9.2 ([99], [107]). ვთქვათ, $\varphi(x,y)$ ფუნქცია არის x-ით კერძო უწყვეტი ყოველ $x_0 \in [a,b]$ წერტილზე თანაბრად y-ის მიმართ $[c,d]$-ზე და ვთქვათ, $\varphi(x_0,y)$ უწყვეტია ყოველ $y_0 \in [c,d]$ წერტილზე. მაშინ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია y-ით კერძო უწყვეტია ყოველ $y_0 \in [c,d]$ წერტილზე, თანაბრად x-ის მიმართ $[a,b]$-ზე.

დამტკიცება. საკმარისია, დავეყრდნოთ 9.1 შედეგს და 9.1 თეორემას.

შენიშვნა 9.2. Q მართკუთხედზე უწყვეტი ყოველი $\varphi(x,y)$ ფუნქცია, გარდა (3) უტოლობისა ხასიათდება (4) და (5) უტოლობებითაც.

თეორემა 9.2 ([99], [107]). ვთქვათ, $\varphi(x,y)$ ფუნქციას აქვს შემოსაზღვრული კერძო $\varphi'_x(x,y)$ წარმოებული რომელიმე

$$r(x_0,\delta) =$$

$$= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x_0-\delta < x < x_0+\delta,\ c_1 \le y \le d_1\Big\} \subset Q \quad (6)$$

ქვემართკუთხედზე. მაშინ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია x-ით კერძო უწყვეტია x_0 წერტილზე, თანაბრად y-ის მიმართ $[c_1,d_1]$-ზე.

დამტკიცება. ნებისმიერად აღებული $(x,y) \in r(x_0,\delta)$ წერტილი შევაერთოთ (x_0,y) წერტილთან წრფის მონაკვეთით და ამ მონაკვეთისთვის დავწეროთ ლაგრანჟის

$$\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y) = (x-x_0)\varphi'_x(\xi,y)$$

ფორმულა, სადაც ξ დამოკიდებულია x_0-ზე, x-ზე და y-ზე. კერძო $\varphi'_x(x,y)$ წარმოებულის $r(x_0,\delta)$ მართკუთხედზე შემოსაზღვრულობის გამო, არსებობს $c>0$ მუდმივი $|\varphi'_x(x,y)| < c$ თვისების ყველა $(x,y) \in r(x_0,\delta)$ წერტილზე. ავიღოთ ნებისმიერად მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვი და შემდეგ ავიღოთ რაიმე $\eta > 0$ რიცხვი, $\eta < \delta$ და $\eta \cdot c < \varepsilon$ თვისებებით. თუ x-ს ავიღებთ $|x-x_0| < \eta$ პირობით, მაშინ გვექნება

$$|\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y)| < \varepsilon, \ \text{როცა}\ |x-x_0| < \eta, \ \ c_1 \le y \le d_1,$$

შეფასება. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 10. ორი ცვლადის ფუნქციის ცალმხრივი ზღვარი და ცალმხრივი უწყვეტობა

10.1. ერთცვლადიანი ფუნქციის ცალმხრივი ზღვარი და ცალმხრივი უწყვეტობა

1. $t_0 \in \mathbb{R}$ წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $\lambda(t)$ ფუნქციისთვის t_0 წერტილზე ზღვრის არსებობის ან უწყვეტობის დასადგენად, ხშირად გამოიყენება ცალმხრივი ზღვრის და ცალმხრივი უწყვეტობის ცნებანი. საკითხისადმი ასეთი მიდგომა აადვილებს მის გადაწყვეტას და ზოგჯერ აუცილებელიცაა, მაგალითად აბსოლუტური სიდიდის შემცველი გამოსახულებისთვის. ამ მეთოდით შესაძლებელია t_0 წერტილის ცალმხრივ მიდამოებში ფუნქციის ყოფაქცევის დადგენა და შესაძლოა ეს თვისებანი საგრძნობლად განსხვავდებოდეს ერთიმეორისგან.

ამ მიზეზით საჭიროა გვქონდეს მაკავშირებელი დებულებანი, ზღვრისა ცალმხრივ ზღვართან და უწყვეტობისა ცალმხრივ უწყვეტობასთან.

$\lambda(t)$ ფუნქციისთვის t_0 წერტილზე **მარჯვენა ზღვრის** არსებობა, სიმბოლურად $\lambda(t_0+)$, ნიშნავს $\lambda(t)$ მნიშვნელობების სწრაფვას $\lambda(t_0+)$ რიცხვისკენ, როცა t კლებადობით ისწრაფვის t_0-სკენ (სწრაფვა $t \to t_0$ ისე, რომ $t > t_0$-ზე მუდმივად, აღინიშნება $t \to t_0+$ სიმბოლოთი).

$\lambda(t)$ ფუნქციისთვის t_0 წერტილზე **მარცხენა ზღვარი**, სიმბოლურად $\lambda(t_0-)$, განისაზღვრება დამოკიდებულებებით $\lambda(t) \to \lambda(t_0-)$, როცა $t \to t_0-$ (ჩანაწერი $t \to t_0-$ ნიშნავს t-ს სწრაფვას t_0-სკენ ზრდადობით, ე. ი. $t < t_0$).

მაშასადამე,

$$\lambda(t_0+) = \lim_{t \to t_0+} \lambda(t), \quad \lambda(t_0-) = \lim_{t \to t_0-} \lambda(t).$$

მარცხენა და მარჯვენა ზღვრებს ეწოდებათ **ცალმხრივი ზღვრები**.

$\lambda(t)$ ფუნქციას ზღვარი ექნება t_0 წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე **ცალმხრივი ზღვარი** არსებობს და თუ ადგილი აქვს $\lambda(t_0-) = \lambda(t_0+)$ ტოლობას. ასეთ შემთხვევაში მათი საერთო მნიშვნელობა არის $\lambda(t)$ ფუნქციის ზღვარი t_0 წერტილზე, ე. ი.

$$\lambda(t_0-) = \lim_{t\to t_0} \lambda(t) = \lambda(t_0+).$$

2. უ. იანგმა (W. H. Young, [179], [180]) დაამტკიცა (1908 წ.), რომ ერთი ცვლადის ყოველი სასრული f ფუნქციისთვის სასრული ან თვლადია სიმრავლე ყველა იმ x წერტილისა f-ის განსაზღვრის სიმრავლიდან, თითოეული რომელთაგანისთვის ერთიმეორისგან განსხვავდებიან ან მარცხენა და მარჯვენა ზედა ზღვრები ან მარცხენა და მარჯვენა ქვედა ზღვრები. მაშასადამე, სასრული ან თვლადია სიმრავლე იმ x წერტილებისა, რომლებზეც ერთიმეორისგან განსხვავდებიან მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები, რომელთა არსებობა იგულისხმება. უკანასკნელი ფაქტი ნიშნავს, რომ $E = \{x:\ f(x-) \neq f(x+)\}$ სიმრავლე სასრული ან თვლადია (იხ. [36], გვ. 31; სრული ინფორმაციისთვის [86] და [127], გვ. 56).

3. $\lambda(t)$ ფუნქციის **მარჯვნიდან უწყვეტობა** t_0 წერტილზე ნიშნავს, რომ $\lambda(t_0)$ სასრული რიცხვია და ადგილი აქვს $\lambda(t_0+) = \lambda(t_0)$ ტოლობას. ანალოგიურად, $\lambda(t)$-ს **მარცხნიდან უწყვეტობა** t_0 წერტილზე ნიშნავს $\lambda(t_0-) = \lambda(t_0)$ ტოლობის შესრულებას სასრული $\lambda(t_0)$ რიცხვისთვის.

მარცხნიდან და მარჯვნიდან უწყვეტობას ეწოდება **ცალმხრივი უწყვეტობა**.

$\lambda(t)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის რაიმე t_0 წერტილზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\lambda(t)$ ერთდროულად იყოს მარჯვნიდან და მარცხნიდან უწყვეტი t_0 წერტილზე.

ხოლო თითქმის ყველგან უწყვეტობასა და თითქმის ყველგან ცალმხრივ უწყვეტობას შორის კავშირი კი მოცემულია შემდეგი თეორემით, რომელიც შეიძლება განხილულ იქნას როგორც დანჟუას თეორემის (იხ. II, შედეგი 1.17.1) ანალოგი უწყვეტობისთვის.

თეორემა 10.1.1 ([124]). I ინტერვალზე განსაზღვრული $\lambda(t)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის თითქმის ყველგან I-ზე, აუცილებელია და საკმარისი $\lambda(t)$-ს ცალმხრივი უწყვეტობა თითქმის ყველგან I-ზე.

რადგან შემოსაზღვრული ფუნქციის R-ინტეგრებადობისთვის, ლებეგის თეორემის თანახმად, აუცილებელია და საკმარისი ამ ფუნქციის თითქმის ყველგან უწყვეტობა ([45], გვ. 125), ამიტომ მართებულია შემდეგი

თეორემა 10.1.2 ([124]). სასრულ I ინტერვალზე შემოსაზღვრული $\lambda(t)$ ფუნქცია R-ინტეგრებადია I-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda(t)$ ცალმხრივ უწყვეტია თითქმის ყველგან I-ზე.

შევნიშნოთ, რომ მარცხნიდან და მარჯვნიდან უწყვეტობის ცნებანი წარმოადგენენ φ-უწყვეტობის კერძო შემთხვევებს, როცა $\varphi(h) = 0$ და $\varphi(h) = -h$, შესაბამისად ([56]).

4. როგორც ვხედავთ, თუ t_0 არის ფუნქციის განსაზღვრის (a, b) ინტერვალის შიგა წერტილი, მაშინ სიმრავლე $(a, b) \setminus \{t_0\}$ არის ორი თანაუკვეთი ღია ინტერვალის გაერთიანება, თითოეული რომელთაგანის მიმართაც განიხილება **ცალმხრივი ზღვარი** t_0 წერტილზე. კერძოდ, **მარჯვენა ზღვარი** $t_0 = 0$ წერტილზე ნიშნავს ნულზე ზღვარს იმ ინტერვალის გასწვრივ, რომლისთვისაც ნული მარცხენა ბოლოა. ამიტომ ამ შემთვევაში, ნულზე მარჯვენა ზღვარი და ნულზე მარჯვნიდან უწყვეტობა შეიძლება გამოითქვას როგორც **ნულზე** $^+$**ზღვარი** და **ნულზე** $^+$**უწყვეტობა**. ამ გამოთქმებს შევინარჩუნებთ მომავალშიც.

ასეთი ტერმინოლოგიური ცვლილება გამიზნულია, ერთზე მეტი განზომილების შემთხვევისთვის. ზღვარს და უწყვეტობას კოორდინატთა სათავეზე იმ სიმრავლის მიმართ, რომელიც მოიცავს ყველა საკოორდინატო ღერძის დადებით ნაწილს სათავის მახლობლობაში და დაგროვების წერტილად აქვს კოორდინატთა სათავე, ვუწოდოთ $^+$**ზღვარი** და $^+$**უწყვეტობა** კოორდინატთა სათავეზე. ამ გამოთქმებს შევინარჩუნებთ იმ შემთვევაშიც, როცა განიხილება კოორდინატთა სათავისგან განსხვავებული წერტილი.

ამ მიზნის განხორციელებას წავუმძღვაროთ ზოგიერთი ცნობილი ცნება და ფაქტი $^{\pm}$სიმბოლოებით, მაგრამ ნაკლებ ეფექტური.

10.2. ცალმხრივი კერძო ზღვარი და ცალმხრივი კერძო უწყვეტობა

ორი ცვლადის ფუნქციაზე ადვილად ვრცელდება, მაგრამ ნაკლებ ეფექტურია, მოცემულ წერტილზე $^{+}$ზღვრის და $^{+}$უწყვეტობის ცნებანი თითოეული დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ (ანალოგიურად, $^{-}$ზღვრის და $^{-}$უწყვეტობის ცნებები თითოეული ცვლადის მიმართ).

მაშ, ვთქვათ, სასრული $\varphi(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ფუნქცია განსაზღვრულია $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში ან უცენტრო $U^0(x^0)$ მიდამოში.

$x_i^0 \in \mathbb{R}$ წერტილის მიდამოში 2.1.(3) ტოლობით განსაზღვრულ ერთი x_i ცვლადის i-რ კერძო ${}^{i}\varphi(x_i)$ ფუნქციას, x_i^0 წერტილზე თუ აქვს შემდეგი ცალმხრივი

$$\lim_{x_i \to x_i^0+} {}^{i}\varphi(x_i), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$^{+}$ზღვარი, მაშინ ორი ცვლადის $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციას (x_1^0, x_2^0) წერტილზე აქვს **კერძო $^{+}$ზღვარი** x_i ცვლადით და მას ასე ჩავწერთ

$$\lim_{x_1 \to x_1^0+} \varphi(x_1, x_2^0) \ \text{ან} \ \lim_{x_2 \to x_2^0+} \varphi(x_1^0, x_2). \tag{2}$$

თუ (1) ზღვარი ტოლია სასრული

$${}^{i}\varphi(x_i^0) = \varphi(x^0)$$

მნიშვნელობის, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქცია არის x_i ცვლადით **კერძო $^{+}$უწყვეტი** x^0 წერტილზე.

ანალოგიურად განისაზღვრება $\varphi(x)$ ფუნქციისთვის x_i ცვლადით **კერძო $^{-}$ზღვარი** და **კერძო $^{-}$უწყვეტობა** x^0წერტილზე.

$\varphi(x)$ ფუნქციისთვის ორივე x_1 და x_2 ცვლადით ურთიერთტოლი $^{\pm}$ ზღვრების არსებობა ან $^{\pm}$უწყვეტობანი x^0 წერტილზე არ კმარა,

საზოგადოდ, x^0 წერტილზე $\varphi(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისთვის ან უწყვეტობისთვის (იხ. პუნქტი 2.2).

უნდა აღინიშნოს, რომ ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის ცალმხრივი ზღვრის და ცალმხრივი უწყვეტობის ცნებანი შემოდის ბუნებრივად. ამ ცნებათა ბუნებრიობა განპირობებულია იმით, რომ წერტილის ერთგანზომილებიანი მიდამო ერთადერთი სახით წარმოიდგინება ორი ნახევარმიდამოს გაერთიანებით.

ორგანზომილებიანი მიდამოს დაშლა ნაწილებად კი შეიძლება ბევრნაირად. ამ დანაწილებებიდან რომელი გამოგვადგება დასმული ამოცანისთვის?

ამ საკითხის გადაწყვეტის გზებს მიგვანიშნებს განცალებით ძლიერი კერძო და განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობათა ცნებანი (იხ. § 3, § 4, § 6), რისი რეალიზებაც მოხდება ქვემოთ.

10.3. ცალმხრივი ძლიერი ზღვარი და ცალმხრივი ძლიერი უწყვეტობა

ვთქვათ, $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში ან უცენტრო $U^0(x^0) = U(x^0) \setminus \{x^0\}$ მიდამოში განსაზღვრულია $\varphi(x)$ ფუნქცია, $x = (x_1, x_2)$. შემოვიღოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$\begin{aligned}
A_1^+ &= \big\{(x_1, x_2) \in U(x^0):\ x_1 > x_1^0\big\},\\
A_2^+ &= \big\{(x_1^0, x_2) \in U(x^0):\ x_2 > x_2^0\big\},\\
A_1^- &= \big\{(x_1, x_2) \in U(x^0):\ x_1 < x_1^0\big\},\\
A_2^- &= \big\{(x_1^0, x_2) \in U(x^0):\ x_2 < x_2^0\big\},\\
A_{12}^+ &= A_1^+ \cup A_2^+, \quad A_{12}^- = A_1^- \cup A_2^-.
\end{aligned}$$

ცხადია, რომ $A_{12}^+ \cap A_{12}^- = \varnothing$ და

$$A_{12}^+ \cup A_{12}^- = U^0(x^0). \tag{1}$$

მაშასადამე, უცენტრო $U^0(x^0)$ მიდამო წარმოდგენილია ორი თანაუკვეთი სიმრავლის გაერთიანების სახით და თითოეული ამ სიმრავლის მიმართ ზღვარი იქნება ცალმხრივი ძლიერი ზღვარი, რის ცნებასაც ახლა შემოვიღებთ.

განსაზღვრა 10.3.1 ([105], [107]). ვიტყვით, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს **ძლიერი** $^+$**ზღვარი**, სიმბოლურად $\varphi(x^0[+])$, თუ არსებობს ზღვარი

$$\varphi\big(x^0[+]\big) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in A_{12}^+}} \varphi(x). \tag{2}$$

ანალოგიურად, $\varphi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს **ძლიერი** $^-$**ზღვარი**, სიმბოლურად $\varphi(x^0[-])$, თუ არსებობს ზღვარი

$$\varphi\big(x^0[-]\big) = \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in A_{12}^-}} \varphi(x). \tag{3}$$

ძლიერ $^+$ზღვარს და ძლიერ $^-$ზღვარს ვუწოდოთ **ცალმხრივი ძლიერი ზღვრები**.

როცა არსებობენ $\varphi(x^0[-])$ და $\varphi(x^0[+])$, მაშინ ვიტყვით, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს **ძლიერი** $^\pm$**ზღვრები**.

ამ ცნებებიდან და (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, თეორემა 1.8.1-ის გათვალისწინებით, შემდეგი

წინადადება 10.3.1 ([105], [107]). $\varphi(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელია და საკმარისი $\varphi(x)$-ს x^0 წერტილზე ჰქონდეს ურთიერთტოლი ძლიერი $^\pm$ზღვრები. ამ პირობების შესრულებისას გვექნება დამოკიდებულებანი

$$\varphi\big(x^0[-]\big) = \lim_{x\to x^0} \varphi(x) = \varphi(x^0[+]). \tag{4}$$

განსაზღვრა 10.3.2 ([105], [107]). $\varphi(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ **ძლიერ** $^+$**უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ $\varphi(x^0)$ მნიშვნელობა სასრულია და შესრულებულია

$$\varphi\big(x^0[+]\big) = \varphi(x^0) \tag{5}$$

ტოლობა. ანალოგიურად, $\varphi(x)$ არის **ძლიერ $^-$უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ $\varphi(x^0)$ სასრულია და

$$\varphi\big(x^0[-]\big) = \varphi(x^0). \tag{6}$$

$\varphi(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ **ძლიერ $^\pm$უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ $\varphi(x)$ არის როგორც ძლიერ $^+$უწყვეტი, ისე ძლიერ $^-$უწყვეტი x^0 წერტილზე.

ადვილი მისახვედრია, რომ მართებულია შემდეგი

წინადადება 10.3.2 ([105], [107]). $\varphi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელია და საკმარისი $\varphi(x)$-ის ძლიერი $^\pm$უწყვეტობა x^0-ზე.

10.4. ძლიერი ნახტომი

1. განსაზღვრა 10.4.1 ([105], [107]). თუ $\varphi(x)$ ფუნქციისთვის სასრულია $\varphi(x^0[-])$ და $\varphi(x^0[+])$, მაშინ

$$\Omega(\varphi, x^0) = \Big|\varphi\big(x^0[+]\big) - \varphi\big(x^0[-]\big)\Big| \tag{1}$$

რიცხვს ვუწოდოთ $\varphi(x)$ ფუნქციის **ძლიერი ნახტომი** x^0 წერტილზე, ხოლო თვით x^0-ს კი ვუწოდოთ ძლიერი აზრით სასრული ნახტომის წერტილი $\varphi(x)$ ფუნქციისთვის.

წინადადება 10.4.1 ([105], [107]). $\varphi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე ექნება სასრული ზღვარი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია

$$\Omega(\varphi, x^0) = 0 \tag{2}$$

ტოლობა და ამ ტოლობის შესრულებისას, $\varphi(x)$ ფუნქციის ზღვარი x^0 წერტილზე $\varphi(x^0[-]) = \varphi(x^0[+])$ რიცხვის ტოლია.

2. თუ $\varphi(x)$ ფუნქციისთვის x^0 არ არის უწყვეტობის წერტილი (ეს ნიშნავს: $\varphi(x)$ ფუნქციას ან არ აქვს ზღვარი x^0 წერტილზე ანდა ზღვარი აქვს, მაგრამ იგი განსხვავებულია $\varphi(x^0)$ მნიშვნელობისგან

$\varphi(x^0)$-ის სასრულობისას. თუკი $\varphi(x^0)$ ნიშნიანი უსასრულობაა, მაშინაც მოკლებულია უწყვეტობის თვისებას $\varphi(x)$ ფუნქცია x^0 წერტილზე) და შესრულებულია (2) ტოლობა, რაც გულისხმობს $\varphi(x^0[-])$-ის და $\varphi(x^0[+])$-ის სასრულობას და მათ ტოლობას, მაშინ x^0-ს ვუწოდოთ $\varphi(x)$ **ფუნქციის წყვეტის ძლიერად ასაცილებელი წერტილი**: $\varphi(x)$-თვის x^0 წერტილზე არსებულ სასრულ ზღვარს (რაც ტოლია $\varphi(x)$-ის ძლიერი $^{\pm}$ზღვრებისა x^0 წერტილზე) თუ ჩავთვლით $\varphi(x)$-ის მნიშვნელობად $x = x^0$ წერტილზე, მაშინ ასეთი შესწორებით მიღებული ახალი ფუნქცია უწყვეტი იქნება x^0 წერტილზე.

ამ პროცედურას ვუწოდოთ x^0 წერტილზე **ფუნქციის უწყვეტობისთვის ძლიერი შესწორება**, ხოლო თვით x^0-ს კი **წყვეტის ძლიერი შესწორების წერტილი**.

x^0 წერტილს ვუწოდოთ $\varphi(x)$ ფუნქციის **წყვეტის პირველი გვარის წერტილი ძლიერი აზრით**, თუ სასრულია $\varphi(x^0[-])$ და $\varphi(x^0[+])$ და ადგილი აქვს $\varphi(x^0[-]) \neq \varphi(x^0[+])$ უტოლობას ანუ, რაც იგივეა, შესრულებულია ორმხრივი უტოლობა

$$0 < \Omega(\varphi, x^0) < +\infty. \tag{3}$$

x^0 წერტილს ვუწოდოთ $\varphi(x)$ ფუნქციის **წყვეტის მეორე გვარის წერტილი ძლიერი აზრით**, თუ $\varphi(x^0[-])$ და $\varphi(x^0[+])$ სიდიდეებიდან ერთი მაინც არ არსებობს ან ორივე არსებობს, მაგრამ ერთი მაინც ფიქსირებული ნიშნის უსასრულობაა.

10.5. მოცემული ცვლადით კუთხური ზღვარი და კუთხური უწყვეტობა

წინა პუნქტში განხილული იყო ცალმხრივი ძლიერი ზღვარი და ცალმხრივი ძლიერი უწყვეტობა. იგი დაფუძნებულია მოცემული წერტილის მიდამოს ისეთ დაშლაზე, რაც ნაკარნახევია განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობის ცნებით.

როგორც ვიცით, უწყვეტობა ეკვივალენტურია განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობისაც (იხ. პუნქტი 6.2). ეს საშუალებას გვაძლევს მოცემული ცვლადის მიმართ შემოვიღოთ კუთხური ზღვრის,

კუთხური უწყვეტობის და ცალმხრივ კუთხური ზღვრის, ცალმხრივ კუთხური უწყვეტობის ცნებანი. ეს კი, თავის მხრივ, საშუალებას მოგვცემს ჩამოვაყალიბოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობები როგორც ზღვრის არსებობის ისე უწყვეტობის.

1. დავიწყოთ მოცემული ცვლადის მიმართ კუთხური ზღვრის და კუთხური უწყვეტობის ცნებების შემოღებით.

განსაზღვრა 10.5.1 ([105], [107]). ვიტყვით, რომ $\psi(x)$ ფუნქციას, $x=(x_1,x_2)$, $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილზე x_1 **ცვლადით აქვს კუთხური ზღვარი**, სიმბოლურად $\psi(x^0\wedge(x_1))$, თუ ყოველი $c>0$ მუდმივისთვის არსებობს c-სგან დამოუკიდებელი შემდეგი

$$\psi(x^0\wedge(x_1))=\lim_{\substack{h_1\to 0\\ |h_2|\le c|h_1|}}\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2) \tag{1}$$

ზღვარი. ანალოგიურად, $\psi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე x_2 **ცვლადით აქვს კუთხური ზღვარი**, სიმბოლურად $\psi(x^0\wedge(x_2))$, თუ ყოველი $l>0$ მუდმივისთვის არსებობს l-ისგან დამოუკიდებელი შემდეგი ზღვარი

$$\psi(x^0\wedge(x_2))=\lim_{\substack{h_2\to 0\\ |h_1|\le l|h_2|}}\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2). \tag{2}$$

როცა არსებობს $\psi(x^0\wedge(x_1))$ და $\psi(x^0\wedge(x_2))$, მაშინ ვიტყვით, რომ $\psi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს **განცალებითი კუთხური ზღვრები**.

თეორემა 10.5.1 ([105], [107]). $\psi(x)$ ფუნქციას ზღვარი ექნება x^0 წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $\psi(x^0\wedge(x_1))$ და $\psi(x^0\wedge(x_2))$ და თუ ადგილი აქვს $\psi(x^0\wedge(x_1))=\psi(x^0\wedge(x_2))$ ტოლობას. ყველა ამ პირობის შესრულებისას გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\psi(x^0\wedge(x_1))=\lim_{x\to x^0}\psi(x)=\psi(x^0\wedge(x_2)). \tag{3}$$

აუცილებლობა. $\psi(x)$ ფუნქციისთვის x^0 წერტილზე ზღვრის არსებობიდან გამომდინარეობს $\psi(x)$-თვის იგივე ზღვრის არსებობა ყოველი ისეთი ქვესიმრავლის გასწვრივ, რომლისთვისაც x^0 არის დაგროვების წერტილი. კერძოდ, ამას ადგილი აქვს (1) და (2) ტოლობების ზღვარქვეშ მითითებული სიმრავლეების გასწვრივაც. ამიტომ, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$ ტოლია (1) და (2) ზღვრების.

საკმარისობა. თუ ადგილი აქვს $\psi(x^0 \wedge (x_1)) = \psi(x^0 \wedge (x_2))$ ტოლობას, მაშინ $\psi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს ურთიერთტოლი ზღვრები იმ ორი ქვესიმრავლის გასწვრივაც, რომელნიც შეესაბამებიან კერძო $l = 1$ და $c = 1$ შემთხვევებს. ასეთი ორი სიმრავლის გაერთიანება კი იძლევა x^0 წერტილის მიდამოს (იხ. 1.8.1 თეორემა). თეორემა დამტკიცებულია.

10.5.1 თეორემის მტკიცების პროცესში მოპოვებული ინფორმაციის და 10.3.1 წინადადების საფუძველზე ვიღებთ შემდეგ თეორემას.

თეორემა 10.5.2 ([107])**.** $\varphi(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობა $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე, ეკვივალენტურია ქვემოთ აღნიშნული თითოეული მტკიცების:

1) $\varphi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს ურთიერთტოლი ძლიერი $^{\pm}$ზღვრები;

2) ურთიერთტოლებია (1) და (2) გამოსახულებების მარჯვენა მხარეები კერძო $c = 1$ და $l = 1$ შემთხვევებისთვის.

ამასთან, თვით $\lim\limits_{x \to x^0} \varphi(x)$ ზღვარი ტოლია 1) და 2) მტკიცებებში აღნიშნული სიდიდეების საერთო მნიშვნელობის.

2. ქვემოთ შემოვიღებთ მოცემული ცვლადის მიმართ კუთხური უწყვეტობის ცნებას, რომელიც განსხვავდება იგივე ცვლადის მიმართ კუთხური კერძო უწყვეტობის ცნებისგან (იხ. პუნქტი 6.2).

საქმე ისაა, რომ მოცემული ცვლადის მიმართ კუთხური კერძო უწყვეტობის განსაზღვრაში მონაწილეობს გარკვეული სხვაობა. ამ სხვაობის მაკლებში წინასწარ ჩასმულია სწორედ მოცემული ცვლადის

კერძო მნიშვნელობა. ამის გარდა, ამ სხვაობის საკლები წარმოადგენს ფუნქციის მნიშვნელობებს განსახილველი კუთხის წერტილებზე და მაკლები კი არის ფუნქციის მნიშვნელობანი უკვე ისეთ წერტილებზე, რომლებიც არ ეკუთვნიან განსახილველ კუთხეს (იხ. 6.2.(1) და 6.2.(2) ტოლობანი).

ახლა კი შემოვიღებთ მოცემული ცვლადის მიმართ კუთხური უწყვეტობის ცნებას, რომელშიც მონაწილეობს ფუნქციის მნიშვნელობანი მხოლოდ იმ კუთხის წერტილებზე, რა კუთხეც შეესაბამება მოცემულ ცვლადს.

განსაზღვრა 10.5.2 ([105], [107]). $\psi(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ x_1 **ცვლადით კუთხურად უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ $\psi(x^0)$ მნიშვნელობა სასრულია და ადგილი აქვს

$$\psi(x^0 \wedge (x_1)) = \psi(x^0) \tag{4}$$

ტოლობას. ასევე, $\psi(x)$-ს ვუწოდოთ x_2 **ცვლადით კუთხურად უწყვეტი** x^0 წერტილზე, როცა $\psi(x^0)$ სასრულია და

$$\psi(x^0 \wedge (x_2)) = \psi(x^0). \tag{5}$$

$\psi(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ **განცალებით კუთხურად უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ იგი x^0-ზე კუთხურად უწყვეტია როგორც x_1 ცვლადით, ისე x_2 ცვლადით (იხ. პუნქტი 6.2, სადაც გვაქვს განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობა!).

თეორემა 10.5.3 ([105], [107]). $\psi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\psi(x)$ იყოს განცალებით კუთხურად უწყვეტი x^0 წერტილზე.

აუცილებლობა. თუ $\psi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე, მაშინ $\psi(x^0)$ სასრულია და

$$\lim_{x \to x^0} \psi(x) = \psi(x^0).$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარის კერძო შემთვევებია (1) და (2) ზღვრები. ამიტომ

$$\psi(x^0 \wedge (x_1)) = \psi(x^0) = \psi(x^0 \wedge (x_2)).$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს (4) და (5) ტოლობებს.

საკმარისობა. თუ (1) და (2) ზღვრები ტოლია ერთი და იგივე სასრული $\psi(x^0)$ რიცხვის, მაშინ $\psi(x^0)$-ის ტოლი იქნება $\psi(x)$-ის ზღვრები იმ სიმრავლეების გასწვრივაც, რომელნიც შეესაბამებიან კერძო $c = 1 = l$ შემთხვევებს. ამ სიმრავლეების გაერთიანება კი არის x^0 წერტილის მიდამო. ამრიგად, $\psi(x)$ ფუნქციის ზღვარი x^0 წერტილზე ტოლია სასრული $\psi(x^0)$ რიცხვის. ეს ნიშნავს $\psi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობას x^0 წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

10.5.3, 6.1.1, 6.2.1 თეორემების და 10.3.2 წინადადების საფუძველზე მიიღება შემდეგი

თეორემა 10.5.4 ([107]). $\varphi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობა x^0 წერტილზე ეკვივალენტურია შემდეგი ოთხიდან თითოეული მტკიცების:

1) $\varphi(x)$-ის განცალებით კუთხური უწყვეტობის x^0-ზე;

2) $\varphi(x)$-ის განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობის x^0-ზე;

3) $\varphi(x)$-ის განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობის x^0-ზე;

4) $\varphi(x)$-ის ძლიერი $^{\pm}$ უწყვეტობის x^0-ზე;

10.6. ცალმხრივი კუთხური ზღვარი და ცალმხრივი კუთხური უწყვეტობა

$\psi(x)$, $x = (x_1, x_2)$, **ფუნქციის კუთხური $^{\pm}$ზღვრები** $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე x_1 ცვლადის მიმართ, სიმბოლურად $\psi(x^0\widehat{+}(x_1))$ და $\psi(x^0\widehat{-}(x_1))$, განვსაზღვროთ შემდეგი (1) და (2) ტოლობებით შესაბამისად, თუკი ეს ზღვრები არსებობენ და არ არიან დამოკიდებულნი აქ მითითებულ $a > 0$ და $b > 0$ მუდმივებზე:

$$\psi(x^0\widehat{+}(x_1)) = \lim_{\substack{h_1 \to 0+ \\ |h_2| \le a h_1}} \psi(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2), \tag{1}$$

$$\psi(x^0\widehat{-}(x_1)) = \lim_{\substack{h_1\to 0-\\ h_2\le -bh_1}} \psi(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2). \qquad (2)$$

კუთხური $^{\pm}$ზღვრები x^0 წერტილზე x_2 ცვლადის მიმართ განისაზღვრება შემდეგი (3) და (4) ტოლობებით, ანალოგიური მოთხოვნებით $c>0$ და $d>0$ მუდმივებზე:

$$\psi(x^0\widehat{+}(x_2)) = \lim_{\substack{h_2\to 0+\\ h_2\ge c|h_1|}} \psi(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2), \qquad (3)$$

$$\psi(x^0\widehat{-}(x_2)) = \lim_{\substack{h_2\to 0-\\ h_2\le -d|h_1|}} \psi(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2). \qquad (4)$$

ადვილი დასანახია, რომ ადგილი აქვს შემდეგ წინადადებას:

წინადადება 10.6.1 ([105], [107]). $\psi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე ექნება x_1 ცვლადით კუთხური $\psi(x^0\wedge(x_1))$ ზღვარი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობენ ურთიერთტოლი $\psi(x^0\widehat{+}(x_1))$ და $\psi(x^0\widehat{-}(x_1))$. ასეთ შემთხვევაში გვაქვს

$$\psi(x^0\widehat{-}(x_1)) = \psi(x^0\wedge(x_1)) = \psi(x^0\widehat{+}(x_1)). \qquad (5)$$

ანალოგიურ წინადადებას აქვს ადგილი x_2 ცვლადის მიმართაც, ცხადია.

თეორემა 10.5.1-ის და ამ წინადადებების საფუძველზე გვაქვს

თეორემა 10.6.1 ([105], [107]). $\psi(x)$ ფუნქციას ზღვარი ექნება x^0 წერტილზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (1)–(4) ტოლობებით განსაზღვრული სიდიდეები არსებობენ და ოთხივე ურთიერთტოლია. უკანასკნელ შემთხვევაში, $\lim\limits_{x\to x^0}\psi(x)$ მათი საერთო მნიშვნელობის ტოლია.

განსაზღვრა 10.6.1 ([107]). $\psi(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ x_1 **ცვლადით კუთხურად $^{+}$უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ $\psi(x^0)$ მნიშვნელობა სასრულია და სრულდება

$$\psi(x^0\widehat{+}(x_1)) = \psi(x^0)$$

ტოლობა.

ანალოგიურად, $\psi(x)$-ს ვუწოდოთ x_1 **ცვლადით კუთხურად** $^{-}$**უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ $\psi(x^0)$ სასრულია და

$$\psi(x^0 \widehat{-} (x_1)) = \psi(x^0).$$

ბოლოს, $\psi(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ x_1 **ცვლადით კუთხურად** $^{\pm}$**უწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ $\psi(x)$ ერთდროულად არის კუთხურად $^{+}$უწყვეტი და კუთხურად $^{-}$უწყვეტი x^0 წერტილზე x_1 ცვლადის მიმართ.

აქედან აშკარაა შემდეგი

წინადადება 10.6.2 ([107]). $\psi(x)$ ფუნქციის x_1 ცვლადით კუთხური უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელია და საკმარისი $\psi(x)$-ის კუთხური $^{\pm}$უწყვეტობა x^0-ზე x_1 ცვლადით.

ანალოგიურად განისაზღვრება $\psi(x)$ ფუნქციისთვის x_2 ცვლადით x^0 წერტილზე კუთხური: $^{+}$უწყვეტობა, $^{-}$უწყვეტობა და $^{\pm}$უწყვეტობა.

თეორემა 10.5.3 და ეს წინადადებები გვიჩვენებენ, რომ მართებულია

თეორემა 10.6.2 ([107]). $\psi(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია $\psi(x)$-ის კუთხური $^{\pm}$უწყვეტობა x^0 წერტილზე როგორც x_1 ცვლადით, ისე x_2 ცვლადით.

10.7. კუთხური ნახტომი

განსაზღვრა 10.7.1 ([105], [107]). თუ $\psi(x)$ ფუნქციისთვის სასრულია $\psi(x^0 \wedge (x_1))$ და $\psi(x^0 \wedge (x_2))$, მაშინ

$$\omega(\psi, x^0) = \left|\psi(x^0 \wedge (x_1)) - \psi(x^0 \wedge (x_2))\right| \qquad (1)$$

რიცხვს ვუწოდოთ $\psi(x)$ **ფუნქციის კუთხური ნახტომი** x^0 წერტილზე, ხოლო x^0-ს კი ვუწოდოთ ამ ფუნქციის კუთხური აზრით სასრული ნახტომის წერტილი.

ცხადია შემდეგი

წინადადება 10.7.1 ([105], [107])**.**

$$\omega(\psi, x^0) = 0 \tag{2}$$

ტოლობა არის იმის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომ $\psi(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე ჰქონდეს სასრული ზღვარი. (2) ტოლობის შესრულების შემთხვევაში, $\psi(x)$ ფუნქციის ზღვარი x^0 წერტილზე ტოლია $\psi(x^0 \wedge (x_1)) = \psi(x^0 \wedge (x_2))$ რიცხვის.

აქაც შეგვიძლია შემოვიღოთ შემდეგი ცნებები: **ფუნქციის წყვეტის კუთხურად ასაცილებელი წერტილი**, **ფუნქციის კუთხური შესწორება წერტილზე უწყვეტობისთვის**, **წყვეტის კუთხური შესწორების წერტილი**, **წყვეტის პირველი გვარის წერტილი კუთხური აზრით**, **წყვეტის მეორე გვარის წერტილი კუთხური აზრით**.

10.8. ძლიერ და კუთხურ შესწორებათა ეკვივალენტობა

წინადადება 10.8.1 ([105], [107])**.** თუ შესაძლებელია $f(x)$ ფუნქციის ძლიერი შესწორება x^0 წერტილზე უწყვეტობისთვის, მაშინ შესაძლებელია ამ ფუნქციის კუთხური შესწორებაც იმავე წერტილზე მისი უწყვეტობისთვის. ადგილი აქვს შებრუნებულ ფაქტსაც.

დამტკიცება. $f(x)$ ფუნქციის ძლიერი შესწორების შესაძლებლობა x^0 წერტილზე მისი უწყვეტობისთვის, ნიშნავს 10.4.(2) ტოლობის შესრულებას. ეს იწვევს $f(x)$ ფუნქციის სასრული ზღვრის არსებობას იმავე წერტილზე, წინადადება 10.4.1-ის ძალით. სასრული ზღვრის არსებობა კი იწვევს 10.7.(2) ტოლობის შესრულებას, წინადადება 10.7.1-ის გამო. ამიტომ შესაძლებელია $f(x)$ ფუნქციის კუთხური შესწორება x^0 წერტილზე უწყვეტობისთვის.

ასევე დადგინდება შებრუნებული ფაქტიც. წინადადება დამტკიცებულია.

ახლა უკვე 10.8.1 წინადადება საშუალებას გვაძლევს შევთანხმდეთ შემდეგ გამონათქვამზე: $f(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ **შესწორებადი** x^0 **წერტილზე მისი უწყვეტობისთვის**, თუ შესაძლებელია

ამ ფუნქციის ძლიერი ან კუთხური შესწორება ამავე წერტილზე უწყვეტობისთვის.

დაბოლოს, თუ $f(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს არაშესწორებადი ანუ, რაც იგივეა, არააცილებადი წყვეტა, მაშინ x^0-ს ვუწოდოთ $f(x)$ **ფუნქციის არსებითი წყვეტის წერტილი** და ვიტყვით, რომ $f(x)$ **ფუნქციას ამ წერტილზე აქვს არსებითი წყვეტა**.

§ 11. ორი ცვლადის ფუნქციის სიმეტრიული უწყვეტობა

11.1. ერთცვლადიანი ფუნქციის უწყვეტობის და სიმეტრიული უწყვეტობის სიმრავლეები

ვთქვათ, ერთცვლადიანი $\lambda(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $t_0 \in \mathbb{R}$ წერტილის $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ მიდამოში, $\delta > 0$.

$\lambda(t_0+h)-\lambda(t_0-h)$ სხვაობას ეწოდება $\lambda(t)$ **ფუნქციის სიმეტრიული ნაზრდი** t_0 წერტილზე.

$\lambda(t)$ ფუნქციას ეწოდება **სიმეტრიულად უწყვეტი** t_0 წერტილზე, თუ სრულდება (ჰაუსდორფი, 1935 წ.)

$$\lim_{h\to 0}\big[\lambda(t_0+h)-\lambda(t_0-h)\big]=0 \tag{1}$$

ტოლობა და ეწოდება **სიმეტრიული ფუნქცია** t^* წერტილზე, როცა

$$\lim_{h\to 0}\big[\lambda(t^*+h)+\lambda(t^*-h)-2\lambda(t^*)\big]=0.$$

ცხადია, რომ უწყვეტობის წერტილზე ფუნქცია სიმეტრიულია. შებრუნებული მტკიცება მართებულია თითქმის ყველგან (იხ. 11.1.1 თეორემის $2'$) მტკიცება ქვემოთ), ხოლო წერტილზე კი დამატებითი პირობით (იხ. წინადადება 11.1.3 ქვემოთ).

$\lambda(t)$ ფუნქცია იწოდება **ლუწ ფუნქციად** t_0 წერტილის მიმართ, თუ ადგილი აქვს

$$\lambda(t_0-h)=\lambda(t_0+h) \tag{2}$$

ტოლობას.

ამრიგად, t_0 წერტილის მიმართ ლუწი ფუნქცია სიმეტრიულად უწყვეტია t_0 წერტილზე.

ანალოგიურად, $\lambda(t)$ ფუნქციას ეწოდება **კენტი ფუნქცია** t_0 წერტილის მიმართ, თუ შესრულებულია

$$\lambda(t_0 - h) = -\lambda(t_0 + h) \tag{3}$$

ტოლობა.

მაშასადამე, $\lambda(t)$ ფუნქციის კენტობისთვის t_0 წერტილის მიმართ, აუცილებელი პირობაა

$$\lambda(t_0) = 0 \tag{4}$$

ტოლობა.

წინადადება 11.1.1. თუ $\lambda(t)$ ფუნქცია უწყვეტია t_0 წერტილზე, მაშინ იგი სიმეტრიულადაც უწყვეტია t_0-ზე. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. $\lambda(t)$ ფუნქციის უწყვეტობა t_0 წერტილზე იწვევს $\lambda(t_0)$ რიცხვის სასრულობას და

$$\lambda(t_0 + h) - \lambda(t_0 - h) = \left[\lambda(t_0 + h) - \lambda(t_0)\right] - \left[\lambda(t_0 - h) - \lambda(t_0)\right]$$

სხვაობის ნულისკენ სწრაფვას, როცა $h \to 0$.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობას გვიჩვენებს $\mu(t) = t^{-2}$, $\mu(0) = 0$, ფუნქცია, რომელიც $t = 0$ წერტილზე წყვეტილია და ამავე დროს სიმეტრიულად უწყვეტი ლუწობის გამო.

წინადადება 11.1.2. ვთქვათ, $\lambda(t)$ კენტი ფუნქციაა t_0 წერტილის მიმართ. მაშინ $\lambda(t)$-ს უწყვეტობისთვის t_0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია $\lambda(t)$ ფუნქციის სიმეტრიული უწყვეტობა იგივე t_0 წერტილზე.

დამტკიცება. აუცილებლობა გამომდინარეობს 11.1.1 წინადადებიდან. საკმარისობა კი მიიღება (1) ტოლობიდან, (3) და (4) ტოლობების გათვალისწინებით. წინადადება დამტკიცებულია.

ეს ფაქტი საშუალებას გვაძლევს მივუთითოთ მოცემულ წერტილზე სიმეტრიულად წყვეტილი ფუნქცია, ე. ი. სიმეტრიული უწყვეტობის თვისების არმქონე ფუნქცია. ამისთვის საკმარისია დავასახელოთ

მოცემულ წერტილზე წყვეტილი კენტი ფუნქცია. ასეთია მაგალითად $\varphi(t) = 1/t$ ფუნქცია, როცა $t \neq 0$ და $\varphi(0) = 0$. წერტილზე მნიშვნელობის არჩევა გავლენას ვერ ახდენს სიმეტრიულ უწყვეტობა-წყვეტილობაზე, რადგანაც სიმეტრიული უწყვეტობის განსაზღვრაში არ მონაწილეობს ფუნქციის მნიშვნელობა აღებულ წერტილზე.

მართებულია შემდეგი მნიშვნელოვანი

თეორემა 11.1.1 ([163], გვ. 266)**.** (a, b) ინტერვალზე განსაზღვრული და ზომადი $\lambda(t)$ ფუნქციისთვის ადგილი აქვს შემდეგ მტკიცებებს:

1) თუ $\lambda(t)$ სიმეტრიულად უწყვეტია ზომად $e_1 \subset (a, b)$ სიმრავლეზე, ე. ი. თუ ყოველ $t_0 \in e_1$ წერტილზე შესრულებულია

$$\lim_{h \to 0} \left[\lambda(t_0 + h) - \lambda(t_0 - h)\right] = 0 \tag{5}$$

ტოლობა, მაშინ $\lambda(t)$ უწყვეტია e_1 სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილზე;

2) თუ ზომადი $e_2 \subset (a, b)$ სიმრავლის ყოველ $t^* \in e_2$ წერტილზე $\lambda(t)$ აკმაყოფილებს

$$\lim_{h \to 0} \left[\lambda(t^* + h) + \lambda(t^* - h) - 2\lambda(t^*)\right] = 0 \tag{6}$$

პირობას, მაშინ $\lambda(t)$ უწყვეტია თითქმის ყველგან e_2-ზე ანუ, მოკლედ,

$2'$) ზომად $e_2 \subset (a, b)$ სიმრავლეზე სიმეტრიული ფუნქცია უწყვეტია თითქმის ყველგან e_2-ზე.

წერტილის შემთხვევაში კი მართებულია შემდეგი

წინადადება 11.1.3. $\lambda(t)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის რაიმე t_0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი ორი პირობის შესრულება:

1) $\lambda(t)$ სიმეტრიული ფუნქციაა t_0 წერტილზე;

2) $\lambda(t)$ სიმეტრიულად უწყვეტია t_0 წერტილზე.

ეს ფაქტი გამომდინარეობს

$$\lambda(t_0 + h) - \lambda(t_0) =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\lambda(t_0+h)+\lambda(t_0-h)-2\lambda(t_0)\right)+\left(\lambda(t_0+h)-\lambda(t_0-h)\right)\right]$$

ტოლობიდან.

შენიშვნა 11.1.1. ცნობილია 11.1.1 თეორემიდან მტკიცება 1)-ის განზოგადება φ-უწყვეტობაზე, რომლის კერძო შემთხვევაა სიმეტრიული უწყვეტობა $\varphi(h)=-\frac{1}{2}h$ შემთხვევისას ([56]).

11.2. სიმეტრიული უწყვეტობა და განცალებით სიმეტრიული უწყვეტობა ([146])

ვთქვათ, $p_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ წერტილის $U(p_0)$ მიდამოში განსაზღვრულია ორი ცვლადის სასრული $\varphi(x,y)$ ფუნქცია. შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრებანი.

განსაზღვრა 11.2.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **სიმეტრიულად უწყვეტი** p_0 წერტილზე, როცა

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)\right]=0, \qquad (1)$$

ხოლო მას ეწოდება **სიმეტრიული ფუნქცია** იმავე წერტილზე, როცა

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[\varphi(x_0+h,y_0+k)+\varphi(x_0-h,y_0-k)-2\varphi(x_0,y_0)\right]=0.$$

წინადადება 11.1.1-ის ანალოგიურია შემდეგი

წინადადება 11.2.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის უწყვეტობა p_0 წერტილზე იწვევს მის სიმეტრიულ უწყვეტობას იგივე p_0 წერტილზე.

შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. ამ წინადადების პირველი ნაწილი მოწმდება ისევე, როგორც იგივე თვისება ერთცვლადიანი ფუნქციისთვის. შებრუნებული მტკიცების მცდარობა შევამოწმოთ

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{|x|}+\sin\dfrac{1}{|y|}, & \text{როცა } x\cdot y\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x\cdot y=0\end{cases} \qquad (2)$$

ფუნქციისთვის. ამ ფუნქციის სიმეტრიული უწყვეტობა $(0,0)$ წერტილზე გამომდინარეობს $\Phi(x,y)$-ის ლუწობიდან $(0,0)$ წერტილის მიმართ. $(0,0)$ წერტილზე $\Phi(x,y)$ ფუნქციის წყვეტილობა არის

$$\Phi\Big(\frac{2}{(4n+1)\pi}, \frac{2}{(4n+1)\pi}\Big) = 2 \neq 0 = \Phi(0,0)$$

დამოკიდებულებების შედეგი.

განსაზღვრა 11.2.2. $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება x **ცვლადის მიმართ სიმეტრიულად უწყვეტი** p_0 წერტილზე, როცა შესრულებულია

$$\lim_{h\to 0}\big[\varphi(x_0+h,y_0) - \varphi(x_0-h,y_0)\big] = 0 \tag{3}$$

ტოლობა.

$$\lim_{k\to 0}\big[\varphi(x_0,y_0+k) - \varphi(x_0,y_0-k)\big] = 0 \tag{4}$$

ტოლობის შესრულების შემთხვევაში $\varphi(x,y)$-ს ეწოდება y **ცვლადით სიმეტრიულად უწყვეტი** p_0 წერტილზე.

განსაზღვრა 11.2.3. $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **განცალებით სიმეტრიულად უწყვეტი** p_0 წერტილზე, თუ $\varphi(x,y)$ არის p_0 წერტილზე როგორც x-ით, ასევე y-ით სიმეტრიულად უწყვეტი.

ადვილი მისახვედრია, რომ სიმეტრიული უწყვეტობა იწვევს განცალებით სიმეტრიულ უწყვეტობას, რაც მიიღება (1) ტოლობაში მორიგეობით $k=0$ და $h=0$ მნიშვნელობების ჩასმებით.

განცალებით სიმეტრიული უწყვეტობიდან არ გამომდინარეობს სიმეტრიული უწყვეტობა, რაც შევამოწმოთ

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{x^2+y^2}, & \text{როცა } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{როცა } (x,y)=(0,0) \end{cases} \tag{5}$$

ფუნქციაზე. ამ ფუნქციის განცალებით სიმეტრიული უწყვეტობა $(0,0)$ წერტილზე გამომდინარეობს

$$u(h,0) - u(-h,0) = 0 = u(0,k) - u(0,-k)$$

დამოკიდებულებებიდან.

ამასთან ერთად, $k=h$ შემთხვევისთვის გვაქვს

$$\left|u(h,h)-u(-h,-h)\right| = \left|\frac{h|h|}{2h^2}-\frac{-h|h|}{2h^2}\right| = 1.$$

აქედან ჩანს, რომ $u(x,y)$ ფუნქცია არ არის სიმეტრიულად უწყვეტი $(0,0)$ წერტილზე.

მაშასადამე, მართებულია შემდეგი

წინადადება 11.2.2. განცალებით სიმეტრიული უწყვეტობა გამომდინარეობს სიმეტრიული უწყვეტობიდან. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

ცხადია, რომ წინადადება 11.1.3-ის ანალოგიურია შემდეგი

წინადადება 11.2.3. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის რაიმე (x_0,y_0) წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს შემდეგი ორი პირობა:

1) $\varphi(x,y)$ სიმეტრიული ფუნქციაა (x_0,y_0) წერტილზე;

2) $\varphi(x,y)$ სიმეტრიულად უწყვეტია (x_0,y_0) წერტილზე;

11.3. განცალებით სიმეტრიული ძლიერი უწყვეტობა და სიმეტრიული უწყვეტობა ([146])

განსაზღვრა 11.3.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება x **ცვლადით** $[y$ ცვლადით$]$ **სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტი** p_0 წერტილზე, თუ შესრულებულია

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0+k)\right]=0 \qquad (1)$$

ტოლობა [შესაბამისად, თუ შესრულებულია

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0+h,y_0-k)\right]=0 \qquad (2)$$

ტოლობა].

განსაზღვრა 11.3.2. $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **განცალებით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტი** p_0 წერტილზე, თუ იგი ამ წერტილზე სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტია როგორც x ცვლადით, ისე y ცვლადით.

წინადადება 11.3.1. თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია რომელიმე ცვლადით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტია p_0 წერტილზე, მაშინ იგი იმავე ცვლადით სიმეტრიულად უწყვეტია p_0-ზე. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. 11.2.(3) და 11.2.(4) ტოლობები წარმოადგენენ შესაბამისად (1) და (2) ტოლობების კერძო შემთხვევებს $k = 0$ და $h = 0$ მნიშვნელობებისთვის.

ამასთან ერთად, რომელიმე ცვლადით სიმეტრიული უწყვეტობიდან არ გამომდინარეობს იმავე ცვლადით სიმეტრიულად ძლიერი უწყვეტობა.

მართლაც,

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{როცა } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{3}$$

ფუნქცია განცალებით სიმეტრიულად უწყვეტია $O = (0,0)$ წერტილზე, რაც გამომდინარეობს $g(h,0) - g(-h,0) = 0 = g(0,k) - g(0,-k)$ ტოლობებიდან. მეორე მხრივ, კერძო $k = h$ შემთხვევის შესაბამისი

$$g(h,h) - g(-h,h) = \frac{h \cdot h}{2h^2} - \frac{-h \cdot h}{2h^2} = 1$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $g(x,y)$ ფუნქცია არ არის O წერტილზე x ცვლადით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტი. წინადადება დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ ანალოგიური მდგომარეობაა y ცვლადის მიმართაც. მაშასადამე, დამტკიცებულია შემდეგი

წინადადება 11.3.2. განცალებით სიმეტრიულად ძლიერი უწყვეტობა იწვევს განცალებით სიმეტრიულ უწყვეტობას, შებრუნებული მტკიცების გარეშე.

უფრო მეტიც, მართებულია შემდეგი

თეორემა 11.3.1. თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია განცალებით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტია p_0 წერტილზე, მაშინ იგი სიმეტრიულად უწყვეტიც არის იმავე წერტილზე. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. გვაქვს

$$\begin{aligned} &\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)= \\ &=\big[\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0+k)\big]+ \\ &+\big[\varphi(x_0-h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)\big] \end{aligned} \tag{4}$$

ტოლობა.

ვინაიდან $\varphi(x,y)$ ფუნქცია თითოეული ცვლადით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტია p_0 წერტილზე, ამიტომ თითოეულ კვადრატულ ფრჩხილში ჩასმული სიდიდის ზღვარი ნულია, როცა $(h,k)\to(0,0)$, ე. ი. ამ ტოლობის მარცხენა მხარის ზღვარიც ნულია, როცა $(h,k)\to(0,0)$. ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობის დასადგენად გამოდგება (3) ტოლობით მოცემული $g(x,y)$ ფუნქცია. იგი მოკლებულია განცალებით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტობას O წერტილზე, როგორც ეს უკვე ვნახეთ.

$g(x,y)$ ფუნქციის სიმეტრიული უწყვეტობა O წერტილზე კი გამომდინარეობს $g(h,k)-g(-h,-k)=0$ ტოლობიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

წინადადება 11.3.3. რომელიმე ცვლადით ძლიერი კერძო უწყვეტობა (იხ. 6.1.(1) და 6.1.(2) ტოლობანი) იწვევს იმავე ცვლადით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტობას (იხ. (1) და (2) ტოლობები).

დამტკიცება. ეს ვაჩვენოთ, მაგალითად x ცვლადისთვის. გვაქვს

$$\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0+k)=$$

$$= \big[\varphi(x_0+h, y_0+k) - \varphi(x_0, y_0+k)\big] + \\ + \big[\varphi(x_0-h, y_0+k) - \varphi(x_0, y_0+k)\big] \tag{5}$$

ტოლობა. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის x-ის მიმართ ძლიერი კერძო უწყვეტობის გამო (x_0, y_0) წერტილზე (იხ. 6.1.(1) ტოლობა), (5) ტოლობის თითოეულ კვადრატულ ფრჩხილში ჩასმული სიდიდე ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h,k) \to (0,0)$. ამიტომ შესრულებულია (1) ტოლობა.

ახლა შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 11.3.2. უწყვეტობა ანუ, რაც იგივეა, განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობა, იწვევს განცალებით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტობას. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. თეორემის პირველი ნაწილი გამომდინარეობს 11.3.3 წინადადებიდან და 6.1.1 თეორემიდან.

თეორემის მეორე ნაწილს ადასტურებს

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{როცა } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{როცა } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{6}$$

ფუნქცია, რომელიც განცალებით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტია $O = (0,0)$ წერტილზე: $\psi(h,k) - \psi(-h,k) = 0 = \psi(h,k) - \psi(h,-k)$.

$\psi(x,y)$ ფუნქციის O წერტილზე წყვეტილობა გამომდინარეობს $\psi(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = n^2/n \to +\infty$ დამოკიდებულებებიდან, როცა $n \to \infty$.

შენიშვნა 11.3.1. როგორც ვხედავთ, უწყვეტობასა და განცალებით ძლიერ კერძო უწყვეტობას შორის არსებულ ურთიერთეკვივალენტობას (იხ. თეორემა 6.1.1), სრული ანალოგი არ აქვს სიმეტრიული უწყვეტობისას: ანალოგია შენარჩუნებულია მხოლოდ ცალმხრივად, თეორემა 11.3.1-ის სახით.

11.4. დასკვნითი მეორე თეორემა უწყვეტობაზე

7.5.1, 6.2.1, 6.1.1, 11.3.2, 11.3.1 თეორემებიდან და 11.2.2 წინადადებიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 11.4.1. მართებულია დამოკიდებულებანი: ფართო აზრით უწყვეტობა ← უწყვეტობა ⇔ განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობა ⇔ განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობა → განცალებით სიმეტრიულად ძლიერი უწყვეტობა → სიმეტრიული უწყვეტობა → განცალებით სიმეტრიული უწყვეტობა.

11.5. განცალებით სიმეტრიული კუთხური უწყვეტობა და სიმეტრიული უწყვეტობა ([146])

ვთქვათ, $\varphi(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $p_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ წერტილის მიდამოში. შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრებანი.

განსაზღვრა 11.5.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის x **ცვლადით** [y ცვლადით] **სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობა** p_0 წერტილზე ნიშნავს ყოველი $c>0$ მუდმივისთვის

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ |k|\le c|h|}}\big[\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0+k)\big]=0 \tag{1}$$

ტოლობის შესრულებას [ყოველი $l>0$ მუდმივისთვის

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ |h|\le l|k|}}\big[\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0+h,y_0-k)\big]=0 \tag{2}$$

ტოლობის შესრულებას].

განსაზღვრა 11.5.2. $\varphi(x,y)$ **ფუნქციის განცალებით სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობა** p_0 წერტილზე ნიშნავს $\varphi(x,y)$-ის სიმეტრიულად კუთხურ უწყვეტობას როგორც x ცვლადით, ისე y ცვლადით.

წინადადება 11.5.1. თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია რომელიმე ცვლადით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტია p_0 წერტილზე, მაშინ მას იმავე ცვლადით სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობის თვისება აქვს იგივე წერტილზე. შებრუნებულ ფაქტს ადგილი არ აქვს.

დამტკიცება. წინადადების პირველი ნაწილი აშკარაა, რადგანაც შეზღუდვის გარეშე ზღვრის არსებობიდან გამომდინარეობს შეზღუდვით ზღვრის არსებობა (ე. ი. ქვესიმრავლეზე) და მათი ტოლობა.

წინადადების მეორე ნაწილის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ

$$v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}, & \text{როცა } \ x\cdot y\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } \ x\cdot y=0\end{cases} \tag{3}$$

ფუნქცია. ამ ფუნქციისთვის გვაქვს x ცვლადით სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობა $O=(0,0)$ წერტილზე, რადგანაც ნებისმიერი $c>0$ მუდმივისთვის

$$\big|v(h,k)-v(-h,k)\big|=\Big|\frac{h^2}{k}+\frac{k^2}{h}-\frac{(-h)^2}{k}-\frac{k^2}{-h}\Big|=$$

$$=\frac{2k^2}{|h|}\leq 2\,c|k|\to 0, \ \ \text{როცა } \ |k|\leq c|h| \ \text{ და } \ h\to 0.$$

ასევე

$$\big|v(h,k)-v(h,-k)\big|=\frac{2h^2}{|k|}\leq 2\,l|h|\to 0,$$

$$\text{როცა } \ |h|\leq l|k| \ \text{ და } \ k\to 0.$$

ამრიგად, $v(x,y)$ ფუნქციას O წერტილზე აქვს განცალებით სიმეტრიული კუთხური უწყვეტობის თვისება.

მეორე მხრივ, $2k^2/|h|$ შეფარდებას ზღვარი არა აქვს O წერტილზე, რადგანაც ერთ კერძო $k=h$ შემთხვევაში იგი $2|h|$-ის ტოლია და ისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $h\to 0$. მეორე კერძო $h=k^3$ შემთხვევაში იგი $2/|k|$-ის ტოლია და ისწრაფვის $+\infty$-სკენ, როცა $k\to 0$.

ასეთივე მდგომარეობა გვაქვს $2h^2/|k|$ შეფარდებისთვისაც.

მაშასადამე, $v(x,y)$ ფუნქცია O წერტილზე მოკლებულია თითოეული ცვლადით სიმეტრიულად ძლიერი უწყვეტობის თვისებას.

წინადადება 11.5.2. თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქციას რომელიმე ცვლადით აქვს სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობის თვისება p_0 წერტილზე, მაშინ იგი იმავე ცვლადით სიმეტრიულად უწყვეტია ამ წერტილზე. შებრუნებულ ფაქტს ადგილი არ აქვს.

დამტკიცება. წინადადების პირველი ნაწილი გამომდინარეობს (1) და (2) ტოლობებიდან, თუ იქ ჩავსვამთ დასაშვებ კერძო $k=0$ და $h=0$ მნიშვნელობებს შესაბამისად.

წინადადების მეორე ნაწილისთვის გამოდგება

$$w(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(|x|+|y|)^2}, & \text{როცა } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{როცა } (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{4}$$

ფუნქცია, რომლის განცალებით სიმეტრიული უწყვეტობა $O=(0,0)$ წერტილზე გამომდინარეობს

$$w(h,0,)-w(-h,0)=0=w(0,k)-w(0,-k)$$

ტოლობებიდან.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $w(x,y)$ ფუნქცია O წერტილზე მოკლებულია თითოეული ცვლადით სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობის თვისებას.

მართლაც, x ცვლადის მიმართ საჭირო სხვაობისთვის გვაქვს

$$\big|w(h,k)-w(-h,k)\big|=\frac{2\,|h|\cdot|k|}{(|h|+|k|)^2}$$

ტოლობა, რომელიც ტოლია $1/2$-ის კერძო $k=h$ შემთხვევაში და $4/9$-ის, როცა $k=2h$. მაშასადამე, ამ ფუნქციისთვის არ არსებობს (1) ზღვარი. ასევე დადინდება (2) ზღვრის არარსებობა. წინადადება დამტკიცებულია.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 11.5.1. მოცემულ წერტილზე სიმეტრიული უწყვეტობა და განცალებით სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობა არასადარი თვისებებია.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ სიმეტრიული უწყვეტობა მოცემულ წერტილზე არ იწვევს განცალებით სიმეტრიულად კუთხურ უწყვეტობას.

მართლაც, 11.3.(3) ტოლობით მოცემული $g(x,y)$ ფუნქცია სიმეტრიულად უწყვეტია $O=(0,0)$ წერტილზე, რადგანაც $g(h,k)-g(-h,-k)=0$. ვაჩვენოთ, რომ $g(x,y)$-ს არ აქვს სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობის თვისება, მაგალითად x ცვლადით O წერტილზე. გვაქვს

$$\big|g(h,k)-g(-h,k)\big| = \frac{2\,|h|\cdot|k|}{|h|^2+|k|^2}$$

ტოლობა, რომელიც 1-ის ტოლია კერძო $k=h$ შემთხვევაში.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ განცალებით სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობა რომელიმე წერტილზე არ იწვევს სიმეტრიულად უწყვეტობას იმავე წერტილზე. ამ მიზნით განვიხილოთ 11.5.(3) ტოლობით მოცემული $v(x,y)$ ფუნქცია. მას განცალებით სიმეტრიულად კუთხური უწყვეტობის თვისება აქვს O წერტილზე, როგორც ეს უკვე ვნახეთ. მისი სიმეტრიული უწყვეტობისთვის O წერტილზე საჭიროა ნულისკენ ისწრაფვოდეს

$$\big|v(h,k)-v(-h,-k)\big| = 2\Big|\frac{k^2}{h}+\frac{h^2}{k}\Big| \tag{5}$$

სიდიდე, როცა $(h,k)\to(0,0)$. ამას კი ადგილი არ აქვს, რადგანაც კერძო $h=k^2$ შემთხვევაში (5) ტოლობის მარჯვენა მხარისთვის გვაქვს $2|1+k^3|\to 2\neq 0$, როცა $k\to 0$.

ამრიგად, $v(x,y)$ ფუნქცია არ არის სიმეტრიულად უწყვეტი O წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 11.5.1. როგორც ვიცით, უწყვეტობა და განცალებით კუთხური კერძო უწყვეტობა ურთიერთეკვივალენტური თვისებებია (იხ. თეორემა 6.2.1). თეორემა 11.5.1 გვიჩვენებს, რომ სიმეტრიული უწყვეტობისას ურთიერთშენაცვლება დარღვეულია ორივე მხრიდან, განსხვავებით განცალებით სიმეტრიულად ძლიერი უწყვეტობისგან (იხ. შენიშვნა 11.3.1).

11.6. შერეული სიმეტრიული უწყვეტობა ([146])

ვთქვათ, ორი ცვლადის $\varphi(x, y)$ ფუნქცია სასრულია $p_0 = (x_0, y_0)$ წერტილის მიდამოში. $\varphi(x, y)$ ფუნქციისთვის (x_0, y) წერტილზე შევადგინოთ x ცვლადით სიმეტრიული $\varphi(x_0 + h, y) - \varphi(x_0 - h, y)$ ნაზრდი და y ცვლადის ეს ფუნქცია-სხვაობა აღვნიშნოთ $\mu(y)$-ით. ახლა $\mu(y)$-თვის შევადგინოთ სიმეტრიული ნაზრდი y_0 წერტილზე, რომელიც არის $\mu(y_0 + k) - \mu(y_0 - k) = \varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0 - h, y_0 + k) - \varphi(x_0 + h, y_0 - k) + \varphi(x_0 - h, y_0 - k)$. მიღებული გამოსახულება აღვნიშნოთ $\Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k)$ სიმბოლოთი და მას ვუწოდოთ **შერეული სიმეტრიული სხვაობა** φ ფუნქციისთვის p_0 წერტილზე.

მაშასადამე,

$$\Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k) = \varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0 - h, y_0 + k) - \\ - \varphi(x_0 + h, y_0 - k) + \varphi(x_0 - h, y_0 - k). \quad (1)$$

განსაზღვრა 11.6.1. $\varphi(x, y)$ ფუნქციას ეწოდება **შერეულ სიმეტრიულად უწყვეტი** p_0 წერტილზე, თუ სრულდება

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k) = 0 \quad (2)$$

ტოლობა.

თეორემა 11.6.1. თუ $\varphi(x, y)$ ფუნქცია არის რომელიმე ცვლადით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტი p_0 წერტილზე, მაშინ იგი შერეულ სიმეტრიულად უწყვეტია ამავე წერტილზე. შებრუნებით კი არა.

დამტკიცება. თუ $\varphi(x, y)$ ფუნქცია არის x ცვლადით სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტი p_0 წერტილზე, მაშინ $\Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k)$-ში წევრების დაჯგუფებით მიღებული შემდეგი

$$\Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k) = \Big[\varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0 - h, y_0 + k)\Big] - \\ - \Big[\varphi(x_0 + h, y_0 - k) - \varphi(x_0 - h, y_0 - k)\Big]$$

ტოლობის კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული სხვაობები ისწრაფვიან ნულისკენ, როცა $(h,k)\to(0,0)$, ე. ი. $\varphi(x,y)$ ფუნქცია შერეულ სიმეტრიულად უწყვეტია p_0 წერტილზე.

შებრუნებული წინადადება მცდარია. მართლაც,

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}, & \text{როცა }\ x\cdot y\neq 0,\\ 0, & \text{როცა }\ x\cdot y=0\end{cases} \tag{3}$$

ფუნქციისთვის გვაქვს $\Delta^{sym}u((0,0);h,k)=0$ ტოლობა, ე. ი. $u(x,y)$ ფუნქცია შერეულ სიმეტრიულად უწყვეტია $(0,0)$ წერტილზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $u(x,y)$ ფუნქცია არ არის რომელიმე ცვლადით, ვთქვათ x ცვლადით, სიმეტრიულად ძლიერ უწყვეტი $(0,0)$ წერტილზე. ეს გამომდინარეობს

$$\big|u(h,k)-u(-h,k)\big|=\Big|\frac{1}{h}+\frac{1}{k}-\frac{1}{-h}-\frac{1}{k}\Big|=\frac{2}{|h|}\to+\infty,\ \ h\to 0$$

დამოკიდებულებებიდან.

ასევე ვაჩვენებთ იგივე ფაქტს y ცვლადის მიმართ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11.6.2. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის შერეული სიმეტრიული უწყვეტობა და სიმეტრიული უწყვეტობა რაიმე p_0 წერტილზე, ურთიერთარასადარი თვისებებია.

დამტკიცება. როგორც უკვე ვნახეთ, (3) ტოლობით განსაზღვრული $u(x,y)$ ფუნქცია შერეულ სიმეტრიულად უწყვეტია $(0,0)$ წერტილზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ იგივე $u(x,y)$ ფუნქცია არ არის სიმეტრიულად უწყვეტი $(0,0)$ წერტილზე. ეს გამომდინარეობს

$$\big|u(h,k)-u(-h,-k)\big|=2\,\Big|\frac{1}{h}+\frac{1}{k}\Big|$$

ტოლობიდან, რომლის მარჯვენა მხარე არ ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h,k)\to(0,0)$.

დებულების მეორე ნაწილის დასადგენად გვჭირდება ისეთი ფუნქცია, რომელიც სიმეტრიულად უწყვეტია რაიმე წერტილზე და არ არის შერეულ სიმეტრიულად უწყვეტი იმავე წერტილზე. ასეთია

$$v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{xy}, & \text{როცა } x \cdot y \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x \cdot y = 0 \end{cases} \tag{4}$$

ფუნქცია, რომლის სიმეტრიული უწყვეტობა $(0,0)$ წერტილზე გამომდინარეობს $v(h,k) - v(-h-k) = 0$ ტოლობიდან. ამავე დროს $\Delta^{sym} v((0,0);h,k) = 4/hk$ არ ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h,k) \to (0,0)$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11.6.3. თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია ფართო აზრით უწყვეტია რაიმე p_0 წერტილზე, მაშინ იგი შერეულ სიმეტრიულადაც უწყვეტია ამავე წერტილზე. შებრუნებით კი არა.

დამტკიცება. 11.6.(1) ტოლობის მარჯვენა მხარის თითოეული შესაკრები თავისივე ნიშნებით ამოვწეროთ თითო სტრიქონის დასაწყისში. თითოეული ეს სტრიქონი შევავსოთ საჭირო წევრებით 7.2.(3) ტოლობის მიხედვით. ყველა დამატებული წევრი უნდა დავაკლოთ, ცხადია. თითოეული შევსებული სტრიქონი ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h,k) \to (0,0)$, რადგანაც $\varphi(x,y)$ არის ფართო აზრით უწყვეტი p_0 წერტილზე. ყველა დარჩენილი წევრის ჯამი კი ნულია.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა ვაჩვენოთ 11.6.(3) ტოლობით მოცემული $u(x,y)$ ფუნქციისთვის. ეს ფუნქცია არის შერეულ სიმეტრიულად უწყვეტი $(0,0)$ წერტილზე, როგორც უკვე ვნახეთ. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $u(x,y)$ არ არის ფართო აზრით უწყვეტი $(0,0)$ წერტილზე. მართლაც, $u(x,y)$ განცალებით კერძო უწყვეტია $(0,0)$ წერტილზე $u(x,0) = u(0,0) = u(0,y)$ ტოლობების გამო. თუ $u(x,y)$ იქნებოდა ფართო აზრით უწყვეტი $(0,0)$ წერტილზე, მაშინ იგი უწყვეტიც იქნებოდა იმავე წერტილზე, თეორემა 7.6.1-ის ძალით. მაგრამ $u(x,y)$ ფუნქციის წყვეტილობა $(0,0)$ წერტილზე აშკარაა. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 11.6.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის უწყვეტობა p_0 წერტილზე იწვევს მის შერეულ სიმეტრიულ უწყვეტობას ამავე წერტილზე. შებრუნებით კი არა.

§ 12. ფუნქციის ნახევრადუწყვეტობის საკმარისი პირობები ([27])

ჩვენ უკვე გვქონდა მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზემოდან [ქვემოდან] მოცემულ წერტილზე ნახევრადუწყვეტობის ცნება (იხ. 1.11). უწყვეტობის შესახებ მე-3 და მე-6 პარაგრაფებში მიღებული შედეგების საფუძველზე, ახლა საშუალება გვეძლევა სასრული ფუნქციებისთვის დავადგინოთ მოცემულ წერტილზე მათი ზემოდან [ქვემოდან] ნახევრადუწყვეტობის საკმარისი პირობები.

12.1. მრავალცვლადის ფუნქციის შემთხვევა

ვთქვათ, $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრულია სასრული $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in U(x^0)$, ფუნქცია.

განზრახულია დავადგინოთ f ფუნქციისთვის 1.11.(1) ტოლობის შესასრულებლად საკმარისი პირობები. ამ მიზნით შემოვიღოთ ზოგიერთი ცნება.

განსაზღვრა 12.1.1. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება x_k **ცვლადით ზემოდან** [ქვემოდან] **ძლიერ ნახევრადუწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ შესრულებულია

$$\varlimsup_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x(x_k^0))\right]=0 \tag{1}$$

ტოლობა [შესაბამისად

$$\varliminf_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x(x_k^0))\right]=0 \tag{2}$$

ტოლობა]. როგორც უკვე ვიცით (იხ. 2.1.(1) სიმბოლო) $x(x_k^0)$-ით აღნიშნულია ის წერტილი, რომელიც მიიღება x-სგან მასში $x_k=x_k^0$ ჩასმით.

განსაზღვრა 12.1.2. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება x^0 წერტილზე **განცალებით ზემოდან** [ქვემოდან] **ძლიერ ნახევრადუწყვეტი**, თუ (1) ტოლობა [შესაბამისად (2) ტოლობა] შესრულებულია ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის.

1. მართებულია შემდეგი

თეორემა 12.1.1. $f(x)$ ფუნქციის ზემოდან ნახევრადუწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე, საკმარისია $f(x)$-ის განცალებით ზემოდან ძლიერი ნახევრადუწყვეტობა იმავე წერტილზე.

დამტკიცება. დავწეროთ

$$f(x) - f(x^0) = \big[f(x) - f(x(x_1^0))\big] + \\ + \big[f(x(x_1^0)) - f(x(x_1^0, x_2^0))\big] + \cdots + \big[f(x^0(x_n)) - f(x^0)\big] \quad (3)$$

იგივეობა, სადაც გამოყენებულია 2.1.(2) და 3.3.(1) სიმბოლოები.

რადგანაც სასრული რაოდენობის შესაკრებისგან შედგენილი ჯამის ზედა ზღვარი არ აღემატება თითოეული შესაკრების ზედა ზღვრების ჯამს (იხ. 1.10.(8)), ამიტომ (3) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\varlimsup_{x \to x^0} \big[f(x) - f(x^0)\big] \le \varlimsup_{x \to x^0} \big[f(x) - f(x(x_1^0))\big] + \\ + \varlimsup_{x \to x^0} \big[f(x(x_1^0)) - f(x(x_1^0, x_2^0))\big] + \cdots + \varlimsup_{x \to x^0} \big[f(x^0(x_n)) - f(x^0)\big] \quad (4)$$

შეფასება.

აქ მარჯვენა მხარეში პირველი ზედა ზღვარი ნულია, (1) ტოლობის გამო $k = 1$ მნიშვნელობისთვის. იგივე (1) ტოლობას $k = 2$ მნიშვნელობისთვის აქვს

$$\varlimsup_{x \to x^0} \big[f(x) - f(x(x_2^0))\big] = 0 \quad (5)$$

სახე. (5) ტოლობაში კერძო $x_1 = x_1^0$ მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ*

$$\varlimsup_{x \to x^0} \big[f(x(x_1^0)) - f(x(x_1^0, x_2^0))\big] \le 0. \quad (6)$$

---

*ქვესიმრავლის გასწვრივ ზედა ზღვარი, არ აღემატება ზედა ზღვარს ძირითადი სიმრავლის გასწვრივ.

ამ პროცესის გაგრძელებით, (1) ტოლობიდან $k = n$ მნიშვნელობისთვის ვღებულობთ

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} \left[f(x) - f(x(x_n^0)) \right] = 0. \tag{7}$$

უკანასკნელ ტოლობაში კერძო $x_j = x_j^0$ მნიშვნელობების ჩასმით, როცა $j = 1, \dots, n-1$, მივიღებთ

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} \left[f(x^0(x_n)) - f(x^0) \right] \le 0. \tag{8}$$

მაშასადამე,

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} \left[f(x) - f(x^0) \right] \le 0. \tag{9}$$

ცხადია, რომ სასრული $f(x^0)$ მუდმივის ზღვარია $f(x^0)$, როცა $x \to x^0$. ამიტომ (9) უტოლობიდან, 1.10.(10) ტოლობის გათვალისწინებით, ვიღებთ

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} f(x) \le f(x^0). \tag{10}$$

მეორე მხრივ კი, 1.11.(3) დამოკიდებულებებიდან გვაქვს

$$f(x^0) \le \overline{\lim_{x \to x^0}} f(x). \tag{11}$$

ამრიგად, ადგილი აქვს

$$\overline{\lim_{x \to x^0}} f(x) = f(x^0) \tag{12}$$

ტოლობას, რაც ნიშანავს f ფუნქციის ზემოდან ნახევრადუწყვეტობას x^0 წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

2. ქვემოდან ნახევრადუწყვეტობისთვის ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 12.1.2. f ფუნქციის ქვემოდან ნახევრადუწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე, საკმარისია f-ის განცალებით ქვემოდან ძლიერი ნახევრადუწყვეტობა იმავე წერტილზე.

დამტკიცება. (3) ტოლობის მიმართ გამოვიყენოთ ჯერ ის ფაქტი, რომ ჯამის ქვედა ზღვარი არაა ნაკლები ქვედა ზღვრების ჯამზე (იხ. 1.10.(9)) და შემდეგ ის, რომ ქვესიმრავლის გასწვრივ ქვედა ზღვარი არაა ნაკლები, ვიდრე ქვედა ზღვარი ძირითადი სიმრავლის გასწვრივ. ამიტომ წინა მსჯელობის მსგავსად მივიღებთ

$$\varliminf_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x^0)\right]\geq \varliminf_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x(x_1^0))\right]+\cdots+ \\ +\varliminf_{x\to x^0}\left[f(x^0(x_n))-f(x^0)\right]\geq 0+\cdots+0=0.$$

ამრიგად,

$$\varliminf_{x\to x^0}\left[f(x)-f(x^0)\right]\geq 0. \tag{13}$$

აქედან კი, 1.10.(11) ტოლობის ძალით ვიღებთ

$$\varliminf_{x\to x^0} f(x)\geq f(x^0), \tag{14}$$

მაგრამ 1.11.(3) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$f(x^0)\geq \varliminf_{x\to x^0} f(x). \tag{15}$$

ახლა (14) და (15) უტოლობებიდან ვიღებთ

$$\varliminf_{x\to x^0} f(x)=f(x^0). \tag{16}$$

მაშასადამე, f ფუნქცია ქვემოდან ნახევრადუწყვეტია x^0 წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

12.2. ორცვლადიანი ფუნქციის შემთხვევა

ვთქვათ, ფუნქცია $\varphi(x)$, $x=(x_1,x_2)$, სასრულია $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილის მიდამოში.

ორცვლადიანი ფუნქციის ზემოდან [ქვემოდან] ნახევრადუწყვეტობის საკმარის პირობებს შედარებით მარტივი სახე აქვს. ამ მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 12.2.1. $\varphi(x)$ ფუნქციას ეწოდება x_1 **ცვლადით ზემოდან** [ქვემოდან] **ნახევრადუწყვეტი** x^0 წერტილზე, თუ

$$\overline{\lim_{x_1\to x_1^0}}\left[\varphi(x_1,x_2^0)-\varphi(x_1^0,x_2^0)\right]=0 \tag{1}$$

[შესაბამისად, თუ

$$\underline{\lim_{x_1\to x_1^0}}\left[\varphi(x_1,x_2^0)-\varphi(x_1^0,x_2^0)\right]=0 \qquad (2)].$$

ანალოგიურად შემოვიღებთ $\varphi(x)$ ფუნქციისთვის x_2 **ცვლადით ზემოდან** [ქვემოდან] **ნახევრადუწყვეტობას** x^0 წერტილზე.

$\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციას ვუწოდოთ x^0 წერტილზე **განცალებით ზემოდან** [ქვემოდან] **ნახევრადუწყვეტი**, თუ იგი არის ამ წერტილზე ზემოდან [ქვემოდან] ნახევრადუწყვეტი x_1 და x_2 ცვლადებით ერთდროულად.

თეორემა 12.2.1. $\varphi(x)$ ფუნქციის ზემოდან ნახევრადუწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე საკმარისია, რომ x^0 წერტილზე $\varphi(x)$ იყოს ერთ-ერთი ცვლადით ზემოდან ძლიერ ნახევრადუწყვეტი და დარჩენილი ცლადით კი ზემოდან ნახევრადუწყვეტი.

დამტკიცება. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ x^0 წერტილზე $\varphi(x)$ არის x_1 ცვლადით ზემოდან ძლიერ ნახევრადუწყვეტი და x_2-ით კი ზემოდან ნახევრადუწყვეტი. ეს ნიშნავს შესაბამისად შემდეგ ორ ტოლობას:

$$\overline{\lim_{x\to x^0}}\left[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)\right]=0, \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{x_2\to x_2^0}}\left[\varphi(x_1^0,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2^0)\right]=0. \tag{4}$$

ახლა დავწეროთ შემდეგი ცხადი ტოლობა:

$$\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2^0)=$$
$$=\left[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)\right]+\left[\varphi(x_1^0,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2^0)\right]. \tag{5}$$

აქედან (3) და (4) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\overline{\lim_{x\to x^0}}\left[\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2^0)\right]\le 0$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\overline{\lim_{x\to x^0}}\,\varphi(x)\le\varphi(x^0). \tag{6}$$

მეორე მხრივ კი გვაქვს

$$\varphi(x^0)\le\overline{\lim_{x\to x^0}}\,\varphi(x). \tag{7}$$

(6) და (7) უტოლობებიდან ვიღებთ, რომ

$$\overline{\lim_{x\to x^0}}\,\varphi(x)=\varphi(x^0). \tag{8}$$

ამრიგად, $\varphi(x)$ ფუნქცია ზემოდან ნახევრადუწყვეტია x^0 წერტილზე.

ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 12.2.2. $\varphi(x)$ ფუნქციის ქვემოდან ნახევრადუწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე საკმარისია, რომ ამ წერტილზე $\varphi(x)$ იყოს ერთ-ერთი ცვლადით ქვემოდან ძლიერ ნახევრადუწყვეტი და დარჩენილი ცლადით კი ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი.

შენიშვნა 12.2.1. ვთქვათ, $f(x^0)$ მნიშვნელობა სასრულია და f ფუნქცია ნახევრადუწყვეტია x^0 წერტილზე როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან. მაშინ f-ის უწყვეტობა ამავე წერტილზე აშკარაა. ამისთვის კი აუცილებელია 3.1.(2) ტოლობების შესრულება k-ს ყველა მნიშვნელობისთვის. ამიტომ ყველა $k=1,\dots,n$ მნიშვნელობისთვის აუცილებლად სრულდება 12.1.(1) და 12.1.(2) ტოლობანი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ზემოდან და ქვემოდან x^0 წერტილზე ნახევრადუწყვეტობის ზემოთ მითითებული საკმარისი პირობები $f(x^0)$-ის სასრულობისას, ერთობლივად წარმოადგენენ აუცილებელ პირობებსაც.

§ 13. ფუნქციის აპროქსიმატული ზღვარი და აპროქსიმატული უწყვეტობა

1. ვთქვათ, M სიმრავლე ეკუთვნის ევკლიდეს n-განზომილებიან $\mathbb{R}^n$ სივრცეს. M-ის ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილების (იხ. 1.1) ზუსტ ზედა საზღვარს ეწოდება M სიმრავლის დიამეტრი და აღინიშნება $\delta(M)$ სიმბოლოთი.

ამბობენ, რომ სიმრავლეთა $(M_k)_{k=1}^{\infty}$, $M_k \subset \mathbb{R}^n$, მიმდევრობა იკუმშება (მოიჭიმება) $x^0 \in \mathbb{R}^n$ წერტილისკენ, თუ x^0 ეკუთვნის ყველა M_k სიმრავლეს და $\delta(M_k) \to 0$, როცა $k \to \infty$.

ვთქვათ, მოცემულია ორი $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ და $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ წერტილი. ყველა $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ წერტილის სიმრავლეს $a_k \leq x_k \leq b_k$, $k = 1, \ldots, n$, თვისებით ეწოდება n-განზომილებიანი სეგმენტი და წერენ $I_n = [a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n]$. ამ შემთხვევაში A და B წერტილებს ეწოდება I_n სეგმენტის მთავარი წვეროები.

$x^0 \in \mathbb{R}^n$ წერტილს ეწოდება ზომადი $E \subset \mathbb{R}^n$ **სიმრავლის სიმკვრივის წერტილი**, თუ x^0-კენ მოჭიმვად n-განზომილებიან სეგმენტთა ყოველი $\left(I_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობისთვის შესრულებულია

$$\lim_{\delta(I_n^{(k)}) \to 0} \frac{\operatorname{mes}(E \cap I_n^{(k)})}{\operatorname{mes} I_n^{(k)}} = 1 \tag{1}$$

ტოლობა. ადგილი აქვს ლებეგის შემდეგ თეორემას ([3], გვ. 416; [45], გვ. 246; [75], გვ. 7; [19], გვ. 67; [54], გვ. 180; [70], გვ. 269–270; [127], გვ. 84).

თეორემა 13.1 (ლებეგი)**.** ყოველი ზომადი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილი E-ს სიმკვრივის წერტილია.

სიმრავლის სიმკვრივის წერტილის ცნებას უკავშირდება ფუნქციის აპროქსიმატული უწყვეტობის შემდეგი ცნება.

განსაზღვრა 13.1 (დანჟუა, 1915 წ.; [45], გვ. 247; [54], გვ. 199; [127], გვ. 84)**.** $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, **ფუნქციას ეწოდება აპროქსიმატუ-ლად უწყვეტი** $x^0 \in \mathbb{R}^n$ წერტილზე, თუ $f(x^0) \neq \pm\infty$ და თუ არსებობს ისეთი ზომადი $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლე, რომლისთვისაც x^0 არის სიმკვრივის წერტილი და ადგილი აქვს

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in E}} f(x) = f(x^0) \tag{2}$$

ტოლობას.

თუ (2) ტოლობა შესრულებულია რაიმე A რიცხვისთვის ნაცვლად $f(x^0)$-ისა, მაშინ A-ს ეწოდება f **ფუნქციის აპროქსიმატული ზღვარი** x^0 წერტილზე.

მართებულია შემდეგი ორი თეორემა.

თეორემა 13.2 (დანჟუა, 1915 წ., [19], გვ. 80; [54], გვ. 199; [45], გვ. 247; [127], გვ. 84)**.** ზომად $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე სასრული ზომადი ყოველი ფუნქცია აპროქსიმატულად უწყვეტია თითქმის ყველგან E-ზე.

თეორემა 13.3 (სტეპანოვი, 1924 წ., [165]; [19], გვ. 81; [54], გვ. 200; [127], გვ. 84)**.** თუ სასრული f ფუნქცია აპროქსიმატულად უწყვეტია ზომადი E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილზე, მაშინ ეს ფუნქცია ზომადია E სიმრავლეზე.

შედეგი 13.1 ([127], გვ. 84)**.** ზომად E სიმრავლეზე სასრული f ფუნქციის აპროქსიმატული უწყვეტობისთვის E-ს თითქმის ყველა წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია f-ის ზომადობა E-ზე.

2. აპროქსიმატულ ცალმხრივ ზღვრებს არ აქვთ ჩვეულებრივი ცალმხრივი ზღვრების ის თვისება, რომელიც გამოხატულია უ. იანგის თეორემით (იხ. 10.1 ზემოთ). ცნობილია, რომ აპროქსიმატული ცალმხრივი ზღვრები შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავდებოდეს წერტილთა არათვლად სიმრავლეზე. დადგენილია, რომ მათი არატოლობის წერტილთა სიმრავლე არის პირველი კატეგორიის და ნულზომის. ეს ინფორმაცია თავმოყრილია [119] და [143] შრომებში.

თ ა ვ ი II

განცალებით კერძო დიფერენცირებადობის სახეობანი და დიფერენცირებადობა

ამ თავის ცენტრალური შედეგია მოცემულ წერტილზე დიფერენციალის არსებობის შესახებ შემდეგი ამოცანის დადებითად გადაწყვეტა.

მრავალი ცვლადის f ფუნქციისთვის არსებობს თუ არა ცალკე აღებული დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ მისი ისეთი თვისებაცნება მოცემულ x^0 წერტილზე, რომლის ამ წერტილზე შესრულება ყველა დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ იქნება აუცილებელი და საკმარისი f ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე?

შესავალი

მრავალი ცვლადის ფუნქციისთვის კერძო წარმოებულის ცნება მოცემული ცვლადის მიმართ, მიღებულია ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის წარმოებულის ცნებისგან.

მრავალი ცვლადის f ფუნქციის ყველა კერძო წარმოებულის, ანუ f-ის გრადიენტის სასრულობა მოცემულ x^0 წერტილზე არ იწვევს, საზოგადოდ, f ფუნქციის დიფერენცირებადობას x^0-ზე.

უფრო მეტიც, x^0 წერტილზე სასრული გრადიენტის მქონე ფუნქცია შესაძლოა წყვეტილიც კი იყოს ამ წერტილზე. ასეთებია თავი I-ის 2.2.(1)–2.2.(4) ფუნქციები. ამგვარად გვაქვს ფუნქცია, რომელიც ერთსა და იმავე წერტილზე წყვეტილიც არის და სასრული კერძო წარმოებულების მქონეც.

აღსანიშნავია, რომ ამ ფაქტის რეალიზება შესაძლებელია წერტილთა ისეთ სიმრავლეზე, რომლის ბრტყელი ზომა ნებისმიერად ახლოსაა ძირითადი სიმრავლის მთლიან ზომასთან.

ეს დაადგინა ტოლსტოვმა და ეს შედეგი აქ ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით, მისი განსაკუთრებული მნიშვნელობის გამო.

თეორემა ([62], § 4)**.** ყოველი დადებითი $\mu < 1$ რიცხვისთვის არსებობს $K = \big\{(x_1, x_2) : \ 0 \le x_1 \le 1, \ 0 \le x_2 \le 1\big\}$ კვადრატზე განსაზღვრული $F(x_1, x_2)$ ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია μ^2 ზომის ბრტყელ $E \subset K$ სიმრავლეზე და K-ს ყოველ შიგა წერტილზე კი მას აქვს ყველა რიგის კერძო წარმოებული როგორც x_1-ით, ისე x_2-ით.

კერძოდ, ამ $F(x_1, x_2)$ ფუნქციისთვის $\operatorname{grad} F(x_1, x_2)$ სასრულია მრავალი წერტილის მიდამოში, მაგრამ ამ წერტილებზე $F(x_1, x_2)$-ს დიფერენციალი არ აქვს.

ამ ფაქტის რეალიზებას ერთი $(0, 0)$ წერტილისთვის წარმოადგენს

$$\mu(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{როცა } \ x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ 0, & \text{როცა } \ x_1 = 0 = x_2 \end{cases}$$

ფუნქცია (იხ. წინადადება 3.4.6 ქვემოთ).

შემდეგ, ფუნქცია შესაძლებელია დიფერენცირებადი იყოს რაიმე (x_1^0, x_2^0) წერტილზე, მაგრამ ამ წერტილის ყოველ უცენტრო მიდამოში არსებობდეს წერტილები, რომლებზეც მის გრადიენტს აზრი არ აქვს. ამიტომ ეს გრადიენტი უწყვეტი არაა ამ წერტილზე. ასეთია

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \sin \dfrac{1}{x_1 x_2}, & \text{როცა } \ x_1 \cdot x_2 \ne 0, \\ 0, & \text{როცა } \ x_1 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

ფუნქცია (იხ. წინადადება 3.4.5 ქვემოთ).

უფრო მეტიც, შესაძლოა ფუნქცია დიფერენცირებადი იყოს რაიმე x^0 წერტილზე და ამავე დროს წყვეტილი იყოს x^0-ის უცენტრო მიდამოს ყოველ წერტილზე (იხ. წინადადებანი 3.4.2–3.4.4 ქვემოთ).

დიდი ხანია კარგადაა ცნობილი, რომ $\operatorname{grad} f(x)$-ის უწყვეტობა $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე არის $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის x^0

წერტილზე დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობა. ახლახან ხსენებული ფუნქციები გვიჩვენებენ, რომ გრადიენტის უწყვეტობა არის მხოლოდ და მხოლოდ საკმარისი პირობა დიფერენცირებადობისთვის.

სწორედ დიფერენცირებადობაზე იქნება საუბარი ამ თავში, რომლის მასალა პარაგრაფებში გადანაწილებულია შემდეგნაირად.

§ 1. აქ გადმოცემულია ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი.

§ 2. აქ განხილულია მრავალცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციის ელემენტარული თვისებანი.

§ 3. f ფუნქციისთვის შემოღებულია კუთხური გრადიენტის ცნება და ძირითადი შედეგი ასეთია: f ფუნქციის კუთხური გრადიენტის სასრულობა x^0 წერტილზე არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ამ ფუნქციას იმავე წერტილზე ჰქონდეს დიფერენციალი.

აქვე განხილულია რამდენიმე მნიშვნელოვანი მაგალითი დიფერენცირებადობაზე.

§ 4. აქაც შემოღებულია ახალი ცნება – f ფუნქციის ძლიერი გრადიენტი x^0 წერტილზე, რომლის სასრულობა იწვევს f-ის დიფერენცირებადობას x^0-ზე. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დადგენილია, რომ f ფუნქციის გრადიენტის უწყვეტობა x^0 წერტილზე იწვევს f-თვის სასრული ძლიერი გრადიენტის არსებობას x^0-ზე. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

§ 5. ორი ცვლადის ფუნქციისთვის დიფერენციალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები (იხ. თეორემა 3.5.3 ქვემოთ) და კოში-რიმანის კლასიკური პირობა, საშუალებას იძლევიან შემდეგი

$$D_{\widehat{x}}\, F(z_0) + iD_{\widehat{y}}\, F(z_0) = 0 \qquad (*)$$

ერთი ტოლობის სახით ჩამოვაყალიბოთ ცნობილი აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ერთი z კომპლექსური ცვლადის კომპლექსურ $F(z)$ ფუნქციას z_0 წერტილზე ჰქონდეს სასრული $F'(z_0)$ წარმოებული.

კომპლექსური ფუნქციის წარმოებულის ცნების n-განზომილებიან განზოგადებას წარმოადგენს n კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის ცნება, რასაც ეფუძნება

ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობის ცნება. აქ დამტკიცებულია მოცემულ წერტილზე $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები და $(*)$ ტოლობა გავრცელებულია n კომპლექსური ცვლადის კომპლექსურ ფუნქციაზე. ამ შედეგის გამოყენებით მიღებულია ჰარტოგსის მთავარი თეორემის (1906 წ.) ერთი ახალი დამტკიცება.

§ 6. ძლიერი აზრით და კუთხური აზრით კერძო წარმოებულების ცნებანი საშუალებას იძლევიან შემოვიღოთ მათი შესატყვისი ცალმხრივი ძლიერი და ცალმხრივი კუთხური კერძო წარმოებულები და ცალმხრივი კუთხური დიფერენციალები ორი ცვლადის ფუნქციისთვის.

§ 7. ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული ანალიზის ბევრ საკითხში მონაწილეობს ერთცვლადიანი ფუნქციის სიმეტრიული წარმოებული. ანალოგიური საკითხის განხილვა ორცვლადიანი ფუნქციისთვის სავსებით ბუნებრივია. აქ შემოღებულია სიმეტრიული დიფერენციალი, სიმეტრიული ძლიერი კერძო წარმოებული, სიმეტრიული კუთხური კერძო წარმოებული და დადგენილია მათ შორის კავშირი.

§ 8. ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები თეორემა 3.5.3-ის სახით (იხ. 3.5 ქვემოთ), საშუალებას იძლევიან ორცვლადიანი ფუნქციისთვის დადგენილ იქნას ფართო აზრით ზედა (ქვედა) დიფერენციალის მოცემულ წერტილზე არსებობის პირობები.

§ 1. ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებულის შესახებ

1.1. წარმოებულის ცნების შესახებ

ვთქვათ, $x_0 \in \mathbb{R}$ წერტილის δ-მიდამოში $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, განსაზღვრულია სასრულმნიშვნელობებიანი $y=f(x)$, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $y \in \mathbb{R}$, ფუნქცია.

x_0-ს ნებისმიერად მივანიჭოთ იმდენად მცირე $h \neq 0$ ნაზრდი, რომ x_0+h წერტილი ეკუთვნოდეს $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ინტერვალს. x_0-ის ამ h ნაზრდს შეესაბამება $y=f(x)$ ფუნქციის $\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0)$

ნაზრდი x^0 წერტილზე. h ცვლადის (x_0 წერტილი ფიქსირებულია)

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

ფუნქცია განსაზღვრულია საკმარისად მცირე ყველა $h \neq 0$ მნიშვნელობისთვის.

თუ (1) შეფარდებას აქვს სასრული ან ნიშნიანი უსასრულო (ე. ი. $+\infty$ ან $-\infty$) ზღვარი, როცა $h \to 0$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება f **ფუნქციის წარმოებული** x_0 წერტილზე და აღინიშნება $f'(x_0)$ ან $y'(x_0)$ სიმბოლოებით. ამრიგად,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,. \tag{2}$$

$f'(x_0)$-ის სასრულობის შემთხვევაში (2) ტოლობა ნიშნავს ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი დადებითი $\delta = \delta(x_0, \varepsilon, f)$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \tag{3}$$

უტოლობა სრულდება $0 < |h| < \delta$ თვისების მქონე ყველა h-თვის.

$f'(x_0)$-ის არსებობის შემთხვევაში f ფუნქციას ეწოდება **წარმოებადი** x_0 წერტილზე, ხოლო თვით x_0 წერტილს კი f ფუნქციის **წარმოებადობის წერტილი**. (2) ზღვრის პოვნას, როცა იგი არსებობს სასრული ან ნიშნიანი უსასრულო, ეწოდება f ფუნქციის **გაწარმოება** x_0 წერტილზე.

წარმოებულის სიმბოლიკის შესახებ არსებობს შემდეგი შეთანხმება. ჩანაწერი $f'(3a)$ ნიშნავს f ფუნქციის წარმოებულს $3a$ წერტილზე. თუკი აინტერესებთ $x \to f(3x)$ ფუნქციის წარმოებული $x = a$ წერტილზე, მაშინ წერენ $(f(3x))'(a)$. ასე რომ, $(f(3x))'(a) = 3f'(3a)$.

შენიშვნა 1.1.1. სასრული წარმოებულის არარსებობა ნიშნავს, (1) შეფარდებისთვის $+\infty$-ის ან $-\infty$-ის ტოლი ზღვრის არსებობას ან (1) ზღვრის არარსებობას. ამიტომ გამოთქმა “ფუნქციას აქვს სასრული ან ნიშნიანი უსასრულო წარმოებული” გამორიცხავს მხოლოდ

იმ შემთხვევას, როცა (1) შეფარდებას ზღვარი არ აქვს. გამოთქმის შემოკლების მიზნით, შემდეგში ვიტყვით "ფუნქციას აქვს სასრული ან უსასრულო წარმოებული". გარდა ამისა, გამოთქმა "ფუნქცია წარმოებადია" ანუ, რაც იგივეა, "ფუნქციას აქვს წარმოებული" ნიშნავს, რომ ამ ფუნქციას აქვს სასრული ან უსასრულო წარმოებული.

1.2. თითო წერტილზე წარმოებადი ფუნქციები და წარმოებულის წყვეტილობა

მაგალითი 1.2.1. $p > 1$ რიცხვის შესაბამის

$$\varphi(t) = \begin{cases} |t|^p, & \text{როცა } t \text{ რაციონალურია,} \\ 0, & \text{როცა } t \text{ ირაციონალურია} \end{cases} \tag{1}$$

ფუნქციას სასრული წარმოებული აქვს მხოლოდ უწყვეტობის $t = 0$ წერტილზე, ხოლო ყველა სხვა წერტილზე ის წყვეტილია.

ვთქვათ, $a \neq 0$ ნებისმიერი წერტილია $t = 0$ წერტილის უცენტრო მიდამოდან და ვაჩვენოთ $\varphi(t)$ ფუნქციის წყვეტილობა a წერტილზე. რადგან $a \neq 0$, ამიტომ $|a| > 0$ და ავიღოთ a წერტილის ნებისმიერად მცირე δ-მიდამო $(a - \delta, a + \delta)$, სადაც $0 < \delta < \frac{1}{2}|a|$. ამ მიდამოს უსასრულოდ ბევრ წერტილზე, რომლებიც იკრიბებიან a წერტილისკენ, φ ფუნქცია იღებს როგორც ნულოვან მნიშვნელობას, ისე $\frac{1}{2}|a|^p$-ზე მეტ მნიშვნელობას. ამიტომ a წერტილთან ნებისმიერად ახლოს ყოველთვის მოიძებნება ორი წერტილი, რომლებზეც φ ფუნქციის მნიშვნელობათა შორის სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა მეტია $\frac{1}{2}|a|^p$-ზე. ეს იწვევს φ ფუნქციის წყვეტილობას a წერტილზე.

ახლა $\varphi(0) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით დავადგინოთ, რომ

$$\varphi'(0) = 0, \tag{2}$$

საიდანაც, კერძოდ, გამომდინარეობს φ ფუნქციის უწვეტობა მხოლოდ ნულოვან წერტილზე. $h \neq 0$ მნიშვნელობებისთვის გვაქვს

$$\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = \frac{\varphi(h)}{h} =$$

$$= \begin{cases} |h|^p/h & \text{არანულოვანი რაციონალური } h\text{-თვის}, \\ 0 & \text{ირაციონალური } h\text{-თვის}. \end{cases}$$

როცა რაციონალური $h > 0$, მაშინ $|h|^p/h = h^p/h = h^{p-1}$. როცა რაციონალური $h < 0$, მაშინ $|h|^p/h = |h|^p/(-|h|) = -|h|^{p-1}$. მაშასადამე, ჩვენთვის საინტერესო შეფარდება ან ნულია, ან ისწრაფვის ნულისკენ, რადგანაც $p - 1 > 0$. ამით (2) ტოლობა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1.2.2. ყველგან უწყვეტ

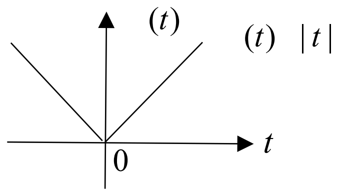
$$\psi(t) = |t|, \quad -\infty < t < +\infty \tag{3}$$

ფუნქციას წარმოებული არ აქვს $t = 0$ წერტილზე და სასრული წარმოებული აქვს ყველა სხვა $t \neq 0$ წერტილზე (ნახ. 1).

მართლაც, $\psi'(0)$-ის არარსებობა გამომდინარეობს

$$\frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} = \frac{\psi(h)}{h} = \begin{cases} 1 & \text{დადებითი } h\text{-თვის}, \\ -1 & \text{უარყოფითი } h\text{-თვის} \end{cases} \tag{4}$$

დამოკიდებულებებიდან.



ნახ.1.

$$\psi(t) = \begin{cases} t, & \text{როცა } t > 0, \\ -t, & \text{როცა } t < 0 \end{cases} \tag{5}$$

დამოკიდებულებებიდან კი გამომდინარეობს $\psi'(t)$-ს სასრულობა ყველა $t \neq 0$ წერტილზე და

$$\psi'(t) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } \ t \in (0, +\infty), \\ -1, & \text{როცა } \ t \in (-\infty, 0). \end{cases} \tag{6}$$

მაგალითი 1.2.3. $\mu(t) = |t|^p$, $p > 1$, $-\infty < t < +\infty$, ფუნქციის ყველგან წარმოებადობა დგინდება წინას მსგავსად. მართლაც,

$$\frac{\mu(h) - \mu(0)}{h} = \frac{\mu(h)}{h} = \frac{|h|^p}{h} = \frac{h^p}{h} = h^{p-1} \to 0, \ \ \text{როცა} \ \ h \to 0+$$

და

$$\frac{\mu(h) - \mu(0)}{h} = \frac{|h|^p}{h} = \frac{|h|^p}{-|h|} = -|h|^{p-1} \to 0, \ \ \text{როცა} \ \ h \to 0- \, .$$

ამიტომ

$$\mu'(0) = 0. \tag{7}$$

$t \neq 0$ მნიშვნელობებისთვის გვაქვს $\mu(t) = t^p$, როცა $t > 0$ და $\mu(t) = (-t)^p$, როცა $t < 0$. ამიტომ $\mu'(t) = pt^{p-1} = p|t|^{p-1}$, როცა $t > 0$ და $\mu'(t) = p(-t)^{p-1} \cdot (-1) = -p(-t)^{p-1} = -p|t|^{p-1}$, როცა $t < 0$. აქედან და (7) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\mu(t)$ ფუნქციას სასრული წარმოებული აქვს ყველგან და*

$$\mu'(t) = p \cdot |t|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} t, \ \ -\infty < t < +\infty. \tag{8}$$

შევნიშნოთ, რომ $\mu'(0)$-ის გამოსათვლელად ვერ გამოვიყენებთ $x = |t|$ გარდაქმნას, რადგანაც არ არსებობს $(|t|)'(0)$. ამ გარდაქმნის

---

*ნამდვილი t ცვლადის სიგნუმ ფუნქცია (ნიშან ფუნქცია) $\operatorname{sign} t$, განსაზღვრულია

$$\operatorname{sign} t = \begin{cases} 1, & \text{როცა } \ t > 0, \\ 0, & \text{როცა } \ t = 0, \\ -1, & \text{როცა } \ t < 0, \end{cases} \ \ \text{ანუ} \ \ \operatorname{sign} t = \begin{cases} \dfrac{t}{|t|}\,, & \text{როცა } \ t \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } \ t = 0 \end{cases}$$

ტოლობებით.

გამოყენება შეიძლება $t \neq 0$ მნიშვნელობებისთვის (იხ. (6) ტოლობა) და მივიღებთ ამ შემთხვევისთვის უკვე აღნიშნულ შედეგს.

მაგალითი 1.2.4. (1) ტოლობით მოცემული $\varphi(t)$ ფუნქციის ანალოგიური თვისებებისა

$$\nu(t) = \begin{cases} t^2 & \text{რაციონალური } t\text{-თვის,} \\ -t^2 & \text{ირაციონალური } t\text{-თვის} \end{cases} \tag{9}$$

და

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{რაციონალური } t\text{-თვის,} \\ t^2 & \text{ირაციონალური } t\text{-თვის} \end{cases} \tag{10}$$

ფუნქციები.

მაგალითი 1.2.5.

$$\lambda(t) = \begin{cases} t \sin \dfrac{1}{t}\,, & \text{როცა } \ t \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } \ t = 0 \end{cases} \tag{11}$$

ფუნქცია უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$-ზე, წარმოებადია ყველა $t \neq 0$ წერტილზე და არ არსებობს $\lambda'(0)$ წარმოებული. ეს გამომდინარეობს

$$\frac{\lambda(h) - \lambda(0)}{h} = \sin \frac{1}{h}$$

ტოლობიდან, რომლის მარჯვენა მხარეს ზღვარი არ აქვს, როცა $h \to 0$.

მაგალითი 1.2.6. $\omega(t) = t|t|$ ფუნქციისთვის გვაქვს

$$\omega(t) = \begin{cases} t^2, & \text{როცა } \ t > 0, \\ -t^2, & \text{როცა } \ t < 0. \end{cases} \tag{12}$$

ამიტომ

$$\omega'(t) = \begin{cases} 2t, & \text{როცა } \ t \in (0, +\infty), \\ -2t, & \text{როცა } \ t \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

წარმოებულის უშუალო გამოთვლით კი მიიღება $\omega'(0) = 0$ ტოლობა. მაშასადამე,

$$\omega'(t) = \begin{cases} 2t, & \text{როცა } t \geq 0, \\ -2t, & \text{როცა } t < 0. \end{cases} \tag{13}$$

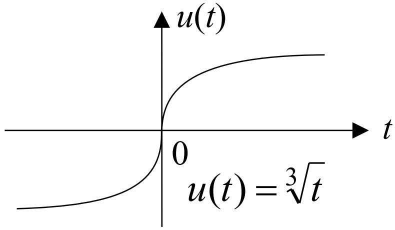
შევნიშნოთ, რომ $(t|t|)'(0)$-ის გამოსათვლელად ვერ გამოვიყენებთ ლაიბნიცის $(uv)' = u'v + uv'$ ფორმულას, რადგანაც $(|t|)'(0) = \psi'(0)$ არ არსებობს (იხ. მაგალითი 1.2.2).

მაგალითი 1.2.7. ახლა განვიხილოთ უსასრულო წარმოებულის მქონე $u(t) = \sqrt[3]{t}$ ფუნქცია. გვაქვს ($\sqrt[3]{h}/h$ შეფარდების ლუწობის გამო)

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(h) - u(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

მაშასადამე (ნახ.2),

$$u'(0) = +\infty. \tag{14}$$



ნახ. 2

(1), (9) და (10) ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქციები მიგვანიშნებენ იმაზე, რომ $f'(t_0)$ და $f'(t)|_{t=t_0}$ ჩანაწერები სხვადასხვა ინფორმაციის მატარებელია, საზოგადოდ. პირველი ჩანაწერი ნიშნავს, რომ $f(t)$ ფუნქციის წარმოებული უშუალოდაა გამოთვლილი t_0 წერტილზე. მეორე ჩანაწერი მიგვანიშნებს, რომ f ფუნქციას t_0 წერტილის რაიმე მიდამოს ყოველ წერტილზე აქვს სასრული $f'(t)$ წარმოებული და შემდეგ არის გამოთვლილი ამ წარმოებული-ფუნქციის

მნიშვნელობა $t = t_0$ წერტილზე. (1), (9) და (10) ტოლობებით მოცემული ფუნქციებისთვის აზრი არ აქვს სწორედ მეორე ჩანაწერს.

მაგალითი 1.2.8. შესაძლებელია ფუნქციას სასრული წარმოებული ჰქონდეს რაიმე t_0 წერტილის მიდამოში და ამავე დროს, წარმოებულს ზღვარი არ ჰქონდეს თვით t_0 წერტილზე. სათანადო ფუნქციაა

$$v(t) = \begin{cases} t^2 \sin \dfrac{1}{t}, & \text{როცა} \;\; t \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \;\; t = 0, \end{cases} \tag{15}$$

რომლისთვისაც

$$v'(t) = 2\,t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t}, \;\; t \neq 0. \tag{16}$$

წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად

$$v'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{v(h)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0, \tag{17}$$

რადგანაც $\sin \frac{1}{h}$ მამრავლი შემოსაზღვრულია ნულის უცენტრო მიდამოში.

(16) ტოლობიდან ჩანს, რომ $v'(t)$ წარმოებულს ზღვარი არ აქვს $t = 0$ წერტილზე, როცა $t \to 0$ (რადგანაც $\cos \frac{1}{t}$-ს არ აქვს საჭირო ზღვარი და $t \sin \frac{1}{t}$-ის ზღვარი კი ნულია). ამიტომ $v'(t)$ წარმოებული წყვეტილი ფუნქციაა $t = 0$ წერტილზე.

რაც შეეხება ზემოგანხილულ $u(t) = \sqrt[3]{t}$ ფუნქციას, მისთვის გვაქვს

$$\lim_{t \to 0} u'(t) = +\infty = u'(0). \tag{18}$$

მაშასადამე, $u'(t)$ წარმოებულიც წყვეტილი ფუნქციაა $t = 0$ წერტილზე.

მაგალითი 1.2.9.

$$w(t) = \begin{cases} t^2 \sin \dfrac{1}{t^2}, & \text{როცა} \;\; t \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \;\; t = 0 \end{cases} \tag{19}$$

ფუნქციისთვის $w'(0) = 0$ და ყველა $t \neq 0$ წერტილზე მისი სასრული

$$w'(t) = 2\,t \sin\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t}\,\cos\frac{1}{t^2}\,,\ \ t \neq 0, \tag{20}$$

წარმოებული არ არის შემოსაზღვრული $t = 0$ წერტილის მიდამოში. ამრიგად, $w'(t)$ წარმოებული წყვეტილია $t = 0$ წერტილზე.

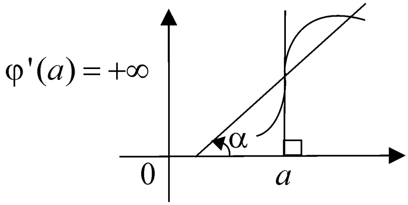
შენიშვნა 1.2.1. როგორც ვნახეთ, ინტერვალზე წარმოებადი ფუნქციის წარმოებული შეიძლება წყვეტილი იყოს ცალკეულ წერტილებზე. ასეთებია $u'(t)$, $v'(t)$ და $w'(t)$ წარმოებულები $t = 0$ წერტილზე.

ვთქვათ, $\varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე* და სასრული წარმოებული აქვს (a,b)-ს ყველა წერტილზე. მაშინ $\varphi'(t)$ წარმოებული-ფუნქცია არ შეიძლება წყვეტილი იყოს (a,b)-ს ყველა წერტილზე. უფრო ზუსტად: $\varphi'(t)$ წარმოებულის უწყვეტობის წერტილთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია (a,b)-ზე. ეს გამომდინარეობს თავი I-ის თეორემა 2.6.2-დან იმის გათვალისწინებით, რომ $\varphi'(t)$ წარმოებული არის უწყვეტი $\varphi_n(t) = n[\varphi(t+\frac{1}{n}) - \varphi(t)]$ ფუნქციების ზღვარი.

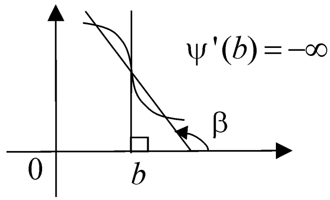
შენიშვნა 1.2.2. ცალკეულ წერტილზე, როგორც ვნახეთ, წარმოებული შეიძლება იყოს $+\infty$ ან $-\infty$. გრაფიკულად ეს სიტუაცია ასე წარმოგვიდგება

---

*როცა ამბობენ, რომ $\varphi(t)$ ფუნქცია მოცემულია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ φ ფუნქციის მნიშვნელობანი $[a,b]$-ს გარეთ მდებარე წერტილებზე, თუკი ასეთი მნიშვნელობანი მას გააჩნია, მხედველობაში არ მიიღება. აქედან გამომდინარე, φ ფუნქციის უწყვეტობა $[a,b]$ სეგმენტზე ნიშნავს φ-ს უწყვეტობას $[a,b]$-ს ყველა შიგა წერტილზე და a წერტილზე მარჯვნიდან უწყვეტობას, ხოლო b წერტილზე კი მარცხნიდან უწყვეტობას (იგულისხმება, როგორც ყოველთვის, რომ $a < b$). მაშასადამე, φ ფუნქციის უწყვეტობა a წერტილზე ნიშნავს φ-ს მხოლოდ მარჯვნიდან უწყვეტობას a-ზე. ასევე, φ ფუნქციის უწყვეტობა b წერტილზე ნიშნავს მის მარცხნიდან უწყვეტობას b-ზე.



ნახ. 3



ნახ. 4

ბუნებრივია კითხვა: რამდენად ბევრი შეიძლება იყოს ასეთი წერტილი?

ქვემოთ ჩვენ ვნახავთ, რომ ასეთ წერტილთა სიმრავლე ნული ზომისაა (იხ. თეორემები 1.11.7–1.11.9).

1.3. დიფერენცირებადობა

$x_0 \in \mathbb{R}$ წერტილის $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, მიდამოში განსაზღვრულ სასრულ $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **დიფერენცირებადი** x_0 წერტილზე, როცა x_0 წერტილზე მისი

$$\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0)$$

ნაზრდი, რაც შეესაბამება x_0 წერტილის h ნაზრდს, შეიძლება ჩაიწეროს

$$f(x_0+h)-f(x_0) = A\cdot h + h\cdot \alpha(x_0,h), \quad h\neq 0, \tag{1}$$

სახით, სადაც A არის h-სგან დამოუკიდებელი სასრული რიცხვი (A დამოკიდებულია, საზოგადოდ, მხოლოდ x_0 წერტილზე და f ფუნქციაზე), ხოლო h-ის $\alpha(x_0,h)$ ფუნქცია უსასრულოდ მცირე ფუნქციაა $h=0$ წერტილზე:

$$\lim_{h\to 0}\alpha(x_0,h)=0. \tag{2}$$

ეს იწვევს $\alpha(x_0,h)$-ის შემოსაზღვრულობას, როგორც h-ის ფუნქციის, $h=0$ წერტილის უცენტრო მიდამოში. თვით $h=0$ წერტილზე კი $\alpha(x_0,h)$ ფუნქცია არ არის განსაზღვრული, რადგანაც

$$\alpha(x_0,h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-A, \quad h\neq 0. \tag{3}$$

ამ წერტილზე შეიძლება მას მივანიჭოთ ნებისმიერი სასრული მნიშვნელობა, რაც ვერ შეცვლის f ფუნქციის დიფერენცირებადობას x_0 წერტილზე.

ამასთან არის ერთი გარემოება, რაც მიგვანიშნებს $\alpha(x_0, 0) = 0$ ტოლობის მიზანშეწონილობაზე. მართლაც, (1) ტოლობის მარჯვენა მხარე ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $h \to 0$. ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ A სასრული რიცხვია და h-ის $\alpha(x_0, h)$ მამრავლი კი შემოსაზღვრულია $h = 0$ წერტილის უცენტრო მიდამოში. ამიტომ

$$\lim_{h\to 0} \big[f(x_0+h) - f(x_0)\big] = 0.$$

აქ $f(x_0)$ მაკლები სასრული მუდმივია h-ის მიმართ, რის გამოც

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

ეს ტოლობა კი, $f(x_0)$-ის სასრულობასთან ერთად ნიშნავს f ფუნქციის უწყვეტობას x_0 წერტილზე.

ამ ფაქტის გამო ბუნებრივი იქნება მივიღოთ $\alpha(x_0, 0) = 0$ ტოლობა. $h = 0$ წერტილზე ასეთი შესწორებით მიღებული ახალი $\alpha^*(x_0, h)$ ფუნქცია უწყვეტია $h = 0$ წერტილზე (ე. ი. $h = 0$ წერტილი არის ასაცილებელი წყვეტის წერტილი $\alpha(x_0, h)$ ფუნქციისთვის):

$$\lim_{h\to 0} \alpha(x_0, h) = 0 = \alpha(x_0, 0). \tag{4}$$

ამიტომ მიღებულია, რომ f ფუნქციის დიფერენცირებადობა x_0 წერტილზე ნიშნავს (1) ტოლობას რაიმე სასრული A რიცხვისთვის, სადაც $\alpha(x_0, h)$ ფუნქცია ითვლება უწყვეტად $h = 0$ წერტილზე, რაც ნიშნავს (4) ტოლობას.

მაშასადამე, მართებულია შემდეგი

წინადადება 1.3.1. დიფერენცირებადი ფუნქცია უწყვეტია დიფერენცირებადობის წერტილზე.

მართებულია აგრეთვე შემდეგი

წინადადება 1.3.2. f ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის x_0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია სასრული $f'(x_0)$ წარმოებულის არსებობა.

დამტკიცება. f ფუნქციის x_0 წერტილზე დიფერენცირებადობისას შესრულებულია (1) ტოლობა სასრული A რიცხვისთვის. ამ ტოლობის ორივე მხარის h-ზე გაყოფით ($h \neq 0$) და შემდეგ ზღვარზე გადასვლით, როცა $h \to 0$, მივიღებთ $f'(x_0) = A$ ტოლობას.

თუ შესრულებულია 1.1.(2) ტოლობა სასრული $f'(x_0)$-თვის, მაშინ

$$\alpha(x_0, h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0), & \text{როცა } h \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } h = 0 \end{cases} \tag{5}$$

ფუნქცია შეასრულებს (3) და (4) ტოლობებს $A = f'(x_0)$ მნიშვნელობისთვის. ამით წინადადება დამტკიცებულია.

მაშასადამე, მართებულია

წინადადება 1.3.3. ერთი ცვლადის f ფუნქციისთვის ეკვივალენტურია შემდეგი ორი გამოთქმა:

1) f ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს სასრული $f'(x_0)$ წარმოებული;

2) f ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილზე.

აქედან გამომდინარე, დებულების წანამძღვარში ან დასკვნაში წარმოებულის არსებობის აღნიშვნა საჭიროებს დაზუსტებას: უნდა ითქვას, წარმოებული სასრულია თუ უსასრულო. უკანასკნელი შემთხვევა გამორიცხულია, როცა ფუნქცია დიფერენცირებადია. ამიტომ გამოთქმებს "ფუნქცია დიფერენცირებადია" და "ფუნქცია წარმოებადია" სხვადასხვა დატვირთვა აქვს საზოგადოდ და ეს განსხვავება შენარჩუნებული იქნება მომავალშიც.

ცნობილია, რომ წარმოებულისთვის $+\infty$ და $-\infty$ მნიშვნელობების შენარჩუნება მიზანშეწონილია ფუნქციათა თეორიაში ([41], გვ. 74–75).

შესაძლებელია f ფუნქცია x_0 წერტილის რაღაც $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ მიდამოს ყველა წერტილზე იყოს დიფერენცირებადი, ე. ი. წარმოებული $f'(x)$ არსებობს და სასრულია ყველა $x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ წერტილზე. ამიტომ შეიძლება დაისვას საკითხი $f'(x)$ ფუნქციის წარმოებულის არსებობის შესახებ x_0 წერტილზე. თუ ეს უკანასკნელი არსებობს, მაშინ მას ეწოდება f ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული x_0 წერტილზე და აღინიშნება $f''(x_0)$ სიმბოლოთი.

საზოგადოდ, f ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს $(n+1)$ რიგის სასრული ან უსასრულო წარმოებული, სიმბოლურად $f^{(n+1)}(x_0)$, თუ $f^{(n)}(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილის რაღაც $(x_0-\delta_n, x_0+\delta_n)$ მიდამოს ყველა წერტილზე სასრულია და წარმოებადი თვით x_0 წერტილზე.

ამ რეკურენტული წესით მიღებულ $f'(x_0), f''(x_0), \ldots$ წარმოებულებს ეწოდებათ მიმდევრობითი წარმოებულები x_0 წერტილზე f ფუნქციისთვის ([13], გვ. 31).

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ არსებობს $(m+n)$ რიგის $f^{(m+n)}(x_0)$ წარმოებული, მაშინ

$$(f^{(m)})^{(n)}(x_0) = (f^{(n)})^{(m)}(x_0) = f^{(m+n)}(x_0).$$

თუ $f^{(k)}(x_0)$ სასრულია ყველა $k = 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობისთვის, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება **უსასრულოდ დიფერენცირებადი** x_0 წერტილზე.

1.4. დიფერენციალი

x წერტილზე დიფერენცირებადი $y = f(x)$ ფუნქციის Δy ნაზრდს x-ზე, რაც შეესაბამება არგუმენტის Δx ნაზრდს (Δx-ით აღნიშნულია არგუმენტის ნებისმიერი ნაზრდი, რომელიც შესაძლოა არც კი იყოს უსასრულოდ მცირე და იგი არაა დამოკიდებული x-ზე), როგორც ვნახეთ, აქვს

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x \tag{1}$$

სახე. როცა Δx უსასრულოდ მცირეა, მაშინ: 1) მეორე $\alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x$ შესაკრები უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე Δx. ეს იწერება $\alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$ სახით; 2) თუ $f'(x) \neq 0$, მაშინ

$f'(x)\Delta x$ არის Δx-ის რიგის უსასრულოდ მცირე და წრფივადაა დამოკიდებული Δx-ზე. $f'(x)\Delta x$ ნამრავლი არის Δy-ის მთავარი შესაკრები-წევრი, მას ეწოდება f **ფუნქციის დიფერენციალი** x წერტილზე და აღინიშნება $df(x)(\Delta x)$ სიმბოლოთი, შემოკლებით $df(x)$ ან dy სიმბოლოებით. ამრიგად, $df(x) = f'(x)\Delta x$. კერძოდ, $y = x$ ფუნქციისთვის გვაქვს $dy = dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, ე. ი. არგუმენტის დიფერენციალი არის მისი ნაზრდი. მაშასადამე,

$$df(x) = f'(x)\,dx. \tag{2}$$

$df(x)$-ის ცვალებადობა, როგორც ვთქვით, x-ის ცვალებადობისას აშკარაა. ფიქსირებული x-თვის კი $df(x)$ არის dx-ის წრფივი ფუნქცია. ამრიგად, მართებულია

წინადადება 1.4.1. ფუნქციის დიფერენციალი არის ამ ფუნქციის სასრული წარმოებულის და არგუმენტის დიფერენციალის ნამრავლი. არგუმენტის დიფერენციალი კი იგივეა, რაც მისი ნაზრდი. თუ dx უსასრულოდ მცირეა, მაშინ dy-იც უსასრულოდ მცირეა.

(2) ტოლობიდან მიიღება წარმოებულის ლაიბნიცისეული ჩაწერა დიფერენციალის მეშვეობით:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \ \text{ და } \ y'(x) = \frac{dy}{dx}\,.$$

მართებულია შემდეგი ფორმულები, მათი მარჯვენა მხარეების სასრულობისას,

$$d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv, \tag{3}$$

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + vu')dx = u\,dv + v\,du, \tag{4}$$

$$d\Big(\frac{u}{v}\Big) = \Big(\frac{u}{v}\Big)'dx = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}\,,\ v \neq 0. \tag{5}$$

წინადადება 1.4.2. თუ $f'(x) \neq 0$, მაშინ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1. \tag{6}$$

დამტკიცება. გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულებანი

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x)dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x+\alpha(x,\Delta x)\cdot\Delta x}{f'(x)dx}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\alpha(x,\Delta x)}{f'(x)}\right)=1.$$

მაშასადამე, $\Delta y/dy$ შეფარდება შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვოთ 1-ს, თუ Δx საკმარისად ახლოსაა ნულთან. ამრიგად, გვაქვს მიახლოებითი $\frac{\Delta y}{dy}\approx 1$ ტოლობა, საიდანაც $\Delta y\approx dy$ ანუ $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$. ამრიგად,

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \tag{7}$$

თუ ცნობილია $f(x)$ მნიშვნელობა, არგუმენტის Δx ნაზრდი და თუ $\alpha(x,\Delta x)\cdot\Delta x$ ნამრავლი იმყოფება დასაშვები ცდომილების საზღვრებში, მაშინ (7) დამოკიდებულებით გამოითვლება f ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა $x+\Delta x$ წერტილზე.

1.5. ლაგრანჟის ფორმულის შესახებ

1. დიფერენციალური აღრიცხვის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ფორმულაა ლაგრანჟის შემდეგი ფორმულა ანუ, რაც იგივეა, სასრული ნაზრდის ფორმულა*, რომლის არსი გადმოცემულია შემდეგი თეორემით ([21], გვ. 93–94; [25], გვ. 298–300; [49], გვ. 289–292; [68], გვ. 125; [39], გვ. 67, 69 და 84).

თეორემა 1.5.1 (ლაგრანჟი, 1797 წ.)**.** თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და $[a,b]$-ს ყოველ შიგა წერტილზე მას აქვს სასრული ან უსასრულო წარმოებული, მაშინ $[a,b]$-ს შიგნით არსებობს ერთი მაინც c წერტილი შემდეგი თვისებებით: $\varphi'(c)$ სასრულია და ადგილი აქვს

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\cdot\varphi'(c),\quad a<c<b, \tag{1}$$

ტოლობას.

---

*რადგანაც მასში მონაწილეობს სასრული $\varphi(b)-\varphi(a)$ ნაზრდი.

ამ თეორემას ხშირი გამოყენება აქვს შემდეგი სახით*.

თეორემა 1.5.2. თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია $[a,b]$-ს ყოველ შიგა წერტილზე, მაშინ ყოველი $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ ქვესეგმენტის შიგნით არსებობს ერთი მაინც c_1 წერტილი, რომლისთვისაც $\varphi'(c_1)$ სასრულია და

$$\varphi(b_1)-\varphi(a_1)=(b_1-a_1)\cdot\varphi'(c_1),\ \ a_1<c_1<b_1. \qquad (2)$$

შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემებში არსებითია ფუნქციის უწყვეტობა სეგმენტის ბოლო წერტილებზე, რაც ჩანს შემდეგი ფუნქციის მაგალითზე: $\psi(x)=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}$, როცა $a<x<b$ და $\psi(a)=\psi(b)=0$. ყოველ $x\in(a,b)$ წერტილზე გვაქვს

$$\psi'(x)=-\Big(\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}\Big)<0.$$

ამიტომ ψ ფუნქციისთვის (1) ტოლობა ვერ შესრულდება: მისი მარცხენა მხარე ნულია და მარჯვენა მხარე კი უარყოფითი.

ლაგრანჟის თეორემა ადასტურებს ისეთი c წერტილის მხოლოდ არსებობას (a,b)-ში, რომლისთვისაც ადგილი აქვს (1) ტოლობას. c წერტილის საზღვრების დავიწროება შესაძლებელია ფუნქციათა ზოგიერთი კლასისთვის. ამ მიმართულებით არის ბევრი გამოკვლევა, რომელთა შესახებ ვრცლად და საინტერესოდ საუბარია ა. ხარაძის [69] წიგნში და ნაწილობრივ [5] წიგნშიც. სასრული ნაზრდის ფორმულის სხვადასხვა გამოყენებაა [34] წიგნში, გვ. 43–58.

2. ახლა დავსვათ შებრუნებული კითხვა: ვთქვათ $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და ამავე დროს წარმოებადია $[a,b]$-ს ყოველ შიგა წერტილზე. $[a,b]$-ს შიგნით წინასწარ დასახელებული c^*

---

*ლაგრანჟის (1) და (2) ფორმულები მართებულია უწყვეტი გლუვი ისეთი ფუნქციისთვისაც, რომელიც სასრულ წარმოებულს მოკლებულია თითქმის ყველგან (იხ. 1.9-ის დასასრული). ამიტომ, დანჟუას 1.17.2 თეორემის ძალით, ამ ფუნქციის ერთი და იგივე მხარის ორივე წარმოებული რიცხვი და ორივე ორმხრივი წარმოებული რიცხვი (იხ. 1.9.1 წინადადებაც ქვემოთ) სასრულია მხოლოდ ნულზომის სიმრავლეზე.

წერტილისთვის არსებობს თუ არა რაიმე $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ ქვესეგმენტი

$$\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=(\beta-\alpha)\cdot\varphi'(c^*),\ \ \alpha<x^*<\beta, \tag{3}$$

თვისების?

ამ კითხვაზე პასუხი უარყოფითია. მართლაც, ყველგან დიფერენცირებადი $g(x)=x^3$ ფუნქციის წარმოებულია $g'(x)=3x^2$ და c^*-ს როლში ავიღოთ $x=0$ წერტილი. მაშინ (3) ტოლობის მარჯვენა მხარე იქნება $(\beta-\alpha)g'(0)=0$ ყოველი ისეთი $[\alpha,\beta]$ სეგმენტისთვის, რომელიც თავის შიგნით შეიცავს $x=0$ წერტილს. ამავე დროს $g(\beta)-g(\alpha)>0$, რადგანაც $\alpha<0<\beta$ და $g(\alpha)<0$, $g(\beta)>0$.

შენიშვნა 1.5.1. 1.5.1 და 1.5.2 თეორემებში არსებითია $g(x)$ ფუნქციის წარმოებადობა $[a,b]$-ს ყოველ შიგა წერტილზე. თუნდაც ერთ შიგა წერტილზე წარმოებულის არარსებობა იწვევს მტკიცების მცდარობას*. ამას ადასტურებს 1.2.(3) ტოლობით მოცემული $\psi(x)=|x|$ ფუნქცია, რომელსაც წარმოებული არ აქვს მხოლოდ $x=0$ წერტილზე. ამ ფუნქციისთვის (1) ტოლობა არ სრულდება $[-p,p]$ სახის სეგმენტებზე, სადაც $p>0$. ეს ჩანს იმ ფაქტიდან, რომ (1) ტოლობის მარცხენა მხარეა $\psi(p)-\psi(-p)=|p|-|-p|=0$, ხოლო მარჯვენა $[p-(-p)]\cdot\psi'(c)=2p\psi'(c)$ მხარე არ არის ნული, როცა $c\neq 0$ და არ არსებობს, როცა $c=0$.

შენიშვნა 1.5.2. როგორც ვნახეთ, თეორემა 1.5.1-ის პირობები არ კრძალავს წარმოებულის უსასრულობას შიგა წერტილებზე. წერტილები, რომლებზეც წარმოებული უსასრულობაა ვერ შექმნიან რაიმე ქვეინტერვალს, როგორც ამას გვიჩვენებს თეორემა 1.5.2 და 1.15.7–1.15.9 თეორემები. (1) ფორმულაში მონაწილე $\varphi'(c)$-ს სასრულობა გამომდინარეობს თვით (1)-დან. გარდა ამისა, $[\varphi(b)-\varphi(a)]/(b-a)$ შეფარდების ტოლობას φ ფუნქციის წარმოებულთან ერთ მაინც შიგა წერტილზე შეიძლება მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია: ვთქვათ $\varphi(x)$ გამოსახავს მოძრავი მატერიალური წერტილის მიერ გავლილ

---

*ანალოგიური მდგომარეობა გვაქვს ორი ცვლადის ფუნქციისთვისაც (იხ. შენიშვნა 3.6.2 ქვემოთ).

მანძილს x მომენტისთვის. მაშინ $b-a$ დროში გავლილი მანძილია $\varphi(b)-\varphi(a)$, ხოლო $[\varphi(b)-\varphi(a)]/(b-a)$ შეფარდება კი წარმოადგენს მოძრავი წერტილის საშუალო სიჩქარეს ამ დროში. ცხადია, რომ მოძრავი წერტილის სიჩქარე ყოველ მომენტში ვერ იქნება საშუალო სიჩქარეზე მეტი ან ნაკლები. ამიტომ იქნება მომენტი, როცა ეს სიჩქარეები ტოლია.

3. თეორემა 1.5.1-ის პირობებში ავიღოთ (a,b)-დან რაიმე x_0 წერტილი, რომლისთვისაც სასრულია $\varphi'(x_0)$ წარმოებული. ასეთი წერტილის არსებობა ყოველ ქვეინტერვალზე ითქვა შენიშვნა 1.5.2-ში. x_0-ის მახლობლად ავიღოთ ნებისმიერი $x\neq x_0$, $x\in(a,b)$, წერტილი. ერთი მხრივ, გვაქვს

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\varphi'(x_0) \tag{4}$$

ტოლობა. მეორე მხრივ, (2) ფორმულის ძალით,

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\varphi'(c), \tag{5}$$

სადაც c წერტილი მოთავსებულია x_0-სა და x-ს შორის. ამ ტოლობებიდან ვიღებთ

$$\lim_{x\to x_0}\varphi'(c)=\varphi'(x_0). \tag{6}$$

როგორც ვნახეთ, 1.2.(15) და 1.2.(19) ტოლობებით მოცემული $v(x)$ და $w(x)$ ფუნქციების წარმოებულები სასრულია $x_0=0$ წერტილზე და ამავე დროს ამ წერტილზე წყვეტილია მათი $u'(x)$ და $w'(x)$ წარმოებულები. ამ უკანასკნელ ფაქტს არ ეწინააღმდეგება (6) ტოლობა, რადგანაც (6) არ ნიშნავს $\varphi'(x)$ წარმოებულის უწყვეტობას x_0 წერტილზე. საქმე ისაა, რომ (5) და (6) ტოლობებში მონაწილე c წერტილი არის x-ის $c=c_{x_0}(x)$ ფუნქცია, სადაც x_0 ასრულებს პარამეტრის როლს, ხოლო x ცვლადი ღებულობს x_0-სგან განსხვავებულ ყველა მნიშვნელობას. x_0 და x წერტილებით განსაზღვრული ინტერვალის შიგნითაა $c_{x_0}(x)$ წერტილი. x-ის ყოველ მდებარეობას

შეესაბამება თავისი $c_{x_0}(x)$. ამრიგად, x_0-ის მიდამოში არის $c_{x_0}(x)$ წერტილების უსასრულო სიმრავლე და $\lim\limits_{x\to x_0} c_{x_0}(x)=x_0$. ამიტომ

$$\lim_{x\to x_0}\varphi'(c_{x_0}(x)) \tag{7}$$

არის φ' წარმოებულის ზღვარი ისეთი ქვესიმრავლის გასწვრივ, რომლისთვისაც x_0 არის დაგროვების წერტილი. სწორედ, მხოლოდ ამ სიმრავლის გასწვრივ ხდება φ'-ის სწრაფვა $\varphi'(x_0)$ მნიშვნელობისკენ.

დაბოლოს, აღვნიშნოთ ერთი წანადადება, რომლის მართებულობა ადვილი დასადგენია.

წინადადება 1.5.1. ვთქვათ, $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და ორჯერ დიფერენცირებადია (a,b)-ს ყოველ წერტილზე. თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია $[a,b]$-დან აღებულ სამ სხვადასხვა წერტილზე იღებს ერთსა და იმავე მნიშვნელობას, მაშინ (a,b)-ში არის

$$\varphi''(c)=0 \tag{8}$$

თვისების c წერტილი.

1.6. ლაგრანჟის ფორმულის განზოგადება ჩვეულებრივი წარმოებულისთვის

თეორემა 1.6.1 ([115]). ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და $f'(a)=f'(b)$. მაშინ (a,b) ინტერვალში არსებობს ისეთი c წერტილი, რომ ადგილი აქვს

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(c),\quad a<c<b, \tag{1}$$

ტოლობას.

მართებულია შემდეგი ორი თეორემაც.

თეორემა 1.6.2 ([156]). ვთქვათ, f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და მას (a,b) ინტერვალის ყველა წერტილზე აქვს სასრული

f' წარმოებული. მაშინ არსებობს ისეთი $c \in (a,b)$ წერტილი, რომ

$$\frac{f(c)-f(a)}{b-c} = f'(c), \quad a < c < b. \tag{2}$$

შევნიშნოთ, რომ ამავე ნაშრომში მოცემულია თეორემა 1.6.1-ის სხვაგვარი დამტკიცებაც.

თეორემა 1.6.3 ([149]). ვთქვათ, f ფუნქცია n-ჯერ დიფერენცირებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ორ ფორმულას:

1) არსებობს ისეთი $t = t(a,b) \in (0,1)$ რიცხვი, რომ

$$\begin{aligned} f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k f^{(k)}(a+t(b-a))}{k!}\,(a-b)^k + \\ + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}(f^{(n)}(a)-f^{(n)}(b))(a-b)^n. \end{aligned} \tag{3}$$

2) არსებობს ისეთი $s = s(a,b) \in (0,1)$ რიცხვი, რომ

$$\begin{aligned} f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k f^{(k)}(b+s(a-b))}{k!}\,(b-a)^k + \\ + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}(f^{(n)}(b)-f^{(n)}(a))(b-a)^n. \end{aligned} \tag{4}$$

1.7. ლაგრანჟის ფორმულის განზოგადება ჩეზაროს აზრით წარმოებულისთვის

ამ მიზნით დაგვჭირდება ჩეზაროს აზრით უწყვეტობისა და ჩეზაროს აზრით წარმოებადობის ცნებანი.

ვთქვათ, f ფუნქცია სასრულია და დანჟუა-პერონის აზრით ინტეგრებადი $[a,b]$ სეგმენტზე ([45]). f ფუნქციის **მარჯვენა ზედა**

C_1**-წარმოებული** x წერტილზე ეწოდება შემდეგ

$$C_1D^+f(x) = \varlimsup_{h\to 0+} \frac{\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)}{\frac{1}{2}h} = \tag{1}$$

$$= \varlimsup_{h\to 0+} \frac{2}{h^2} \int\limits_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\,dt \tag{2}$$

ზღვარს, თუ იგი არსებობს სასრული ან უსასრულო ([89], [161]). ანალოგიურად განისაზღვრება $C_1D_+f(x)$, $C_1D^-f(x)$ და $C_1D_-f(x)$.

ზედა C_1**-წარმოებული** (ორმხრივი) $C_1D^*f(x)$ და **ქვედა** C_1**-წარმოებული** (ორმხრივი) $C_1D_*f(x)$ განისაზღვრებიან

$$C_1D^*f(x) = \max\left\{C_1D^+f(x), C_1D^-f(x)\right\}, \tag{3}$$

$$C_1D_*f(x) = \min\left\{C_1D_+f(x), C_1D_-f(x)\right\} \tag{4}$$

ტოლობებით.

თუ $C_1D^*f(x) = C_1D_*f(x)$, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება C_1**-წარმოებადი** x წერტილზე და $C_1D^*f(x)$ და $C_1D_*f(x)$-ის საერთო მნიშვნელობა აღინიშნება $C_1Df(x)$ სიმბოლოთი.

f ფუნქციას ეწოდება C_1**-უწყვეტი** x წერტილზე, თუ

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x), \tag{5}$$

ე. ი. თუ $f(x)$ ტოლია თავისი განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებულის x წერტილზე.

თეორემა 1.7.1 ([161], გვ. 239)**.** თუ f ფუნქცია C_1-უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და თუ ყოველ $x \in (a,b)$ წერტილზე არსებობს სასრული ან უსასრულო $C_1Df(x)$ წარმოებული, მაშინ არსებობს ისეთი

$c \in (a, b)$ წერტილი, რომ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = C_1 Df(c), \quad a < c < b. \tag{6}$$

დადგენილია, რომ C_1-წარმოებული უსასრულობა არ შეიძლება იყოს წერტილთა დადებითი ზომის სიმრავლეზე ([161], გვ. 245), რაც ემთხვევა ჩვეულებრივი წარმოებულის თვისებას (იხ. 1.15.9 თეორემა II თავიდან).

ახლა აღვნიშნოთ ჩვეულებრივი წარმოებულის ის თვისებანი, რომელნიც არ აქვს C_1-წარმოებულს.

არსებობს სრულყოფილი $P \subset (0, 1)$ სიმრავლე, რომლის ზომა $|P| > \frac{1}{2}$ და:

მაგალითი 1. არსებობს ისეთი f ფუნქცია, რომ თითქმის ყველა $x \in P$ წერტილზე ადგილი აქვს

$$C_1 D^* f(x) = 0 \;\text{ და }\; C_1 D_* f(x) = -\infty$$

ტოლობებს ([161], გვ. 248).

მაგალითი 2. არსებობს ისეთი g ფუნქცია, რომ თითქმის ყველა $x \in P$ წერტილზე მართებულია

$$C_1 D_+ g(x) = 0 \;\text{ და }\; C_1 D^- g(x) = +\infty$$

ტოლობანი ([161], გვ. 253–254).

ამრიგად, C_1-წარმოებულისთვის ადგილი არ აქვს თავი II-დან დანჟუას თეორემა 1.17.2-ს (ამას გვიჩვენებს მაგალითი 1) და ისევ დანჟუას თეორემა 1.17.3-ს (ამას კი ადასტურებს მაგალითი 2).

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $\lambda > 0$ რიცხვისთვის არსებობს C_λ-უწყვეტობისა და C_λ-წარმოებადობის ცნებანი ([90], [91], [162]).

თეორემა 1.7.2 ([162], გვ. 120)**.** თუ f არის C_λ-უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(a) > 0$ და $f(b) < 0$, მაშინ არსებობს ისეთი c რიცხვი, რომ $a < c < b$ და $f(c) = 0$.

უკანასკნელი თეორემა გამოხატავს ჩვეულებრივი აზრით უწყვეტი ფუნქციის თვისებას – მიიღოს შუალედური მნიშვნელობა.

თეორემა 1.7.3 ([162], გვ. 119)**.** ვთქვათ, f ფუნქცია C_λ-უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და (a,b) ინტერვალის ყოველ წერტილზე მას აქვს სასრული ან უსასრულო $C_\lambda Df(x)$ წარმოებული. მაშინ არსებობს ისეთი $c^* \in (a,b)$ წერტილი, რომ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = C_\lambda Df(c^*), \quad a < c^* < b. \tag{7}$$

1.8. ლაგრანჟის ფორმულა აპროქსიმატული წარმოებულისთვის

1. ვთქვათ, $(a,b) \in \mathbb{R}$ ინტერვალზე მოცემულია სასრული ψ ფუნქცია და ავიღოთ რომელიმე $x_0 \in (a,b)$ წერტილი. თუ არსებობს ისეთი ზომადი $E \subset (a,b)$ სიმრავლე, რომლისთვისაც x_0 სიმკვრივის წერტილია (იხ. I, § 13) და E სიმრავლის გასწვრივ კი არსებობს

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{x-x_0} \tag{1}$$

ზღვარი, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება ψ ფუნქციის **აპროქსიმატული წარმოებული** დანჟუას ტერმინოლოგიით ([54], გვ. 317; [3], გვ. 582; [127], გვ. 85–91) და **ასიმპტოტური წარმოებული** ხინჩინის ტერმინოლოგიით ([70], გვ. 273–274). (1) ზღვარს, თუ იგი არსებობს, დანჟუა აღნიშნავს $\psi'_{ap}(x_0)$ სიმბოლოთი, ხოლო ხინჩინი კი $\psi^{[1]}(x_0)$ სიმბოლოთი.

ψ ფუნქციას ეწოდება **აპროქსიმატულად დიფერენცირებადი** ანუ **ასიმპტოტურად დიფერენცირებადი** x_0 წერტილზე, როცა სასრულია $\psi'_{ap}(x_0)$ რიცხვი (შესაბამისად სასრულია $\psi^{[1]}(x_0)$).

შემდეგი თეორემა იძლევა კავშირს აპროქსიმატულ (ასიმპტოტურ) წარმოებულსა და დინის წარმოებულ რიცხვებს შორის (იხ. 1.17 ქვემოთ).

თეორემა 1.8.1 ([70], გვ. 282)**.** თუ უწყვეტი ψ ფუნქციისთვის დინის ოთხი წარმოებული რიცხვიდან ერთი რომელიმე სასრულია დადებითი ზომის $E \subset (a, b)$ სიმრავლის ყოველ წერტილზე (ამასთან, დინის წარმოებული რიცხვის სახეობა შეიძლება იცვლებოდეს წერტილის ცვლასთან ერთად), მაშინ E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილზე არსებობს აპროქსიმატული (ასიმპტოტური) წარმოებული.

2. ლაგრანჟის ფორმულა აპროქსიმატული წარმოებულისთვის შემდეგია.

თეორემა 1.8.2 ([88], გვ. 108)**.** ვთქვათ, F არის აპროქსიმატულად დიფერენცირებადი $[a, b]$ სეგმენტზე. მაშინ ყოველ α და β რიცხვს $[a, b]$-დან შეესაბამება ისეთი $c \in (\alpha, \beta)$ რიცხვი, რომ ადგილი აქვს

$$\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} = F'_{ap}(c), \quad \alpha < c < \beta \tag{2}$$

ტოლობას.

3. მონოტონური ფუნქციის **აპროქსიმატული ზედა მარჯვენა** და **ზედა მარცხენა წარმოებული** რიცხვები ერთიმეორისგან შეიძლება განსხვავდებოდნენ მხოლოდ σ**-ფოროვან სიმრავლეზე** ([111], გვ. 611). σ-ფოროვანი სიმრავლე უფრო მწირია, ვიდრე პირველი კატეგორიის ნულზომიანი სიმრავლე ([36], გვ. 257–258).

1.9. ცალმხრივი წარმოებული და ნახევარმხები

ცალმხრივი წარმოებულის ცნება ეფუძნება ცალმხრივი ზღვრის ცნებას (იხ. I, 10.1).

1. $\varphi(x)$ ფუნქციის **მარჯვენა წარმოებული** x_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\varphi'_+(x_0)$, ეწოდება შემდეგ

$$\varphi'_+(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} \tag{1}$$

ზღვარს, თუ იგი არსებობს სასრული ან უსასრულო*. ანალოგიურად განისაზღვრება **მარცხენა წარმოებული**, სასრული ან უსასრულო:

$$\varphi'_-(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}. \tag{2}$$

თუ $\varphi'_+(x_0)$ ან $\varphi'_-(x_0)$ სასრულია, მაშინ φ ფუნქცია მარჯვნიდან, შესაბამისად მარცხნიდან, უწყვეტია x_0 წერტილზე.

შევნიშნოთ, რომ ცალმხრივი წარმოებულისთვის მართებული არ არის, საზოგადოდ, ჯამის წარმოებულის $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ ფორმულა, როცა ჩვეულებრივი $f'(x)$ და $g'(x)$ წარმოებულები სასრულია. მაგრამ ადგილი აქვს

$$(f+g)'_+(x) = f'_+(x) + g'(x), \tag{3}$$

$$(f+g)'_-(x) = f'_-(x) + g'(x) \tag{4}$$

ტოლობებს, როცა არსებობს სასრული $g'(x)$ წარმოებული ([11], გვ. 222).

მართებულია შემდეგი

თეორემა 1.9.1 ([11], გვ. 222–223)**.** $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ყოველი $f(x)$ ფუნქციისთვის, $f'_+(x)$ და $f'_-(x)$ ფუნქციები მიეკუთვნებიან ბერის არაუმაღლეს მეორე კლასს.

შევნიშნოთ, რომ როცა $\varphi(x_0)$ არ არსებობს ან უსასრულობაა, მაშინ (1) და (2) ტოლობებში $\varphi(x_0)$-ის როლში ზოგჯერ განიხილავენ მარჯვენა $\varphi(x_0+0)$ ზღვარს და მარცხენა $\varphi(x_0-0)$ ზღვარს, თუკი ეს უკანასკნელნი სასრულებია.

თუ $\varphi(x)$ ფუნქცია მოცემულია რაიმე სეგმენტზე, რომლის მარცხენა ბოლოა a წერტილი და a-ს მარცხნივ $\varphi(x)$ განსაზღვრულად (მოცემულად) არ ითვლება, მაშინ გამოთქმა "$\varphi(x)$ ფუნქცია წარმოებადია a წერტილზე" ნიშნავს მხოლოდ იმას, რომ არსებობს $\varphi'_+(a)$, სასრული ან უსასრულო. ასევე, წარმოებული სეგმენტის მარჯვენა b

*ზოგჯერ მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულებს აღნიშნავენ $\varphi'(x_0+)$ და $\varphi'(x_0-)$ სიმბოლოებით, შესაბამისად.

ბოლოზე, რომლის მარჯვნივაც ფუნქცია მოცემულად არ ითვლება, გაიგება როგორც მარცხენა $\varphi'_-(b)$ წარმოებული.

მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულებს, ეწოდებათ **ცალმხრივი წარმოებულები**. თუ x_0 არის სეგმენტის შიგა წერტილი და თუ ამ წერტილზე $\varphi(x)$ ფუნქციას აქვს $\varphi'(x_0)$ წარმოებული, მაშინ არსებობენ $\varphi'_+(x_0)$, $\varphi'_-(x_0)$ და მართებულია $\varphi'_-(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi'_+(x_0)$ ტოლობები.

თუ $\varphi(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს როგორც მარჯვენა წარმოებული, ისე მარცხენა წარმოებული და თუ ისინი ურთიერთტოლია, მაშინ $\varphi(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს $\varphi'(x_0)$ **წარმოებული** და $\varphi'_-(x_0) = \varphi'(x_0) = \varphi'_+(x_0)$.

ფუნქციას ეწოდება წარმოებადი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ იგი წარმოებადია (a, b)-ს ყველა წერტილზე და ამავე დროს a და b წერტილებზე აქვს მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები შესაბამისად.

ფუნქციას ეწოდება **დიფერენცირებადი** $[a, b]$ **სეგმენტზე**, თუ იგი დიფერენცირებადია (a, b)-ს ყოველ წერტილზე და ამავე დროს a და b წერტილებზე აქვს სასრული მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები, შესაბამისად.

შესაძლებელია ფუნქციას ჰქონდეს მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები რაიმე x_0 წერტილზე, მაგრამ არ არსებობდეს ამ ფუნქციის წარმოებული იმავე x_0 წერტილზე. ასეთი თვისებისაა $x_0 = 0$ წერტილზე 1.2.(3) ტოლობით მოცემული $\psi(x) = |x|$ ფუნქცია. სახელდობრ, $\psi'_+(0) = 1$ და $\psi'_-(0) = -1$.

2. ფუნქციისთვის (ნახ. 5)

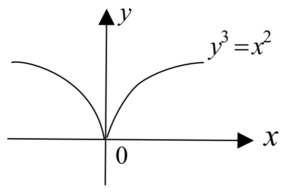
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \tag{5}$$

$x_0 = 0$ წერტილზე მარჯვენა წარმოებულია

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = +\infty \tag{6}$$

და მარცხენა წარმოებული კი

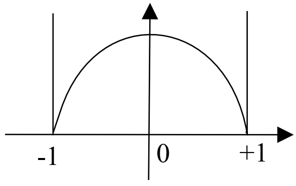
$$f'_-(0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = -\infty. \qquad (7)$$



ნახ.5

(6) და (7) ტოლობებით გამოხატულ თვისებას ასე გამოთქვამენ: კოორდინატთა სათავე არის **უკუქცევის წერტილი** $y^3 = x^2$ წირისთვის.

3. $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ ფუნქცია განსაზღვრულია მხოლოდ $[-1,1]$ სეგმენტზე. ამ სეგმენტის ბოლო (კიდური) წერტილებისთვის გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულებანი (ნახ. 6)



ნახ. 6

$$\omega'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{x\to -1+} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty. \qquad (8)$$

მარცხენა $\omega'_-(-1)$ წარმოებულს აზრი არ აქვს. ამიტომ, ზემოთ აღნიშნულის თანახმად, ω ფუნქციას -1 წერტილზე აქვს წარმოებული და

$$\omega'(-1) = +\infty. \qquad (9)$$

ანალოგიურად, $\omega'_+(1)$ აზრს მოკლებულია და ამიტომ

$$\omega'(1) = \omega'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \\ = \lim_{x\to 1-} \Big(-\sqrt{-\frac{1+x}{1-x}} \Big) = -\infty. \tag{10}$$

4. ვთქვათ, ფუნქციას წერტილთა რაიმე სიმრავლეზე აქვს სასრული ორივე ცალმხრივი წარმოებული. ბუნებრივია კითხვა: რამდენად ვრცელი შეიძლება იყოს ამ სიმრავლიდან აღებულ იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებზეც მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები ურთიერთგანსხვავებულებია? პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა შემდეგი

თეორემა 1.9.2 (სერპინსკი; დამტკიცება [80]-ში, გვ. 159)**.** ვთქვათ, სასრული ψ ფუნქცია განსაზღვრულია $(a,b)\subset\mathbb{R}$ ინტერვალზე. E იყოს სიმრავლე ყველა იმ x წერტილისა (a,b)-დან, რომლებზეც სასრულია $\psi'_+(x)$ და $\psi'_-(x)$ და სრულდება

$$\psi'_+(x) \neq \psi'_-(x)$$

უტოლობა. მაშინ E სიმრავლე სასრულია ან თვლადი.

5. თუ $\varphi(x)$ ფუნქციისთვის x_0 წერტილზე მიმდევრობითი წარმოებულების განსაზღვრისას შევიზღუდებით მხოლოდ $x > x_0$ მნიშვნელობებით, მაშინ მივიღებთ $\varphi(x)$ ფუნქციის მიმდევრობით მარჯვენა წარმოებულებს x_0 წერტილზე. ასევე, მიმდევრობითი წარმოებულების განხილვა x_0 წერტილზე მხოლოდ $x < x_0$ სიმრავლის მიმართ, მოგვცემს $\varphi(x)$ ფუნქციის მარცხენა მიმდევრობით წარმოებულებს x_0 წერტილზე.

6. ვთქვათ, $y = \varphi(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია I სეგმენტზე და ვთქვათ Γ არის მისი **გრაფიკი** $\mathbb{R}^2$-ში, ე. ი. სიმრავლე $(x,\varphi(x))$ წერტილებისა, სადაც $x \in I$.

თუ არსებობს სასრული $\varphi'_+(x_0)$, მაშინ Γ-სადმი **მარჯვენა ნახევარმხები** $(x_0,\varphi(x_0))$ წერტილზე ეწოდება $y = \varphi(x_0) + \varphi'_+(x_0)\cdot(x-x_0)$ სხივს, სადაც $x \geq x_0$.

ასევე, თუ არსებობს სასრული $\varphi'_-(x_0)$, მაშინ Γ-სადმი **მარცხენა ნახევარმხები** $(x_0, \varphi(x_0))$ წერტილზე კი ეწოდება $y = \varphi(x_0) + \varphi'_-(x_0) \cdot (x - x_0)$ სხივს, სადაც $x \leq x_0$.

თუ $\varphi'(x_0)$ წარმოებული სასრულია, მაშინ $y = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0) \cdot (x - x_0)$ წრფე წარმოადგენს $y = \varphi(x)$ ფუნქციის Γ გრაფიკისადმი $(x_0, \varphi(x_0))$ წერტილზე გამავალ **მხებს**.

როცა $\varphi'_+(x_0) = +\infty$ [ან არის $-\infty$], მაშინ Γ-სადმი $(x_0, \varphi(x_0))$ წერტილზე მარჯვენა ნახევარმხებია სიმრავლე ყველა იმ (x_0, y) წერტილისა, რომელთა $y \geq \varphi(x_0)$ [შესაბამისად $y \leq \varphi(x_0)$].

თუ $\varphi'(x_0)$ არის $+\infty$ ან $-\infty$, მაშინ Γ-სადმი $(x_0, \varphi(x_0))$ წერტილზე გამავალი მხებია $x = x_0$ წრფე.

Γ-სადმი მარჯვენა და მარცხენა ნახევარმხებებს ეწოდებათ Γ-სადმი **ცალმხრივი მხებები** შესაბამის წერტილზე.

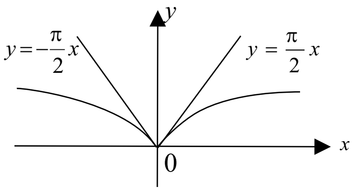
ვთქვათ, x_0 არის I სეგმენტის შიგა წერტილი და დავუშვათ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს ორივე ცალმხრივი წარმოებული. თუ $\varphi'_-(x_0)$ და $\varphi'_+(x_0)$ რიცხვთაგან ერთი მაინც სასრულია და $\varphi'_-(x_0) \neq \varphi'_+(x_0)$, მაშინ ცალმხრივი მხებები $(x_0, \varphi(x_0))$ წერტილზე ქმნიან კუთხეს. ასეთ შემთხვევაში $(x_0, \varphi(x_0))$-ს ეწოდება $y = \varphi(x)$ ფუნქციის Γ გრაფიკის **კუთხიანი წერტილი**. შესაბამისი მაგალითებია:

$$1) \quad y = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \;\; x \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \;\; x = 0. \end{cases}$$

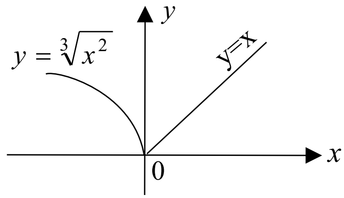
გვაქვს $y'_+(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'_-(0) = -\frac{\pi}{2}$. მარჯვენა ნახევარმხები $y = \frac{\pi}{2}x$ სხივია, ხოლო მარცხენა ნახევარმხებია $y = -\frac{\pi}{2}x$ სხივი. მაშასადამე, კოორდინატთა სათავე კუთხიანი წერტილია (ნახ. 7).

$$2) \quad y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{როცა} \;\; x \leq 0, \\ x, & \text{როცა} \;\; x > 0. \end{cases}$$

გვაქვს $y'_-(0) = -\infty$ და $y'_+(0) = 1$. კოორდინატთა სათავე აქაც კუთხიანი წერტილია (ნახ. 8).



ნახ. 7



ნახ. 8

7. განსაზღვრა 1.9.1 ([14], გვ. 181; [30], გვ. 75)**.** x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ $F(x)$ ფუნქციას ეწოდება რიმანის აზრით **გლუვი** x_0 წერტილზე, თუ სრულდება

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h}=0 \tag{11}$$

ტოლობა.

გლუვი ფუნქციები პირველად განიხილა რიმანმა (1854 წ., გამოქვეყნდა 1867 წ.) და მათ ხშირი და მრავალმხრივი გამოყენება აქვთ ჰარმონიულ ანალიზში.

ცხადია, რომ სასრული $F'(x_0)$ წარმოებულის მქონე $F(x)$ ფუნქცია გლუვია x_0 წერტილზე.

გლუვობის (11) პირობა ახლა გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\frac{1}{h}\big[F(x_0+h)-F(x_0)\big]-\frac{1}{-h}\big[F(x_0-h)-F(x_0)\big]= \\ =o(1),\quad h\to 0. \tag{12}$$

აქედან აშკარაა, რომ ერთ-ერთი სასრული ცალმხრივი წარმოებულის არსებობა იწვევს მისივე ტოლი წარმოებულის არსებობას. ამრიგად, როცა $F(x)$ ფუნქცია გლუვია x_0 წერტილზე, მაშინ $(x_0,F(x_0))$ წერტილი არ არის კუთხიანი წერტილი $y=F(x)$ წირისათვის (აქედან მომდინარეობს ტერმინი “გლუვი ფუნქცია” [180]). ამასთან ერთად,

არსებობს უწყვეტი გლუვი ფუნქცია, რომელიც არადიფერენცირება-დია თითქმის ყველგან ([14], გვ. 181; [30], გვ. 83, 330, 331) და მის-თვის მართებულია ლაგრანჟის 1.5.2 ფორმულა ([14], გვ. 182; [30], გვ. 76).

შედეგი 1.9.1. წერტილზე გლუვი ფუნქცია სიმეტრიულია იმავე წერტილზე (I, 11.1) და სიმრავლეზე სიმეტრიული ფუნქცია უწყვეტია თითქმის ყველგან (I, 11.1 თეორემის $2'$) მტკიცება).

შედეგი 1.9.2. რომელიმე წერტილზე სასრული წარმოებულის მქონე ფუნქცია სიმეტრიულია იმავე წერტილზე.

ყოველი გლუვი ფუნქციისთვის მართებულია შემდეგი წინადადე-ბა, რომელიც მცდარია საზოგადოდ (აქ გამოყენებული სიმბოლიკა იხილე 1.17 და 1.16-ში ქვემოთ).

წინადადება 1.9.1 ([14], გვ. 181)**.** თუ $F(x)$ ფუნქცია გლუვია x_0 წერტილზე, მაშინ ადგილი აქვს დამოკიდებულებებს

$$\overline{D}^{\,+}F(x_0)=\overline{F}^{\,\prime}(x_0)=\overline{D}^{\,-}F(x_0), \tag{13}$$

$$\underline{D}^{+}F(x_0)=\underline{F}'(x_0)=\underline{D}^{-}F(x_0). \tag{14}$$

დამტკიცება. საკმარისია დამტკიცდეს, მაგალითად, (13) და-მოკიდებულებების ნაპირა წევრების ტოლობა. ამისთვის კი,

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=$$

$$=\Big[\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-\frac{F(x_0-h)-F(x_0)}{-h}\Big]+\frac{F(x_0-h)-F(x_0)}{-h}$$

ტოლობის მიმართ გამოვიყენოთ (12) ტოლობა და I თავიდან 1.10.1 შედეგი.

აქედან და დანჟუას თეორემის 1.17.2 შედეგის გამოყენებით მი-იღება

შედეგი 1.9.3. უწყვეტი გლუვი და თითქმის ყველგან არადიფე-რენცირებადი $g(x)$ ფუნქციისთვის (იხ. [30], გვ. 83-ზე $g_1(x)$ ფუნქცია

და გვ. 76) ზედა $\overline{g}\,'(x)$ და ქვედა $\underline{g}'(x)$ წარმოებულები სასრულია მხოლოდ ნულზომის სიმრავლეზე.

1.10. ლაგრანჟის ფორმულა ცალმხრივი წარმოებულებისთვის

1. თეორემა 1.10.1 ([118]). ვთქვათ, f ფუნქცია ზემოდან ნახევრადუწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, $f(a) < f(b)$ და ვთქვათ, (a,b) ინტერვალის ყოველ x წერტილზე f-ს აქვს სასრული მარჯვენა $f'_+(x)$ და მარცხენა $f'_-(x)$ წარმოებულები. თუ f ფუნქციას a და b წერტილებზე აქვს ურთიერთტოლი სასრული მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები, მაშინ არსებობენ ისეთი c, p და q რიცხვები, რომ $a < c < b$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q=1$ და ადგილი აქვს

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = p\, f'_+(c) + q\, f'_-(c) \qquad (1)$$

ტოლობას.

ანალოგიურ თეორემას ადგილი აქვს ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი f ფუნქციისთვის, როცა $f(a) > f(b)$.

2. გარკვეული თვისებების მქონე ტოპოლოგიური სივრციდან აღებული ღია სიმრავლეების უწყვეტი ასახვებისთვის, დადგენილია გარკვეული კავშირი მიმართულ ცალმხრივ დიფერენცირებადობასა და გატოს აზრით დიფერენცირებადობას შორის ([96]). ამ კავშირის დადგენისას დამტკიცდა შემდეგი

თეორემა 1.10.2 ([96]). ვთქვათ, $[t_1, t_2]$ სეგმენტზე განსაზღვრული φ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს:

1) φ შემოსაზღვრულია და აღწევს თავის ზუსტ ზედა და ქვედა საზღვრებს $[t_1, t_2]$-ზე;

2) φ-ს აქვს სასრული მარჯვენა $\varphi'_+(t)$ წარმოებული ყოველ $t \in (t_1, t_2)$ წერტილზე;

3) φ მარჯვნიდან უწყვეტია t_1 წერტილზე.

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ მტკიცებებს:

ა) არსებობს ისეთი $\lambda \in [0,1]$, $s_1 \in (t_1,t_2)$ და $s_2 \in (t_1,t_2)$ რიცხვები, რომ

$$\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1} = \lambda\varphi'_+(s_1) + (1-\lambda)\varphi'_+(s_2); \qquad (2)$$

ბ) არსებობს ისეთი $s \in (t_1,t_2)$ რიცხვი, რომ

$$\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{t_2-t_1} \le |\varphi'_+(s)|;$$

გ) თუ (t_1,t_2) ინტერვალზე $\varphi'_+(t) \ge 0$ (ან $\varphi'_+(t) \le 0$), მაშინ φ ფუნქცია ზრდადია (შესაბამისად კლებადია) $[t_1,t_2]$ სეგმენტზე.

1.11. წარმოებულის ზღვარი და მისი წყვეტის წერტილის ბუნება

1. აქ საუბარი იქნება ლაგრანჟის ფორმულის ერთ საინტერესო გამოყენებაზე.

თეორემა 1.11.1. ვთქვათ, $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[x_0, x_0+\delta]$ სეგმენტზე [ან $[x_0-\eta, x_0]$ სეგმენტზე] და მას ყველა x, $x_0 < x < x_0+\delta$, წერტილზე [ყველა x, $x_0-\eta < x < x_0$, წერტილზე] აქვს სასრული ან უსასრულო $\varphi'(x)$ წარმოებული, რომელსაც x_0 წერტილზე აქვს მარჯვენა [მარცხენა] ზღვარი. მაშინ x_0 წერტილზე არსებობს მარჯვენა [მარცხენა] $\varphi'_+(x_0)$ წარმოებული [შესაბამისად $\varphi'_-(x_0)$] და ადგილი აქვს

$$\varphi'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \varphi'(x) \ \Big[\text{შესაბამისად } \varphi'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \varphi'(x)\Big] \qquad (1)$$

ტოლობას. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. ლაგრანჟის 1.5.(2) ფორმულის თანახმად

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \varphi'(c), \quad x_0 < c < x_0+\delta. \qquad (2)$$

რადგანაც არსებობს მარჯვენა $\lim\limits_{x\to x_0+} \varphi'(x)$ ზღვარი, ამიტომ, კერძოდ, არსებობს მარჯვენა $\lim\limits_{x\to x_0+} \varphi'(c)$ ზღვარიც და ადგილი აქვს მათ ტოლობას*

$$\lim_{x\to x_0+} \varphi'(c) = \lim_{x\to x_0+} \varphi'(x). \tag{3}$$

(2) და (3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+} \varphi'(x). \tag{4}$$

მაგრამ ამ ტოლობის მარცხენა მხარე, განსაზღვრის თანახმად, არის $\varphi'_+(x_0)$. მაშასადამე, მივიღეთ (1) ტოლობის პირველი შემთხვევა.

მსგავსად დამტკიცდება, შესაბამის პირობებში, (1) ტოლობის მეორე შემთხვევაც. შებრუნებული მტკიცების მცდარობა ჩანს 1.2.8 მაგალითზე.

შედეგი 1.11.1. ვთქვათ, $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილის მიდამოში და შესაბამის უცენტრო მიდამოში მას აქვს სასრული წარმოებული, რომლისთვისაც არსებობს სასრული ან უსასრულო

$$\lim_{x\to x_0} \varphi'(x) \tag{5}$$

ზღვარი. მაშინ x_0 წერტილზე არსებობს $\varphi'(x_0)$ წარმოებული და ადგილი აქვს

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \varphi'(x) \tag{6}$$

ტოლობას. ამასთან, ამ ფაქტს შებრუნებული არ აქვს (იხ. მაგალითი 1.2.8) და ეს ფაქტი რეალიზებადია (იხ. ტოლობა 1.2.(18)).

მაგალითი 1.11.1. $\lambda(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$ ფუნქციისთვის არ არსებობს $\lambda'(0)$.

---

*გავიხსენოთ, რომ c არის x-ის ფუნქცია (იხ. 1.5-დან 3).

მართლაც,

$$\lambda'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2}\,, & \text{როცა } x > 0, \\ \dfrac{2}{1+x^2}\,, & \text{როცა } x < 0 \end{cases}$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{x\to 0+} \lambda'(x) = -\lim_{x\to 0+} \frac{2}{1+x^2} = -2,$$
$$\lim_{x\to 0-} \lambda'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{2}{1+x^2} = 2$$

ტოლობანი. ამიტომ, თეორემა 1.11.1-ის ძალით, $\lambda'_+(0) = -2$ და $\lambda'_-(0) = 2$, ე. ი. $\lambda'_+(0) \neq \lambda'_-(0)$. მაშასადამე, $\lambda'(0)$ არ არსებობს.

2. თუ უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქციის $\varphi'(x)$ წარმოებულს აქვს სასრული ან უსასრულო ცალმხრივი $\lim\limits_{x\to x_0-} \varphi'(x)$ და $\lim\limits_{x\to x_0+} \varphi'(x)$ ზღვრები x_0 წერტილზე და თუ ეს ზღვრები განსხვავდებიან ერთმანეთისგან, მაშინ არსებობენ $\varphi'_-(x_0)$, $\varphi'_+(x_0)$ და ადგილი აქვს $\varphi'_-(x_0) \neq \varphi'_+(x_0)$ უტოლობას.

ეს ნიშნავს, რომ x_0 წერტილზე არ არსებობს არც სასრული და არც უსასრულო $\varphi'(x_0)$ წარმოებული. აქედან მიიღება

თეორემა 1.11.2. თუ x_0 წერტილის მიდამოში უწყვეტ $\varphi(x)$ ფუნქციას ამ მიდამოს ყოველ წერტილზე აქვს სასრული ან უსასრულო $\varphi'(x)$ წარმოებული, მაშინ ამ წარმოებულს არ შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტა x_0 წერტილზე.

დამტკიცება. თუკი $\varphi'(x)$ წარმოებულს ექნება პირველი გვარის წყვეტა x_0 წერტილზე, მაშინ ადგილი ექნება $\lim\limits_{x\to x_0-} \varphi'(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+} \varphi'(x)$ უტოლობას. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\varphi'_-(x_0) \neq \varphi'_+(x_0)$. ეს კი ნიშნავს $\varphi'(x_0)$-ის არ არსებობას, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

შედეგი 1.11.2. თუ ცნობილია, რომ უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქციის $\varphi'(x)$ წარმოებულისთვის x_0 არის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, მაშინ $\varphi'(x_0)$ წარმოებული არ არსებობს.

შედეგი 1.11.3. წარმოებულს არ შეიძლება ჰქონდეს ასაცილებელი წყვეტის წერტილი.

ეს გამომდინარეობს, (6) ტოლობის თანახმად იქიდან, რომ წარმოებული უწყვეტია ყველა იმ წერტილზე, რომელზეც მას სასრული ზღვარი აქვს.

მაშასადამე, თუ x_0 წერტილის მიდამოში უწყვეტ $\varphi(x)$ ფუნქციას ამ მიდამოს ყველა წერტილზე აქვს სასრული ან უსასრულო $\varphi'(x)$ წარმოებული, მაშინ $\varphi'(x)$-თვის x_0 იქნება წყვეტის წერტილი ორ შემთხვევაში:

ა) თუ $\varphi'(x_0)$ ტოლია $+\infty$-ის ან $-\infty$-ის;

ბ) თუ x_0 არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი $\varphi'(x)$ წარმოებულისთვის.

1.12. დარბუს თეორემა წარმოებულის შუალედური მნიშვნელობის შესახებ

როგორც ვიცით, $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი არამუდმივი $f(x)$ ფუნქცია იღებს ყველა შუალედურ მნიშვნელობას $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს შორის, ამათი ჩათვლით.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს უფრო ძლიერი შემდეგი ფაქტი.

$[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი არამუდმივი ფუნქცია იღებს ყველა შუალედურ მნიშვნელობას მის მინიმუმსა და მაქსიმუმს შორის, ე. ი. თუ $m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$ და γ არის ნებისმიერი რიცხვი თვისებით $m \le \gamma \le M$, მაშინ არსებობს ისეთი $x^* \in [a, b]$ წერტილი, რომ $f(x^*) = \gamma$.

ამ ფაქტის შესამჩნევად საკმარისია $f(x)$ ფუნქცია განვიხილოთ $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ სეგმენტზე და თეორემა გამოვიყენოთ $f(x_1)$ და $f(x_2)$ რიცხვებისთვის, სადაც $m = f(x_1)$ და $M = f(x_2)$.

აღნიშნულ ფაქტს შებრუნებული არ აქვს. მართლაც, $x=0$ წერტილზე წყვეტილი

$$\varphi(x)=\begin{cases}x+1, & \text{როცა } -1\le x\le 0,\\ -x, & \text{როცა } 0<x\le 1\end{cases}$$

ფუნქცია იღებს ყველა მნიშვნელობას -1-ს (მინიმუმს) და 1-ს (მაქსიმუმს) შორის.

ახლა ვნახავთ, რომ ამ მაგალითის თვისება აქვს წარმოებულს, თუნდაც იგი წყვეტილი ფუნქცია იყოს.

თეორემა 1.12.1 (დარბუ)**.** ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $[a,b]$ სეგმენტზე. მაშინ ღია (a,b) ინტერვალზე $f'(x)$ წარმოებული იღებს ყველა მნიშვნელობას იმ ღია ინტერვალიდან, რომლის ბოლოებია $f'(a)$ და $f'(b)$ რიცხვები.

დამტკიცება. გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $f'(a)<f'(b)$. ავიღოთ $(f'(a),f'(b))$ შუალედიდან რაიმე γ, $f'(a)<\gamma<f'(b)$, რიცხვი. წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $h>0$ რიცხვი, რომ სრულდებოდეს დამოკიდებულებანი:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}<\gamma<\frac{f(b-h)-f(b)}{-h}\,. \tag{1}$$

ასეთი თვისების ფიქსირებული h-თვის განვიხილოთ x-ის ფუნქცია

$$F_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

$F_h(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b-h]$ სეგმენტზე და ამიტომ, (1) უტოლობების ძალით, $(a,b-h)$ ინტერვალში არსებობს ისეთი x_0 წერტილი, რომ $F_h(x_0)=\gamma$, ე. ი.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\gamma,\ \ a<x_0<b-h.$$

მაგრამ, ლაგრანჟის ფორმულის ძალით, (x_0, x_0+h) ინტერვალში არსებობს ისეთი c წერტილი, რომ

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(c).$$

მაშასადამე, $f'(c)=\gamma$, სადაც $a<c<b$. თეორემა დამტკიცებულია.

1.13. ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობის შესახებ

ვთქვათ, f ფუნქცია დიფერენცირებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და ვთქვათ, მისი $f'(x)$ წარმოებული შემოსაზღვრულია ამავე სეგმენტზე. ეს ნიშნავს ისეთი სასრული L რიცხვის არსებობას, რომ

$$|f'(x)| < L, \ \ x \in [a,b]. \tag{1}$$

$[a,b]$ სეგმენტზე ნებისმიერად ავიღოთ x_1 და x_2 წერტილები და დავწეროთ ლაგრანჟის ფორმულა:

$$f(x_1)-f(x_2) = f'(c)(x_1-x_2), \ \ x_1<c<x_2.$$

აქედან ვიღებთ, რომ

$$\bigl|f(x_1)-f(x_2)\bigr| \le L|x_1-x_2|. \tag{2}$$

ახლა ნებისმიერად დავასახელოთ $\varepsilon>0$ რიცხვი და ავიღოთ მეორე დადებითი $\delta=\varepsilon/L$ რიცხვი. თუკი $[a,b]$ სეგმენტიდან ნებისმიერად აღებული x_1 და x_2 წერტილები დააკმაყოფილებენ $|x_1-x_2|<\delta$ პირობას, მაშინ გვექნება უტოლობა:

$$\bigl|f(x_1)-f(x_2)\bigr| < \varepsilon.$$

ეს კი ნიშნავს $f(x)$ ფუნქციის თანაბარ უწყვეტობას $[a,b]$ სეგმენტზე.

როგორც ვიცით, $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისთვის კანტორის თეორემა ადასტურებს საჭირო თვისების მქონე δ-ს მხოლოდ არსებობას წინასწარ დასახელებული ε-თვის.

აქ ჩატარებული მსჯელობა გვიჩვენებს, რომ გარკვეულ პირობებში შესაძლებელია δ რიცხვის ცხადი სახით მოცემა.

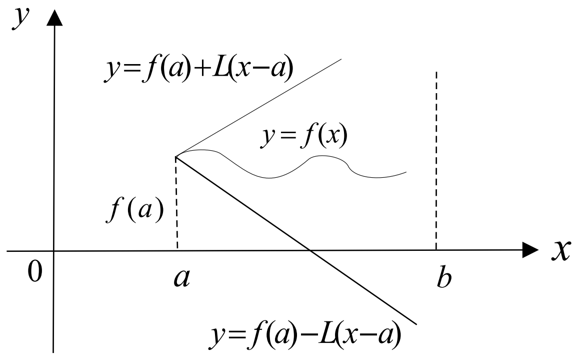
თუ, კერძოდ, ავიღებთ $x_2 = a$ და $x_1 = x$, მაშინ (2) მიიღებს სახეს

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leq L(x - a)$$

ანუ

$$f(a) - L(x - a) \leq f(x) \leq f(a) + L(x - a).$$

მაშასადამე, $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მოთავსებულია $y = f(a) \pm L(x - a)$ წრფეებით შექმნილ კუთხეში (ნახ. 9).



ნახ. 9

1.14. წარმოებულის არმქონე უწყვეტი ფუნქციები

წარმოებულის ინტერპრეტაციამ მოძრავი მატერიალური წერტილის სიჩქარითა და წირისადმი გავლებული მხებით, გარკვეული როლი შეასრულა მცდარი აზრის ფორმირებაში: თითქოს უწყვეტ ფუნქციას წარმოებული აქვს ყოველ წერტილზე გარდა, შესაძლებელია ზოგიერთი განსაკუთრებული წერტილისა, რომელთა რაოდენობა სასრულია.

ასეთი აზრის იყო, მაგალითად ამპერი (1806 წ.). ამპერი მსჯელობაში ეყრდნობოდა მცდარ დაშვებას, თითქოს ყოველი უწყვეტი წირი წარმოადგენს მონოტონური რკალების გაერთიანებას ([79], [51], გვ. 13).

სწორედ ამ დაშვების მცდარობას გაუსვა ხაზი ბოლცანომ თავის შრომაში (1830 წ.). ბოლცანომ ამ შრომაში ააგო უწყვეტი ფუნქცია (ბოლცანოს ფუნქცია), რომელსაც არ აქვს მონოტონურობის ქვეინტერვალი და სასრული წარმოებული არ აქვს ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე ([18], გვ. 16).

მოგვიანებით რიხლიკმა ([53], [123], გვ. 402) აჩვენა, რომ ბოლცანოს ფუნქცია ყველა შიგა წერტილზე მოკლებულია როგორც სასრულ, ისე უსასრულო წარმოებულს. ამასთან მარცხენა ბოლოზე მას აქვს $+\infty$-ის ტოლი წარმოებული (ე. ი. მარჯვენა წარმოებული), ხოლო მარჯვენა ბოლოზე კი არ აქვს მარცხენა წარმოებული*.

---

*ქ. პრაღაში დაბადებული, იტალიელი მამით და გერმანელი დედით ([37], გვ. 136), ბერნარდ ბოლცანო (1781–1848წწ.) იყო ჩეხეთის ერთ-ერთი თვალსაჩინო მეცნიერი და თავისი ქვეყნის დიდი პატრიოტი. ამის დასტურია მისი განუწყვეტელი ბრძოლა ჩეხეთის გათავისუფლებისათვის ავსტრიის გავლენისაგან ([37]). ბოლცანო იყო რელიგიის ფილოსოფიის პროფესორი და 1805–1820 წლებში ხელმძღვანელობდა რელიგიის ისტორიის კათედრას პრაღის უნივერსიტეტში. ბოლცანომ პროფესიად მღვდლობა აირჩია, რათა ხალხთან ურთიერთობის შესაძლებლობა ჰქონოდა. ავსტრიის იმპერატორისა და საიდუმლო პოლიციის უნდობლობას ბოლცანოსადმი აძლიერებდა მისი იტალიური წარმოშობის გვარი ([37], გვ. 23) – შესაძლებელია, რომ მამამისი დაიბადა იტალიის ჩრდილო პროვინცია ბოლცანოში. ჩეხეთის მიმართ ავსტრიის აგრესიული პოლიტიკის გამო, ბოლცანო ბრძოლისაკენ მოუწოდებდა ჩეხ ხალხს. ამის გამო ხელისუფლებამ მას 1820 წელს დაატოვებინა კათედრა, სამუდამოდ აუკრძალა საჯარო გამოსვლები და ნაშრომთა ბეჭდვა. აქედან დაწყებული, თავისი სიცოცხლის ბოლო 28 წელი მან გაატარა მეგობრებთან და ახლობლებთან. მიუხედავად მისი ასეთი მძიმე პირობებისა (მას ჯანმრთელობაც სუსტი ჰქონდა ბავშვობიდანვე), ის აწარმოებდა ძალიან ღრმა ფილოსოფიურ და მათემატიკურ გამოკვლევებს. ის იყო კოშის, ვაიერშტრასის და გ. კანტორის წინამორბედი, ანალიზის ბევრი პრობლემის დასმა-გადაწყვეტაში. მისი ძირითადი შრომები განეკუთვნება მათემატიკურ ანალიზს, მექანიკასა და ფიზიკას ([17], გვ. 58). მის მიერ მიღებული შედეგები უცნობი დარჩა 1920 წლამდე, ვიდრე მისი ნაწერები არ აღმოაჩინეს ქ. ვენის სახელმწიფო ბიბლიოთეკაში. მან განსაკუთრებული როლი შეიტანა მათემატიკურ ლოგიკასა და სიმრავლეთა თეორიაში. მისი გარდაცვალების შემდეგ, 1851 წელს დაიბეჭდა მისი წიგნი "უსასრულობის პარადოქსები", რომელსაც მაღალი შეფასება მისცა გ. კანტორმა 1883 წელს. მისი მთავარი შრომა "ფუნქციათმცოდნეობა" 1830 წლითაა დათარიღებული და დაიბეჭდა მხოლოდ 1930 წელს ([18]).

რიმანმა თავის ლექციებში (1854–1866 წწ.) ააგო ფუნქცია, რომლის განუსაზღვრელ ინტეგრალს (ე. ი. აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას) წარმოებული არ აქვს ყველგან მკვრივ თვლად სიმრავლეზე ([44], გვ. 252).

ლუზინმა კი ააგო ისევ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც წარმოებულს მოკლებულია ყველგან მკვრივ და კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეზე ([41], გვ. 75–76).

დირიჰლემ თავის ლექციებში (1854 წ.) აღნიშნა, რომ შეიძლება გრაფიკულად აიგოს უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც არ ექნება წარმოებადობის წერტილი ([44], გვ. 189).

შემდეგ ვაიერშტრასმა მიუთითა მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც სასრულ წარმოებულს მოკლებულია ყველგან. ვაიერშტრასის ეს შედეგი თარიღდება ([12], გვ. 111–112) სხვადასხვა წლებით (1861, 1872), თუმცა იგი პირველად გამოაქვეყნა დიუ ბუა რეიმონმა 1875 წელს ([97], [51], გვ. 13; [30], გვ. 83).

1879 წელს დარბუმ ააგო უსასრულო კლასი უწყვეტი ფუნქციებისა, რომელთაც არ აქვთ წარმოებადობის წერტილი ([17], გვ. 159).

ვრცლად ეს საკითხები გაშუქებულია [123]-ში გვ. 401–412 და [42]-ში, გვ. 312–313.

ამ წიგნში დამტკიცებულია ძირითადი თეორემები უწყვეტი ფუნქციების შესახებ: სეგმენტზე უწყვეტი არამუდმივი ფუნქცია იღებს შუალედურ მნიშვნელობას; სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია და აღწევს ზუსტ ზედა და ქვედა ზღვრებს; სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია განულდება ერთ მაინც შიგა წერტილზე, თუ ამ სეგმენტის ბოლოებზე მის მიერ მიღებული მნიშვნელობების ნამრავლი უარყოფითია. წიგნში მოცემულია გაწარმოების წესები, პირველადი ფუნქციის ცნება და განსაზღვრული ინტეგრალი, როგორც ჯამების ზღვარი. აქვეა ცალმხრივი ზღვრის ცნებაც. ბოლცანომ შექმნა მწკრივთა კრებადობის თეორიის საფუძვლები. მას აუცილებლად მიაჩნდა მექანიკის აქსიომატიზება. განავითარა ტალღის გავრცელების თეორია. მათემატიკურ მეთოდს თვლიდა მეცნიერული კვლევის ერთადერთ მეთოდად. ბოლცანოს 1817 წლის ერთ-ერთ შრომას აბელი გაეცნო 1826 წელს პარიზში და ემზადებოდა პრაღაში წასასვლელად, რათა შეხვედროდა ბოლცანოს. მაგრამ ეს არ მოხდა აბელის გარდაცვალების გამო (1829 წ.). ცნობილ ფილოსოფოსს შალვა ნუცუბიძეს ეკუთვნის შრომა "ბოლცანო და მეცნიერების თეორია" ([2]), რომელიც რუსულად გამოქვეყნდა 1913 წელს.

ვან დერ ვარდენის ([175]) შედარებით მარტივი მაგალითი უწყვეტი ფუნქციისა, რომელსაც წარმოებადობის წერტილი არ აქვს, მოცემულია წიგნში [3], გვ. 393–395. ეს მაგალითი ემყარება იმას, რომ მთელი რიცხვებიდან შედგენილი მიმდევრობა კრებადია მხოლოდ მაშინ, როცა გარკვეული ადგილიდან დაწყებული ყველა მისი წევრი ურთიერთტოლია ([51], გვ. 13).

პირველი მაგალითი ისეთი უწყვეტი ფუნქციისა, რომელიც ყოველ წერტილზეა მოკლებული როგორც სასრულ, ისე უსასრულო ორივე ცალმხრივ წარმოებულს, ეკუთვნის ბეზიკოვიჩს [15].

1934 წელს ლუზინმა მიუთითა წარმოებულის არმქონე უწყვეტი ფუნქციის აგების თავისებური მეთოდი ([42], გვ. 313–314).

წარმოებულის არმქონე უწყვეტ ფუნქციებთან დაკავშირებით ბორელმა 1912 წელს დასვა შემდეგი ამოცანა, რომელიც 1904 წელს იყო დასმული მლოდზეევსკის მიერ: არადიფერენცირებად $F(x)$ ფუნქციას და x-ის a მნიშვნელობას შევუსაბამოთ ისეთი $F^{[1]}(a)$ რიცხვი, რომელსაც ექნება ჩვეულებრივი წარმოებულის ძირითადი თვისებები ([41], გვ. 179).

ეს ამოცანა განიხილეს (იხ. [70]-ში სქოლიო 274 გვერდზე) ლუზინმა 1915 წელს (შემოიღო რა "განზოგადებული წარმოებული"-ს ცნება – [41], გვ. 185–187), ხინჩინმა 1916 წელს (შემოიღო "ასიმპტოტური წარმოებული"-ს ცნება) და დანჟუამ იმავე 1916 წელს (შემოიღო "აპროქსიმატული წარმოებული"-ს ცნება). სამივე ეს ცნება ერთი და იგივეა.

აღმოჩნდა, რომ უკლებლივ ყველა უწყვეტ ფუნქციას ყოველი ქვეინტერვალიდან არათვლად სიმრავლეზე გააჩნია სასრული ან უსასრულო აპროქსიმატული ცალმხრივი (მარჯვენა ან მარცხენა) წარმოებული ([41], გვ. 313).

აპროქსიმატული წარმოებულის კავშირი წარმოებულის სხვა განზოგადებებთან ვრცლად შეისწავლა ხინჩინმა ([70], [71]).

1934 წელს იარნიკმა დაამტკიცა ისეთი უწყვეტი შემოსაზღვრული ფუნქციის არსებობა, რომელიც სასრულ აპროქსიმატულ წარმოებულს მოკლებულია ყველგან ([127], გვ. 91). ასეთი თვისების ფუნქციებზე და მათ გამოყენებაზე იხ. [127], გვ. 91–94 და 226–236.

ტოლსტოვმა ააგო ყოველ წერტილზე ჩვეულებრივ წარმოებულს როგორც სასრულს, ისე უსასრულოს, მოკლებული უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც თითქმის ყველგან აქვს სასრული აპროქსიმატული წარმოებული ([41], გვ. 448–452).

არსებობს უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც ყოველ წერტილზე მოკლებულია სასრულ ჩვეულებრივ, სასრულ აპროქსიმატულ და სასრულ განზოგადებულ (distributional) წარმოებულებს ([169]).

ცნობილია აგრეთვე უწყვეტი ფუნქცია ([114]), რომელიც ყველგანაა მოკლებული სიმეტრიულ წარმოებულს (სიმეტრიული წარმოებულის ცნება იხილე ქვემოთ, § 7).

უწყვეტი არადიფერენცირებადი ფუნქციის აგების გამარტივებული მეთოდი მოცემულია [137] შრომაში.

1.15. წარმოებულის არსებობის შესახებ

წარმოებულის ცნების ფორმირების შემდეგ თავისუფლად შეეძლოთ მოცემული ფუნქციის გაწარმოება, თუკი მას წარმოებული ჰქონდა. მიუხედავად ამისა, დიდი ხანი ცნობილი არ იყო დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასი, თუ არ ჩავთვლით ანალიზურ ფუნქციებს, რომელნიც განისაზღვრებიან წარმოებულით. ამ მიმართულებით უაღრესად მნიშვნელოვანია ლებეგის შემდეგი

თეორემა 1.15.1 ([134], [135], [39], გვ. 155; [3], გვ. 409)**.** სასრული ვარიაციის ფუნქციას*, კერძოდ, ლიპშიცის კლასის ფუნქციას** თითქმის ყველგან აქვს წარმოებული და იგი ჯამებადია.

---

*სასრული ვარიაციის ფუნქციის ცნება შემოიღო ჟორდანმა 1882 წელს ([12], გვ. 158; [3], გვ. 309).

**ლიპშიცის კლასის ფუნქციისთვის გარანტირებული არ არის წარმოებულის ყველგან არსებობა. მაგალითად, 1.2.(3) ტოლობით განსაზღვრული $\psi(t) = |t|$ ფუნქციისათვის არ არსებობს $\psi'(0)$, თუმცა $\psi(t)$ ფუნქცია ლიპშიცის კლასისაა,

არანაკლებ მნიშვნელოვანია ლებეგისავე შემდეგი

თეორემა 1.15.2 ([134], [135], [39], გვ. 158; [45], გვ. 234). ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალს თითქმის ყველგან აქვს წარმოებული, რომელიც ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ტოლია თითქმის ყველგან***.

სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასიდან ვიტალიმ (1904 წ.) გამოყო ([44], გვ. 253) გარკვეული თვისების ფუნქციების კლასი, რომელთაც მან უწოდა აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციები**** და დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა 1.15.3 ([176], [39], გვ. 157). $F(x)$ ფუნქცია იქნება აბსოლუტურად უწყვეტი $[a,b]$-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $F(x)$ არის $[a,b]$ სეგმენტზე ჯამებადი რომელიმე ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი.

როგორც 1.15.2 და 1.15.3 თეორემებიდან ჩანს, აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას სასრული წარმოებული აქვს, გარდა შესაძლებელია, ნულზომის სიმრავლისა. ბუნებრივია კითხვა: რა შეიძლება მოხდეს ნულზომიან ასეთი თვისების სიმრავლეზე? ამ კითხვაზე პასუხები ასეთია.

თეორემა 1.15.4 ([41], გვ. 400). ვთქვათ, $M \subset [a,b]$ არის ნულზომიანი ნებისმიერი სიმრავლე. მაშინ არსებობს $[a,b]$-ზე ისეთი

რადგანაც $||t_1| - |t_2|| \leq |t_1 - t_2|$. გარდა ამისა, ლიპშიცის კლასის ფუნქციის წარმოებული, სადაც იგი არსებობს, არ შეიძლება უსასრულობა იყოს. ლიპშიცის კლასის ფუნქცია ინახავს აბსოლუტურად უწყვეტობის თვისებას: ყველა აბსოლუტურად უწყვეტი $\varphi(t)$ ფუნქციის $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ ფუნქცია რომ იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი, აუცილებელი და საკმარისია $F(x)$ ფუნქციის ლიპშიცის კლასისადმი მიკუთვნება ([65], [3], გვ. 323).

***ცნობილია ლებეგის ამ თეორემის ანალოგი დანჟუა-პერონის ინტეგრალისთვის ([78]).

****ვიტალისაგან დამოუკიდებლად და იმავდროულად, აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის კავშირი განუსაზღვრელ ინტეგრალთან განიხილა ლებეგმაც ([39], გვ. 157, სქოლიო). აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის ცნება უფრო ადრე, 1900 წელს შემოიღო ასკოლიმ ([12], გვ. 83).

აბსოლუტურად უწყვეტი $\Phi(x)$ ფუნქცია, რომ $\Phi'(x) = +\infty$ ყოველ $x \in [a, b]$ წერტილზე.

ცნობილია აგრეთვე იგივე თვისების მქონე უწყვეტი ზრდადი ფუნქციის აგების წესი ([45], გვ. 201–202).

თეორემა 1.15.5 ([60], გვ. 378)**.** ვთქვათ, $e \subset [a, b]$ ნებისმიერი ნულზომიანი სიმრავლეა და ε ასევე ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია. მაშინ არსებობს $[a, b]$-ზე არაკლებადი აბსოლუტურად უწყვეტი ისეთი $\psi(t)$ ფუნქცია, რომ $\psi'(t) = +\infty$ ყველა $t \in e$ წერტილზე და $\psi(b) - \psi(a) < \varepsilon$.

საინტერესოა აგრეთვე შემდეგი

თეორემა 1.15.6 ([54], გვ. 195)**.** სასრული ვარიაციის ყოველ უწყვეტ ფუნქციას, თუ იგი აბსოლუტურად უწყვეტი არაა, უსასრულო წარმოებული აქვს არათვლად სიმრავლეზე.

ზემოთ აღნიშნულ 1.15.5 თეორემასთან დაკავშირებით ისმის კითხვა: შესაძლებელია თუ არა წარმოებული უსასრულობის ტოლი იყოს დადებითი ზომის სიმრავლეზე?

ამ მიმართულებით პირველი შედეგი ეკუთვნის ლუზინს და იგი ასეთია.

თეორემა 1.15.7 ([41], გვ. 278–285)**.** არ არსებობს $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $F(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $F'(x) = +\infty$ ან $F'(x) = -\infty$ ტოლობა შესრულდება დადებითი ზომის სიმრავლეზე.

ამ თეორემის გარკვეული გაუმჯობესებაა შემდეგი

თეორემა 1.15.8 ([15], სქოლიო 532 გვერდზე; [54], გვ. 341; [64], გვ. 24)**.** ყოველი უწყვეტი ფუნქციისთვის ნულზომიანია სიმრავლე ყველა იმ წერტილისა, რომლებზეც ერთი მაინც ცალმხრივი წარმოებული უსასრულობაა.

შემდეგში ბეზიკოვიჩმა აჩვენა, რომ უწყვეტობა კი არადა ზომადობის მოთხოვნაც ზედმეტია ანუ მართებულია

თეორემა 1.15.9 ([15], სქოლიო 532 გვერდზე ან [54], გვ. 390)**.** ყოველი სასრული F ფუნქციისთვის ნულზომიანია სიმრავლე ყველა იმ x წერტილისა, რომლებზეც

$$\lim_{h\to 0+} \bigl|F(x+h)-F(x)\bigr|/h = +\infty.$$

ცხადია, რომ 1.15.1 თეორემით დასტურდება თითქმის ყველგან სასრული წარმოებულის არსებობა მონოტონური ფუნქციისთვის, რაც ემთხვევა ამპერის ზემოთ აღნიშნულ მოსაზრებას (1806 წ.). აქედან გამომდინარეობს, რომ არსად დიფერენცირებად ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს მონოტონურობის ქვეინტერვალი. აქვე ბუნებრივად ისმის კითხვა: შეიძლება თუ არა დიფერენცირებად ფუნქციას არ ჰქონდეს მონოტონურობის ქვეინტერვალი? ამასთან დაკავშირებით გარკვეულ ინტერესს იწვევს შემდეგი თეორემა, რომელიც ეხმიანება ბოლცანოს ზემოთ აღნიშნულ მტკიცებას.

თეორემა 1.15.10 ([126])**.** არსებობს მონოტონურობის ქვეინტერვალის არმქონე ფუნქცია, რომლის წარმოებული სასრულია ყველგან.

ცნობილია, რომ უკანასკნელ თეორემაში აღნიშნული ფუნქცია შეიძლება აღიჭურვოს იმ თვისებითაც, რომ მისი წარმოებული იყოს შემოსაზღვრული. ამიტომ ეს ფუნქცია ლიპშიცის კლასისაა და, მაშასადამე, აბსოლუტურად უწყვეტი. ცხადია f' ინტეგრებადია ლებეგის აზრით, მაგრამ f' რიმანის აზრით არაინტეგრებადია ყოველ ქვეინტერვალზე ([127], გვ. 76–77).

დასასრულ უნდა აღინიშნოს ხინჩინის ერთი შედეგი, რომელიც მიგვანიშნებს სასრული ვარიაციის მქონე ფუნქციების გამორჩეულ თვისებაზე.

თეორემა 1.15.11 ([71], გვ. 411)**.** ინტერვალზე ზომადი ფუნქციის თითქმის ყველგან აპროქსიმატული (ასიმპტოტური) დიფერენცირებადობისთვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი ამ ინტერვალზე სასრული ვარიაციის მქონე რომელიმე უწყვეტ ფუნქციას ემთხვეოდეს რაგინდ მცირე დადებითი ზომის სიზუსტით.

1.16. ზედა და ქვედა წარმოებულები

1. ვთქვათ, სასრული $F(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x_0 \in \mathbb{R}$ წერტილის რაიმე $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ მიდამოში, $\delta > 0$. $h \neq 0$ იყოს ისეთი, რომ $x_0 + h$ წერტილი ეკუთვნოდეს x_0-ის δ მიდამოს. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_h(x_0) = \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}\,. \tag{1}$$

როგორც ვიცით, $F(x)$ ფუნქციისთვის x_0 წერტილზე $F'(x_0)$ წარმოებულის არსებობა-არარსებობა ნიშნავს $F_h(x_0)$-ის ზღვრის არსებობა-არარსებობას $h = 0$ წერტილზე.

შესაძლებელია $F_h(x_0)$-ს ზღვარი არ ჰქონდეს $h = 0$ წერტილზე, ე. ი. შესაძლებელია $F'(x_0)$ არ არსებობდეს. მაგრამ $F_h(x_0)$-ს აუცილებლად აქვს ზედა და ქვედა ზღვრები $h = 0$ წერტილზე (იხ. I, 1.10). ამიტომ $F(x)$ ფუნქციის გარკვეული დახასიათება x_0 წერტილის მახლობლობაში შეიძლება, ამ წერტილზე მისი ქვედა და ზედა წარმოებულების მეშვეობით ([3], გვ. 392; [10], გვ. 218; [45], გვ. 393; [54], გვ. 165). ზედა და ქვედა ზღვრების ცნება $F_h(x_0)$-თვის ასეთია: ვთქვათ $0 < |h| < \delta$ და $\overline{F}_\delta(x_0)$-ით აღვნიშნოთ $F_h(x_0)$-ის ზუსტი ზედა საზღვარი h-ის მიმართ. დადებითი δ-ს შემცირებისას $\overline{F}_\delta(x_0)$ არ იზრდება. ამიტომ არსებობს სასრული ან უსასრულო

$$\lim_{\delta\to 0+} \overline{F}_\delta(x_0)$$

ზღვარი, რომელსაც ეწოდება $F(x)$ **ფუნქციის ზედა წარმოებული** x_0 წერტილზე და იგი აღინიშნება $\overline{F}'(x_0)$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$\overline{F}'(x_0) = \varlimsup_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}\,. \tag{2}$$

ასევე განისაზღვრება $F(x)$ ფუნქციის **ქვედა** $\underline{F}'(x_0)$ **წარმოებული** x_0 წერტილზე, როგორც $F_h(x_0)$-ის ქვედა ზღვარი, როცა $h \to 0$.

მაშასადამე,

$$\underline{F}'(x_0) = \varliminf_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\,. \tag{3}$$

ცხადია, რომ $\overline{F}'(x_0) \geq \underline{F}'(x_0)$.

$\overline{F}'(x_0)$-ის სასრულობის შემთხვევაში, მისი დახასიათება ასე შეიძლება: ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $0 < |h| < \delta$ თვისების ყველა h-თვის სრულდება

$$F_h(x_0) < \overline{F}'(x_0) + \varepsilon \tag{4}$$

უტოლობა და ამასთან ერთად, ყოველი $\eta > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ერთი მაინც ისეთი h^*, რომ $0 < |h^*| < \eta$ და ადგილი აქვს უტოლობასაც

$$F_{h^*}(x_0) > \overline{F}'(x_0) - \varepsilon.$$

ცხადია შემდეგი

წინადადება 1.16.1. $F(x)$ ფუნქციის წარმოებადობისთვის (დიფერენცირებადობისთვის) x_0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს

$$\underline{F}'(x_0) = \overline{F}'(x_0)$$

ტოლობა (შესაბამისად სასრული წევრებით)*.

ქვედა და ზედა წარმოებულების გეომეტრიული დახასიათების მიზნით, $y = F(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ფიქსირებულ (x_0, y_0) წერტილზე, სადაც $y_0 = F(x_0)$, და ამავე გრაფიკის ცვლად (x, y) წერტილზე, სადაც $y = F(x)$, გავატაროთ L წრფე.

x წერტილი მივასწრაფოთ x_0 წერტილისკენ და განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) არსებობს სასრული $F'(x_0)$ წარმოებული. მაშინ L წრფე ისწრაფვის $y = F(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი (x_0, y_0) წერტილზე გავლებული

$$y = y_0 + F'(x_0)(x - x_0)$$

*ამასთან დაკავშირებით, იხილე ამავე თავის 1.9.3 შედეგი ზემოთ.

მხები წრფისკენ.

2) არ არსებობს სასრული $F'(x_0)$ წარმოებული, მაგრამ არსებობს სასრული $\underline{F}'(x_0)$ და $\overline{F}'(x_0)$, ე. ი. $\underline{F}'(x_0) < \overline{F}'(x_0)$. მაშინ L წრფე ირხევა და იგი მით უფრო მეტი სიზუსტით იქნება მოქცეული $y = y_0 + \underline{F}'(x_0)(x - x_0)$ და $y = y_0 + \overline{F}'(x_0)(x - x_0)$ წრფეებს შორის, რაც უფრო ახლოსაა x წერტილი x_0-თან.

2. ჩვენთვის უკვე ცნობილი 1.10.1 შედეგის საფუძველზე I თავიდან, მართებულია შემდეგი

წინადადება 1.16.2 ([10], გვ. 219–220)**.** თუ $G(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს სასრული $G'(x_0)$ წარმოებული და $\Phi(x) = F(x) + G(x)$, მაშინ ადგილი აქვს

$$\overline{\Phi}'(x_0) = \overline{F}'(x_0) + G'(x_0), \tag{6}$$

$$\underline{\Phi}'(x_0) = \underline{F}'(x_0) + G'(x_0) \tag{7}$$

ტოლობებს. საზოგადოდ, $u(x) = v(x) + g(x)$ ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი

$$\begin{aligned} \overline{v}'(x) + \overline{g}'(x) \geq \overline{u}'(x) \geq \overline{v}'(x) + \underline{g}'(x) \geq \\ \geq \underline{u}'(x) \geq \underline{v}'(x) + \underline{g}'(x) \end{aligned} \tag{8}$$

დამოკიდებულებანი ([10], გვ. 222 და 146).

1.17. დინის წარმოებული რიცხვები

ჩვენ უკვე გვქონდა წარმოებულის (იხ. 1.1), მარჯვენა და მარცხენა ანუ ცალმხრივი წარმოებულების (იხ. 1.9) და ზედა და ქვედა წარმოებულების (იხ. 1.16) ცნებები.

სხვადასხვა მაგალითი ადასტურებს, რომ ზოგიერთი ამ სიდიდეთაგან შეიძლება არ არსებობდეს რაიმე წერტილზე.

მიუხედავად ამისა, x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრული ყოველი სასრული $f(x)$ ფუნქციისათვის არსებობს სასრული ან უსასრულო თითოეული შემდეგ სიდიდეთაგან:

1) x_0 წერტილზე f ფუნქციის **მარჯვენა ზედა წარმოებული რიცხვი**

$$\overline{D}^{\,+}f(x_0)=\varlimsup_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,, \tag{1}$$

2) x_0 წერტილზე f ფუნქციის **მარჯვენა ქვედა წარმოებული რიცხვი**

$$\underline{D}^{+}f(x_0)=\varliminf_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,, \tag{2}$$

3) x_0 წერტილზე f ფუნქციის **მარცხენა ზედა წარმოებული რიცხვი**

$$\overline{D}^{\,-}f(x_0)=\varlimsup_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,, \tag{3}$$

4) x_0 წერტილზე f ფუნქციის **მარცხენა ქვედა წარმოებული რიცხვი**

$$\underline{D}^{-}f(x_0)=\varliminf_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,. \tag{4}$$

ამ სიდიდეებს ეწოდებათ **ცალმხრივი წარმოებული რიცხვები ანუ დინის წარმოებული რიცხვები** ([3], გვ. 393; [39], გვ. 66).

თუ მარჯვენა ცალმხრივი წარმოებული რიცხვებისთვის გვაქვს $\underline{D}^{+}f(x_0)=\overline{D}^{\,+}f(x_0)$ ტოლობა, მაშინ არსებობს მარჯვენა $f'_{+}(x_0)$ წარმოებული (იხ. 1.9) და

$$\underline{D}^{+}f(x_0)=f'_{+}(x_0)=\overline{D}^{\,+}f(x_0). \tag{5}$$

ასევე, თუ $\underline{D}^{-}f(x_0)$ და $\overline{D}^{\,-}f(x_0)$ მარცხენა ცალმხრივი წარმოებული რიცხვები ტოლია, მაშინ არსებობს მარცხენა $f'_{-}(x_0)$ წარმოებული და

$$\underline{D}^{-}f(x_0)=f'_{-}(x_0)=\overline{D}^{\,-}f(x_0). \tag{6}$$

თუკი $\overline{D}^{\,-} f(x_0)$ და $\overline{D}^{\,+} f(x_0)$ ზედა წარმოებული რიცხვებია ტოლი, მაშინ არსებობს ზედა $\overline{f}^{\,\prime}(x_0)$ წარმოებული* (იხ. 1.16) და

$$\overline{D}^{\,-} f(x_0) = \overline{f}^{\,\prime}(x_0) = \overline{D}^{\,+} f(x_0). \tag{7}$$

ამის გამო, ზედა წარმოებულს ზოგჯერ ეწოდება **ზედა ორმხრივი წარმოებული რიცხვი** ან კიდევ **ზედა ექსტრემული წარმოებული რიცხვი** ([54], გვ. 165).

ასევე, თუ $\underline{D}^{-} f(x_0)$ და $\underline{D}^{+} f(x_0)$ ქვედა წარმოებული რიცხვები ტოლია, მაშინ არსებობს ქვედა $\underline{f}^{\,\prime}(x_0)$ წარმოებული და

$$\underline{D}^{-} f(x_0) = \underline{f}^{\,\prime}(x_0) = \underline{D}^{+} f(x_0). \tag{8}$$

$\underline{f}^{\,\prime}(x_0)$-საც ზოგჯერ ეწოდება **ქვედა ორმხრივი წარმოებული რიცხვი** ან კიდევ **ქვედა ექსტრემული წარმოებული რიცხვი**.

ზედა და ქვედა ექსტრემულ წარმოებულ რიცხვებს ეწოდებათ **ექსტრემული წარმოებული რიცხვები**.

ცალმხრივი წარმოებული რიცხვები ექვემდებარებიან უტოლობებს:

$$\underline{D}^{-} f(x_0) \le \overline{D}^{\,-} f(x_0), \;\; \underline{D}^{+} f(x_0) \le \overline{D}^{\,+} f(x_0). \tag{9}$$

სხვამხრივ ისინი თავისუფალია, საზოგადოდ*.

თუ

$$\underline{D}^{-} f(x_0) = \overline{D}^{\,-} f(x_0) = \underline{D}^{+} f(x_0) = \overline{D}^{\,+} f(x_0), \tag{10}$$

მაშინ არსებობს $f'(x_0)$ წარმოებული და იგი (10) ტოლობათა საერთო მნიშვნელობის ტოლია.

ზედა და ქვედა წარმოებულები შემდეგნაირადაა დაკავშირებული დინის წარმოებულ რიცხვებთან (წინადადება 1.10.3-ის ძალით თავი I-დან).

---

*ამ ფაქტის შებრუნება არ შეიძლება, რადგანაც რაიმე სიმრავლის მიმართ ზედა ზღვარი საზოგადოდ მეტია ქვესიმრავლის მიმართ ზედა ზღვარზე.

*ამასთან დაკავშირებით იხ. 1.17.4 თეორემა ქვემოთ.

წინადადება 1.17.1. მართებულია შემდეგი ტოლობანი:

$$\overline{F}'(x_0) = \max\left\{\overline{D}^+ f(x_0), \overline{D}^- f(x_0)\right\}, \tag{11}$$
$$\underline{F}'(x_0) = \min\left\{\underline{D}^+ f(x_0), \underline{D}^- f(x_0)\right\}. \tag{12}$$

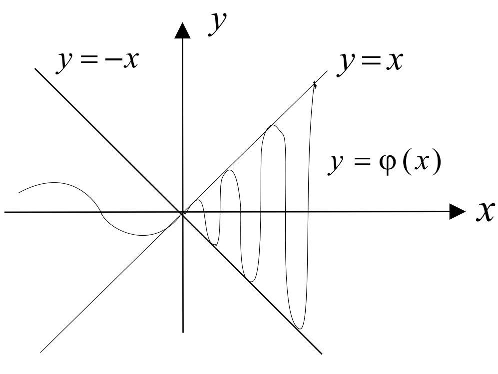
ცალმხრივი წარმოებული რიცხვების გრაფიკული გამოსახვა მოცემულია მე-10 და მე-11 ნახატებზე, ქვემოთ.

მაგალითი 1.17.1.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{როცა } x \le 0, \\ x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x > 0 \end{cases}$$

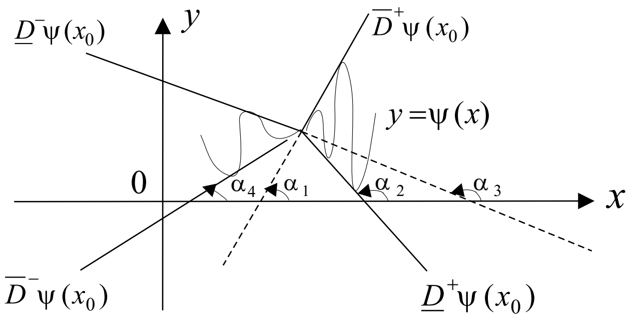
ფუნქციისთვის გვაქვს ტოლობები:

$$\varphi'_-(0) = 1, \ \ \overline{D}^+\varphi(0) = 1, \ \ \underline{D}^+\varphi(0) = -1.$$



ნახ. 10

მაგალითი 1.17.2. ცალმხრივი წარმოებული რიცხვების შესაბამისი სხივების გრაფიკული გამოსახვა.



ნახ. 11

$\underline{D}^{-}\psi(x_0)$-ს შესაბამისი სხივი უფრო მაღლაა, ვიდრე $\overline{D}^{\,-}\psi(x_0)$-ის შესაბამისი სხივი.

აღვნიშნოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი თეორემა ცალმხრივი წარმოებული რიცხვების შესახებ.

თეორემა 1.17.1 (დინი, 1878 წ., [21], გვ. 98; [54], გვ. 294)**.** თუ x_0 წერტილზე უწყვეტი $\varphi(x)$ ფუნქციის შესაბამისი ოთხი ცალმხრივი წარმოებული რიცხვიდან ერთი რომელიმე უწყვეტია x_0 წერტილზე, მაშინ დანარჩენი სამი ცალმხრივი წარმოებული რიცხვიც უწყვეტია ამავე წერტილზე და ოთხივე ტოლია, ე. ი. $\varphi(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილზე.

თეორემა 1.17.2 (დანჟუა, 1915 წ., [54], გვ. 389)**.** ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია სასრულია ზომად E სიმრავლეზე.

თუ E სიმრავლის ყოველ წერტილზე f ფუნქციის **ერთ-ერთი მხარის ორივე წარმოებული რიცხვი** სასრულია (ე. ი. ორივე მარჯვენა წარმოებული რიცხვი ან ორივე მარცხენა წარმოებული რიცხვი) ან სასრულია ერთ-ერთი ორმხრივი წარმოებული რიცხვი (ე. ი. ან $\overline{f}\,'$ ან $\underline{f}'$), მაშინ f ფუნქცია დიფერენცირებადია E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილზე.

შედეგი 1.17.1. თუ ზომადი $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლის ყოველ წერტილზე f ფუნქციას აქვს სასრული მარჯვენა (მარცხენა) წარმოებული, მაშინ f ფუნქციას თითქმის ყველგან E-ზე აქვს სასრული წარმოებული.

შედეგი 1.17.2. თუ ზომადი $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლის ყოველ წერტილზე f ფუნქციას აქვს სასრული ზედა (ქვედა) წარმოებული, მაშინ თითქმის ყველგან E-ზე f ფუნქციას აქვს სასრული წარმოებული.

მომდევნო თეორემაში **მოპირდაპირე წარმოებულ რიცხვებად** იწოდებიან $(\overline{D}^{+}f(x_0), \underline{D}^{-}f(x_0))$ წყვილის და აგრეთვე $(\underline{D}^{+}f(x_0), \overline{D}^{-}f(x_0))$ წყვილის წევრები.

თეორემა 1.17.3 (დანჟუა, 1915 წ., [54], გვ. 388–389)**.** ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას E სიმრავლის ყოველ წერტილზე აქვს სასრული ერთ-ერთი ცალმხრივი წარმოებული რიცხვი. მაშინ ეს ცალმხრივი წარმოებული რიცხვი ტოლია მისი მოპირდაპირე ცალმხრივი წარმოებული რიცხვის თითქმის ყველა წერტილზე E სიმრავლიდან.

გ. იანგს (G. C. Young) ეკუთვნის (1914 წ.) შემდეგი

თეორემა 1.17.4 ([86], გვ. 20–21; [54], გვ. 376)**.** ნებისმიერი f ფუნქციისთვის $\overline{D}^{+}f(x_0) \geq \underline{D}^{-}f(x_0)$ და $\overline{D}^{-}f(x_0) \geq \underline{D}^{+}f(x_0)$ უტოლობანი სრულდება ყველა x_0 წერტილზე, გარდა შესაძლებელია წერტილთა სასრული ან თვლადი სიმრავლისა.

შევნიშნოთ, რომ ლაგრანჟის 1.5.(1) ტოლობის გავრცელება დინის წარმოებულ რიცხვებზე, გარკვეული უტოლობების სახით, მოცემულია [131] შრომაში.

1.18. ლაგრანჟის ფორმულის არამართებულობა ნამდვილი ცვლადის კომპლექსური ფუნქციისთვის

აქვე აღვნიშნოთ, რომ ნამდვილი ცვლადის კომპლექსური ფუნქციისთვის არამართებულია, საზოგადოდ, ლაგრანჟის 1.5.(1) ფორმულა.

მართლაც, განვიხილოთ ყველა $t \in (-\infty, +\infty)$ მნიშვნელობისთვის დიფერენცირებადი $\lambda(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ ფუნქცია, რომლის წარმოებულია $\lambda'(t) = ie^{it} = -\sin t + i \cos t$. გვაქვს $\lambda(1) - \lambda(0) = \cos 1 - 1 + i \sin 1$ ტოლობა. თუკი $\lambda(t)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს ლაგრანჟის ფორმულას რომელიმე c-თვის, სადაც $0 < c < 1$, მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს

$$\cos 1 - 1 + i \sin 1 = -\sin c + i \cos c$$

ტოლობას, საიდანაც გამომდინარეობს, კერძოდ, მისი მხარეების მოდულების ტოლობა ანუ $(\cos 1 - 1)^2 + \sin^2 1 = (-\sin c)^2 + \cos^2 c$ ტოლობა. აქედან მარტივი გარდაქმნებით მიიღება არამართებული $\cos 1 = 1/2$ დამოკიდებულება.

უფრო მეტი: არ არსებობს ისეთი სამი $a < c < b$ რიცხვი, რომ შესრულდეს

$$\lambda(b) - \lambda(a) = (b-a)\lambda'(c)$$

ტოლობა. მართლაც, ამ ტოლობის შესრულება ნიშნავს

$$(\cos b + i \sin b) - (\cos a + i \sin a) = (-\sin c + i \cos c) \cdot (b-a)$$

ტოლობას. მოდულების გატოლებით აქედან მიიღება

$$(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = (b-a)^2,$$

$$\sin^2 \frac{b-a}{2} = \Big(\frac{b-a}{2}\Big)^2$$

ტოლობები. ეს კი შეუძლებელია, რადგანაც $|\sin t| < |t|$, როცა $t \neq 0$.

ლაგრანჟის ფორმულა მცდარია კომპლექსური $\mu(t) = t^2 + it^3$, $t \in [1,2]$, ფუნქციისთვისაც.

ერთი ნამდვილი ცვლადის კომპლექსური ფუნქციისთვის აქ გამოვლენილ "პათოლოგიურ" თვისებას ლაგრანჟის ფორმულის მიმართ, აქვს თავისი მიზეზი. საქმე ისაა, რომ კომპლექსური ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებისთვის ცალ-ცალკე ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენება ერთი და იგივე სეგმენტზე, ადასტურებს ორი

ურთიერთგანსხვავებული წერტილის არსებობას, საზოგადოდ. თუკი ეს წერტილები ერთიმეორეს დაემთხვევა, მაშინ ასეთი წერტილი გამოდგება კომპლექსური ფუნქციისთვისაც.

1.19. საშუალო მნიშვნელობის ფორმულები ჰოლომორფული ფუნქციისთვის

როგორც ვნახეთ (იხ.1.18), ერთი ნამდვილი ცვლადის კომპლექსური ფუნქციისთვის ადგილი არ აქვს სასრული ნაზრდის ლაგრანჟის ფორმულას. ბუნებრივია კითხვა: კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური ფუნქციისთვის არსებობს კი ანალოგიური ფორმულა?

1. ინტეგრალისთვის საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულის (იხ. [6], გვ. 596–600) დამტკიცებისას გამოყენებული უტოლობანი, არაა მართებული კოპლექსური სიდიდეებისთვის. მაგრამ დარბუმ მოძებნა ამ ფორმულის შემდეგი ანალოგი.

თეორემა 1.19.1 (დარბუ). ვთქვათ, $a(t)$, $b(t)$ და $c(t)$ უწყვეტი ნამდვილი ფუნქციებია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. მაშინ არსებობენ კომპლექსური λ რიცხვი $|\lambda| \leq 1$ თვისებით და ნამდვილი η რიცხვი $\alpha < \eta < \beta$ თვისებით ისეთები, რომ ადგილი აქვს

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} c(t)[a(t) + ib(t)]\, dt = \lambda \cdot \big[a(\eta) + ib(\eta)\big] \cdot \int\limits_{\alpha}^{\beta} |c(t)|\, dt \tag{1}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. (1) ტოლობის მარცხენა მხარე აღვნიშნოთ I-თი. მაშინ კომპლექსური I რიცხვის მოდული ზემოდან ფასდება ასე

$$|I| \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} |c(t)| \cdot |a(t) + ib(t)|\, dt. \tag{2}$$

რადგანაც ნამდვილი $a(t)$ და $b(t)$ ფუნქციები უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, ამიტომ კომპლექსური $\psi(t) = a(t) + ib(t)$ ფუნქციაც უწყვეტია $[\alpha, \beta]$-ზე, რაც იწვევს $|\psi(t)|$-ს უწყვეტობას იმავე სეგმენტზე. ახლა (2) უტოლობის მარჯვენა მხარისათვის გამოვიყენოთ ზემოთ ნახსენები საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა ([6], გვ. 597), რომლის ძალითაც დგინდება არსებობა ისეთი η რიცხვის, რომ $\alpha < \eta < \beta$ და ადგილი აქვს

$$\int_{\alpha}^{\beta} |c(t)| \cdot |a(t) + ib(t)| \, dt = \big|a(\eta) + ib(\eta)\big| \int_{\alpha}^{\beta} |c(t)| \, dt$$

ტოლობას. მაშასადამე,

$$|I| \leq \big|a(\eta) + ib(\eta)\big| \int_{\alpha}^{\beta} |c(t)| \, dt. \tag{3}$$

(1) ტოლობის მისაღებად საკმარისია λ-თი აღვნიშნოთ I-ს შეფარდება $[a(\eta) + ib(\eta)] \cdot \int_{\alpha}^{\beta} |c(t)| \, dt$ სიდიდესთან და გვექნება $|\lambda| \leq 1$ უტოლობა (3)-ის ძალით. თეორემა დამტკიცებულია.

2. ახლა მოვიყვანოთ ლაგრანჟის ფორმულის ანალოგები ჰოლომორფული ფუნქციისთვის.

თეორემა 1.19.2 (დარბუ, [69], გვ. 6). ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია ამოზნექილ D არეში* და z_1 და z_2 ნებისმიერად ფიქსირებული წერტილებია D-ში. მაშინ ამ წერტილებზე გამავალ წრფეზე მდებარე $[z_1, z_2]$ მონაკვეთის შიგნით არსებობს η წერტილი და კომპლექსური λ რიცხვი ისეთი, რომ $|\lambda| \leq 1$ და

$$f(z_2) - f(z_1) = \lambda \cdot (z_2 - z_1) \cdot f'(\eta). \tag{4}$$

---

*E სიმრავლეს ეწოდება **ამოზნექილი**, თუ მისი ნებისმიერი A და B წერტილების მაერთებელი $[A, B]$ მონაკვეთის ყველა წერტილი ეკუთვნის E-ს.

დამტკიცება. (4) ტოლობა მიიღება, თუ დარბუს (1) ტოლობას გამოვიყენებთ შემდეგი

$$f(z_2) - f(z_1) = \int\limits_{[z_1,z_2]} f'(z)\,dz \tag{5}$$

ტოლობის მარჯვენა მხარის მიმართ.

განსხვავებული სახისაა შემდეგი

თეორემა 1.19.3 ([35], გვ. 99)**.** ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია ამოზნექილ D არეში და z_1 და z_2 რაიმე წერტილებია D-ში. მაშინ წრფივი $[z_1, z_2]$ მონაკვეთის შიგნით არსებობენ

$$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2) \cdot \big[\operatorname{Re} f'(z_3) + i \operatorname{Im} f'(z_4)\big] \tag{6}$$

თვისების z_3 და z_4 წერტილები.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნამდვილი $t \in [0,1]$ ცვლადის კომპლექსური

$$g(t) = \frac{1}{z_1 - z_2}\, f(z_2 + (z_1 - z_2)t), \quad z_1 \neq z_2, \quad 0 \le t \le 1 \tag{7}$$

ფუნქცია. $u(t)$ და $v(t)$ იყოს $g(t)$-ს ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, $g(t) = u(t) + iv(t)$. ცხადია, რომ $g'(t) = u'(t) + iv'(t)$. რადგანაც $f(z)$ ფუნქციას D-ს ყოველ წერტილზე აქვს სასრული წარმოებული, ამიტომ $g'(t)$ ასე გამოითვლება:

$$\begin{aligned} g'(t) = \frac{1}{z_1 - z_2}\, f'(z_2 + (z_1 - z_2)t) \cdot (z_2 + (z_1 - z_2)t)'_t = \\ = f'(z_2 + (z_1 - z_2)t). \end{aligned}$$

ერთი მხრივ,

$$g(1) - g(0) = \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2} - \frac{f(z_2)}{z_1 - z_2} = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \tag{8}$$

და, მეორე მხრივ, კი

$$g(1) - g(0) = \big[u(1) - u(0)\big] + i\big[v(1) - v(0)\big].$$

უკანასკნელი ტოლობის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებისთვის გამოვიყენოთ ლაგრანჟის 1.5.(1) ფორმულა და მივიღებთ:

$$g(1)-g(0)=u'(\theta_1)+iv'(\theta_2)=\operatorname{Re}g'(\theta_1)+i\operatorname{Im}g'(\theta_2)=$$
$$=\operatorname{Re}f'(z_2+(z_1-z_2)\theta_1)+i\operatorname{Im}f'(z_2+(z_1-z_2)\theta_2, \qquad (9)$$

სადაც $0<\theta_1<1$ და $0<\theta_2<1$.

$z_3=z_2+(z_1-z_2)\theta_1$ და $z_4=z_2+(z_1-z_2)\theta_2$ წერტილები წარმოადგენენ $[z_1,z_2]$ მონაკვეთის შიგა წერტილებს. (8) და (9) ტოლობების მარცხენა მხარეების იდენტურობის გამო, მათი მარჯვენა მხარეებიც ტოლია. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 1.19.1. თუ $f(z)$ ფუნქციის ჰოლომორფულობის G არე არ არის ამოზნექილი, მაშინ 1.19.2 და 1.19.3 თეორემების დასაწყისი ასე უნდა შეიცვალოს: თუ $f(z)$ ჰოლომორფულია G არეში, მაშინ ყოველი ამოზნექილი $D\subset G$ ქვეარიდან აღებული ყოველი $[z_1,z_2]$ წრფივი მონაკვეთის შიგნით ...

1.5.2 თეორემის ანალოგიურია

თეორემა 1.19.4 ([158])**.** ვთქვათ, $f(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია G არეში. მაშინ ყოველ $z_0\in G$ წერტილს აქვს ისეთი $U(z_0)\subset G$ მიდამო, რომ ნებისმიერი $z_1\in U(z_0)$ წერტილისთვის $f(z_1)-f(z_0)=f'(z)(z_1-z_0)$ განტოლებას აქვს ერთი მაინც z ამონახსნი $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ თვისების.

მაგალითად, $f(z)=e^z$ ფუნქციისთვის თეორემა მართებულია $|z_1-z_0|<0,3$ პირობით.

შენიშვნა 1.19.2. მრავალი კომპლექსური ცვლადის ჰოლომორფული ფუნქციების ინტეგრალური წარმოდგენების ამოცანაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ჰეფერის (1950 წ.) შემდეგი

თეორემა 1.19.5 ([76], გვ. 441 და 361)**.** ვთქვათ, G წარმოადგენს ჰოლომორფულობის არეს n-განზომილებიან კომპლექსურ $\mathbb{C}^n$ სივრცეში და $w(z)$ კი არის ნებისმიერი ჰოლომორფული ფუნქცია G არეში. მაშინ არსებობენ $G\times G$ ნამრავლში ჰოლომორფული

ისეთი $p_\nu(\xi, z)$ ფუნქციები, რომ ყოველი $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in G$ და $z = (z_1, \dots, z_n) \in G$ წერტილებისთვის მართებულია

$$w(\xi) - w(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - z_\nu) p_\nu(\xi, z) \tag{10}$$

ტოლობა.

1.20. იოჰან I ბერნული–ლოპიტალის წესის შესახებ

ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ორივე უსასრულოდ მცირეა ან ორივე უსასრულოდ დიდია, როცა $x \to a$. მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)/g(x)$ შეფარდება არის $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობა, როცა $x \to a$.

შესაძლებელია $f(x)/g(x)$ შეფარდებას a წერტილზე ჰქონდეს ზღვარი, სასრული ან უსასრულო. ამ ზღვრის პოვნას, როცა იგი არსებობს სასრული ან უსასრულო, ჰქვია $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობის გახსნა a წერტილზე. ასეთ განუზღვრელობათა გახსნისთვის არსებობს ბერნული–ლოპიტალის შემდეგი წესი* ([6], გვ. 296–301; [55], გვ. 248–252; [52], გვ. 119; [66], გვ. 314–320).

---

*შვეიცარიელი (წარმოშობით ესპანელი) ბერნულების გვარის სამი წარმომადგენელი ნიკოლაი II ბერნული (1695–1726), დანიელ II ბერნული (1754–1834), იაკობ II ბერნული (1759–1789) იყო პეტერბურგის აკადემიის წევრი და სამი წარმომადგენელი იოჰან I ბერნული (1667–1748), დანიელ I ბერნული (1700–1782), იოჰან III ბერნული (1744–1807) კი ამავე აკადემიის საპატიო წევრები ([17], გვ. 42–45).

იოჰან I ბერნული ([17], გვ. 43) იყო ფრანგი მატემატიკოსის, საფრანგეთის მეცნიერებათა აკადემიის წევრის 1693 წლიდან ლოპიტალის (1661–1704) და პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის წევრის 1726 წლიდან, შვეიცარიელი მათემატიკოსის, მექანიკოსის, ფიზიკოსის და ასტრონომის ეილერის (1707–1783; [17], გვ. 543–544) მასწავლებელი. ლოპიტალი ([17], გვ. 294) იყო სამხედრო პირი, ეს საქმე მან მიატოვა მხედველობის სისუსტის გამო. 1690–1692 წლებში ლოპიტალი მათემატიკას სწავლობდა იოჰან I ბერნულის ხელმძღვანელობით, რომელმაც ლოპიტალისთვის ამ წლებში დაწერა ლექციების კურსი დიფერენციალურ აღრიცხვაში.

თეორემა 1.20.1 (იოჰან I ბერძნული–ლოპიტალი, 1694 წ.). ვთქვათ, a წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია ამავე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა და $g'(x) \neq 0$.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები ერთდროულად არიან ან უსასრულოდ მცირენი ან უსასრულოდ დიდები, როცა $x \to a$ და არსებობს $f'(x)/g'(x)$ შეფარდების სასრული ან უსასრულო ზღვარი a წერტილზე, მაშინ $f(x)/g(x)$ შეფარდებასაც აქვს ზღვარი a წერტილზე და ადგილი აქვს

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1}$$

ტოლობას.

თუკი ამ თეორემის ყველა პირობასთან ერთად $f'(x)$ და $g'(x)$ ფუნქციები უწყვეტია a წერტილზე და $g'(a) \neq 0$, მაშინ (1) ტოლობა ასე იწერება

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}\,. \tag{2}$$

მასწავლებლისა და მოსწავლის ურთიერთშეთანხმების საფუძველზე ([73], გვ. 128), მოსწავლემ 1696 წელს გამოსცა წიგნი უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვაში ([40]). ამ წიგნზე მუშაობისას ლოპიტალი იღებდა წერილებს მასწავლებლისგან. ერთ-ერთი ასეთი წერილით, რაც დათარიღებულია 1694 წლის 22 ივლისით ([73], გვ. 129), მასწავლებელმა მისწერა განუზღვრელობათა გახსნის ე. წ. "ლოპიტალის წესი".

სადღეისოდ დადგენილია, რომ განუზღვრელობის გახსნის ამ წესის ავტორია იოჰან I ბერნული ([40], გვ. 32–46, განსაკუთრებით გვ. 43).

იოჰან I ბერნულიმ ლოპიტალისთვის დაწერა ლექციების კურსი ინტეგრალურ აღრიცხვაშიც და მანვე გამოსცა იგი 1742 წელს წიგნად "ინტეგრელური აღრიცხვის კურსი".

იოჰან I ბერნული ითვლება მათემატიკური ფიზიკის ფუძემდებლად ([17], გვ. 43). მანვე დასვა და გადაწყვიტა ბრაქისტროქონის პრობლემა. ამ პრობლემის ერთ-ერთი გადაწყვეტა ეკუთვნის ლოპიტალს ([12], გვ. 14), რომელმაც 1707 წელს დაწერა წიგნი "ანალიზური ტრაქტატი კონუსური კვეთების შესახებ".

შესაძლებელია წარმოებულების $f'(x)/g'(x)$ შეფარდება, თავის მხრივ, წარმოადგენდეს $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუზღვრელობას, როცა $x \to a$. მაშინ ბერნული-ლოპიტალის წესი უნდა გამოვიყენოთ ამ შეფარდების მიმართაც და ამ პროცესის ჩატარება შეიძლება საჭირო გახდეს რამდენჯერმე.

შესაძლებელია $f(x)/g(x)$ შეფარდებას ზღვარი ჰქონდეს a წერტილზე, ხოლო წარმოებულების $f'(x)/g'(x)$ შეფარდებას კი არ ჰქონდეს ზღვარი ამავე წერტილზე. ამრიგად, ბერნული-ლოპიტალის თეორემა იძლევა $f(x)/g(x)$ შეფარდების ზღვრის არსებობის მხოლოდ საკმარის პირობებს. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი ორი მაგალითი.

მაგალითი 1.20.1 ([157]). არსებობს ისეთი უსასრულოდ დიფერენცირებადი f და g ფუნქციები, რომ $f(0) = 0 = g(0)$ და $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$, მაგრამ $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)/g'(x)$ არ არსებობს. ასეთი ფუნქციებია

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x^4}\, e^{-1/x^2} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0 \tag{3}$$

და

$$g(x) = e^{-1/x^2} \quad (x \neq 0), \quad g(0) = 0. \tag{4}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ f და g წარმოადგენენ C^∞ კლასის ფუნქციებს და $f(x)/g(x) \to 0$, როცა $x \to 0$. ამასთან ერთად,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2}{x}\, \cos \frac{1}{x^4} + \alpha(x), \tag{5}$$

სადაც $\alpha(x) \to 0$, როცა $x \to 0$. ამრიგად, $f'(x)/g'(x)$ შეფარდების დაგროვების წერტილია ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, როცა $x \to 0$.

მაგალითი 1.20.2. ვთქვათ, $\psi(x) = \sin x$ და $\varphi(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$, $\varphi(0) = 0$. გვაქვს

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

და

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$$

არ არსებობს, რადგანაც არ არსებობს $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ და

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{x}\right)=0.$$

შევნიშნოთ, რომ სხვა ტიპის განუზღვრელობანი გარკვეული გარდაქმნებით დაიყვანება უკვე განხილული ტიპის განუზღვრელობებზე ([55], გვ. 250–252).

§ 2. დიფერენცირებადობა და თითოეული ცვლადით დიფერენცირებადობა

2.1. კერძო წარმოებული და თითოეული ცვლადით დიფერენცირებადობა

ვთქვათ, $u=f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, ფუნქცია განსაზღვრულია $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში, $u\in\mathbb{R}$.

ვისარგებლოთ ერთი ცვლადის შემდეგი

$$^{i}f(x_i)=f(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)=f(x^0(x_i)) \qquad (1)$$

ფუნქციებით (იხ. I, 2.1.(3) ტოლობა).

თუ $^{i}f(x_i)$ ანუ, რაც იგივეა, $f(x^0(x_i))$ ფუნქციას $x_i^0\in\mathbb{R}$ წერტილზე აქვს $(^{i}f(x_i))'(x_i^0)$ წარმოებული, შესაბამისად, $(f(x^0(x_i)))'(x_i^0)$, მაშინ მას ეწოდება f **ფუნქციის კერძო წარმოებული** x_i ცვლადით x^0 წერტილზე და აღნიშნავენ $f'_{x_i}(x^0)$, $\partial x_i f(x^0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$ სიმბოლოებიდან ერთ-ერთით. მაშასადამე,

$$f'_{x_i}(x^0)=\lim_{x_i\to x_i^0}\frac{f(x^0(x_i))-f(x^0)}{x_i-x_i^0}=\lim_{x_i\to x_i^0}\frac{^{i}f(x_i)-f(x^0)}{x_i-x_i^0}\,. \qquad (2)$$

როგორც აქედან ჩანს, $f'_{x_i}(x^0)$-ის საპოვნელად $f(x_1,\ldots,x_n)$-ში ყველა x_j ცვლადი უნდა შეიცვალოს მისი კერძო x_j^0 მნიშვნელობით, როცა $j\neq i$. შედეგად მიიღება ერთი x_i ცვლადის ფუნქცია, რომლის წარმოებულის გამოთვლა x_i^0 წერტილზე მოიცემა სწორედ (2) ტოლობით.

თუ $f'_{x_i}(x^0)$ არსებობს სასრული ან უსასრულო ყველა $i=1,\ldots,n$ მნიშვნელობისთვის, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება **თითოეული ცვლადით წარმოებადი** x^0 წერტილზე. ასეთ შემთხვევაში განიხილება f ფუნქციის **გრადიენტი** x^0 წერტილზე,

$$\operatorname{grad} f(x^0)=\big(f'_{x_1}(x^0),\ldots,f'_{x_n}(x^0)\big) \tag{3}$$

ტოლობით განსაზღვრული. $\operatorname{grad} f(x^0)$-ის სასრულობა ნიშნავს მისი ყველა $f'_{x_i}(x^0)$ კომპონენტის სასრულობას.

თუ სასრულებია $\operatorname{grad} u$ და $\operatorname{grad} v$, მაშინ ადგილი აქვს

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(c\cdot u)&=c\cdot\operatorname{grad} u\ \ (c\ \text{მუდმივია}),\\
\operatorname{grad}(u\pm v)&=\operatorname{grad} u\pm\operatorname{grad} v,\\
\operatorname{grad}(u\cdot v)&=v\cdot\operatorname{grad} u+u\cdot\operatorname{grad} v,\\
\operatorname{grad}\frac{u}{v}&=\frac{1}{v^2}\,[v\operatorname{grad} u-u\operatorname{grad} v],\quad v\neq 0
\end{aligned}$$

ტოლობებს. რთული ფუნქციის შემთხვევაში კი მართებულია

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\Phi(u)&=\Phi'(u)\operatorname{grad} u,\\
\operatorname{grad}\Psi(u,v)&=\Psi'_u\cdot\operatorname{grad} u+\Psi'_v\cdot\operatorname{grad} v
\end{aligned}$$

ტოლობები.

თუ $f'_{x_i}(x^0)$ სასრულია, მაშინ სასრულია $f'_{x_i}(x^0)dx_i$ გამოსახულებაც, რომელსაც ეწოდება f ფუნქციის x_i ცვლადით **კერძო დიფერენციალი** x^0 წერტილზე და წერენ:

$$d_{x_i}f(x^0)=f'_{x_i}(x^0)dx_i,\ \ dx_i=x_i-x_i^0. \tag{4}$$

მაშასადამე, კერძო დიფერენციალის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია შესაბამისი კერძო წარმოებულის სასრულობა.

თუ ყველა $f'_{x_i}(x^0)$ სასრულია, მაშინ (4) ტოლობის მარცხენა მხარე სასრულია ყველა $i = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ f ფუნქცია **თითოეული ცვლადით დიფერენცირებადია** x^0 წერტილზე. ამრიგად, მართებულია შემდეგი

წინადადება 2.1.1. f ფუნქციის თითოეული ცვლადით დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია $\operatorname{grad} f(x^0)$-ის სასრულობა.

აშკარაა, რომ თავი I-ის 2.2.(1)–2.2.(4) ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქციები თითოეული ცვლადით დიფერენცირებადი ფუნქციებია $x^0 = (0,0)$ წერტილზე, თუმცა ისინი წყვეტილი ფუნქციებია ამ წერტილზე. ამრიგად, გვაქვს ფუნქცია, რომელიც ერთსა და იმავე წერტილზე წყვეტილიცაა და სასრული კერძო წარმოებულების მქონეც. მნიშვნელოვანია ის, რომ ამ ფაქტის რეალიზება შეიძლება წერტილთა ისეთ სიმრავლეზე, რომლის ბრტყელი ზომა ნებისმიერად ახლოსაა ძირითადი სიმრავლის სრულ ზომასთან. ეს დაადგინა ტოლსტოვმა და ამ შედეგს, მისი განსაკუთრებული მნიშვნელობის გამო, აქ ჩამოვაყალიბებთ თეორემის სახით.

თეორემა 2.1.1 ([62], გვ. 432)**.** ყოველი $\mu < 1$ დადებითი რიცხვისთვის არსებობს

$$K = \big\{(x_1, x_2) :\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1\big\}$$

კვადრატზე განსაზღვრული $F(x_1, x_2)$ ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია μ^2 ზომის ბრტყელ $E \subset K$ სიმრავლეზე და K-ს ყოველ შიგა წერტილზე აქვს ყველა რიგის კერძო წარმოებული როგორც x_1-ით, ისე x_2-ით.

2.2. კერძო წარმოებულის უსასრულო მნიშვნელობა

ორი ცვლადის ფუნქციისთვის კერძო წარმოებულის უსასრულობასთან შესაძლო ტოლობის შესახებ მართებულია შემდეგი

თეორემა 2.2.1 ([54], გვ. 452)**.** ვთქვათ, Φ არის ორი ცვლადის ზომადი ნებისმიერი ფუნქცია. მაშინ ნული ზომისაა სიმრავლე იმ (x, y) წერტილებისა, რომელთათვისაც სრულდება

$$\lim_{h \to o+} \frac{1}{h} \big| \Phi(x+h, y) - \Phi(x, y) \big| = +\infty \tag{1}$$

ტოლობა.

2.3. დიფერენცირებადობის ცნება

მრავალი ცვლადის ფუნქციისთვის სრული დიფერენციალის ცნება შემოიღო შტოლცმა 1893 წელს გამოქვეყნებულ წიგნში [168]. ამ ცნების დიდი მნიშვნელობა გამოვლენილ იქნა პირპონტის [152], ფრეშეს [116] და განსაკუთრებით უ. იანგის [179] შრომებში (იხ. [12], გვ. 110–112 და [21], გვ. 3).

განსაზღვრა 2.3.1. $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U(x^0)$, ფუნქციას აქვს **სრული დიფერენციალი** ანუ, რაც იგივეა, **დიფერენცირებადია** $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე, თუ არსებობს სასრულ A_i რიცხვთა ისეთი $A = (A_1, \dots, A_n)$ ნაკრები, დამოკიდებული x^0-ზე და f-ზე საზოგადოდ, რომ

$$f(x) - f(x^0) - (A, x - x^0) \tag{1}$$

სხვაობის შეფარდება დადებით

$$\|x - x^0\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^0| \tag{2}$$

რიცხვთან (იხ. I, 1.1.(2) ტოლობა) ისწრაფვის ნულისკენ, როცა x ისწრაფვის x^0-კენ, სადაც შემოღებულია აღნიშვნა:

$$(A, x - x^0) = \sum_{i=1}^{n} A_i (x_i - x_i^0). \tag{3}$$

ეს ნიშნავს ნებისმიერად მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი $\delta = \delta(x^0, \varepsilon, f) > 0$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$\left|f(x) - f(x^0) - (A, x - x^0)\right| < \varepsilon \cdot \|x - x^0\| \tag{4}$$

უტოლობა სრულდება $0 < \|x - x^0\| < \delta$ თვისების ყოველი x-თვის.

ასეთი თვისების f ფუნქციის **სრულ დიფერენციალს** ანუ, მოკლედ, **დიფერენციალს** x^0 წერტილზე, რომელიც შეესაბამება დამოუკიდებელი ცვლადების $x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0$ ნაზრდებს x^0 წერტილზე, **უწოდებენ წრფივ** $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x_i - x_i^0)$ **ასახვას** და იგი აღინიშნება $df(x^0)(dx)$ სიმბოლოთი ანუ მოკლედ $df(x^0)$-ით, სადაც $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$. მაშასადამე,

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot dx_i, \tag{5}$$

სადაც dx_i-ით აღნიშნულია x_i ცვლადის ნებისმიერი $x_i - x_i^0$ ნაზრდი, რაც შესაძლოა არც კი იყოს უსასრულოდ მცირე. x^0 წერტილს ეწოდება f **ფუნქციის დიფერენცირებადობის წერტილი**, ხოლო A_i რიცხვებს კი $df(x^0)$ **დიფერენციალის კოეფიციენტები** (უ. იანგი, 1910 წ.).

თუ რომელიმე ფუნქცია დიფერენცირებადია რაიმე E სიმრავლის ყოველ წერტილზე, მაშინ ამ ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი E სიმრავლეზე.

გამოთქმა "არსებობს $df(x^0)$" ეკვივალენტურია გამოთქმის "$f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x^0 წერტილზე".

დიფერენცირებადობის განსაზღვრისას ხსენებული შეფარდება განსაზღვრულია $x \neq x^0$ მნიშვნელობებისთვის და არაა განსაზღვრული $x = x^0$ წერტილზე. დიფერენცირებადობის ცნებისთვის მთავარია ამ შეფარდების ყოფაქცევა x^0 წერტილის უცენტრო $U^0(x^0)$ მიდამოში და შეფარდების ყოფაქცევაზე გავლენას ვერ ახდენს მისი მნიშვნელობა თვით x^0 წერტილზე. რადგანაც ამ შეფარდებას x^0 წერტილზე აქვს ნულოვანი ზღვარი, ამიტომ მის მნიშვნელობად x^0-ზე მიღებულია

ნული. ამის რეალიზება ხდება $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრული შემდეგი $\omega_{x^0}(x)$ ფუნქციის შემოღებით:

$$\omega_{x^0}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x^0) - (A, x - x^0)}{\|x - x^0\|}, & \text{როცა } x \neq x^0, \\ 0, & \text{როცა } x = x^0. \end{cases} \tag{6}$$

რომლის მეშვეობით, $f(x)$ ფუნქციის x^0 წერტილზე დიფერენცირებადობის ცნება ასე ყალიბდება.

განსაზღვრა 2.3.2. f ფუნქციას ეწოდება **დიფერენცირებადი** x^0 წერტილზე, თუ არსებობს სასრულ მუდმივთა ისეთი $A = (A_1, \ldots, A_n)$ ნაკრები და $\omega_{x^0}(x)$ ფუნქცია, რომ ყოველ $x \in U(x^0)$ წერტილზე ადგილი აქვს

$$f(x) = f(x^0) + (A, x - x^0) + \|x - x^0\| \cdot \omega_{x^0}(x) \tag{7}$$

ტოლობას, სადაც x-ის $\omega_{x^0}(x)$ ფუნქცია უწყვეტი და ნულის ტოლია x^0 წერტილზე:

$$\lim_{x \to x^0} \omega_{x^0}(x) = 0 = \omega_{x^0}(x^0). \tag{8}$$

(8) ტოლობა ნიშნავს ნებისმიერად მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი $\delta = \delta(x^0, \varepsilon, f) > 0$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$|\omega_{x^0}(x)| < \varepsilon \tag{9}$$

უტოლობა სრულდება, როცა $\|x - x^0\| < \delta$.

განსაზღვრა 2.3.3. $f(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციას ეწოდება **უწყვეტად დიფერენცირებადი** $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე, თუ

$$\operatorname{grad} f(x) = \big(f'_{x_1}(x), \ldots, f'_{x_n}(x)\big), \;\; x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{10}$$

სასრულია x^0-ის $U(x^0)$ მიდამოში და უწყვეტი თვით x^0 წერტილზე, ე. ი. თუ x^0 წერტილზე უწყვეტია პირველი რიგის კერძო $f'_{x_j}(x)$ წარმოებულები, $j = 1, \ldots, n$.

2.4. დიფერენცირებადი ფუნქციის ელემენტარული თვისებანი

წინადადება 2.4.1. f ფუნქციის x^0 წერტილზე დიფერენცირებადობიდან გამომდინარეობს:

1) x^0 წერტილზე f-ის ყველა კერძო $f'_{x_i}(x^0)$ წარმოებულის სასრულობა და $A_i = f'_{x_i}(x^0)$, $i = 1, \dots, n$, ტოლობები. მაშასადამე, $df(x^0)$ დიფერენციალის კოეფიციენტები წარმოადგენენ f ფუნქციის კერძო წარმოებულებს დიფერენცირებადობის x^0 წერტილზე;

2) თითოეული ცვლადით f-ის დიფერენცირებადობა x^0 წერტილზე;

3) $\operatorname{grad} f(x^0)$-ის სასრულობა;

4) დიფერენციალისთვის

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x^0)\, dx_i \tag{1}$$

ტოლობა.

დამტკიცება. 2.3.(7) ტოლობაში ყოველი x_j ცვლადი შევცვალოთ მისი კერძო x_j^0 მნიშვნელობით, როცა $j \neq i$. მაშინ იგი, თავი I-ის 2.1.(2) სიმბოლოს გამოყენებით და 2.3.(3) აღნიშვნის გათვალისწინებით, მიიღებს სახეს:

$$f(x^0(x_i)) = f(x^0) + A_i(x_i - x_i^0) + |x_i - x_i^0| \cdot \omega_{x^0}(x^0(x_i)). \tag{2}$$

x_i ცვლადის მიმართ კერძო $\Delta_{x_i^0} f(x)$ ნაზრდის გამოყენებით (იხ. I, 2.1.(8) ტოლობა), (2) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\Delta_{x_i^0} f(x) = A_i(x_i - x_i^0) + (x_i - x_i^0) \cdot \frac{|x_i - x_i^0|}{x_i - x_i^0} \cdot \omega_{x^0}(x^0(x_i)). \tag{3}$$

შემოვიღოთ დამხმარე

$$\omega_{x^0}^i(x_i) = \frac{|x_i - x_i^0|}{x_i - x_i^0} \cdot \omega_{x^0}(x^0(x_i)), \quad x_i \neq x_i^0, \tag{4}$$

ფუნქცია. რადგანაც ერთი x_i ცვლადის $|x_i - x_i^0|/(x_i - x_i^0)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია x_i^0-ის უცენტრო მიდამოში (მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა 1-ის ტოლია, როცა $x_i \neq x_i^0$) და 2.3.(8)-ის მარცხენა ტოლობას ადგილი აქვს კერძო $x = x^0(x_i)$ მნიშვნელობისთვისაც, ამიტომ (4)-დან გამომდინარეობს

$$\lim_{x_i \to x_i^0} \omega_{x^0}^i(x_i) = 0 \tag{5}$$

ტოლობა და (3) მიიღებს სახეს:

$$\Delta_{x_i^0} f(x) = A_i(x_i - x_i^0) + (x_i - x_i^0) \cdot \omega_{x^0}^i(x_i). \tag{6}$$

უკანასკნელი ორი ტოლობა ერთად ნიშნავს, ერთი x_i ცვლადის $f(x^0(x_i))$ ფუნქციის წარმოებულის არსებობას x_i^0 წერტილზე (იხ. 1.4.(1) ტოლობა) და $(f(x^0(x_i))'(x_i^0) = A_i$ ტოლობას. რადგანაც f ფუნქცია დიფერენცირებადია x^0 წერტილზე დაშვების შესაბამისად, ამიტომ ყველა A_i რიცხვი სასრულია. ამრიგად, არსებობს სასრული კერძო წარმოებული $f'_{x_i}(x^0) = A_i$, $i = 1, \ldots, n$. ეს კი ნიშნავს, განსაზღვრის თანახმად, f ფუნქციის თითოეული ცვლადით დიფერენცირებადობას x^0 წერტილზე და $\operatorname{grad} f(x^0)$-ის სასრულობას. აქედან მიიღება (1) ტოლობაც 2.3.(5) წარმოდგენის საფუძველზე. წინადადება დამტკიცებულია.

$df(x^0)$-თვის, რომელსაც ზოგჯერ ეწოდება f ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალი x^0 წერტილზე, გვაქვს შემდეგი

წინადადება 2.4.2. 1) $df(x^0)$ დიფერენციალი არის დამოუკიდებელ ცვლადთა $dx_1, \ldots, dx_n$ დიფერენციალების წრფივი ფუნქცია;

2) $df(x^0)$ დიფერენციალი არის x^0 წერტილზე f-ის კერძო დიფერენციალების ჯამი:

$$df(x^0) = \sum_{i=1}^{n} d_{x_i} f(x^0); \tag{7}$$

3) x^0 წერტილზე f-ის $\Delta_{x^0} f(x) = f(x) - f(x^0)$ ნაზრდი წარმოიდგინება

$$\Delta_{x^0} f(x) = df(x^0) + \|x - x^0\| \cdot o(1) \tag{8}$$

ტოლობით, სადაც $o(1)$-ით აღნიშნულია $\omega_{x^0}(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს 2.3.(8)-ს.

უკანასკნელი ტოლობის პირველ $df(x^0)$ შესაკრებს ეწოდება x^0 წერტილზე f ფუნქციის $\Delta_{x^0} f(x)$ ნაზრდის მთავარი, წრფივი ნაწილი და იგი აღჭურვილია

$$\lim_{x \to x^0} df(x^0) = 0 \tag{9}$$

თვისებით (მოვიგონოთ, რომ დიფერენციალი დამოკიდებულია $x_i - x_i^0$, $i = 1, \dots, n$, ნაზრდებზე). ეს გამომდინარეობს (1) ტოლობიდან, რადგანაც იქ შესაკრებთა რაოდენობა სასრულია და $x \to x^0$ დამოკიდებულება ეკვივალენტურია $x_i \to x_i^0$ დამოკიდებულებების ყველა $i = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის, ხოლო $f'_{x_i}(x^0)$ სასრულია f ფუნქციის x^0 წერტილზე დიფერენცირებადობის გამო.

მეორე შესაკრებისთვის (8) ტოლობიდან გვაქვს:

$$\lim_{x \to x^0} \|x - x^0\| \cdot \omega_{x^0}(x) = 0 \tag{10}$$

(რადგანაც აქ თითოეული მამრავლი უსასრულოდ მცირეა x^0 წერტილზე).

(8) და (9) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x \to x^0} \Delta_{x^0} f(x) = 0. \tag{11}$$

უკანასკნელი ტოლობა-ფაქტი ჩამოვაყალიბოთ ცალკე წინადადების სახით.

წინადადება 2.4.3. თუ f ფუნქციისთვის x^0 არის დიფერენცირებადობის წერტილი, მაშინ f უწყვეტია ამ წერტილზე.

ეს წინადადება აშკარაა

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \le \left|f(x) - f(x^0) - (A, x - x^0)\right| + \left|(A, x - x^0)\right| \le$$

$$\leq \varepsilon\|x-x^0\| + \|x-x^0\| \cdot \max_{1\leq i\leq n} \left|f'_{x_i}(x^0)\right|$$

დამოკიდებულებებიდანაც, რადგან f ფუნქციის ყველა კერძო წარმოებული სასრულია x^0 წერტილზე, გამომდინარე x^0-ზე f-ის დიფერენცირებადობიდან.

თუ 2.1.(3) ვექტორთან ერთად შემოვიღებთ $dx=(dx_1,\dots,dx_n)$ ვექტორს, მაშინ (7) ტოლობა სკალარული ნამრავლის სახით ასე იწერება:

$$df(x^0)=\big(\operatorname{grad} f(x^0),dx\big). \tag{12}$$

წინადადება 2.4.4. ვთქვათ $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, ფუნქცია დიფერენცირებადია $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე. ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური $m>n$ რიცხვი. $x\in U(x^0)$ და $(x_{n+1},\dots,x_m)\in\mathbb{R}^{m-n}$ წერტილებისთვის განვსაზღვროთ F ფუნქცია

$$F(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m)=f(x_1,\dots,x_n) \tag{13}$$

ტოლობით. მაშინ $\overline{x}=(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m)\in\mathbb{R}^{m+n}$ წერტილის $F(\overline{x})$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $\overline{x}^{\,0}=(x_1^0,\dots,x_n^0,x_{n+1}^0,\dots,x_m^0)\in\mathbb{R}^{m+n}$ წერტილზე ყოველი $(x_{n+1}^0,\dots,x_m^0)\in\mathbb{R}^{m-n}$ ნაკრებისთვის და ადგილი აქვს

$$dF(\overline{x}^{\,0})(dx_1,\dots,dx_m)=df(x^0)(dx_1,\dots,dx_n) \tag{14}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. 2.3.(4) უტოლობა ასე გადავწეროთ

$$\left|f(x)-f(x^0)-\sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x^0)\cdot(x_i-x_i^0)\right|<\varepsilon\|x-x^0\|, \tag{15}$$

$0<|x_k-x_k^0|<\delta/m$, $k=1,\dots,n$.

რადგანაც F ფუნქცია მუდმივია $x_{n+1},\dots,x_m$ ცვლადების მიმართ, ამიტომ $F'_{x_j}(\overline{x}^{\,0})=0$ ყველა $j=n+1,\dots,m$ მნიშვნელობისთვის (იხ. 2.1.(2) ტოლობის მომდევნო მსჯელობა). მეორე მხრივ,

ცხადია $\|x-x^0\|<\|\overline{x}-\overline{x}^{\,0}\|$ უტოლობა ნებისმიერი

$$|x_{n+1}-x^0_{n+1}|,\dots,|x_m-x^0_m|$$

სისტემისთვის. კერძოდ, ავიღოთ $|x_j-x^0_j|<\delta/m$, $j=n+1,\dots,m$. მაშასადამე,

$$\left|F(\overline{x})-F(\overline{x}^{\,0})-\sum_{i=1}^{m}(x_k-x^0_k)F'_{x_k}(\overline{x}^{\,0})\right|<\varepsilon\|\overline{x}-\overline{x}^{\,0}\|, \tag{16}$$

როცა

$$0<\|\overline{x}-\overline{x}^{\,0}\|=\sum_{i=1}^{m}|x_k-x^0_k|<m\cdot\frac{\delta}{m}=\delta.$$

ამრიგად, F ფუნქცია დიფერენცირებადია $\overline{x}^{\,0}$ წერტილზე და

$$dF(\overline{x}^{\,0})(dx_1,\dots,dx_m)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}F'_{x_k}(\overline{x}^{\,0})dx_k=\sum_{k=1}^{n}f'_{x_k}(x^0)dx_k=df(x^0)(dx_1,\dots,dx_n).$$

შედეგი 2.4.1. ვთქვათ, ერთი x_1 ცვლადის $a(x_1)$ ფუნქციას x^0_1 წერტილზე აქვს სასრული $a'(x^0_1)$ წარმოებული, ხოლო $b(x_2)$ ფუნქციას კი x^0_2 წერტილზე – სასრული $b'(x^0_2)$ წარმოებული. მაშინ

$$\varphi(x_1,x_2)=a(x_1)+b(x_2),\quad \psi(x_1,x_2)=a(x_1)\cdot b(x_2),$$
$$\omega(x_1,x_2)=a(x_1)/b(x_2)$$

ფუნქციებს (თუ x^0_2 წერტილის მიდამოში $b(x_2)\neq 0$) აქვთ დიფერენციალი (x^0_1,x^0_2) წერტილზე და მართებულია ტოლობები:

$$d\varphi(x^0_1,x^0_2)=a'(x^0_1)dx_1+b'(x^0_2)dx_2, \tag{17}$$

$$d\psi(x^0_1,x^0_2)=a'(x^0_1)b(x^0_2)dx_1+b'(x^0_2)a(x^0_1)dx_2, \tag{18}$$

$$d\omega(x^0_1,x^0_2)=\frac{1}{b^2(x^0_2)}\big[a'(x^0_1)b(x^0_1)dx_1-b'(x^0_2)a(x^0_1)dx_2\big]. \tag{19}$$

დამტკიცება. წინადადება 2.4.4-ის თანახმად $a(x_1)$ ფუნქცია, როგორც (x_1, x_2) ცვლადის ფუნქცია, დიფერენცირებადია ყველა (x_1^0, x_2) წერტილზე. ასევე $b(x_2)$ ფუნქცია, როგორც (x_1, x_2) წყვილის ფუნქცია, დიფერენცირებადია ყველა (x_1, x_2^0) წერტილზე. ორივე $a(x_1)$ და $b(x_2)$ ფუნქცია, როგორც (x_1, x_2)-ის ფუნქციები, ერთდროულად დიფერენცირებადია (x_1^0, x_2^0) წერტილზე. ამის შემდეგ უნდა გამოვიყენოთ ერთსა და იმავე წერტილზე (სიმრავლეზე) დიფერენცირებადი u და v ფუნქციებისთვის იმავე წერტილზე (იმავე სიმრავლეზე) მართებული შემდეგი ტოლობანი:

$$d(cu) = c\,du \ \ (c \text{ მუდმივია}), \tag{20}$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{21}$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \tag{22}$$

$$d\Big(\frac{u}{v}\Big) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \ \ (v \neq 0). \tag{23}$$

შენიშვნა 2.4.1. როგორც 2.4.1 წინადადებიდან ჩანს, f ფუნქციის დიფერენცირებადობა x^0 წერტილზე იწვევს

$$\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x^0)dx_i = \big(\operatorname{grad} f(x^0), dx\big) \tag{24}$$

ჯამის სასრულობას.

შებრუნებული წინადადება მცდარია: (24) ჯამის სასრულობიდან არ გამომდინარეობს f ფუნქციის დიფერენცირებადობა x^0 წერტილზე. ამის მიზეზი ისაა, რომ მისი სასრულობა არ იწვევს f ფუნქციის უწყვეტობასაც კი x^0 წერტილზე. ამის საილუსტრაციოდ გამოდგება თავი I-ის 2.2.(1)–2.2.(4) ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქციები, სადაც $x^0 = (0, 0)$.

შენიშვნა 2.4.2. დიფერენცირებადობის განსაზღვრაში მონაწილეობს თავი I-ის 1.1.(5) ტოლობით მოცემული ნორმა. ეს არჩევანი

გაკეთებულია მხოლოდ იმიტომ, რომ ამ ნორმით სარგებლობისას შედარებით ადვილია შეფასების ჩატარება. დიფერენცირებადობის ცნება კი, არ არის დამოკიდებული I თავის 1.1.(4)–1.1.(6) ნორმებიდან რომელიმეს არჩევაზე. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ამ ნორმებიდან რომელიმეს შეფარდება სხვა რომელიმესთან შემოსაზღვრულია ქვემოდან დადებითი აბსოლუტური მუდმივით ან ისეთი დადებითი რიცხვით, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ $\mathbb{R}^n$ სივრცის n განზომილებაზე (იხ. თავი I-დან 1.2.(1)–1.2.(4) შეფასებანი).

შენიშვნა 2.4.3. ერთცვლადიანი ფუნქციისთვის 2.3.1 განსაზღვრა ემთხვევა 1.3-ში მოცემულ განსაზღვრას. ამის საჩვენებლად განვიხილოთ ერთი t ცვლადის $y = \lambda(t)$ ფუნქცია. $\lambda(t)$ ფუნქციის t_0 წერტილზე დიფერენცირებადობა, 2.3.1 განსაზღვრის მიხედვით, ნიშნავს

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0) - (t - t_0) \cdot \lambda'(t_0)}{|t - t_0|} = 0 \tag{25}$$

ტოლობას, ხოლო 1.3.2 წინადადების მიხედვით კი

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0) - (t - t_0) \cdot \lambda'(t_0)}{t - t_0} = 0 \tag{26}$$

ტოლობას.

ეს ორი ტოლობა ურთიერთეკვივალენტურია.

მართლაც, თუ $t > t_0$, მაშინ (25) ტოლობა ემთხვევა (26) ტოლობას. როცა $t < t_0$, მაშინ (25)-ში $|t - t_0| = -(t - t_0)$ და ვიღებთ ისევ (26) ტოლობას.

შენიშვნა 2.4.4. აქამდე იგულისხმებოდა და ასე იქნება შემდეგშიც, რომ $u = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ფუნქციის მნიშვნელობანი ნამდვილია, ე. ი. $u \in \mathbb{R}$. თუკი გვექნება $u = (u_1, \ldots, u_m)$, ე. ი. $u \in \mathbb{R}^m$, მაშინ ასეთი ვექტორ-ფუნქციებისთვის დიფერენციალური თვისებანი ადვილად ფორმულირდება, თუკი მისი თითოეული $u_j = u_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, m)$ კომპონენტ-ფუნქციისთვის გვექნება სათანადო თვისება.

2.5. ცვლადთა ქვენაკრების მიმართ დიფერენცირებადობა

როგორც ვნახეთ, f ფუნქციის i-რი კერძო $d_{x_i}f(x^0)$ დიფერენციალის არსებობა $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე ეკვივალენტურია ამ ფუნქციის x_i ცვლადის მიმართ კერძო $f'_{x_i}(x^0)$ წარმოებულის სასრულობის x^0 წერტილზე (იხ. 2.1.(4) ტოლობა).

შესაძლებელია ამ სიტუაციის გაფართოება: დამოუკიდებელ ცვლადთა ძირითადი $(x_1, \dots, x_n)$ ნაკრებისგან გამოყოფილი ნებისმიერი ქვენაკრების მიმართ, x^0 წერტილზე დიფერენციალის არსებობის საკითხის განხილვა.

სიმარტივისთვის ეს საკითხი განვიხილოთ $(x_2, \dots, x_n)$ ქვენაკრების მიმართ. ამ მიზნით საჭიროა $f(x_1, \dots, x_n)$-ში x_1 ცვლადი შეიცვალოს x^0 წერტილის პირველი x_1^0 კოორდინატით და განვიხილოთ ასე მიღებული ახალი $\Phi(x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქცია, დამოკიდებული $n-1$ რაოდენობის ცვლადზე.

განსაზღვრა 2.5.1 ([107])**.** ვიტყვით, რომ $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციას $(x_2, \dots, x_n)$ **ქვენაკრების მიმართ** აქვს **დიფერენციალი** $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე, თუ $\Phi(x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციას $(x_2^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე აქვს დიფერენციალი.

2.4.1 წინადადებიდან მტკიცება 1)-ის გარკვეულ განზოგადებას წარმოადგენს შემდეგი წინადადების პირველი ნაწილი, რომელიც მიიღება 2.5.1 განსაზღვრიდან.

წინადადება 2.5.1. თუ $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე, მაშინ ეს ფუნქცია ნებისმიერი ქვენაკრების მიმართაა დიფერენცირებადი იმავე წერტილზე. შებრუნებული მტკიცება მცდარია, საზოგადოდ.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა ნიშნავს, რომ x^0 წერტილზე დიფერენცირებადობა არ გამომდინარეობს x^0-ზე ყოველი ისეთი ქვენაკრების მიმართ დიფერენცირებადობიდან, რომელიც შედგება n-ზე ნაკლები რაოდენობის ცვლადებისგან. ამის საილუსტრაციოდ გამოდგება თავი I-ის 2.2.(1)–2.2.(4) ტოლობებით მოცემული ორი

ცვლადის ფუნქციები: ყოველ მათგანს $O = (0, 0)$ წერტილზე აქვს სასრული ორივე კერძო წარმოებული.

უკანასკნელი წინადადების შებრუნებისთვის საკმარისი პირობები მოცემული იქნება ქვემოთ (იხ. თეორემა 4.5.1).

2.6. თითქმის ყველგან დიფერენცირებადობის შესახებ

მრავალი ცვლადის ფუნქციის თითქმის ყველგან დიფერენცირებადობის ამოცანის კვლევა დაიწყო რადემახერმა ლიპშიცის კლასის ფუნქციებისთვის და დაამტკიცა ამ კლასის ერთი ცვლადის ფუნქციებისთვის ლებეგის თეორემის ([10], გვ. 238) შემდეგი ანალოგი.

$E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება ლიპშიცის კლასის ფუნქცია E-ზე, თუ არსებობს ისეთი სასრული დადებითი K რიცხვი, რომ ყოველი ორი $x' \in E$ და $x'' \in E$ წერტილისთვის სრულდება

$$|f(x') - f(x'')| \leq K\|x' - x''\|$$

უტოლობა ($n = 2$ შემთხვევისთვის იხ. [54], გვ. 252).

თეორემა 2.6.1 ([155], [80], [141], [142]). ლიპშიცის კლასის ფუნქცია დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან*.

სტეპანოვს ეკუთვნის შემდეგი, უფრო სრული

თეორემა 2.6.2 ([164], [166], [54], გვ. 449). ზომად $E \subset \mathbb{R}^2$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი F ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის თითქმის ყველგან E-ზე, აუცილებელი და საკმარისია

$$\varlimsup_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|F(x,y) - F(x_0,y_0)|}{|x - x_0| + |y - y_0|} < +\infty \tag{1}$$

*ამ თეორემის ერთი დამტკიცება $n = 2$ შემთხვევისთვის მოცემული იქნება ქვემოთ (იხ. IV, თეორემა 2.5.1), რომლის გაძლიერებაა თეორემა 3.4.1 იმავე IV თავიდან.

დამოკიდებულების შესრულება თითქმის ყველა $(x_0, y_0) \in E$ წერტილზე*.

მაღალი განზომილების შემთხვევისთვის მართებულია

თეორემა 2.6.3 ([58], გვ. 295). $E \subset \mathbb{R}^n$ სიმრავლის მიდამოში მოცემული f ფუნქცია დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან E-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = O(\|h\|), \ \ \|h\| \to 0, \tag{2}$$

დამოკიდებულება სრულდება თითქმის ყველა $x^0 \in E$ წერტილზე, სადაც O-თი აღნიშნულია x^0-ზე დამოკიდებული სასრული მუდმივი.

თეორემა 2.6.4 ([93]). თუ ზომად $E \subset \mathbb{R}^2$ სიმრავლეზე ზომადი $f(x, y)$ ფუნქცია ზრდადია**, მაშინ(1) პირობა f-თვის შესრულებულია თითქმის ყველგან, ე. ი. $f(x, y)$ დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან.

შედეგი 2.6.1 ([93]). $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ c \le y \le d\}$ მართკუთხედზე ჯამებადი φ ფუნქციის განუსაზღვრელი ორმაგი

$$\Phi(x, y) = \int\limits_a^x \int\limits_c^y \varphi(t, \tau)\, dt\, d\tau \tag{3}$$

ინტეგრალი დიფერენცირებადია*** თითქმის ყველგან Q-ზე.

---

*სტეპანოვის ამ თეორემის დამტკიცება უწყვეტი F ფუნქციის შემთხვევისთვის იხილე [43]-ში, გვ. 36–41.

**ψ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი, თუ $\psi(x, y) \ge \psi(x', y')$, როცა $(x, y) > (x', y')$. უკანასკნელი ნიშნავს $x \ge x'$ და $y \ge y'$ უტოლობებს, რომელთაგან ერთი მაინც მკაცრია.

***ამ ფაქტის სხვაგვარი დამტკიცება იხილეთ ქვემოთ, თავი IV, თეორემა 1.2.1.

2.7. ძირითადი ამოცანა დიფერენცირებადობაზე

წინადადება 2.4.1-დან ვიცით, რომ f ფუნქციის დიფერენცირებადობა x^0 წერტილზე იწვევს $\operatorname{grad} f(x^0)$-ის სასრულობას. ამასთან ერთად არსებობს μ ფუნქცია, რომლისთვის $\operatorname{grad} \mu(x)$ სასრულია ყველა $x \in U(x^0)$ წერტილზე, თუმცა μ არ არის დიფერენცირებადი x^0 წერტილზე (იხ. 3.4.(14) ტოლობით მოცემული $\mu(x_1, x_2)$ ფუნქცია ქვემოთ). ამრიგად, $\operatorname{grad} f(x^0)$-ის სასრულობა არის მხოლოდ აუცილებელი პირობა f-ის დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე. შესაძლებელია ფუნქცია დიფერენცირებადი იყოს x^0 წერტილზე, მაგრამ x^0-ის ყოველ უცენტრო $U^0(x^0)$ მიდამოში არსებობდეს წერტილები, რომლებზეც მის გრადიენტს აზრიც კი არ ექნება. ასეთი გრადიენტი არაა უწყვეტი x^0 წერტილზე (იხ. 3.4.(12) ტოლობით განსაზღვრული $g(x_1, x_2)$ ფუნქცია ქვემოთ).

უფრო მეტიც, არსებობს ერთადერთ წერტილზე დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია ყველა სხვა წერტილზე (იხ. 3.4.(7), 3.4.(9) და 3.4.(11) ტოლობებით განსაზღვრული ფუნქციები ქვემოთ).

$df(x^0)$-ის არსებობისთვის საყოველთაოდ მიღებული საკმარისი პირობაა $\operatorname{grad} f(x)$-ის უწყვეტობა x^0 წერტილზე. ზემოთ აღნიშნული ფუნქციები ადასტურებენ, რომ გრადიენტის უწყვეტობა მხოლოდ საკმარისია დიფერენცირებადობისთვის.

ყოველივე ზემოთქმულიდან აშკარაა შემდეგი

ამოცანა ([102]). x^0 წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრული $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციისთვის არსებობს თუ არა ამ წერტილზე მისი რაიმე თვისება-ცნება ცალკე აღებული დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ, რომლის ყველა ცვლადისთვის შესრულება ამავე წერტილზე იქნება აუცილებელი და საკმარისი პირობა $df(x^0)$-ის არსებობისთვის?

§ 3-ში შემოღებულია კუთხური გრადიენტის ცნება და მტკიცდება, რომ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია მისი კუთხური გრადიენტის სასრულობა.

§ 4-ში შემოღებულია ძლიერი გრადიენტის ცნება და მტკიცდება, რომ ძლიერი გრადიენტის სასრულობა მხოლოდ საკმარისი პირობაა დიფერენციალის არსებობისთვის.

ამასთან ერთად, გრადიენტის უწყვეტობა იწვევს ძლიერი გრადიენტის სასრულობას შებრუნებული მტკიცების გარეშე.

§ 3. დიფერენცირებადობა ეკვივალენტურია კუთხური გრადიენტის სასრულობის

დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების ჩამოყალიბება-დამტკიცებამდე შემოვიღოთ რამდენიმე განსაზღვრა $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრული $u = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in U(x^0)$, $u \in \mathbb{R}$, ფუნქციისთვის.

3.1. კუთხური კერძო წარმოებული და კუთხური გრადიენტი

განსაზღვრა 3.1.1 ([99], [102], [107]). ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_k ცვლადით აქვს **კუთხური კერძო წარმოებული** x^0 წერტილზე, სიმბოლურად $f'_{\widehat{x}_k}(x^0)$, თუ $n-1$ რაოდენობის დადებით მუდმივთა ყოველი $c = (c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1} \dots, c_n)$ ნაკრებისთვის არსებობს ამ ნაკრებისგან დამოუკიდებელი სასრული ან უსასრულო შემდეგი ზღვარი

$$f'_{\widehat{x}_k}(x^0) = \lim_{x_k \to x_k^0} \frac{\Delta^c_{\widehat{x}_k} f(x)}{x_k - x_k^0}\,, \tag{1}$$

როცა

$$\Delta^c_{\widehat{x}_k} f(x) = f(x) - f(x(x_k^0)) \tag{2}$$

სხვაობა ექვემდებარება $|x_j - x_j^0| \le c_j |x_k - x_k^0|$ პირობებს ყველა $j \ne k$ მნიშვნელობისთვის (იხ. I, 4.1(1) ტოლობაც).

შემჭიდროებული სახით (1) და (2) დამოკიდებულებანი ასე იწერება:

$$f'_{\widehat{x}_k}(x^0) = \lim_{\substack{x_k \to x_k^0 \\ |x_j - x_j^0| \le c_j |c_k - x_k^0| \\ j \neq k}} \frac{f(x) - f(x(x_k^0))}{x_k - x_k^0}. \tag{3}$$

$f'_{\widehat{x}_k}(x^0)$-ის სასრულობის შემთხვევაში ეს ნიშნავს ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის და დადებით მუდმივთა ყოველი

$$c = (c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1} \dots, c_n)$$

ნაკრებისთვის ისეთი დადებითი $\delta_k = \delta_k(x^0, \varepsilon, c, f)$ რიცხვის არსებობას, რომ ადგილი აქვს

$$\left| \frac{\Delta^c_{\widehat{x}_k} f(x)}{x_k - x_k^0} - f'_{\widehat{x}_k}(x^0) \right| < \varepsilon \tag{4}$$

უტოლობას ყველა x-თვის $0 < \|x - x^0\| < \delta_k$ და $|x_j - x_j^0| \le c_j|x_k - x_k^0|$, $j \neq k$, თვისებებით.

$f'_{\widehat{x}_k}(x^0)$-ის არსებობიდან გამომდინარეობს $f'_{x_k}(x^0)$-ის არსებობა და მათი ტოლობა. ამის დასადგენად საკმარისია (1) ტოლობაში ავიღოთ $x_j = x_j^0$ ყველა $j \neq k$ მნიშვნელობისთვის.

კუთხური კერძო წარმოებულის არსებობა არ გამომდინარეობს, საზოგადოდ, კერძო წარმოებულის არსებობიდან.

მართლაც, I თავის 2.2.(1) ტოლობით განსაზღვრულ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციას აქვს ნულოვანი კერძო წარმოებულები $O = (0, 0)$ წერტილზე, მაგრამ მას O წერტილზე არ აქვს კუთხური კერძო წარმოებულები. x_1-ით მისი კუთხური კერძო წარმოებულის არარსებობა O წერტილზე გამომდინარეობს იქიდან, რომ ამ ფუნქციისთვის (3) ტოლობაში ზღვარქვეშ მდგომ შეფარდებას აქვს $\varphi(x_1, x_2)/x_1$ სახე, რომელსაც (3)-ში მითითებულ პირობებში ზღვარი არ აქვს (ამ შეფარდებას Ox_1 ღერძის გასწვრივ აქვს $0/x_1$ სახე და $x_2 = x_1$ წრფეზე კი – $1/x_1$, $x_1 \to 0$, სახე).

$f'_{\widehat{x}_k}(x^0)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს f ფუნქციის x_k ცვლადით კუთხური კერძო უწყვეტობა x^0 წერტილზე (იხ. I, ტოლობა 4.1.(1)).

ერთი ცვლადის ყოველი $\varphi(x_1)$ ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც რამდენიმე ცვლადის $\psi(x_1, \dots, x_m)$ ფუნქცია, რომელიც ტოლია $\varphi(x_1)$-ის ნებისმიერი $x_2, \dots, x_m$ მნიშვნელობებისთვის. ამიტომ $\varphi'(x_1^0)$ წარმოებული, უკანასკნელის არსებობის შემთხვევაში, ტოლი იქნება $\psi'_{\widehat{x}_1}(x_1^0, x_2, \dots, x_m)$-ის ნებისმიერი $x_2, \dots, x_m$ მნიშვნელობებისთვის.

განსაზღვრა 3.1.2 ([99], [102], [107])**.** თუ ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის არსებობს სასრული ან უსასრულო $f'_{\widehat{x}_k}(x^0)$, მაშინ ვიტყვით, რომ f ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს **კუთხური გრადიენტი** და ვწერთ:

$$\operatorname{anggrad} f(x^0) = \big(f'_{\widehat{x}_1}(x^0), \dots, f'_{\widehat{x}_n}(x^0)\big). \tag{5}$$

განსაზღვრა 3.1.3 ([107])**.** ვიტყვით, რომ f ფუნქცია x_k ცვლადით **კუთხურად კერძო დიფერენცირებადია** x^0 წერტილზე, თუ სასრულია $f'_{\widehat{x}_k}(x^0)$ და ვწერთ:

$$d_{\widehat{x}_k} f(x^0) = f'_{\widehat{x}_k}(x^0) dx_k. \tag{6}$$

ამასთან ერთად, $d_{\widehat{x}_k} f(x^0)$-ს ვუწოდოთ f ფუნქციის x_k ცვლადით **კუთხური კერძო დიფერენციალი** x^0 წერტილზე.

განსაზღვრა 3.1.4 ([107])**.** f ფუნქციას ვუწოდოთ **თითოეული ცვლადით კუთხურად კერძო დიფერენცირებადი** x^0 წერტილზე, თუ ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის არსებობს $d_{\widehat{x}_k} f(x^0)$ და ეს ეკვივალენტურია $\operatorname{anggrad} f(x^0)$-ის სასრულობის.

3.2. პირველი ძირითადი თეორემა დიფერენცირებადობაზე

1. აქ დამტკიცებული იქნება შემდეგი ძირითადი

თეორემა 3.2.1 ([99], [102], [107]). f ფუნქციის x^0 წერტილზე დიფერენცირებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია f-ის თითოეული ცვლადით კუთხური კერძო დიფერენცირებადობა ამავე წერტილზე ანუ, რაც იგივეა, $\operatorname{anggrad} f(x^0)$-ის სასრულობა, რაც ეკვივალენტურია

$$df(x^0) = f'_{\widehat{x}_1}(x^0)\, dx_1 + \cdots + f'_{\widehat{x}_n}(x^0)\, dx_n$$

ტოლობის.

დამტკიცება. ვთქვათ, f ფუნქცია დიფერენცირებადია x^0 წერტილზე და ვაჩვენოთ $f'_{\widehat{x}_k}(x^0)$-ის სასრულობა ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის. შემდეგი

$$\begin{aligned} f(x) - f(x(x_k^0)) - (x_k - x_k^0) f'_{x_k}(x^0) = \\ = \Big[f(x) - f(x^0) - \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0) f'_{x_j}(x^0) \Big] - \\ - \Big[f(x(x_k^0)) - f(x^0) - \sum_{j \neq k} (x_j - x_j^0) f'_{x_j}(x^0) \Big] \qquad (1) \end{aligned}$$

იგივეობის ყველა $f'_{x_j}(x^0)$ წევრი სასრულია, დიფერენცირებადობისას კერძო წარმოებულების სასრულობის გამო (იხ. წინადადება 2.4.1).

ვთქვათ, მოცემულია დადებით მუდმივთა ნებისმიერი $c = (c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1} \dots, c_n)$ ნაკრები. ავიღოთ ნებისმიერად მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვი. f ფუნქციის დიფერენცირებადობის გამო x^0 წერტილზე, დადებითი

$$\varepsilon^* = \varepsilon / 4 \Big(1 + \sum_{j \neq k} c_j \Big)$$

რიცხვისთვის არსებობს ისეთი დადებითი $\delta = \delta(x^0, c, \varepsilon, f)$ რიცხვი, რომ (1) იგივეობის მარჯვენა მხარის აბსოლუტური მნიშვნელობა

ნაკლები იქნება, ვიდრე

$$\varepsilon^* \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j^0| + \varepsilon^* \sum_{j \neq k} |x_j - x_j^0| \leq 2\varepsilon^* \sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j^0| =$$

$$= 2\varepsilon^* \Big(|x_k - x_k^0| + \sum_{j \neq k} |x_j - x_j^0| \Big), \tag{2}$$

როცა $0 < \|x - x^0\| < \delta$ (უტოლობა 2.3.(4)-ის გამო).

თუ $0 < \|x - x^0\| < \delta$ პირობასთან ერთად $x = (x_1, \dots, x_n)$ წერტილი აკმაყოფილებს $|x_j - x_j^0| \leq c_j |x_k - x_k^0|$ პირობას ყველა $j \neq k$ მნიშვნელობისთვის, მაშინ (1) იგივეობის მარცხენა მხარის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლები იქნება, ვიდრე ((2) უტოლობის გამო)

$$|x_k - x_k^0| \cdot 2\varepsilon^* \Big(1 + \sum_{j \neq k} c_j \Big) = \frac{1}{2}\, \varepsilon |x_k - x_k^0| < \varepsilon |x_k - x_k^0|.$$

ამრიგად, 3.1.(4) უტოლობა შესრულებულია $\delta_k = \delta$ მუდმივისთვის და $f'_{\widehat{x}_k}(x^0) = f'_{x_k}(x^0)$ მნიშვნელობისთვის, რომელიც სასრულია f ფუნქციის დიფერენცირებადობის გამო x^0 წერტილზე.

მაშასადამე, $\operatorname{anggrad} f(x^0)$ სასრულია, რაც ნიშნავს f ფუნქციის თითოეული ცვლადით კუთხურ კერძო დიფერენცირებადობას x^0 წერტილზე.

ამასთან ერთად დამტკიცდა, რომ f ფუნქციის დიფერენცირებადობა x^0 წერტილზე იწვევს ამ წერტილზე მისი $df(x^0)$ დიფერენციალის შემდეგ წარმოდგენებს:

$$df(x^0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{\widehat{x}_k}(x^0) dx_k \tag{3}$$

ანუ

$$df(x^0) = \sum_{k=1}^{n} d_{\widehat{x}_k} f(x^0). \tag{4}$$

ახლა დავუშვათ, რომ f ფუნქცია x^0 წერტილზე არის თითოეული ცვლადით კუთხურად კერძო დიფერენცირებადი ანუ, რაც იგივეა, სასრულია $\operatorname{anggrad} f(x^0)$. ეს ნიშნავს $f'_{\widehat{x}_k}(x^0)$-ის ანუ, რაც იგივეა $d_{\widehat{x}_k} f(x^0)$-ის სასრულობას ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის. ამიტომ 3.1.(1) ზღვარი სასრულია ყველა k-თვის და ყველა $c = (c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots, c_n)$ ნაკრებისთვის, კერძოდ, როცა $c_j = 1$ ყველა $j \neq k$ მნიშვნელობისთვის.

P_k-თი აღვნიშნოთ ყველა იმ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ წერტილის სიმრავლე, თითოეული რომელთაგანიც აკმაყოფილებს $|x_j - x_j^0| \leq |x_k - x_k^0|$ პირობას ყველა $j \neq k$ მნიშვნელობისთვის. სიმრავლე კი ყველა იმ $x \in P_k$ წერტილისა, რომელნიც აკმაყოფილებენ დამატებით $\|x - x^0\| < \eta$, $\eta > 0$, პირობასაც, აღვნიშნოთ P_k^η სიმბოლოთი. ამრიგად, $U(x^0, \eta)$ მიდამო არის სასრული რაოდენობის P_k^η $(k = 1, \dots, n)$ სიმრავლეების გაერთიანება.

ავიღოთ ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვი. მაშინ 3.1.(4) უტოლობა სრულდება ყველა $x \in P_k^{\delta_k} \setminus \{x^0\}$ წერტილისთვის. შემოვიღოთ დადებითი $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ რიცხვი. მაშინ 3.1.(4) უტოლობა შესრულდება ყველა $x \in P_k^\delta \setminus \{x^0\}$ წერტილისთვისაც, ცხადია. მაშასადამე, არსებობს დადებითი რიცხვი $\delta = \delta(x^0, \varepsilon, f)$ ისეთი, რომ ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის და ყველა $x \in P_k^\delta \setminus \{x^0\}$ წერტილისთვის ადგილი აქვს

$$\left| f(x) - f(x(x_k^0)) - (x_k - x_k^0) \cdot f'_{\widehat{x}_k}(x^0) \right| < \varepsilon |x_k - x_k^0| \qquad (5)$$

უტოლობას.

f ფუნქციის დიფერენცირებადობის დასადგენად x^0 წერტილზე, საკმარისია დადგინდეს 2.3.(4) დამოკიდებულების მართებულობა უცენტრო $U^0(x^0, \delta)$ მიდამოში. ამისთვის კი, თავის მხრივ, საკმარისია დადგინდეს, რადგანაც P_k^δ სიმრავლეთა რაოდენობა სასრულია, იგივე 2.3.(4) უტოლობა თითოეული $P_k^\delta \setminus \{x^0\}$ $(k = 1, \dots, n)$ სიმრავლისთვის.

ცხადია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავკმაყოფილდეთ 2.3.(4) დამოკიდებულების დადგენით ერთი რომელიმე, ვთქვათ

$P_1^\delta \setminus \{x^0\}$ სიმრავლისთვის. ამის გამო შემდგომი მსჯელობა მორგებული იქნება შემთხვევაზე, როცა $x = (x_1, \ldots, x_n)$ წერტილი მუდმივად ეკუთვნის $P_1^\delta \setminus \{x^0\}$ სიმრავლეს და ასე ისწრაფვის x^0 წერტილისკენ.

რადგან x წერტილი ეკუთვნის $P_1^\delta \setminus \{x^0\}$ სიმრავლეს, ამიტომ (5) უტოლობა შესრულებულია $k = 1$ მნიშვნელობისთვის. ამრიგად,

$$\left|f(x) - f(x(x_1^0)) - (x_1 - x_1^0) \cdot f'_{\widehat{x}_1}(x^0)\right| < \varepsilon |x_1 - x_1^0| \qquad (6)_1$$

პირობა შესრულებულია ყველა ისეთი x-თვის, რომელნიც აკმაყოფილებენ $0 < \|x - x^0\| < \delta$ და $|x_j - x_j^0| \leq |x_1 - x_1^0|$ პირობებს ყველა $j = 2, \ldots, n$ მნიშვნელობისთვის.

$U(x^0, \delta)$ მიდამოს $x(x_1^0) = (x_1^0, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილი არ ეკუთვნის $P_1^\delta \setminus \{x^0\}$ სიმრავლეს და იგი მიეკუთვნება რომელიმე $P_{l_1}^\delta \setminus \{x^0\}$-ს, სადაც $l_1 \neq 1$ (ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში (იხ. [99]) არის მხოლოდ ერთადერთი შესაძლებლობა: წერტილი (x_1^0, x_2) მიეკუთვნება $P_2^\delta \setminus \{x^0\}$-ს). ამიტომ ისევ (5)-ის ძალით შესრულდება გარკვეული უტოლობა, რომელიც კერძო $x(x_1^0) \in P_{l_1}^\delta \setminus \{x^0\}$ წერტილისთვის და თავი I-ის 3.3.(1) სიმბოლოს გამოყენებით მიიღებს სახეს:

$$\left|f(x(x_1^0)) - f(x(x_1^0, x_{l_1}^0)) - (x_{l_1} - x_{l_1}^0) f'_{\widehat{x}_{l_1}}(x^0)\right| < \varepsilon |x_{l_1} - x_{l_1}^0|, \ (6)_{l_1}$$

სადაც $x(x_1^0, x_{l_1}^0)$ აღნიშნავს იმ $(x_1^0, \ldots)$ წერტილს, რომლის l_1 კოორდინატია $x_{l_1}^0$. ახლა $x(x_1^0, x_{l_1}^0)$ წერტილი, რომლის ორი კოორდინატია ფიქსირებული, მიეკუთვნება რომელიმე $P_{l_2}^\delta \setminus \{x^0\}$ სიმრავლეს, სადაც $l_1 \neq 1$ და $l_2 \neq l_1$.

ამ პროცედურის გაგრძელებით ბოლოს მივიღებთ ისეთ წერტილს, რომლის ყველა კოორდინატი ფიქსირებულია გარდა ერთისა. ეს ერთადერთი ცვლადი კოორდინატი არის $x_{l_{n-1}}$ და ამ წერტილს აქვს $x^0(x_{l_{n-1}})$ სახე, თავი I-ის 2.1.(2) სიმბოლოს გამოყენებით. ეს კი ნიშნავს, რომ $x^0(x_{l_{n-1}})$ წერტილი ეკუთვნის $P_{l_{n-1}} \setminus \{x^0\}$ სიმრავლეს. ამიტომ (5) უტოლობის გამოყენებით $k = l_{n-1}$ მნიშვნელობისთვის,

გვექნება შეფასება:

$$\begin{aligned}\big|f(x^0(x_{l_{n-1}}))-f(x^0)-(x_{l_{n-1}}-x^0_{l_{n-1}})f'_{\widehat{x}_{l_{n-1}}}(x^0)\big|<\\<\varepsilon|x_{l_{n-1}}-x^0_{l_{n-1}}|.\end{aligned}\qquad (6)_{l_{n-1}}$$

ახლა დავწეროთ ცხადი ტოლობა

$$\begin{aligned}f(x)-f(x^0)-\sum_{k=1}^{n}(x_k-x^0_k)f'_{\widehat{x}_k}(x^0)=\\=\big[f(x)-f(x(x^0_1))-(x_1-x^0_1)f'_{\widehat{x}_1}(x^0)\big]+\\+\big[f(x(x^0_1))-f(x(x^0_1,x^0_{l_1}))-(x_{l_1}-x^0_{l_1})f'_{\widehat{x}_{l_1}}(x^0)\big]+\cdots+\\+\big[f(x^0(x_{l_{n-1}}))-f(x^0)-(x_{l_{n-1}}-x^0_{l_{n-1}})f'_{\widehat{x}_{l_{n-1}}}(x^0)\big].\end{aligned}\qquad (7)$$

$(6)_1, (6)_{l_1}$–$(6)_{l_{n-1}}$ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ (7) ტოლობის მარცხენა მხარის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია, ვიდრე

$$\varepsilon\big(|x_1-x^0_1|+|x_{l_1}-x^0_{l_1}|+\cdots+|x_{l_{n-1}}-x^0_{l_{n-1}}|\big)=\varepsilon\|x-x^0\|.$$

მაშასადამე, $\operatorname{anggrad} f(x^0)$-ის სასრულობა იწვევს f ფუნქციის დიფერენცირებადობას x^0 წერტილზე და სასრული $\sum\limits_{k=1}^{n} f'_{\widehat{x}_k}(x^0)dx_k$ ჯამის ტოლობას $df(x^0)$ დიფერენციალთან. თეორემა დამტკიცებულია.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ძირითადი თეორემა 3.2.1-ის პირობის საკმარისობის დამტკიცებისას მოძრაობა დავიწყეთ ნებისმიერი $(x_1,\dots,x_n)\in P^\delta_1$ წერტილიდან და შემდეგ თანდათანობით ვიღებდით თითო წერტილს $P^\delta_\nu\setminus\{x^0\}$, $\nu\neq 1$ სიმრავლიდან. ასე მივედით x^0 წერტილამდე. სწორედ ასე იქნა გათვალისწინებული f ფუნქციის ყოფაქცევა x^0 წერტილის მიდამოში თითოეული დამოუკიდებელი ცვლადის მიმართ, f-ის შესაბამისი სასრული კუთხური კერძო წარმოებულის არსებობის თვალსაზრისით. ამასთან, ამ თითო წერტილის აღების თანმიმდევრობას მნიშვნელობა არ აქვს.

2. ძირითადი თეორემა 3.2.1-ის პირველი ნაწილის დამტკიცებისას დადგენილ იქნა, რომ x^0 წერტილზე f ფუნქციის დიფერენცირებადობიდან გამომდინარეობს მისი $df(x^0)$ დიფერენციალის წარმოდგენის შესაძლებლობა (3) და (4) ფორმულებით.

იგივე თეორემის მეორე ნაწილის მტკიცებისას დადგინდა, რომ $\sum\limits_{k=1}^{n} f'_{\widehat{x}_k}(x^0)dx_k$ ჯამის ანუ, რაც იგივეა, $\sum\limits_{k=1}^{n} d_{\widehat{x}_k}f(x^0)$ ჯამის სასრულობიდან გამომდინარეობს f ფუნქციის დიფერენცირებადობა x^0 წერტილზე და $df(x^0)$ დიფერციალი ტოლია თითოეულის ამ ორი ჯამიდან.

ყოველივე ეს შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი ორი თეორემის სახით.

თეორემა 3.2.2 ([107]). f ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია $\sum\limits_{k=1}^{n} f'_{\widehat{x}_k}(x^0)dx_k$ ჯამის, ანუ რაც იგივეა, $\sum\limits_{k=1}^{n} d_{\widehat{x}_k}f(x^0)$ ჯამის სასრულობა. თითოეული ამ ჯამის სასრულობის შემთხვევაში, $df(x^0)$ დიფერენციალი წარმოდგება (3) და (4) ტოლობებით.

თეორემა 3.2.3. ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის რაიმე წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია ამ ფუნქციის თითოეული ცვლადით კუთხური კერძო დიფერენცირებადობა იმავე წერტილზე.

შენიშვნა 3.2.1. თეორემა 3.2.2-ით მოხსნილია ის ცნობილი შეუსაბამობა, რომ $\sum\limits_{k=1}^{n} f'_{x_k}(x^0)dx_k$ ჯამის სასრულობა არ იწვევს f ფუნქციის დიფერენცირებადობას x^0 წერტილზე, საზოგადოდ.

3.3. მეორე თეორემა დიფერენცირებადობაზე

როგორც ვნახეთ, თითოეული კუთხური კერძო წარმოებულის განსაზღვრაში მონაწილეობს დადებით მუდმივთა ნაკრები. თუ ფუნქცია დამოკიდებულია m რაოდენობის ცვლადზე, მაშინ ამ ფუნქციისთვის

თითოეული კუთხური კერძო წარმოებულის განსაზღვრაში მონაწილეობს $m-1$ ცალი ნებისმიერი დადებითი მუდმივი. ეს უცილებელია ცალკე აღებული კუთხური კერძო წარმოებულის განსაზღვრა-არსებობისთვის.

მაგრამ, ძირითადი თეორემა 3.2.1-ის პირობის საკმარისობის დადგენისას გამოვლინდა ერთი საყურადღებო ფაქტი: თუ f ფუნქციისთვის x^0 წერტილზე თითოეული კუთხური კერძო წარმოებულის განსაზღვრაში მონაწილე ყველა c_j მუდმივს ავიღებთ 1-ის ტოლად, მაშინ ასეთნაირად მიღებული ყველა სიდიდის ერთდროული სასრულობა საკმარისია (აუცილებლობა აშკარაა) f ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე, ე. ი. ამ წერტილზე f ფუნქციის თითოეული ცვლადით კუთხური კერძო დიფერენცირებადობისთვის ანუ, რაც იგივეა, $\operatorname{anggrad} f(x^0)$-ის სასრულობისთვის.

ამ ფაქტს აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა ფუნქციის გამოკვლევისას დიფერენცირებადობაზე (იხ. ქვემოთ) და ის ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემის სახით.

თეორემა 3.3.1 ([102], [107]). $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ ყველა $k=1,\dots,n$ მნიშვნელობისთვის სასრული იყოს **არაინტენსური კუთხური კერძო წარმოებულები**

$$D_{\widehat{x}_k} f(x^0) = \lim_{\substack{x_k\to x_k^0\\ |x_j-x_j^0|\le|x_k-x_k^0|\\ j\ne k}} \frac{f(x)-f(x(x_k^0))}{x_k-x_k^0}\,. \tag{1}$$

შედეგი 3.3.1 ([102], [107]). ყველა $D_{\widehat{x}_k} f(x^0)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს ყველა $f'_{\widehat{x}_k} f(x^0)$-ის სასრულობა და ტოლობები:

$$f'_{\widehat{x}_k} f(x^0) = D_{\widehat{x}_k} f(x^0),\quad k=1,\dots,n, \tag{2}$$

$$df(x^0)=\sum_{k=1}^n D_{\widehat{x}_k} f(x^0)dx_k. \tag{3}$$

შედეგი 3.3.1 ([107]). ყველა $D_{\widehat{x}_k} f(x^0)$-ის სასრულობა არის აუცილებელი და საკმარისი, რათა f ფუნქცია იყოს თითოეული ცვლადით კუთხურად კერძო დიფერენცირებადი x^0 წერტილზე ანუ, რაც იგივეა, $\operatorname{anggrad} f(x^0)$ იყოს სასრული.

ახლა შემოვიღოთ **არაინტენსური კუთხური გრადიენტი**

$$\widehat{D} f(x^0) = \big(D_{\widehat{x}_1} f(x^0), \dots, D_{\widehat{x}_n} f(x^0)\big), \tag{4}$$

რომლის მეშვეობით 3.2.1 თეორემა მიიღებს შემდეგ სახეს.

თეორემა 3.3.2 ([107]). $df(x^0)$-ის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია $\widehat{D} f(x^0)$-ის სასრულობა ანუ, რაც იგივეა, $\operatorname{anggrad} f(x^0)$-ის და $\widehat{D} f(x^0)$-ის სასრულობა f ფუნქციის ურთიერთეკვივალენტური თვისებებია x^0 წერტილზე. როცა $\widehat{D} f(x^0)$ სასრულია, მაშინ

$$df(x^0) = \big(\widehat{D} f(x^0), dx\big). \tag{5}$$

შევნიშნოთ, რომ 3.3.1 თეორემის ეკვივალენტურია

თეორემა 3.3.3. f ფუნქციის x^0 წერტილზე დიფერენცირებადობისთვის აუცილებელი და საკმარისია f-ის თითოეული ცვლადით არაინტენსურად კუთხური კერძო დიფერენცირებადობა ამავე წერტილზე ანუ, რაც იგივეა, $\widehat{D} f(x^0)$-ის სასრულობა.

3.4. მაგალითები დიფერენცირებადობაზე

3.3.1 თეორემა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ფუნქციის როგორც დიფერენცირებადობა, ისე მისი არადიფერენცირებადობა. ამ თვალსაზრისით, დიფერენცირებადობაზე აქ გამოვიკვლევთ ზოგიერთ ფუნქციას.

წინადადება 3.4.1 ([102], [107]). ვთქვათ გვაქვს $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, რიცხვები. მაშინ ყველა $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ წერტილზე უწყვეტი

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = |x_1|^{\alpha_1} \cdot |x_2|^{\alpha_2} \cdots |x_n|^{\alpha_n} \tag{1}$$

ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის $x^0 = (0, \dots, 0)$ წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > 1 \tag{2}$$

პირობა.

კერძოდ, $\nu(x_1, \dots, x_n) = (|x_1| \cdots |x_n|)^\alpha$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია $\alpha > \frac{1}{n}$ უტოლობის შესრულება.

საკმარისობა. 3.3.(1) ტოლობის თანახმად

$$D_{\widehat{x}_k}\varphi(x^0) = \lim_{\substack{x_k \to 0 \\ |x_j| \le |x_k|}} \frac{|x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n|^{\alpha_n}}{x_k} = \lim_{\substack{x_k \to 0 \\ |x_j| \le |x_k|}} \frac{|x_k|}{x_k} \cdot \frac{|x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n|^{\alpha_n}}{|x_k|}\,.$$

აქ მითითებულ პირობებში გვაქვს:

$$\begin{gathered}\frac{|x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n|^{\alpha_n}}{|x_k|} \le \\ \le |x_k|^{\alpha_1} \cdots |x_k|^{\alpha_{k-1}} \cdot |x_k|^{\alpha_k - 1} \cdot |x_k|^{\alpha_{k+1}} \cdots |x_k|^{\alpha_n} = \\ = |x_k|^{(\alpha_1 + \cdot + \alpha_{k-1} + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_n) - 1} \to 0, \ \ x_k \to 0.\end{gathered}$$

ამრიგად, $D_{\widehat{x}_k}\varphi(x^0) = 0$ ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის და 3.3.(3) ტოლობით

$$d\varphi(x^0) = 0. \tag{3}$$

აუცილებლობა. გვაქვს $\alpha_j > 0$ და ვუშვებთ, რომ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le 1$. მაშინ არ არსებობს არც ერთი სასრული $D_{\widehat{x}_k}\varphi(x^0)$ და ამიტომ $\varphi(x)$ არ არის დიფერენცირებადი x^0-ზე. მართლაც, თუ იარსებებდა რომელიმე სასრული $D_{\widehat{x}_k}\varphi(x^0)$, მაშინ სასრული ზღვარი ექნებოდა (კერძო $x_j = x_k$ შემთხვევაშიც)

$$\frac{|x_k|^{\alpha_1} \cdots |x_k|^{\alpha_n}}{x_k} = \frac{|x_k|^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{x_k} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{|x_k|}{x_k}, & \text{როცა}\ \ \alpha_1+\cdots+\alpha_n=1, \\ \dfrac{|x_k|}{x_k}\cdot|x_k|^{-\beta}, & \text{როცა}\ \ \alpha_1+\cdots+\alpha_n<1, \\ & \qquad\quad \beta=1-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n) \end{cases}$$

გამოსახულებას, რაც ასე არ არის.

კერძოდ,

$$\mu(x_1,x_2)=\sqrt{|x_1|\cdot|x_2|} \tag{4}$$

ფუნქცია არ არის დიფერენცირებადი $(0,0)$ წერტილზე*.

შენიშვნა 3.4.1 ([107]). წინადადება 3.4.1-ის თანახმად,

$$\lambda(x_1,x_2)=|x_1\cdot x_2|^{2/3} \tag{5}$$

ფუნქცია დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილზე. ამასთან ერთად უნდა აღინიშნოს, რომ $\lambda(x_1,x_2)$ ფუნქცია არ არის დიფერენცირებადი $(a,0)$ და $(0,b)$ წერტილებზე, როცა $a\neq 0$ და $b\neq 0$ (მოკლედ: $ab\neq 0$).

მართლაც, $\lambda(x_1,x_2)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობის შემთხვევაში $(a,0)$ წერტილზე, $a\neq 0$, იარსებებდა

$$\lambda'_{x_2}(a,0)=\big(\lambda(a,x_2)\big)'(0)=|a|^{2/3}\big(|x_2|^{2/3}\big)'(0)$$

სასრული კერძო წარმოებული, რაც მცდარია**. მაშასადამე, $\lambda(x_1,x_2)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია მხოლოდ იმ წერტილებზე, რომელთა ორივე კოორდინატია ნული ან ორივე კოორდინატი განსხვავებულია ნულისგან.

შენიშვნა 3.4.2. არ იქნება ზედმეტი იმის აღნიშვნა, რომ ერთი ცვლადის $\nu(t)=t^{2/3}$ ფუნქცია არ არის დიფერენცირებადი $t=0$ წერტილზე, მაგრამ მასში $(0,0)$ წერტილზე დიფერენცირებადი ორი

---

*$\mu(x_1,x_2)$ ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილზე (იხ. ტოლობა 7.3.(10) ქვემოთ).

**უფრო ზუსტად, $(|x_2|^{2/3})'(0+)=+\infty$ და $(|x_2|^{2/3})'(0-)=-\infty$.

ცვლადის $t = |x_1 \cdot x_2|$ ფუნქციის ჩასმით მიიღება იმავე $(0,0)$ წერტილზე დიფერენცირებადი ორი ცვლადის $\lambda(x_1, x_2) = |x_1 \cdot x_2|^{2/3}$ ფუნქცია.

შენიშვნა 3.4.3. თუ k-ს თუნდაც ერთი რომელიმე მნიშვნელობისთვის $1, \dots, n$ რიცხვებიდან, არ არსებობს სასრული

$$\lim_{\substack{x_k \to x_k^0 \\ |x_j - x_j^0| = |x_k - x_k^0| \\ j \neq k}} \frac{f(x) - f(x(x_k^0))}{x_k - x_k^0} \tag{6}$$

ზღვარი, მაშინ $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია არ არის დიფერენცირებადი $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე.

წინადადება 3.4.2 ([107])**.** ვთქვათ, მოცემულია $\beta_j > 1$, $j = 1, \dots, n$, რიცხვები. მაშინ

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^{\beta_j}, & \text{თუ ყველა } x_j \text{ რაციონალურია}, \\ 0, & \text{ყველა სხვა წერტილზე} \end{cases} \tag{7}$$

ფუნქცია დიფერენცირებადია მხოლოდ $x^0 = (0, \dots, 0)$ წერტილზე და

$$d\phi(x^0) = 0. \tag{8}$$

ამასთან ერთად, $\phi(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია წყვეტილია ყველა $(x_1, \dots, x_n) \neq x^0$ წერტილზე.

დამტკიცება. გვაქვს

$$D_{\widehat{x}_k} \phi(x^0) = \lim_{\substack{x_k \to 0 \\ |x_j| \leq |x_k| \\ j \neq k}} \frac{\phi(x) - \phi(x(x_k^0))}{x_k} =$$

$$= \lim_{\substack{x_k\to 0\\ |x_j|\le|x_k|\\ j\ne k}} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^{\beta_j} - \sum\limits_{j\ne k}|x_j|^{\beta_j}}{x_k} = \lim_{x_k\to 0}\frac{|x_k|}{x_k}\cdot\frac{|x_k|^{\beta_k}}{|x_k|} = 0$$

და (8) ტოლობა გამომდინარეობს 3.3.(3) ტოლობიდან.

$\phi(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის წყვეტილობა ყველა $x\ne x^0$ წერტილზე გამომდინარეობს იქიდან, რომ არსებობს x-კენ კრებადი ორი მიმდევრობა წერტილებისა, რომელთაგან ერთი მიმდევრობის გასწვრივ ϕ ფუნქციის მნიშვნელობანი ისწრაფვიან ნულისკენ და მეორე მიმდევრობის გასწვრივ კი არ ისწრაფვიან ნულისკენ. წინადადება დამტკიცებულია.

წინადადება 3.4.3 ([107]). $q>1$ რიცხვის შესაბამის

$$\psi(x_1,\dots,x_n) =$$
$$= \begin{cases} \Big(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|\Big)^{q}, & \text{თუ ყველა } x_j \text{ რაციონალურია,}\\ 0, & \text{ყველა სხვა წერტილზე} \end{cases} \tag{9}$$

ფუნქციას აქვს (7) ტოლობით მოცემული $\phi(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის თვისებები.

დამტკიცება. აქაც

$$D_{\widehat{x}_k}\psi(x^0) = \lim_{\substack{x_k\to 0\\ |x_j|\le|x_k|\\ j\ne k}} \frac{\big(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|\big)^{q} - \big(\sum\limits_{j\ne k}|x_j|\big)^{q}}{x_k}.$$

მაგრამ

$$\left|\frac{\big(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|\big)^{q} - \big(\sum\limits_{j\ne k}|x_j|\big)^{q}}{x_k}\right| \le \frac{2\big(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|\big)^{q}}{|x_k|} \le$$

$$\leq \frac{2\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_k|\Big)^q}{|x_k|} = \frac{2(n|x_k|)^q}{|x_k|} \to 0, \quad x_k \to 0.$$

ამრიგად,

$$d\psi(x^0) = 0. \tag{10}$$

წყვეტილობის თვალსაზრისით, $\psi(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქცია მსგავსია (7) ტოლობით მოცემული $\phi(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის. წინადადება დამტკიცებულია.

წინადადება 3.4.4 ([107]). $\alpha > 0$ რიცხვის შესაბამისი

$$\omega(x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \begin{cases} \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}}, & \text{თუ ყველა } x_j \text{ რაციონალურია,} \\ 0, & \text{ყველა სხვა წერტილზე} \end{cases} \tag{11}$$

ფუნქციის თვისებები იგივეა, რაც (7) და (9) ტოლობებით მოცემული ფუნქციებისა.

დამტკიცება. გვაქვს

$$D_{\widehat{x}_k}\omega(x^0) = \lim_{\substack{x_k\to 0\\ |x_j|\leq|x_k|\\ j\neq k}} \frac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}} - \Big(\sum\limits_{j\neq k} x_j^2\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{x_k}$$

და

$$\left|\frac{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}} - \Big(\sum_{j\neq k} x_j^2\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{x_k}\right| \leq \frac{2\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{|x_k|} \leq$$

$$\leq \frac{2\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} x_k^2\Big)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{|x_k|} = \frac{2(nx_k^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{|x_k|} =$$

$$= \frac{2n^{\frac{1+\alpha}{2}}|x_k|^{1+\alpha}}{|x_k|} = 2n^{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot |x_k|^{\alpha} \to 0, \quad x_k \to 0.$$

წინადადება დამტკიცებულია.

წინადადება 3.4.5 ([107]).

$$g(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1x_2 \sin\dfrac{1}{x_1x_2}\,, & \text{როცა} \;\; x_1\cdot x_2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \;\; x_1 \cdot x_2 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

ფუნქცია დიფერენცირებადია $x^0 = (0,0)$ წერტილზე და მისი გრადიენტი $\operatorname{grad} g(x_1,x_2)$ არაა უწყვეტი x^0-ზე იმის გამო, რომ $\operatorname{grad} g(x_1,x_2)$ არ არის განსაზღვრული x^0 წერტილის მიდამოში.

დამტკიცება.

$$D_{\widehat{x}_1} g(x^0) = \lim_{\substack{x_1\to 0\\ |x_2|\le |x_1|}} \frac{g(x_1,x_2)-g(0,x_2)}{x_1} = \lim_{\substack{x_1\to 0\\ |x_2|\le |x_1|}} \frac{g(x_1,x_2)}{x_1}\,.$$

მაგრამ,

$$\Big|\frac{g(x_1,x_2)}{x_1}\Big| = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \;\; x_2 = 0, \\ \Big|x_2 \sin\dfrac{1}{x_1x_2}\Big| \le |x_2| \le |x_1|, & \text{როცა} \;\; x_2 \neq 0. \end{cases}$$

ამიტომ $D_{\widehat{x}_1} g(x^0) = 0$. ასევე მიიღება $D_{\widehat{x}_2} g(x^0) = 0$ ტოლობაც. ამრიგად,

$$dg(x^0) = 0. \tag{13}$$

შემდეგ, როცა $b \neq 0$, მაშინ $(0,b)$ წერტილზე გვაქვს:

$$g'_{x_1}(0,b) = \lim_{x_1\to 0} \frac{g(x_1,b)-g(0,b)}{x_1} = b \cdot \lim_{x_1 \to 0} \sin\frac{1}{bx_1}\,.$$

ამიტომ $g'_{x_1}(0,b)$ არ არსებობს. ასევე არ არსებობს $g'_{x_2}(a,0)$, როცა $a \neq 0$. ეს ნიშნავს, რომ $\operatorname{grad} g(x_1,x_2)$ არ არის განსაზღვრული x^0 წერტილის მიდამოში და ამიტომ არ შეიძლება მას ჰქონდეს უწყვეტობის თვისება x^0 წერტილზე. წინადადება დამტკიცებულია.

წინადადება 3.4.6 ([107])**.**

$$\mu(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1^2\cdot x_2}{x_1^2+x_2^2}, & \text{როცა } \ x_1^2+x_2^2>0,\\ 0, & \text{როცა } \ x_1=0=x_2\end{cases} \tag{14}$$

ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისებები:

1) $\mu(x_1,x_2)$ უწყვეტია ყველგან;

2) $\operatorname{grad}\mu(x_1,x_2)$ სასრულია ყველგან;

3) $\mu(x_1,x_2)$ არ არის დიფერენცირებადი $(0,0)$ წერტილზე;

4) $\operatorname{grad}\mu(x_1,x_2)$ წყვეტილია $(0,0)$ წერტილზე.

დამტკიცება. $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობა $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ წერტილებზე აშკარაა. ამ ფუნქციის უწყვეტობისთვის $x^0=(0,0)$ წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია I თავის 6.1.(1) და 6.1.(2) ტოლობანი შესრულდეს $x_1^0=0$ და $x_2^0=0$ მნიშვნელობებისთვის, შესაბამისად. ამასთან, გვაქვს:

$$\bigl|\mu(x_1,x_2)-\mu(0,x_2)\bigr|=\bigl|\mu(x_1,x_2)-\mu(x_1,0)\bigr|=\bigl|\mu(x_1,x_2)\bigr|=$$
$$=\frac{x_1^2\cdot|x_2|}{x_1^2+x_2^2}<\frac{x_1^2\cdot|x_2|}{x_1^2}=|x_2|\to 0,\ \ (x_1,x_2)\to(0,0).$$

ამრიგად, $\mu(x_1,x_2)$ ფუნქცია უწყვეტია $(0,0)$ წერტილზეც. $\operatorname{grad}\mu(x_1,x_2)$-ის სასრულობა $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ წერტილებზე ცხადია, ხოლო $(0,0)$ წერტილისათვის გვაქვს $\mu'_{x_1}(0,0)=(\mu(x_1,0))'(0)=0=\mu'_{x_2}(0,0)$. ამრიგად, $\operatorname{grad}\mu(x_1,x_2)$ სასრულია ყველგან.

$\mu(x_1,x_2)$ ფუნქციის არადიფერენცირებადობა $(0,0)$ წერტილზე გამომდინარეობს $D_{\widehat{x}_1}\mu(x^0)$-ის არარსებობიდან, მაგალითად. ეს უკანასკნელი არ არსებობს, რადგანაც 3.3.(1) ტოლობას $k=1$ შემთხვევისთვის აქვს სახე

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ |x_2|\le|x_1|}}\frac{x_1^2\cdot x_2}{x_1(x_1^2+x_2^2)}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ |x_2|\le|x_1|}}\frac{x_1\cdot x_2}{x_1^2+x_2^2}$$

და ეს ზღვარი არ არსებობს. მართლაც, ვთქვათ $0 < \ell < 1$ და განვიხილოთ კერძო შემთხვევა $x_2 = \ell x_1$. მაშინ $|x_2| < |x_1|$ და მიღებული შეფარდება უტოლდება $\ell/(1+\ell^2)$ რიცხვს. ეს ნიშნავს, რომ $D_{\widehat{x}_1}\mu(0,0)$ არ არსებობს და ამიტომ არ არსებობს $d\mu(0,0)$.

დასასრულს, $\operatorname{grad}\mu(x_1,x_2)$-ის $(0,0)$ წერტილზე უწყვეტობის შემთხვევაში იარსებებდა $d\mu(0,0)$, რაც ასე არ არის. წინადადება დამტკიცებულია.

შედეგი 3.4.1. თეორემა 2.1.1-ში ნახსენებ ტოლსტოვის $F(x_1,x_2)$ ფუნქციას სასრული გრადიენტი აქვს K-ს ყველა შიგა წერტილზე, მაგრამ სასრული კუთხური გრადიენტი არ აქვს μ^2 ზომის ბრტყელ $E \subset Q$ სიმრავლეზე მაინც.

3.5. ორცვლადიანი ფუნქციის დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

ორი ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ ფუნქციებს მჭიდრო კავშირი აქვთ კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციებთან. ამიტომ, მიზანშეწონილია $n=2$ მნიშვნელობის შესაბამისი შედეგები ჩამოვაყალიბოთ ცალკე.

ორი ცვლადის $\varphi(x)$, $x=(x_1,x_2)$, ფუნქციის დიფერენცირებადობა $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილზე ნიშნავს

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0}} \frac{\varphi(x)-\varphi(x^0)-(x_1-x_1^0)\varphi'_{x_1}(x^0)-(x_2-x_2^0)\varphi'_{x_2}(x^0)}{|x_1-x_1^0|+|x_2-x_2^0|}=0 \quad (1)$$

ტოლობას, ხოლო $\|\cdot\|_3$ ნორმის გამოყენებისას კი (თავი I, 1.1.(6) ტოლობა)

$$\varphi(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-$$
$$-\varphi(x^0)-\varphi'_{x_1}(x^0)r\cos\theta-\varphi'_{x_2}(x^0)r\sin\theta=o(r),\ \ r\to 0, \quad (1')$$

ტოლობის შესრულებას თანაბრად θ-ს მიმართ.

კუთხური კერძო $\varphi'_{\widehat{x}_1}(x^0)$ წარმოებულის არსებობა x^0 წერტილზე ნიშნავს, რომ ყოველი $c_2>0$ მუდმივისთვის არსებობს ამ მუდმივისგან დამოუკიდებელი შემდეგი ზღვარი

$$\varphi'_{\widehat{x}_1}(x^0)=\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ |x_2-x_2^0|\le c_2|x_1-x_1^0|}}\frac{\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)}{x_1-x_1^0}. \tag{2}$$

ანალოგიურად, $\varphi'_{\widehat{x}_2}(x^0)$-ის არსებობა ნიშნავს შემდეგი ზღვრის

$$\varphi'_{\widehat{x}_2}(x^0)=\lim_{\substack{x_2\to x_2^0\\ |x_1-x_1^0|\le c_1|x_2-x_2^0|}}\frac{\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2^0)}{x_2-x_2^0} \tag{3}$$

არსებობას და მის დამოუკიდებლობას ნებისმიერი $c_1{>}0$ მუდმივისგან.

1. $n=2$ შემთხვევისთვის ძირითად 3.2.1 თეორემას აქვს შემდეგი სახე.

თეორემა 3.5.1 ([99], [107]). $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია კუთხური კერძო $\varphi'_{\widehat{x}_1}(x^0)$ და $\varphi'_{\widehat{x}_2}(x^0)$ წარმოებულების სასრულობა ანუ, რაც იგივეა,

$$\operatorname{anggrad}\varphi(x^0)=\big(\varphi'_{\widehat{x}_1}(x^0),\varphi'_{\widehat{x}_2}(x^0)\big) \tag{4}$$

კუთხური გრადიენტის სასრულობა. $\operatorname{anggrad}\varphi(x^0)$-ის სასრულობა კი ეკვივალენტურია

$$d\varphi(x^0)=\varphi'_{\widehat{x}_1}(x^0)dx_1+\varphi'_{\widehat{x}_1}(x^0)dx_2 \tag{5}$$

ტოლობის.

ბრტყელი სიმრავლის თავისებურება საშუალებას იძლევა დამტკიცდეს შემდეგი

თეორემა 3.5.2 ([99], [107]). $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია ერთი მაინც $c > 0$ მუდმივისთვის სასრული იყოს შემდეგი

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ |x_2 - x_2^0| \le c|x_1 - x_1^0|}} \frac{\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2)}{x_1 - x_1^0}, \tag{6}$$

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ |x_2 - x_2^0| \ge c|x_1 - x_1^0|}} \frac{\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0} \tag{7}$$

ზღვრები. ამ ზღვრების სასრულობის შემთხვევაში, ისინი შესაბამისად ტოლია $\varphi'_{\widehat{x}_1}(x^0)$ და $\varphi'_{\widehat{x}_2}(x^0)$ რიცხვების.

უკანასკნელ თეორემას ახლა მივცეთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია $x_1^0 = 0$ და $x_2^0 = 0$ კერძო შემთხვევისთვის.

(6) ზღვრის გამოთვლისას (x_1, x_2) წერტილი მუდმივად რჩება Ox_1 ღერძის შემცველი, ორი ურთიერთვერტიკალური

$$\left.\begin{aligned} x_1 \ge 0 \\ -cx_1 \le x_2 \le cx_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{და} \quad \left\{\begin{aligned} & x_1 \le 0 \\ & cx_1 \le x_2 \le -cx_1 \end{aligned}\right.$$

კუთხეების გაერთიანებაზე და ასე ისწრაფვის $(0, 0)$ წერტილისკენ. ამ დროს $(0, x_2)$ წერტილი მდებარეობს ამ კუთხეების გაერთიანების გარეთ, Ox_2 ღერძზე.

(7) ზღვრის გამოთვლისას (x_1, x_2) წერტილი ეკუთვნის

$$\left.\begin{aligned} x_2 \ge 0 \\ -\frac{1}{c}\, x_2 \le x_1 \le \frac{1}{c}\, x_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{და} \quad \left\{\begin{aligned} & x_2 \le 0 \\ & \frac{1}{c}\, x_2 \le x_1 \le -\frac{1}{c}\, x_2 \end{aligned}\right.$$

კუთხეების გაერთიანებას, ხოლო $(x_1, 0)$ წერტილი ძევს Ox_1 ღერძზე.

3.3.1 თეორემის თანახმად, $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია:

1) ან (2) და (3) ზღვრები იყოს ერთდროულად სასრული $c_2 = 1 = c_1$ შემთხვევისთვის;

2) ან (6) და (7) ზღვრები იყოს ერთდროულად სასრული $c = 1$ შემთხვევისთვის.

ამრიგად, მართებულია შემდეგი

თეორემა 3.5.3 ([107]). $\varphi(x)$, $x = (x_1, x_2)$, ფუნქციის $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე დიფერენცირებადობისთვის აუცილებელია და საკმარისი ერთდროულად სასრული იყოს **არაინტენსური კუთხური კერძო წარმოებულები**:

$$D_{\widehat{x}_1}\varphi(x^0) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ |x_2 - x_2^0| \le |x_1 - x_1^0|}} \frac{\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2)}{x_1 - x_1^0}, \tag{8}$$

$$D_{\widehat{x}_2}\varphi(x^0) = \lim_{\substack{x_2 \to x_2^0 \\ |x_1 - x_1^0| \le |x_2 - x_2^0|}} \frac{\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2^0)}{x_2 - x_2^0}. \tag{9}$$

ამასთან ერთად, ამ სიდიდეთა სასრულობის შემთხვევაში სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$\varphi'_{\widehat{x}_1}(x^0) = D_{\widehat{x}_1}\varphi(x^0), \quad \varphi'_{\widehat{x}_2}(x^0) = D_{\widehat{x}_2}\varphi(x^0), \tag{10}$$

$$d\varphi(x^0) = D_{\widehat{x}_1}\varphi(x^0)dx_1 + D_{\widehat{x}_2}\varphi(x^0)dx_2. \tag{11}$$

x და y ცვლადების $f(x,y)$ ფუნქციისთვის (8) და (9) ტოლობები, $x_0 = 0$ და $y_0 = 0$ კერძო შემთხვევისთვის, იწერება შემდეგნაირად:

$$D_{\widehat{x}}f(O) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ -|x| \le y \le |x|}} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x}, \tag{12}$$

$$D_{\widehat{y}}f(O) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ -|y| \le x \le |y|}} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y}, \tag{13}$$

სადაც $O = (0,0)$.

(12) ტოლობაში (x, y) წერტილი ისწრაფვის $O = (0, 0)$ წერტილისაკენ ისე, რომ (x, y) მუდმივად რჩება $y = |x|$ და $y = -|x|$ ტეხილებით შემოსაზღვრულ იმ სიმრავლეზე (ტეხილების ჩათვლით), რომელიც შეიცავს Ox ღერძს. ტოლობა (13)-ში კი (x, y) ისწრაფვის $O = (0, 0)$ წერტილისკენ იმავე ტეხილებით შემოსაზღვრული იმ სიმრავლის გასწვრივ (ისევ ტეხილების ჩათვლით), რომელიც შეიცავს Oy ღერძს.

2. ახლა დამტკიცებული იქნება დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი ერთი პირობა – ტოლობა, თუ წინასწარ ცნობილია გრადიენტის სასრულობა*. ამ პირობის ფორმულირებაში მონაწილეობს ფართო აზრით ნაზრდი (იხ. თავი I, 7.2.(3) ტოლობა), ნაცვლად აქამდე გამოყენებული კუთხური კერძო ნაზრდისა (იხ. თავი I, 4.1.(1) ტოლობა).

თეორემა 3.5.4 ([6], გვ. 383)**.** თუ $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე სასრულია კერძო $\varphi'_{x_1}(x^0)$ და $\varphi'_{x_2}(x^0)$ წარმოებულები, მაშინ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის x^0 წერტილზე დიფერენცირებადობისთვის აუცილებელია და საკმარისი

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} \frac{\Delta^2_{[x^0]}\varphi(x_1, x_2)}{|x_1 - x_1^0| + |x_2 - x_2^0|} = 0 \tag{14}$$

ტოლობის შესრულება, სადაც

$$\begin{aligned} &\Delta^2_{[x^0]}\varphi(x_1, x_2) = \\ &= \varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2) - \varphi(x_1, x_2^0) + \varphi(x_1^0, x_2^0). \end{aligned} \tag{15}$$

დამტკიცება. გვაქვს

$$\Big[\varphi(x_1,x_2) - \varphi(x^0) - (x_1 - x_1^0)\varphi'_{x_1}(x^0) - (x_2 - x_2^0)\varphi'_{x_2}(x^0)\Big] -$$

---

*გრადიენტის სასრულობისას დიფერენცირებადობის სხვა საკმარისი პირობა მოცემული იქნება ქვემოთაც, ბეტაცისმიერ წარმოებულთან კავშირში (იხ. თავი III, თეორემა 3.4.3-ის 2) მტკიცება).

$$
\begin{gathered}
-\Delta^2_{[x^0]}\varphi(x_1,x_2)= \\
=\Big[\varphi(x_1,x_2^0)-\varphi(x^0)-(x_1-x_1^0)\varphi'_{x_1}(x^0)\Big]+ \\
+\Big[\varphi(x_1^0,x_2)-\varphi(x^0)-(x_2-x_2^0)\varphi'_{x_2}(x^0)\Big] \qquad (16)
\end{gathered}
$$

ტოლობა.

x^0 წერტილზე კერძო წარმოებულების სასრულობის გამო, ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta=\delta(x^0,\varepsilon,\varphi)>0$ რიცხვი ისეთი, რომ (16) ტოლობის მარჯვენა მხარის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია $\varepsilon(|x_1-x_1^0|+|x_2-x_2^0|)$-ზე, როცა $|x_1-x_1^0|<\delta$ და $|x_2-x_2^0|<\delta$. ამიტომ (16) ტოლობის მარცხენა მხარის აბსოლუტური მნიშვნელობაც ნაკლებია $\varepsilon(|x_1-x_1^0|+|x_2-x_2^0|)$-ზე, როცა $|x_1-x_1^0|<\delta$ და $|x_2-x_2^0|<\delta$.

მაშასადამე, (16) ტოლობის მარცხენა მხარეში საკლებისა და მაკლების $(|x_1-x_1^0|+|x_2-x_2^0|)$-ზე განაყოფების სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია ε-ზე, როცა $|x_1-x_1^0|<\delta$ და $|x_2-x_2^0|<\delta$. აქედან კი გამომდინარეობს (1) და (14) ტოლობების ერთდროული შესრულება ან არშესრულება. თეორემა დამტკიცებულია.

3.6. ლაგრანჟის ფორმულა მრავალი ცვლადის ფუნქციისთვის

თეორემა 3.6.1 ([6], გვ. 399; [7], გვ. 167–168)**.** ვთქვათ f ფუნქცია დიფერენცირებადია ღია ბმულ $D\subset\mathbb{R}^n$ სიმრავლეში. ავიღოთ ისეთი ორი $(x_1,\dots,x_n)\in D$ და $(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)\in D$ წერტილი, რომელთა მაერთებელი წრფივი მონაკვეთი მთლიანად ეკუთვნის D-ს. მაშინ არსებობს ისეთი ერთი მაინც θ რიცხვი, $0<\theta<1$, რომ ადგილი აქვს

$$
\begin{gathered}
f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)-f(x_1,\dots,x_n)= \\
=h_1f'_{x_1}(x_1+\theta h_1,\dots,x_n+\theta h_n)+\dots+ \\
+h_nf'_{x_n}(x_1+\theta h_1,\dots,x_n+\theta h_n) \qquad (1)
\end{gathered}
$$

ტოლობას.

შენიშვნა 3.6.1. D-ში სასრული კერძო წარმოებულების მქონე ფუნქციისთვის (1) ფორმულა არამართებულია, საზოგადოდ. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ

$$\psi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{როცა } x^2+y^2>0,\\ 0, & \text{როცა } x=0=y\end{cases} \tag{2}$$

ფუნქცია. ეს ფუნქცია უწყვეტია ყველგან და ყველგან სასრულია მისი ψ'_x და ψ'_y კერძო წარმოებულები. კერძოდ, $\psi'_x(x,0)=0$ და $\psi'_y(0,y)=0$ ყველა x-თვის და y-თვის. ვაჩვენოთ, რომ

$$\psi(h,k)-\psi(0,0)=h\psi'_x(\theta h,\theta k)+k\psi'_y(\theta h,\theta k),\ \ 0<\theta<1, \tag{3}$$

ფორმულა არამართებულია. გვაქვს ტოლობანი:

$$\psi'_x(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{და} \tag{4}$$

$$\psi'_y(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,, \ \ \text{როცა } x^2+y^2>0. \tag{5}$$

ამავე დროს, $\psi'_x(0,0)=0$ და $\psi'_y(0,0)=0$. თუკი (3) ტოლობა იქნება შესრულებული, მაშინ იგი მართებული უნდა იყოს $k=h$ კერძო შემთხვევაშიც. მაგრამ ამ შემთხვევაში $\psi'_x(\theta h,\theta h)=\frac{1}{4}=\psi'_y(\theta h,\theta h)$ და $\psi(h,h)=\frac{h^2}{|h|\sqrt{2}}$. ამიტომ (3) ტოლობა მიიღებს სახეს: $\frac{h^2}{|h|\sqrt{2}}=\frac{1}{4}\,h+\frac{1}{4}\,h$, საიდანაც $h>0$ შემთხვევისთვის მიიღება მცდარი $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ ტოლობა, ხოლო $h<0$ შემთხვევისთვის კი მიიღება ისევ მცდარი $-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ ტოლობა. მაშასადამე, (3) ტოლობა არამართებულია.

შენიშვნა 3.6.2. (4) და (5) ტოლობებიდან აშკარაა ψ'_x და ψ'_y კერძო წარმოებულების უწყვეტობა ყველა $(x,y)\neq(0,0)$ წერტილზე. ამიტომ ψ ფუნქცია დიფერენცირებადია ყველა $(x,y)\neq(0,0)$

წერტილზე (იხ. შედეგი 4.4.1 ქვემოთ). ეს ნიშნავს, რომ (3) ტოლობის არამართებულობა გამოწვეულია ψ ფუნქციის არადიფერენცირებადობით $(0,0)$ წერტილზე, თანახმად თეორემა 3.6.1-ისა. ψ ფუნქციის არადიფერენცირებადობა $(0,0)$ წერტილზე კი, შეიძლება შევამოწმოთ 3.5.(12) და 3.5.(13) ფორმულების გამოყენებითაც. მართლაც,

$$\frac{\psi(x,y)-\psi(0,y)}{x}=\frac{\psi(x,y)}{x}=\frac{xy}{x\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & \text{როცა } \ y=|x|,\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & \text{როცა } \ y=-|x|.\end{cases}$$

ამრიგად, $D_{\widehat{x}}\psi(0,0)$ არ არსებობს. არ არსებობს, ცხადია, არც $D_{\widehat{y}}\psi(0,0)$.

§ 4. დიფერენცირებადობისთვის საკმარისია ძლიერი გრადიენტის სასრულობა

აქ შემოღებულია ფუნქციის ძლიერი გრადიენტი, რომლის სასრულობა რაიმე წერტილზე იწვევს ამ ფუნქციის დიფერენცირებადობას იმავე წერტილზე და ამ ფაქტს შებრუნებული არ აქვს.

დიფერენცირებადობისას ძლიერი გრადიენტის არსებობა-არარსებობა და ძლიერი გრადიენტის სასრულობის მიმართება იმავე ფუნქციის გრადიენტის წყვეტილობასთან, განხილული იქნება ქვემოთ.

4.1. ძლიერი კერძო წარმოებული და ძლიერი გრადიენტი

$x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრული $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, ფუნქციისთვის შემოგვაქვს რამდენიმე განსაზღვრა.

განსაზღვრა 4.1.1 ([99], [102], [107]). f ფუნქციას x_k ცვლადით აქვს **ძლიერი კერძო წარმოებული** x^0 წერტილზე, სიმბოლურად $f'_{[x_k]}(x^0)$, თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო შემდეგი

$$f'_{[x_k]}(x^0) = \lim_{x \to x^0} \frac{\Delta_{[x_k^0]} f(x)}{x_k - x_k^0} \tag{1}$$

ზღვარი, სადაც (იხ. თავი I, 3.1.(1) ტოლობა)

$$\Delta_{[x_k^0]} f(x) = f(x) - f(x(x_k^0)). \tag{2}$$

$f'_{[x_k]}(x^0)$-ის სასრულობის შემთხვევაში, (1) ტოლობა ნიშნავს ნებისმიერად მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ისეთი დადებითი $\delta_k = \delta_k(x^0, \varepsilon, f)$ რიცხვის არსებობას, რომ დამოკიდებულება

$$\left| \Delta_{[x_k^0]} f(x) - (x_k - x_k^0) f'_{[x_k]}(x^0) \right| < \varepsilon |x_k - x_k^0| \tag{3}$$

სრულდება x^0 წერტილის უცენტრო δ_k-მიდამოს ყველა $x \in U^0(x^0, \delta_k)$ წერტილზე.

ცხადია, რომ $f'_{[x_k]}(x^0)$-ის სასრულობა იწვევს f ფუნქციის x_k ცვლადით ძლიერ კერძო უწყვეტობას x^0 წერტილზე (იხ. თავი I, 3.1).

წინადადება 4.1.1 ([107]). თუ x^0 წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში უწყვეტ f ფუნქციას უცენტრო $U^0(x^0)$ მიდამოში აქვს სასრული კერძო $f'_{x_k}(x)$ წარმოებული, რომელსაც x^0 წერტილზე აქვს სასრული ან უსასრულო

$$\lim_{x \to x^0} f'_{x_k}(x) \tag{4}$$

ზღვარი, მაშინ ადგილი აქვს

$$f'_{[x_k]}(x^0) = \lim_{x \to x^0} f'_{x_k}(x) \tag{5}$$

ტოლობას. თუკი (4) ზღვარი სასრულია, მაშინ $f'_{x_k}(x)$ კერძო წარმოებული უწყვეტია x^0 წერტილზე და ადგილი აქვს

$$f'_{[x_k]}(x^0) = f'_{x_k}(x^0) \tag{6}$$

ტოლობას.

ამ წინადადების დამტკიცება მოცემული იქნება თეორემა 4.2.1-ის დამტკიცებისას.

შევნიშნოთ, რომ ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებული ტოლია ამ ცვლადით ძლიერი კერძო წარმოებულის, იმ მრავალცვლადიანი ფუნქციისთვის, რომელიც მუდმივია შემოტანილი ახალი ცვლადების მიმართ (იხ. თავი I, 3.1-იც).

განსაზღვრა 4.1.2 ([99], [102], [107]). თუ f ფუნქციას ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისას აქვს სასრული ან უსასრულო $f'_{[x_k]}(x^0)$, მაშინ ვიტყვით, რომ f ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს **ძლიერი გრადიენტი** და ვწერთ:

$$\operatorname{strgrad} f(x^0) = \big(f'_{[x_1]}(x^0), \dots, f'_{[x_n]}(x^0)\big). \tag{7}$$

საზოგადოდ, რომელიმე ϕ ფუნქციის სასრული ან უსასრულო ზღვრის არსებობა x^0 წერტილზე რაიმე E სიმრავლის გასწვრივ იწვევს ϕ-თვის x^0-ზე იგივე ზღვრის არსებობას ნებისმიერი $e \subset E$ ქვესიმრავლის გასწვრივ, თუკი e-თვის x^0 დაგროვების წერტილია.

თუ აქ, ϕ ფუნქციის როლში ავიღებთ 3.1(3) და (1) ტოლობებში ზღვარქვეშ მდგომ ერთსა და იმავე შეფარდებას, მაშინ ცხადი გახდება $f'_{[x_k]}(x^0)$-ის არსებობისას $f'_{\widehat{x}_k}(x^0)$-ის არსებობა და მათი ტოლობა.

ამრიგად, გვაქვს შემდეგი

წინადადება 4.1.2 ([99], [102], [107]). $\operatorname{strgrad} f(x^0)$-ის არსებობა იწვევს $\operatorname{anggrad} f(x^0)$-ის არსებობას და

$$\operatorname{strgrad} f(x^0) = \operatorname{anggrad} f(x^0) = \operatorname{grad} f(x^0) \tag{8}$$

ტოლობებს.

განსაზღვრა 4.1.3 ([107]). f ფუნქციას ვუწოდოთ x_k ცვლადით **ძლიერ კერძო დიფერენცირებადი** x^0 წერტილზე, თუ სასრულია $f'_{[x_k]}(x^0)$ და ვწერთ

$$d_{[x_k]} f(x^0) = f'_{[x_k]}(x^0) dx_k. \tag{9}$$

ამასთან ერთად, $d_{[x_k]}f(x^0)$-ს ვუწოდოთ f ფუნქციის x_k ცვლადით **ძლიერი კერძო დიფერენციალი** x^0 წერტილზე.

განსაზღვრა 4.1.4 ([107]). f ფუნქციას ვუწოდოთ **თითოეული ცვლადით ძლიერ კერძო დიფერენცირებადი** x^0 წერტილზე, თუ $f'_{[x_k]}(x^0)$ სასრულია ყველა $k = 1, \dots, n$ მნიშვნელობისთვის, რაც ეკვივალენტურია $\operatorname{strgrad} f(x^0)$-ის სასრულობის.

4.2. გრადიენტის უწყვეტობა იწვევს ძლიერი გრადიენტის სასრულობას

თეორემა 4.2.1 ([102], [107]). თუ x^0 წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში უწყვეტ f ფუნქციას უცენტრო $U^0(x^0)$ მიდამოში აქვს სასრული $\operatorname{grad} f(x)$, რომელსაც x^0 წერტილზე გააჩნია სასრული ან უსასრულო

$$\lim_{x\to x^0} \operatorname{grad} f(x) \tag{1}$$

ზღვარი, მაშინ ადგილი აქვს

$$\operatorname{strgrad} f(x^0) = \lim_{x\to x^0} \operatorname{grad} f(x) \tag{2}$$

ტოლობას. თუკი (1) ზღვარი სასრულია, მაშინ $\operatorname{grad} f(x)$ უწყვეტია x^0 წერტილზე და სრულდება სასრულწევრებიანი

$$\operatorname{strgrad} f(x^0) = \operatorname{grad} f(x^0) \tag{3}$$

ტოლობა. ამასთან ერთად, სასრული $\operatorname{strgrad} f(x^0)$-ის არსებობიდან არ გამომდინარეობს, საზოგადოდ, $\operatorname{grad} f(x)$-ის უწყვეტობა x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. x^0 წერტილზე $\operatorname{grad} f(x)$-ის უწყვეტობა იწვევს $\operatorname{grad} f(x)$-ის სასრულობას x^0 წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში. $U(x^0)$-ში სასრული მისი თითოეული $f'_{x_k}(x)$ კომპონენტისთვის დავწეროთ ლაგრანჟის ფორმულა

$$\Delta_{[x_k^0]}f(x) =$$
$$= (x_k - x_k^0) f'_{x_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k^0 + \theta_k(x_k - x_k^0), x_{k+1}, \dots, x_n),$$

სადაც $0 < \theta_k < 1$, $k = 1, \ldots, n$. ამ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $x_k - x_k^0$ სხვაობაზე და განვიხილოთ ასე მიღებული შეფარდების ზღვარი, როცა $x \to x^0$. შედეგად მივიღებთ (2) ტოლობის თითოეულ კომპონენტს და, მაშასადამე, (2) ტოლობა მართებულია.

როცა (1) ზღვარი სასრულია, მაშინ თითოეულ $f'_{x_k}(x)$-ს აქვს სასრული ზღვარი x^0 წერტილზე. ეს კი იწვევს (იხ. შედეგი 1.11.3-ის დამტკიცება) $f'_{x_k}(x)$-ის უწყვეტობას x^0 წერტილზე, ე. ი. $f'_{x_k}(x)$-ის ზღვარი x^0 წერტილზე ტოლია $f'_{x_k}(x^0)$ სასრული მნიშვნელობის. აქედან გამომდინარეობს (3) ტოლობა, რომლის ორივე მხარე სასრულია.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა შევამოწმოთ 3.4.(12) ტოლობით მოცემულ $g(x_1, x_2)$ ფუნქციაზე, რომელიც დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილზე. როგორც იქ ვაჩვენეთ, $g(x_1, x_2)$ ფუნქციის გრადიენტი არ არის უწყვეტი $(0,0)$ წერტილზე.

ახლა ვაჩვენოთ $g(x_1, x_2)$ ფუნქციის ძლიერი გრადიენტის სასრულობა $(0,0)$ წერტილზე. ძლიერი კერძო წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად,

$$g'_{[x_1]}(0,0) = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{g(x_1,x_2) - g(0,x_2)}{x_1} = \\ = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} x_2 \sin\frac{1}{x_1 x_2} = 0.$$

ანალოგიურად მიიღება $g'_{[x_2]}(0,0) = 0$ ტოლობაც. ამრიგად,

$$\operatorname{strgrad} g(0,0) = (0,0). \tag{4}$$

მაშასადამე, $(0,0)$ წერტილზე უწყვეტი გრადიენტის არმქონე $g(x_1, x_2)$ ფუნქციას სასრული ძლიერი გრადიენტი აქვს იმავე წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

4.3. მიმართება ფუნქციის გრადიენტის წყვეტილობასა და მისივე ძლიერი გრადიენტის სასრულობას შორის

1. ერთი ცვლადის ფუნქციის ორი ისეთი თვისება შეიძლება დასახელდეს, რომლებიც ურთიერთეკვივალენტურია თითქმის ყველგან, თუმცა, ინდივიდუალურ წერტილზე ერთი თვისება ძლიერია მეორეზე. ასეთებია, მაგალითად:

1) უწყვეტობა და სიმეტრიული უწყვეტობა (იხ. თავი I, თეორემა 11.1.1);

2) დიფერენცირებადობა და სიმეტრიული დიფერენცირებადობა (იხ. თეორემა 7.1.1 ამ თავიდან);

3) დიფერენცირებადობა და სასრული ზედა (ქვედა) წარმოებულის არსებობა (იხ. ამ თავიდან დანჟუას თეორემა 1.17.2 თავისი შედეგებით).

ტოლსტოვის თეორემა კი გვიჩვენებს, რომ ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა და თითოეული ცვლადით მისი უწყვეტობა, შესაძლებელია არ იყოს ურთიერთეკვივალენტური თვისებები თითქმის ყველგან (იხ. თავი I, თეორემა 2.5.1);

2. თეორემა 4.2.1-ის დამტკიცების პროცესში ნაჩვენები იყო, რომ 3.4.(12) ტოლობით განსაზღვრულ $g(x_1, x_2)$ ფუნქციას ინდივიდუალურ $(0, 0)$ წერტილზე აქვს სასრული ძლიერი გრადიენტი, მაგრამ $\operatorname{grad} g(x_1, x_2)$ არ არის უწყვეტი ამ წერტილზე.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: რამდენად ფართო შეიძლება იყოს იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელზედაც ადგილი აქვს ახლა თქმულ არაეკვივალენტობას?

ახლა აქ დავამტკიცებთ, რომ აღნიშნული არაეკვივალენტობა რეალიზებადია თითქმის ყველა წერტილზე.

თეორემა 4.3.1 ([107], [108]). არსებობს ერთეულოვან კვადრატზე აბსოლუტურად უწყვეტი ორი ცვლადის ფუნქცია, რომლის ძლიერი გრადიენტი სასრულია თითქმის ყველგან, ხოლო მისივე გრადიენტი კი წყვეტილია აგრეთვე თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. $[0,1]$ სეგმენტი წარმოვადგინოთ ისეთი თანაუკვეთი ზომადი $A\subset[0,1]$ და $B\subset[0,1]$ სიმრავლეების გაერთიანების სახით, რომ თითოეულ მათგანს დადებითი ზომის თანაკვეთა ჰქონდეს ყოველ ღია $(a,b)\subset[0,1]$ ინტერვალთან (იხ. მაგალითად, [48], ამოცანა 441). A სიმრავლის მახასიათებელი

$$\chi_{_A}(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } \ x\in A,\\ 0, & \text{როცა } \ x\in[0,1]\setminus A\end{cases}$$

ფუნქცია (ვალე პუსენი) წყვეტილია $(0,1)$ ინტერვალზე. მართლაც, როცა $x_0\in A$ და $x\in B$, მაშინ $\chi_{_A}(x)-\chi_{_A}(x_0)=-1$. თუკი $x_0\in B$ და $x\in A$, მაშინ $\chi_{_A}(x)-\chi_{_A}(x_0)=1$. აქედან აშკარაა $\chi_{_A}(x)$ ფუნქციის წყვეტილობა ყოველ $x_0\in(0,1)$ წერტილზე, რადგანაც x_0 წერტილის ყოველ $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(0,1)$ მიდამოში არსებობს როგორც A სიმრავლის, ისე B სიმრავლის წერტილები. ანალოგიური თვისებებისაა B სიმრავლის მახასიათებელი $\chi_{_B}(\tau)$ ფუნქცია $(0,1)$ ინტერვალზე. განუსაზღვრელი

$$M(x)=\int\limits_0^x \chi_{_A}(t)\,dt,\quad N(y)=\int\limits_0^y \chi_{_B}(\tau)\,d\tau$$

L-ინტეგრალებისგან (დირიჰლეს ფუნქცია აქ არ გამოდგება, იხ. III, მაგალითი 3.3.4) მიღებული ორი ცვლადის $\nu(x,y)=M(x)+N(y)$ ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია $Q=[0,1]^2$ კვადრატზე (იხ. თავი IV, 2.3.(1) ტოლობა) და თითქმის ყველა $(x,y)\in Q$ წერტილზე მას აქვს

$$d\nu(x,y)=\chi_{_A}(x)\,dx+\chi_{_B}(y)\,dy$$

დიფერენციალი (იხ. შედეგი 2.4.1 ამ თავიდან). რადგანაც ერთცვლადიანი ფუნქცის წარმოებულს ემთხვევა მისივე ძლიერი კერძო წარმოებული იგივე ცვლადის მიმართ (იხ. 4.1), ამიტომ $d\nu(x,y)$ დიფერენციალის არსებობის $(x,y)\in Q$ წერტილებზე

$$\operatorname{strgrad}\nu(x,y)=\big(\chi_{_A}(x),\chi_{_B}(y)\big)$$

სასრულია. მეორე მხრივ,

$$\operatorname{grad}\nu(x,y) = \big(\chi_{_A}(x), \chi_{_B}(y)\big)$$

წყვეტილია თითქმის ყველა $(x,y) \in Q$ წერტილზე.

ამრიგად, თითქმის ყველგან Q-ზე $\operatorname{strgrad}\nu(x,y)$ სასრულია და $\operatorname{grad}\nu(x,y)$ – წყვეტილი. თეორემა დამტკიცებულია.

4.4. ძლიერი გრადიენტის სასრულობა იწვევს დიფერენცირებადობას

თეორემა 4.4.1 ([99], [102], [107])**.** $\operatorname{strgrad} f(x^0)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს $df(x^0)$ დიფერენციალის არსებობა და ტოლობანი

$$df(x^0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{[x_k]}(x^0)dx_k, \tag{1}$$

$$df(x^0) = \sum_{k=1}^{n} d_{[x_k]}f(x^0). \tag{2}$$

დამტკიცება პირველი. x^0 წერტილის მიდამოში სასრულია

$$f(x) - f(x^0) - \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_k^0)f'_{[x_k]}(x^0) \tag{3}$$

გამოსახულება, რომელიც გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}\Big[f(x) - f(x(x_1^0)) - (x_1 - x_1^0)f'_{[x_1]}(x^0)\Big] + \\ + \Big[f(x(x_1^0)) - f\big(x(x_1^0, x_2^0)\big) - (x_2 - x_2^0)f'_{[x_2]}(x^0)\Big] + \dots + \\ + \Big[f(x^0(x_n)) - f(x^0) - (x_n - x_n^0)f'_{[x_n]}(x^0)\Big].\end{aligned} \tag{4}$$

თითოეული კვადრატული ფრჩხილის მიმართ გამოვიყენოთ 4.1.(3) შეფასება. ამასთან ერთად, $k = 2, \dots, n$ მნიშვნელობებისთვის

4.1.(3) უტოლობაში წინასწარ უნდა ჩავსვათ $x_j = x_j^0$, $j = 1, \dots, k{-}1$, კერძო მნიშვნელობანი.

ამიტომ (3) გამოსახულების აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია, ვიდრე

$$\varepsilon\big(|x_1 - x_1^0| + |x_2 - x_2^0| + \cdots + |x_n - x_n^0|\big) = \varepsilon\|x - x^0\|.$$

ამრიგად, $df(x^0)$ არსებობს.

დამტკიცება მეორე მიიღება 3.2.1 თეორემის გამოყენებით და 4.1.2 წინადადების გათვალისწინებით. თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ 4.2.1 და 4.4.1 თეორემებიდან გამომდინარეობს კარგად ცნობილი თეორემა იმის შესახებ, რომ ფუნქციის გრადიენტის უწყვეტობა რაიმე წერტილზე იწვევს ამ ფუნქციის დიფერენციალის არსებობას იმავე წერტილზე ([4], გვ. 195; [6], გვ. 379).

წინადადება 4.4.1 ([99], [102], [107])**.** $\operatorname{anggrad} f(x^0)$-ის სასრულობიდან ანუ, რაც იგივეა, $df(x^0)$ დიფერენციალის არსებობიდან არ გამომდინარეობს $\operatorname{strgrad} f(x^0)$-ის არსებობა.

დამტკიცება. განვიხილოთ 3.4.(5) ტოლობით მოცემული

$$\lambda(x_1, x_2) = |x_1 \cdot x_2|^{2/3} \tag{5}$$

ფუნქცია, რომელიც დიფერენცირებადია $x^0 = (0, 0)$ წერტილზე. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\operatorname{strgrad} \lambda(x^0)$ არ არსებობს. მართლაც, $x_1 > 0$ კერძო შემთხვევისას გვაქვს

$$\frac{\Delta_{[x_1^0]}\lambda(x_1, x_2)}{x_1} = \frac{(x_1|x_2|)^{2/3}}{x_1} = \Big(\frac{x_2^2}{x_1}\Big)^{1/3}$$

ტოლობა. ამ შეფარდებას ზღვარი არ აქვს, როცა $(x_1, x_2) \to (0, 0)$. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ეს შეფარდება ისწრაფვის სხვადასხვა რიცხვისკენ, როცა $x_1 = x_2^2$ (ტოლია 1-ის) და როცა $x_1 = x_2$ (ისწრაფვის ნულისკენ).

ამრიგად, $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქციას $(0,0)$ წერტილზე არ აქვს x_1-ით ძლიერი კერძო წარმოებული. მაშასადამე*, $\operatorname{strgrad} \lambda(0,0)$ არ არსებობს.

შენიშვნა 4.4.1. 4.2.1 თეორემის და 4.4.1 წინადადების დამტკიცებისას ჩატარებული მსჯელობები გვიჩვენებენ, რომ (5) ტოლობით მოცემული $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქციის გრადიენტი არაა უწყვეტი $(0,0)$ წერტილზე.

შედეგი 4.4.1. თუ ფუნქციის გრადიენტი უწყვეტია ანუ, რაც იგივეა, თუ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია რაიმე წერტილზე, მაშინ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადიცაა იმავე წერტილზე. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

შედეგი 4.4.2. თუ ფუნქცია თითოეული ცვლადით ძლიერ კერძო დიფერენცირებადია რაიმე წერტილზე, მაშინ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადიცაა იმავე წერტილზე. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

შენიშვნა 4.4.2. როგორც ვნახეთ, (5) ტოლობით მოცემული $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილზე, მაგრამ არ არსებობს $\operatorname{strgrad} \lambda(0,0)$. ამასთან დაკავშირებით, ბუნებრივად ისმის კითხვა: რამდენად ფართო შეიძლება იყოს ასეთ წერტილთა სიმრავლე? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი

თეორემა 4.4.2 ([145])**.** ყოველი ნატურალური $n \geq 2$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი უწყვეტი $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ფუნქცია, რომელიც დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან და ამავე დროს სასრულ ძლიერ გრადიენტს მოკლებულია თითქმის ყველგან.

---

*დიფერენცირებად ფუნქციას შესაძლოა არ ჰქონდეს სიმეტრიული ძლიერი გრადიენტიც კი (იხ. 7.3.(8) ფუნქცია ქვემოთ).

4.5. დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობა ცვლადთა ქვენაკრების მიმართ დიფერენცირებადობისას

როგორც ვნახეთ, 4.4.(5) ტოლობით განსაზღვრული $\lambda(x_1, x_2)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილზე და მას ამ წერტილზე არ აქვს არც სასრული და არც უსასრულო ძლიერი კერძო წარმოებულები. ეს მიუთითებს იმაზე, რომ 3.2.(1) იგივეობიდან არ გამომდინარეობს $f'_{[x_k]}(x^0)$-ის არსებობა $df(x^0)$ დიფერენციალის არსებობისას.

3.2.(1) იგივეობა საშუალებას იძლევა ურთიერთდავაკავშიროთ ერთი დ აიგივე ფუნქციის დიფერენცირებადობა n ცვლადის მიმართ და $n-1$ ცვლადის მიმართ, თუკი ვისარგებლებთ ძლიერი კერძო წარმოებულით ერთი რომელიმე ცვლადის მიმართ.

ამ კავშირს აფიქსირებს 3.2.(1) იგივეობიდან გამომდინარე შემდეგი

თეორემა 4.5.1 ([102], [107]). $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე საკმარისია x^0-ზე სასრული იყოს ერთი რომელიმე ძლიერი კერძო წარმოებული, ვთქვათ $f'_{[x_k]}(x^0)$ და ამავე დროს, x^0 წერტილზე დიფერენცირებადი იყოს ყველა დანარჩენი $n-1$ ცვლადისგან შემდგარი $x(x_k^0)$ ნაკრების $f(x(x_k^0)) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ფუნქცია.

ჩვენ შეგვიძლია თეორემა 4.5.1 გამოვიყენოთ ამავე თეორემაში ხსენებული $n-1$ ცვლადიანი $f(x(x_k^0))$ ფუნქციის მიმართ და ეს პროცედურა გავაგრძელოთ მანამ, სანამ არ მივიღებთ მხოლოდ ერთ ცვლადზე დამოკიდებულ ფუნქციას. ამიტომ მართებულია შემდეგი თეორემა იმის გათვალისწინებით, რომ ერთცვლადიანი ფუნქციის წარმოებული შეიძლება განხილულ იქნას როგორც მისი ძლიერი კერძო წარმოებული იმავე ცვლადით (იხ. 4.1).

თეორემა 4.5.2 ([107]). $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე, საკმარისია შემდეგი პირობების შესრულება:

1) f-ს x^0-ზე ჰქონდეს სასრული ძლიერი კერძო წარმოებული რომელიმე, ვთქვათ, x_k ცვლადის მიმართ;

2) $f(x(x_k^0))$-ს x^0-ზე ჰქონდეს სასრული ძლიერი კერძო წარმოებული სხვა რომელიმე, ვთქვათ, x_ℓ ცვლადის მიმართ, $\ell \neq k$;

3) $f(x(x_k^0, x_\ell^0))$ ფუნქციას x^0-ზე ჰქონდეს სასრული ძლიერი კერძო წარმოებული წინებისგან განსხვავებული რომელიმე x_s ცვლადის მიმართ, $x \neq k$, $s \neq \ell$;

და ასე შემდეგ, ამ პროცედურის დასასრულს მიღებულ ერთი ცვლადის ფუნქციას x^0-ზე ჰქონდეს სასრული წარმოებული.

ამ თეორემასთან დაკავშირებით საჭიროა აღინიშნოს, რომ $n-1$ ცვლადის $f(x(x_k^0))$ ფუნქციის სასრული ძლიერი კერძო წარმოებულის არსებობა x^0 წერტილზე x_ℓ ცვლადის მიმართ, სადაც $\ell \neq k$, სუსტი პირობაა $f(x)$ ფუნქციაზე, ვიდრე $f(x)$ ფუნქციისთვის x^0 წერტილზე სასრული ძლიერი კერძო წარმოებულის არსებობა იგივე x_ℓ ცვლადის მიმართ (მსგავსი მსჯელობა ჩატარებულია თავი I-ის წინადადება 3.3.1-ის დამტკიცებისას). ამიტომ მართებულია შემდეგი თეორემა, რომლის პირობები ერთობლივად სუსტია $\operatorname{strgrad} f(x^0)$-ის სასრულობის მოთხოვნაზე.

თეორემა 4.5.3 ([102], [107])**.** ვთქვათ, $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციას $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე აქვს სასრული კერძო წარმოებული ერთი რომელიმე ცვლადით და ყველა დანარჩენი $n-1$ ცვლადთაგან თითოეულის მიმართ კი x^0-ზე მას აქვს სასრული ძლიერი კერძო წარმოებული. მაშინ:

1) $f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x^0 წერტილზე;

2) $f(x)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს სასრული კუთხური კერძო წარმოებული სწორედ იმ ერთი ცვლადის მიმართ, რომელიც ნახსენებია თეორემის დასაწყისში.

დამტკიცება. მტკიცება 1) გამომდინარეობს 4.5.2 თეორემიდან, ხოლო მტკიცება 2) მიიღება ძირითადი 3.2.1 თეორემიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

რადგანაც რომელიმე კერძო წარმოებულის უწყვეტობა x^0 წერტილზე იწვევს იგივე ცვლადით ძლიერი კერძო წარმოებულის სასრულობას x^0-ზე (იხ. წინადადება 4.1.1), ამიტომ 4.5.3 თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 4.5.4 ([107])**.** თუ $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქციის კერძო f'_{x_j} წარმოებულთაგან ერთი რომელიმე სასრულია x^0 წერტილზე და ყველა დანარჩენი კი უწყვეტია x^0-ზე, მაშინ მართებულია 4.5.3 თეორემის 1) და 2) მტკიცებანი.

შენიშვნა 4.5.1. თავი I-ის თეორემა 3.3.1-ში ჩამოყალიბებული ორი პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი უწყვეტობისთვის, ხოლო თეორემა 4.5.1-ის ორი პირობა კი მხოლოდ საკმარისია დიფერენცირებადობისთვის. ამ განსხვავების მიზეზია ის, რომ დიფერენცირებადობისთვის გადამწყვეტია გარკვეული სიდიდის სიმცირის რიგი, ხოლო უწყვეტობისთვის საკმარისია მხოლოდ გარკვეული სიდიდის ზღვრის ნულობა.

4.6. ორცვლადიანი ფუნქციის დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობები

ზოგადი შემთხვევისთვის ზემოთ მიღებული შედეგები ახლა ჩამოვაყალიბოთ ორცვლადიანი ფუნქციებისთვის.

$x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $\varphi(x)$, $x=(x_1,x_2)$, ფუნქციის x_1 **ცვლადით ძლიერი კერძო წარმოებული** x^0 წერტილზე განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით (იხ. 4.1.(1) ტოლობა $n=2$ შემთხვევისთვის):

$$\varphi'_{[x_1]}(x^0)=\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0}}\frac{\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1^0,x_2)}{x_1-x_1^0} \tag{1}$$

და x_2 ცვლადის მიმართ კი

$$\varphi'_{[x_2]}(x^0)=\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0}}\frac{\varphi(x_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2^0)}{x_2-x_2^0} \tag{2}$$

ტოლობით.

$\varphi(x)$ ფუნქციის **ძლიერი გრადიენტი** x^0 წერტილზე განსაზღვრულია

$$\operatorname{strgrad}\varphi(x^0) = \left(\varphi'_{[x_1]}(x^0), \varphi'_{[x_2]}(x^0)\right) \tag{3}$$

ტოლობით.

ორი ცვლადის ფუნქციისთვის 4.5.2 და 4.5.3 თეორემები ერთიმეორეს ემთხვევა და ასეთ სახეს იღებს.

თეორემა 4.6.1 ([99], [102], [107]). თუ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციას $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე აქვს სასრული კერძო წარმოებული ერთ-ერთი ცვლადით და სასრული ძლიერი კერძო წარმოებული დარჩენილი ცვლადით, მაშინ $\varphi(x_1, x_2)$-ს x^0 წერტილზე აქვს სრული დიფერენციალი და, მაშასადამე, მას x^0 წერტილზე აქვს სასრული კუთხური კერძო წარმოებული სწორედ იმ ცვლადით, რომელიც თეორემის დასაწყისშია აღნიშნული.

ამ თეორემიდან მიიღება

თეორემა 4.6.2 ([102], [107]). ვთქვათ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია თითოეული ცვლადითაა დიფერენცირებადი $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე. მაშინ $d\varphi(x^0)$ დიფერენციალის არსებობისთვის საკმარისია $\varphi(x_1, x_2)$-ს x^0 წერტილზე ჰქონდეს სასრული ძლიერი კერძო წარმოებული ერთ-ერთი ცვლადით.

ორი ცვლადის ფუნქცისთვის 4.5.4 თეორემას აქვს შემდეგი სახე.

თეორემა 4.6.3 ([107]). თუ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულთაგან $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე ერთ-ერთი სასრულია და დარჩენილი კი – უწყვეტი, მაშინ:

1) არსებობს $d\varphi(x^0)$ დიფერენციალი;

2) $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს სასრული კუთხური კერძო წარმოებული იმ ცვლადით, რომლითაც მისი კერძო წარმოებულის სასრულობაა მოთხოვნილი.

აღსანიშნავია, რომ 4.6.3 თეორემიდან მტკიცება 1)-ის ავტორია თომე, რომელსაც ჩამოვაყალიბებთ შემდეგი თეორემის სახით (იხ. [171], [122], გვ. 420; [68], გვ. 45; [72], გვ. 149).

თეორემა 4.6.4 (თომე, 1875 წ.). თუ ორი ცვლადის $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის ორივე კერძო წარმოებული $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე სასრულია და ერთ-ერთი მათგანი კი – უწყვეტი, მაშინ არსებობს მისი $d\varphi(x^0)$ დიფერენციალი.

აქვე აღვნიშნოთ შემდეგი

წინადადება 4.6.1 ([99]). თუ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციას $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე აქვს სასრული ძლიერი კერძო წარმოებული ერთი რომელიმე ცვლადით, მაშინ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციის უწყვეტობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია $\varphi(x_1, x_2)$ იყოს დარჩენილი ცვლადის მიმართ კერძო უწყვეტი x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. ამ მტკიცების ერთი ვარიანტი გამომდინარეობს

$$\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2^0) =$$
$$= \big[\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2)\big] + \big[\varphi(x_1^0, x_2) - \varphi(x_1^0, x_2^0)\big]$$

ტოლობიდან.

შენიშვნა 4.6.1. $n = 1$ მნიშვნელობისთვის თეორემა 4.5.1 გამოსახავს იმ ელემენტარულ ფაქტს, რომ ერთცვლადიანი ფუნქციისთვის სასრული წარმოებულის არსებობა ეკვივალენტურია მისი დიფერენცირებადობის (იხ. წინადადება 1.3.2).

შენიშვნა 4.6.2. თითოეული ცვლადით დიფერენცირებადი ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობის სხვა საკმარისი პირობა, გარდა 4.6.4 თეორემისა, მოცემული იქნება III თავში, 3.4.3 თეორემიდან 2) მტკიცებით.

შენიშვნა 4.6.3. ორი ცვლადის ფუნქციის დიფერენცირებადობის კიდევ ერთი საკმარისი პირობა შერეულ კერძო წარმოებულთან კავშირში, მოცემული იქნება III თავში 3.6.1 თეორემით.

შენიშვნა 4.6.4. [82] ნაშრომში შემოღებულია $\Delta_i \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, სიმრავლეები და (Δ_1, Δ_2)-გრადიენტი, რომლის კერძო შემთხვევებია კუთხური და ძლიერი გრადიენტები. ფუნქციის დიფერენცირებადობა დახასიათებულია Δ_i სიმრავლეების თვისებებით.

4.7. ფუნქციების კლასიფიკაცია გრადიენტთა მიხედვით

მე-3 და მე-4 პარაგრაფებში მიღებული შედეგები მრავალი ცვლადის ფუნქციების დიფერენცირებადობის შესახებ, საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დასკვნითი თეორემა დიფერენცირებადობაზე.

თეორემა 4.7.1 ([107])**.** $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილის მიდამოში განსაზღვრული ყველა ფუნქციის სიმრავლიდან გამოიყოფა შემდეგი კლასები:

x^0 წერტილზე უწყვეტი გრადიენტის მქონე ფუნქციების კლასი მკაცრად შედის x^0-ზე სასრული ძლიერი გრადიენტის მქონე ფუნქციების კლასში და ეს კლასი მკაცრად შედის x^0 წერტილზე სასრული კუთხური გრადიენტის მქონე ფუნქციების კლასში, რომელიც ემთხვევა x^0 წერტილზე დიფერენცირებადი ფუნქციების კლასს.

§ 5. $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის პირობები

5.1. $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების ახალი ფორმა

კომპლექსური $z = x + iy$, $i^2 = -1$, ცვლადის კომპლექსური $w = F(z)$ **ფუნქციის $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადობის** შესახებ კარგად არის ცნობილი ფუნდამენტური თეორემა (იხ. მაგალითად, [35], გვ. 85–86).

ეს თეორემა შედგება ორი ნაწილისგან და $z_0 = x_0 + iy_0$ წერტილზე ორივე ნაწილის ერთდროული შესრულება არის აუცილებელი და საკმარისი იმისთვის, რომ $F(z)$ ფუნქციას z_0 წერტილზე ჰქონდეს სასრული $F'(z_0)$ წარმოებული.

ამ თეორემის პირველი ნაწილი ითხოვს, რომ $F(z)$ ფუნქცია იყოს დიფერენცირებადი (x_0, y_0) წერტილზე (სრული დიფერენციალის მქონე) x და y ცვლადების მიმართ (იხ. 3.5).

იმავე თეორემის მეორე ნაწილი კი ითხოვს, რომ z_0 წერტილზე სრულდებოდეს **კოში–რიმანის პირობა**

$$F'_x(z_0) + iF'_y(z_0) = 0 \tag{C–R}$$

კომპლექსური ფუნქციის დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა მისი არაინტენსური კუთხური კერძო წარმოებულების სასრულობა, თანახმად 3.5.3 თეორემისა (შევნიშნოთ, რომ კომპლექსური და ნამდვილი ფუნქციების დიფერენცირებადობის პირობები ერთი და იგივეა). ამიტომ მართებულია ფუნდამენტური თეორემის შემდეგი ახალი ფორმა.

თეორემა 5.1.1 ([102], [107]). $z = x + iy$ კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური $w = F(z)$ ფუნქციის სასრული $F'(z_0)$ წარმოებულის არსებობისთვის $z_0 = x_0 + iy_0$ წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია

$$D_{\widehat{x}}F(z_0) + iD_{\widehat{y}}F(z_0) = 0 \tag{1}$$

ტოლობის შესრულება ანუ, რაც იგივეა,

$$D_{\widehat{x}}u(z_0) = D_{\widehat{y}}v(z_0), \tag{2}$$

$$D_{\widehat{y}}u(z_0) = -D_{\widehat{x}}v(z_0) \tag{3}$$

ტოლობების შესრულება, სადაც $F(z) = u(z) + iv(x)$.

დამტკიცება. თუ შესრულებულია (1) ტოლობა, მაშინ შესრულებულია (C–R) ტოლობაც და $D_{\widehat{x}}F(z_0)$, $D_{\widehat{y}}F(z_0)$ სასრულებია. მაგრამ $D_{\widehat{x}}F(z_0)$ და $D_{\widehat{y}}F(z_0)$ სიდიდეების სასრულობა ეკვივალენტურია $F(z)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობის z_0 წერტილზე (იხ. 3.5.3 თეორემა). ყველაფერი ეს ნიშნავს, ფუნდამენტური თეორემის ძალით, z_0 წერტილზე სასრული $F'(z_0)$ წარმოებულის არსებობას.

თუკი z_0 წერტილზე არსებობს სასრული $F'(z_0)$ წარმოებული, მაშინ სრულდება (C–R) პირობა და $F(z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x, y ცვლადებით z_0 წერტილზე, ისევ ფუნდამენტური თეორემის ძალით. მაგრამ $F(z)$ ფუნქციის $z_0 = (x_0, y_0)$ წერტილზე დიფერენცირებადობა x, y ცვლადების მიმართ ეკვივალენტურია $D_{\widehat{x}}F(z_0)$ და $D_{\widehat{y}}F(z_0)$ სიდიდეების სასრულობის, რომელნიც კერძოდ ემთხვევიან $F'_x(z_0)$-ს და $F'_y(z_0)$-ს. ეს უკანასკნელი ფაქტი (C–R) პირობასთან ერთად ნიშნავს (1) ტოლობის შესრულებას, საიდანაც უშუალოდ მიიღება (2) და (3) ტოლობები. თეორემა დამტკიცებულია.

რადგანაც ფუნქციის ჰოლომორფულობა ღია სიმრავლეზე ნიშნავს ამ ფუნქციის სასრული წარმოებულის არსებობას იმავე სიმრავლის ყოველ წერტილზე, ამიტომ 5.1.1 თეორემიდან გამომდინარეობს

შედეგი 5.1.1 ([107]). $F(z)$ ფუნქციის ჰოლომორფულობისთვის ღია $G \subset \mathbb{C}^1$ სიმრავლეზე, აუცილებელი და საკმარისია (1) ტოლობა შესრულდეს ყოველ $z_0 \in G$ წერტილზე.

რადგან ღია სიმრავლეზე ჰოლომორფული ფუნქციის წარმოებული ისევ ჰოლომორფული ფუნქციაა, კერძოდ, უწყვეტია იმავე სიმრავლეზე, ამიტომ მართებულია (იხ. თეორემა 3.2.1 და წინადადება 4.1.2)

შედეგი 5.1.2. $F(z)$ ფუნქციის ჰოლომორფულობისთვის ღია $G \subset \mathbb{C}^1$ სიმრავლეზე, აუცილებელი და საკმარისია

$$F'_{[x]}(z) + iF'_{[y]}(z) = 0 \tag{4}$$

ტოლობა შესრულდეს G სიმრავლის ყოველ z წერტილზე.

5.2. $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობები

რადგანაც ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის გვაქვს დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობებიც (იხ. 4.6.1 და 4.6.3 თეორემები), ამიტომ მართებულია შემდეგი ორი თეორემა, რომელთა ფორმულირებაც სხვაგვარია, ვიდრე [99] და [102]-ში.

თეორემა 5.2.1 ([107]). z_0 წერტილზე $F(z)$ ფუნქციის სასრული $F'(z_0)$ წარმოებულის არსებობისთვის საკმარისია შესრულდეს (C–R) პირობა და სასრული იყოს $F'_{[x]}(z_0)$ ან $F'_{[y]}(z_0)$.

თეორემა 5.2.2 ([107]). z_0 წერტილზე $F(z)$ ფუნქციის სასრული $F'(z_0)$ წარმოებულის არსებობისთვის საკმარისია შესრულდეს (C–R) პირობა და კერძო წარმოებულთაგან ერთ-ერთი უწყვეტი იყოს z_0 წერტილზე.

ცხადია, რომ სასრული $F'(z_0)$ წარმოებულის არსებობის საკმარისი პირობები 5.2.1 და 5.2.2 თეორემებიდან, შეიძლება ჩამოყალიბდეს როგორც $F(z)$ ფუნქციის ჰოლომორფულობის საკმარისი პირობები $G \subset \mathbb{C}^1$ ღია სიმრავლეზე და მოცემულ წერტილზე.

შენიშვნა 5.2.1. რადგანაც კომპლექსური $z = x + iy$ ცვლადის კომპლექსური $\phi(z) = A(z) + iB(z)$ ფუნქციის უწყვეტობა $z_0 = x_0 + iy_0$ წერტილზე ეკვივალენტურია $A(z) = A(x, y)$ და $B(z) = B(x, y)$ ფუნქციების ერთდროული უწყვეტობის (x_0, y_0) წერტილზე, ამიტომ z_0 წერტილზე $\phi(z)$ ფუნქციის და, მაგალითად, $\phi'_x(z) = A'_x(z) + iB'_x(z)$ კერძო წარმოებულის უწყვეტობის საკითხი გადაწყდება ორი ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქციებისთვის ადრე დადგენილი თეორემებით.

5.3. $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

როგორც ვიცით (იხ. 5.1), ერთი კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური ფუნქციის (სასრული) წარმოებულის მოცემულ წერტილზე არსებობა, ეკვივალენტურია განსახილველი ფუნქციის ნამდვილი ცვლადებით დიფერენცირებადობისა იმავე წერტილზე და იმავე ფუნქციისთვის კოში–რიმანის პირობის შესრულების იგივე წერტილზე. კარგადაა ცნობილი ამ პირობების ისეთი შესუსტება, რომ ფუნქციას წარმოებული ჰქონდეს ღია სიმრავლის ყველა წერტილზე ანუ, რაც იგივეა, ფუნქცია ჰოლომორფული იყოს ამ ღია სიმრავლეზე ([54], გვ. 287; [43], გვ. 27 და 32; [173]).

წარმოებულის ცნების n-განზომილებიან განზოგადებას წარმოადგენს n კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური ფუნქციის **$\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის** ცნება ([77], გვ. 20), რასაც ეფუძნება **$\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობის** ცნება წერტილზე და ღია სიმრავლეზე ([77], გვ. 21). განიხილება აგრეთვე ფუნქციის **თითოეული ცვლადით ჰოლომორფულობა (განცალებით $\mathbb{C}^1$-ჰოლომორფულობა)** ღია სიმრავლეზე.

ჰარტოგსის მთავარი თეორემის (1906 წ.) პირველი ვარიანტი ამტკიცებს, რომ $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობა ეკვივალენტურია განცალებით $\mathbb{C}^1$-ჰოლომორფულობის ღია სიმრავლეზე. გარდა ამისა, ღია სიმრავლეზე განიხილება **თითოეული ცვლადით ანალიზურობა (განცალებით $\mathbb{C}^1$-ანალიზურობა)** და **ცვლადთა ერთობლიობით ანალიზურობა ($\mathbb{C}^n$-ანალიზურობა)**. ჰარტოგსის მთავარი თეორემის მეორე ვარიანტი ამტკიცებს $\mathbb{C}^n$-ანალიზურობისა და განცალებით $\mathbb{C}^1$-ანალიზურობის ეკვივალენტობას.

აქ დამტკიცებულია მოცემულ წერტილზე $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები, რომელთა საფუძველზე მიღებულია $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები და ჰარტოგსის მთავარი თეორემის ორივე ვარიანტის ახალი დამტკიცება.

1. ვთქვათ, ევკლიდეს $2n$-განზომილებიან ნამდვილ $\mathbb{R}^{2n}$ სივრცეში, რომლის წერტილებია $2n$ ნამდვილი რიცხვისგან შედგენილი $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ ნაკრები, $z_k = x_k + iy_k$ ტოლობებით შეტანილია კომპლექსური სტრუქტურა. შედეგად მივიღებთ **n-განზომილებიან კომპლექსურ $\mathbb{C}^n$ სივრცეს**, რომლის წერტილია $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

ყოველ $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in \mathbb{C}^n$ წერტილს და ყოველ $\delta > 0$ რიცხვს ეთანადება z^0 წერტილის $U(z^0, \delta)$ მიდამო, რომელიც შეიცავს $\|z - z^0\| < \delta$ თვისების ყველა $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ წერტილს, სადაც $\|z\| = \sum_{k=1}^{n} \|z_k\|$ და $\|z_k\| = |x_k| + |y_k|$ (იხ. თავი I, 1.1.(2) ტოლობით მოცემული ნორმა).

z^0 წერტილის მიდამო საზოგადოდ, აღვნიშნოთ $U(z^0)$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ, კომპლექსური $w = f(z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $U(z^0)$ მიდამოში, $w \in \mathbb{C}^1$.

$$\lim_{z_k \to z_k^0} \frac{f(z^0(z_k)) - f(z^0)}{z_k - z_k^0} \equiv f'_{z_k}(z^0) \tag{1}$$

ზღვარს, როცა ის არსებობს სასრული ან უსასრულო, ეწოდება $f(z)$ ფუნქციის z_k **ცვლადით კერძო წარმოებული** z^0 წერტილზე, სადაც $z^0(z_k) = (z_1^0, \ldots, z_{k-1}^0, z_k, z_{k+1}^0, \ldots, z_n^0)$.

$f(z)$ ფუნქციას ეწოდება z_k **ცვლადით $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადი** z^0 წერტილზე, როცა $f'_{z_k}(z^0)$ სასრულია. თუკი ყველა $f'_{z_k}(z^0)$, $k = 1, \ldots, n$, სასრულია, მაშინ $f(z)$ ფუნქციას ეწოდება **განცალებით $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადი** z^0 წერტილზე.

განსაზღვრა 5.3.1 ([77], გვ. 20). $U(z^0)$ მიდამოში განსაზღვრულ $f(z)$ ფუნქციას ეწოდება **$\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადი** z^0 წერტილზე, როცა არსებობს სასრული კომპლექსური ისეთი $c_k \in \mathbb{C}^1$ რიცხვები, რომ ადგილი აქვს

$$\lim_{z \to z^0} \frac{f(z) - f(z^0) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(z_k - z_k^0)}{\|z - z^0\|} = 0 \tag{2}$$

ტოლობას.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ z^0 წერტილზე $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადი $f(z)$ ფუნქცია განცალებით $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადია იმავე წერტილზე და ადგილი აქვს

$$c_k = f'_{z_k}(z^0), \quad k = 1, \ldots, \tag{3}$$

ტოლობებს (იხ. მაგალითად, 7.3.(6) ტოლობის დამტკიცება ქვემოთ).

შებრუნებული მტკიცება მცდარია, საზოგადოდ. მართლაც, $\varphi(z_1, z_2)$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, იყოს $z^0 = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ წერტილზე წყვეტილი ისეთი ფუნქცია, რომელიც ნულია $z_1 = 0$ და $z_2 = 0$ სიბრტყეებზე. $\varphi(z_1, z_2)$ ფუნქციის განცალებით $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადობა z^0 წერტილზე აშკარაა, თუმც ის არაა $\mathbb{C}^2$-დიფერენცირებადი (უწყვეტიც კი არაა) ამავე წერტილზე.

ბუნებრივია შემდეგი ამოცანა: არსებობს თუ არა $f(z_1, \ldots, z_n)$ ფუნქციის z_k ცვლადის მიმართ z^0 წერტილზე რაიმე თვისება, რომლის ამ წერტილზე შესრულება ყველა $z_1, \ldots, z_n$ ცვლადის მიმართ იქნება $f(z)$ ფუნქციის z^0 წერტილზე $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის ეკვივალენტური?

ამ ამოცანაზე პასუხი დადებითია, რომელიც საშუალებას იძლევა ჩამოვაყალიბოთ წერტილზე და ღია სიმრავლეზე $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები და, გარდა ამისა, მივიღოთ ჰარტოგსის თეორემის ახალი დამტკიცება.

2. ვთქვათ, კომპლექსურ $f(z) = f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ ფუნქციას $z^0 = (x_1^0, y_1^0, \ldots, x_n^0, y_n^0)$ წერტილზე აქვს სასრული კუთხური კერძო $f'_{\widehat{x}_k}(z^0)$ და $f'_{\widehat{y}_l}(z^0)$ წარმოებულები x_k და y_l, $k = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, n$, ცვლადების მიმართ*. ეს ეკვივალენტურია f ფუნქციის

---

*ამ შემთხვევაში $f'_{\widehat{x}_k}(z^0)$ ტოლია შემდეგი

$$\frac{f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) - f(x_1, y_1, \ldots, x_{k-1}, y_{k-1}, x_k^0, y_k, x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots, x_n, y_n)}{x_k - x_k^0}$$

შეფარდების ზღვრის, როცა $x_k \to x_k^0$ და შესრულებულია $|x_j - x_j^0| \le \alpha_j |x_k - x_k^0|$ უტოლობები ყველა $j \ne k$ მნიშვნელობისთვის და $|y_i - y_i^0| \le \beta_i |x_k - x_k^0|$ ყველა $i = 1, \ldots, n$ მნიშვნელობისთვის. ანალოგიურად,

$$\frac{f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) - f(x_1, y_1, \ldots, x_{l-1}, y_{l-1}, x_l, y_l^0, x_{l+1}, y_{l+1}, \ldots, x_n, y_n)}{y_l - y_l^0}$$

შეფარდება ისწრაფვის $f'_{\widehat{y}_l}(z^0)$-კენ, როცა $y_l \to y_l^0$ და $|x_j - x_j^0| \le \gamma_j |y_l - y_l^0|$ ყველა $j = 1, \ldots, n$ მნიშვნელობისთვის და $|y_i - y_i^0| \le \delta_i |y_l - y_l^0|$ ყველა $i \ne l$ მნიშვნელობისთვის.

$df(z^0)$ დიფერენციალის არსებობის z^0 წერტილზე და

$$df(z^0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{\widehat{x}_k}(z^0)\, dx_k + \sum_{l=1}^{n} f'_{\widehat{y}_l}(z^0)\, dy_l. \tag{4}$$

ტოლობის* (იხ. 3.2.(3) ტოლობა), რომელიც

$$\begin{aligned} f'_{\widehat{z}_k}(z^0) &= \frac{1}{2}\left(f'_{\widehat{x}_k}(z^0) - i f'_{\widehat{y}_k}(z^0)\right), \\ f'_{\widehat{\overline{z}}_k}(z^0) &= \frac{1}{2}\left(f'_{\widehat{x}_k}(z^0) + i f'_{\widehat{y}_k}(z^0)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

აღნიშვნების გამოყენებით მიიღებს

$$df(z^0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{\widehat{z}_k}(z^0)\, dz_k + \sum_{k=1}^{n} f'_{\widehat{\overline{z}}_k}(z^0)\, d\overline{z}_k \tag{6}$$

სახეს. ახლა შემოვიღოთ

$$\widehat{\partial} f(z^0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{\widehat{z}_k}(z^0)\, dz_k, \quad \widehat{\overline{\partial}} f(z^0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{\widehat{\overline{z}}_k}(z^0)\, d\overline{z}_k \tag{7}$$

აღნიშვნები, რომელთა მეშვეობით (6) ტოლობა ასე იწერება:

$$df(z^0) = \widehat{\partial} f(z^0) + \widehat{\overline{\partial}} f(z^0). \tag{8}$$

შემოვიღოთ შემდეგი ორი განსაზღვრა.

განსაზღვრა 5.3.2 ([109])**.** $f(z)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, ფუნქციას ვუწოდოთ z_k **ცვლადით კუთხურად $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადი** $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ წერტილზე, როცა ადგილი აქვს

$$f'_{\widehat{\overline{z}}_k}(z^0) = 0 \tag{9}$$

ტოლობას.

---

*ნამდვილი და კომპლექსური ფუნქციებისთვის, ნამდვილი ცვლადით კუთხური კერძო წარმოებული გამოითვლება ერთი და იგივე წესით.

განსაზღვრა 5.3.3 ([109]). ვიტყვით, რომ $f(z)$ ფუნქცია **განცალებით კუთხურად $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადია** z^0 წერტილზე, თუ (9) ტოლობას ადგილი აქვს ყველა $k=1,\dots,n$ მნიშვნელობისთვის.

3. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი ძირითადი

თეორემა 5.3.1 ([109]). $U(z^0)$ მიდამოში განსაზღვრული $f(z)$ ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობისთვის z^0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია f-ის განცალებით კუთხური $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადობა z^0-ზე, ე. ი. აუცილებელი და საკმარისია

$$\widehat{\overline{\partial}} f(z^0)=0 \tag{10}$$

ტოლობის ანუ, რაც იგივეა,

$$f'_{\widehat{x}_k}(z^0)+if'_{\widehat{y}_k}(z^0)=0 \tag{11}$$

ტოლობის შესრულება $k=1,\dots,n$ მნიშვნელობებისთვის.

აუცილებლობა. ვუშვებთ $f(z_1,\dots,z_n)=u(z)+iv(z)$ ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობას $z^0=(z_1^0,\dots,z_n^0)$, $z_k^0=x_k^0+iy_k^0$, წერტილზე. მაშინ $c_k=a_k+ib_k$ რიცხვებისთვის, (2) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{z\to z^0}\frac{u(z)-u(z^0)-\sum\limits_{k=1}^{n}\left[a_k(x_k-x_k^0)-b_k(y_k-y_k^0)\right]}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(|x_k-x_k^0|+|y_k-y_k^0|\right)}=0, \tag{12}$$

$$\lim_{z\to z^0}\frac{v(z)-v(z^0)-\sum\limits_{k=1}^{n}\left[b_k(x_k-x_k^0)+a_k(y_k-y_k^0)\right]}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(|x_k-x_k^0|+|y_k-y_k^0|\right)}=0 \tag{13}$$

ტოლობები. მაშასადამე, ნამდვილი $u(z)$ და $v(z)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია $z^0 = (x_1^0, y_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0)$ წერტილზე და ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს (იხ. 3.2.(3) ტოლობა):

$$\begin{cases} a_k = u'_{\widehat{x}_k}(z^0), & b_k = -u'_{\widehat{y}_k}(z^0), \\ a_k = v'_{\widehat{y}_k}(z^0), & b_k = v'_{\widehat{x}_k}(z^0), \ \ k = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{14}$$

აქედან გამომდინარეობს

$$f'_{\widehat{\overline{z}}_k}(z^0) = 0, \ \ k = 1, \dots, n, \tag{15}$$

ტოლობა ანუ, რაც იგივეა,

$$\begin{cases} u'_{\widehat{x}_k}(z^0) = v'_{\widehat{y}_k}(z^0), \\ u'_{\widehat{y}_k}(z^0) = -v'_{\widehat{x}_k}(z^0), \ \ k = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{16}$$

სისტემა. (15) და (16), მოკლედ ასე იწერება

$$\widehat{\overline{\partial}} f(z^0) = 0. \tag{17}$$

მაშასადამე, z^0 წერტილზე $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადი $f(z)$ ფუნქცია განცალებით კუთხურად $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადია იმავე წერტილზე და (3) ტოლობით მოცემული $c_k = f'_{z_k}(z^0)$ რიცხვებისთვის გვაქვს, (15) ტოლობის გათვალისწინებით,

$$f'_{z_k}(z^0) = u'_{\widehat{x}_k}(z^0) - i u'_{\widehat{y}_k}(z^0) = f'_{\widehat{z}_k}(z^0), \ \ k = 1, \dots, n, \tag{18}$$

$$f'_{z_k}(z^0) = v'_{\widehat{y}_k}(z^0) + i v'_{\widehat{x}_k}(z^0) = f'_{\widehat{z}_k}(z^0), \ \ k = 1, \dots, n, \tag{19}$$

ტოლობები.

ამრიგად, z^0 წერტილზე $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადი $f(z)$ ფუნქციის $df(z^0)$ დიფერენციალისთვის გვაქვს

$$df(z^0) = \widehat{\partial} f(z^0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{\widehat{z}_k}(z^0)\, dz_k. \tag{20}$$

საკმარისობა. ვუშვებთ (10) ტოლობის ანუ, რაც იგივეა, (16) სისტემის შესრულებას. ამ სისტემის წევრების სასრულობა ეკვივალენტურია $u(z)$ და $v(z)$ ფუნქციების დიფერენცირებადობის z^0 წერტილზე ([107], გვ. 62).

მაშასადამე, ადგილი აქვს გარკვეულ ორ ტოლობას, რომელთა რიცხვითი კოეფიციენტებია (16) სისტემის წევრები. (15) ტოლობის ძალით, ამ ტოლობებს აქვთ (12) და (13) ტოლობების სახე. ორივე ეს ტოლობა ერთად იძლევა (2) ტოლობას $c_k = f'_{\widehat{z}_k}(z^0)$ კომპლექსური რიცხვებისთვის.

ამრიგად, $f(z) = u(z) + iv(z)$ ფუნქცია $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადია z^0 წერტილზე და ადგილი აქვს (18)–(20) ტოლობებს. თეორემა დამტკიცებულია.

4. თუ კუთხური კერძო $f'_{\widehat{x}_k}(z^0)$ წარმოებულის განსაზღვრაში ავიღებთ $c_j = 1$ ყველა $j \neq k$ მნიშვნელობისთვის, მაშინ მივიღებთ **არაინტენსურ კუთხურ კერძო** $D_{\widehat{x}_k} f(z^0)$ **წარმოებულს** (იხ. 3.3). ანალოგიურად, $f'_{\widehat{y}_l}(z^0)$-დან მიიღება $D_{\widehat{y}_l} f(z^0)$. ყველა $D_{\widehat{x}_k} f(z^0)$-ის და $D_{\widehat{y}_k} f(z^0)$-ის სასრულობა ეკვივალენტურია $df(z^0)$ დიფერენციალის არსებობის (იხ. 3.3.1 თეორემა) და

$$df(z^0) = \sum_{k=1}^{n} D_{\widehat{x}_k} f(z^0)\, dx_k + \sum_{k=1}^{n} D_{\widehat{y}_k} f(z^0)\, dy_k \tag{21}$$

ტოლობის (იხ. 3.3.1 შედეგი). ამ შემთხვევაში (16) სისტემას აქვს

$$\begin{cases} D_{\widehat{x}_k} u(z^0) = D_{\widehat{y}_k} v(z^0), \\ D_{\widehat{y}_k} u(z^0) = -D_{\widehat{x}_k} v(z^0), \quad k = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{22}$$

სახე, ხოლო (11) ტოლობა ასე იწერება

$$D_{\widehat{x}_k} f(z^0) + iD_{\widehat{y}_k} f(z^0) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

მაშასადამე, 5.3.1 თეორემა ასეც ყალიბდება.

თეორემა 5.3.2 ([109]). $f(z)$ ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობისთვის z^0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია f-ის **განცალებით არაინტენსიური კუთხური $\mathbb{C}^1$-დიფერენცირებადობა** z^0-ზე, ე. ი. აუცილებელი და საკმარისია

$$D_{\widehat{x}_k} f(z^0) + i D_{\widehat{y}_k} f(z^0) = 0 \tag{23}$$

ტოლობის შესრულება ყველა $k = 1, \ldots, n$ მნიშვნელობისთვის.

კერძო $n = 1$ მნიშვნელობისთვის, ამ თეორემიდან მიიღება 5.1.1 თეორემა.

5.4. $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

განსაზღვრა 5.4.1 ([77], გვ. 21)). $U(z^0)$ მიდამოში განსაზღვრულ $f(z)$ ფუნქციას ეწოდება **$\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფული** z^0 **წერტილზე**, თუ f არის $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადი ყოველ $z \in U(z^0, \delta)$ წერტილზე რომელიმე $\delta > 0$ რიცხვისთვის.

$f(z)$ ფუნქციას ეწოდება **$\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფული ღია** $G \subset \mathbb{C}^n$ **სიმრავლეზე**, თუ f არის $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფული G-ს ყოველ წერტილზე.

$f(z)$ ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობა ღია $G \subset \mathbb{C}^n$ სიმრავლეზე ეკვივალენტურია f-ის $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობის G-ს ყოველ წერტილზე.

წინადადება 5.4.1. $f(z)$ ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობისთვის ღია $G \subset \mathbb{C}^n$ სიმრავლეზე (ან $z^0 \in \mathbb{C}^n$ წერტილზე) აუცილებელი და საკმარისია G-ს ყოველ წერტილზე (შესაბამისად z^0 წერტილის მიდამოში) შესრულდეს (11) ანუ, რაც იგივეა, (23) ტოლობები $k = 1, \ldots, n$ მნიშვნელობებისთვის.

5.5. ჰარტოგსის თეორემის ახალი დამტკიცება

1. თეორემა 5.5.1 (ჰარტოგსი, 1906 წ., [120], [77], გვ. 41). $f(z)$ ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობისთვის ღია $G \subset \mathbb{C}^n$ სიმრავლეზე, აუცილებელი და საკმარისია $f(z)$-ის განცალებით $\mathbb{C}^1$-ჰოლომორფულობა G სიმრავლეზე.

აუცილებლობა. G სიმრავლეზე $f(z)$-ის $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობა ნიშნავს $f(z)$-ის $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადობას G-ს ყოველ წერტილზე. ამიტომ G-ს ყოველ z^0 წერტილზე შესრულებულია (23) ტოლობა $k = 1, \ldots, n$ მნიშვნელობებისთვის. ეს ნიშნავს $f(z)$-ის განცალებით $\mathbb{C}^1$-ჰოლომორფულობას, 5.1.1 თეორემის შესაბამისად.

საკმარისობა. როცა $f(z)$ ფუნქცია განცალებით $\mathbb{C}^1$-ჰოლომორფულია ღია G სიმრავლეზე, მაშინ (23) ტოლობა შესრულებულია $k = 1, \ldots, n$ მნიშვნელობებისთვის ყველა $z^0 \in G$ წერტილზე, 5.1.1 თეორემის თანახმად. ამიტომ $f(z)$ ფუნქცია $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადია z^0 წერტილზე 5.3.2 თეორემის ძალით, რაც ნიშნავს $f(z)$ ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობას G სიმრავლეზე.

2. ჰარტოგსის ეს თეორემა ყალიბდება ღია სიმრავლეზე $\mathbb{C}^n$-ანალიზურობასა და განცალებით $\mathbb{C}^1$-ანალიზურობას შორის კავშირის სახითაც. ამ მიზნით შემოვიღოთ ზოგიერთი საჭირო განსაზღვრა.

განსაზღვრა 5.5.1. $f(z)$ ფუნქციას ეწოდება $\mathbb{C}^n$**-ანალიზური** ღია $F \subset \mathbb{C}^n$ სიმრავლეზე, როცა ყოველ $z^0 \in G$ წერტილს აქვს ისეთი $U(z^0, \delta)$ მიდამო, რომლის ყოველ $z \in U(z^0, \delta)$ წერტილზე $f(z)$ მნიშვნელობა წარმოადგენს z^0 წერტილზე f-ის შესაბამისი ტეილორის n-ჯერადი მწკრივის ჯამს.

განსაზღვრა 5.5.2. $f(z)$ ფუნქციას ეწოდება z_k **ცვლადით** $\mathbb{C}^1$**-ანალიზური (ან** $\mathbb{C}^1$**-ჰოლომორფული)** $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ წერტილზე, თუ ერთი z_k ცვლადის $f(z^0(z_k))$ ფუნქცია **ანალიზურია (შესაბამისად ჰოლომორფულია)** z_k^0 წერტილზე, სადაც $z^0(z_k) = (z_1^0, \ldots, z_{k-1}^0, z_k, z_{k+1}^0, \ldots, z_n^0)$.

განსაზღვრა 5.5.3. $f(z_1,\dots,z_n)$ ფუნქციას ეწოდება **განცალებით $\mathbb{C}^1$-ანალიზური (ან განცალებით $\mathbb{C}^1$-ჰოლომორფული) ღია $G\subset\mathbb{C}^n$ სიმრავლეზე**, როცა f ფუნქცია ყოველი დამოუკიდებელი ცვლადითაა $\mathbb{C}^1$-ანალიზური (შესაბამისად $\mathbb{C}^1$-ჰოლომორფული) ყოველ $z^0\in G$ წერტილზე.

თეორემა 5.5.2 (ჰარტოგსი, 1906 წ., [120], [76], გვ. 285). $f(z)$ ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-ანალიზურობა და განცალებით $\mathbb{C}^1$-ანალიზურობა, f-ის ეკვივალენტური თვისებებია ღია $G\subset\mathbb{C}^n$ სიმრავლეზე.

დამტკიცება. როცა f ფუნქცია $\mathbb{C}^n$-ანალიზურია G სიმრავლეზე, მაშინ ნებისმიერი $z^0\in G$ წერტილის რომელიმე $U(z^0,\delta)\subset G$ მიდამოში $f(z)$ მნიშვნელობა წარმოადგენს f-ის შესაბამისი n-ჯერადი ხარისხოვანი მწკრივის ჯამს. თუ ამ მწკრივში კერძოდ ავიღებთ $z_j=z_j^0$ ყველა $j\neq k$ მნიშვნელობისთვის, მაშინ ეს მწკრივი გახდება $(z_k-z_k^0)$-ის მიმართ ხარისხოვანი მწკრივი, რომლის ჯამია $f(z^0(z_k))$ მნიშვნელობა z_k^0 წერტილის რაღაც მიდამოში. ამიტომ ეს ერთი z_k კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია ანალიზურია z_k^0 წერტილზე. k-ს ნებისმიერობის გამო, $k=1,\dots,n$, ვიღებთ f ფუნქციის განცალებით $\mathbb{C}^1$-ანალიზურობას G სიმრავლეზე.

$f(z_1,\dots,z_n)$ ფუნქციის G სიმრავლეზე განცალებით $\mathbb{C}^1$-ანალიზურობისას, (23) ტოლობა შესრულებულია $k=1,\dots,n$ მნიშვნელობებისთვის ყოველ $z^0\in G$ წერტილზე, 5.1.1 თეორემის თანახმად. ამიტომ f ფუნქცია $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადია z^0 წერტილზე, 5.3.2 თეორემის ძალით. მაშასადამე, f ფუნქცია G სიმრავლეზე არის $\mathbb{C}^n$-დიფერენცირებადი, კერძოდ უწყვეტი. ცნობილი მეთოდით, აქედან მიიღება G სიმრავლეზე განცალებით $\mathbb{C}^1$-ანალიზური და უწყვეტი f ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-ანალიზურობა იგივე G სიმრავლეზე (იხ. [76], გვ. 274–275).

შედეგი 5.5.1. $f(z)$ ფუნქციის $\mathbb{C}^n$-ჰოლომორფულობა ეკვივალენტურია 5.1.(4) ტოლობების, როცა $x=x_k$, $y=y_k$, $z_k=x_k+iy_k$.

შედეგი 5.5.2. $f(z_1,\dots,z_n)$ ფუნქციის $z^0\in\mathbb{C}^n$ წერტილზე განცალებით $\mathbb{C}^1$-ანალიზურობისას $f(z_1,\dots,z_n)$ წარმოადგენს

$U(z^0,\delta)$ მიდამოში კრებადი n-განმეორებითი ხარისხოვანი მწკრივის ჯამს.5.5.2 თეორემის მეორე ნაწილის ძალით, ეს n-განმეორებითი ხარისხოვანი მწკრივი შეიძლება ჩაიწეროს n-ჯერადი ხარისხოვანი მწკრივის სახით $U(z^0,\delta)$ მიდამოში.

§ 6. სხვადასხვა აზრით ცალმხრივი კერძო წარმოებული და დიფერენციალი ორი ცვლადის ფუნქციისთვის

ვთქვათ $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში მოცემულია ორი ცვლადის სასრული $\psi(x)$, $x=(x_1,x_2)\in U(x^0)$, ფუნქცია.

1. თუ ${}^i\psi(x_i)$ ფუნქციას (იხ. თავი I, 2.1.(3) ტოლობა) x_i^0 წერტილზე აქვს $({}^i\psi(x_i))'(x_i^0)$ წარმოებული, მაშინ ამ წარმოებულს ეწოდება $\psi(x)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული x^0 წერტილზე x_i ცვლადით და მას აღნიშნავენ $\psi'_{x_i}(x^0)$, $\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x^0)$, $\partial_{x_i}\psi(x^0)$ სიმბოლოებით. ამათგან სამომავლოდ ავირჩევთ $\partial_{x_i}\psi(x^0)$ სიმბოლოს, რადგანაც ცალმხრივი კერძო წარმოებული დამატებით საჭიროებს $+$ ან $-$ სიმბოლოს.

თუ არსებობს $\partial_{x_1}\psi(x^0)$ და $\partial_{x_2}\psi(x^0)$, მაშინ განიხილავენ $\psi(x)$ ფუნქციის

$$\operatorname{grad}\psi(x^0)=\big(\partial_{x_1}\psi(x^0),\partial_{x_2}\psi(x^0)\big)$$

გრადიენტს x^0 წერტილზე.

2. შესაძლოა ${}^i\psi(x_i)$ ფუნქციას არ ჰქონდეს წარმოებული x_i^0 წერტილზე, ე. ი. არ არსებობდეს $\partial_{x_i}\psi(x^0)$, მაგრამ ${}^i\psi(x_i)$-ს ჰქონდეს ${}^+$წარმოებული x_i^0-ზე, სიმბოლურად $\psi^+_{x_i}\psi(x^0)$, რომელსაც ეწოდება **$\psi(x)$ ფუნქციის x_i ცვლადით მარჯვენა კერძო წარმოებული** x^0 წერტილზე. ამგვარად,

$$\psi^+_{x_i}\psi(x^0)=\lim_{x_i\to x_i^0+}\frac{{}^i\psi(x_i)-{}^i\psi(x_i^0)}{x_i-x_i^0}=$$

$$=\lim_{x_i\to x_i^0+}\frac{{}^i\psi(x_i)-\psi(x^0)}{x_i-x_i^0}\,.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $\psi(x)$ **ფუნქციის** x_i **ცვლადით**

$$\psi^-_{x_i}\psi(x^0) = \lim_{x_i\to x_i^0-} \frac{{}^i\psi(x_i) - {}^i\psi(x_i^0)}{x_i - x_i^0} = $$
$$= \lim_{x_i\to x_i^0-} \frac{{}^i\psi(x_i) - \psi(x^0)}{x_i - x_i^0}$$

მარცხენა კერძო წარმოებული x^0 წერტილზე.

ცხადია, რომ $\partial_{x_i}\psi(x^0)$-ის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია ურთიერთტოლი $\psi^+_{x_i}\psi(x^0)$ და $\psi^-_{x_i}\psi(x^0)$ სიდიდეების არსებობა.

$\psi^+_{x_1}\psi(x^0)$ და $\psi^+_{x_2}\psi(x^0)$ სიდიდეების არსებობის შემთხვევაში განვიხილოთ $\psi(x)$ **ფუნქციის**

$$^+\operatorname{grad}\psi(x^0) = \big(\psi^+_{x_1}\psi(x^0), \psi^+_{x_2}\psi(x^0)\big)$$

$^+$**გრადიენტი** x^0 **წერტილზე**.

ანალოგიურად, $\psi^-_{x_1}\psi(x^0)$ და $\psi^-_{x_2}\psi(x^0)$ სიდიდეების არსებობისას შემოვიღოთ $\psi(x)$ **ფუნქციის**

$$^-\operatorname{grad}\psi(x^0) = \big(\psi^-_{x_1}\psi(x^0), \psi^-_{x_2}\psi(x^0)\big)$$

$^-$**გრადიენტი** x^0 **წერტილზე**.

$$^-\operatorname{grad}\psi(x^0) = \operatorname{grad}\psi(x^0) = {}^+\operatorname{grad}\psi(x^0)$$

ტოლობების მართებულობისთვის აუცილებელი და საკმარისია ერთსახელა კომპონენტების შემდეგი ტოლობები:

$$\psi^-_{x_i}\psi(x^0) = \psi_{x_i}\psi(x^0) = \psi^+_{x_i}\psi(x^0), \quad i = 1, 2.$$

უკანასკნელი ტოლობანი არასაკმარისია, საზოგადოდ, $\psi(x)$ ფუნქციის კუთხური გრადიენტის ან ძლიერი გრადიენტის არსებობისთვის x^0 წერტილზე.

ქვემოთ შემოღებული იქნება ცალმხრივი კუთხური კერძო $^\pm$წარმოებულები და ცალმხრივი ძლიერი კერძო $^\pm$წარმოებულები. ამ გზით, დადგენილი იქნება კუთხური გრადიენტის და ძლიერი გრადიენტის

არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. ამასთან, კუთხური გრადიენტის სასრულობის პირობები ამავე დროს იქნება სრული დიფერენციალის არსებობის პირობებიც.

6.1. ცალმხრივი ძლიერი კერძო წარმოებული

$\psi(x)$ ფუნქციის ძლიერი კერძო წარმოებულის ცნება x_1 და x_2 ცვლადებით x^0 წერტილზე (იხ. 4.6), საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ $\psi(x)$ ფუნქციის x_1 და x_2 ცვლადების მიმართ **ძლიერი კერძო** $^{\pm}$**წარმოებულები** x^0 წერტილზე ([105], [107]):

$$\partial^{+}_{[x_1]}\psi(x^0)=\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\ h_1>0}}\frac{\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0,x_2^0+h_2)}{h_1}\,, \quad (1)$$

$$\partial^{-}_{[x_1]}\psi(x^0)=\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\ h_1<0}}\frac{\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0,x_2^0+h_2)}{h_1}\,, \quad (2)$$

$$\partial^{+}_{[x_2]}\psi(x^0)=\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\ h_2>0}}\frac{\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0+h_1,x_2^0)}{h_2}\,, \quad (3)$$

$$\partial^{-}_{[x_2]}\psi(x^0)=\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\ h_2<0}}\frac{\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0+h_1,x_2^0)}{h_2}\,. \quad (4)$$

ნათელია, რომ $\partial_{[x_i]}\psi(x^0)$-ის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია ურთიერთტოლი $\partial^{+}_{[x_i]}\psi(x^0)$-ის და $\partial^{-}_{[x_i]}\psi(x^0)$-ის არსებობა და ასეთ შემთხვევაში გვაქვს

$$\partial^{-}_{[x_i]}\psi(x^0)=\partial_{[x_i]}\psi(x^0)=\partial^{+}_{[x_i]}\psi(x^0), \quad i=1,2, \qquad (5)$$

ტოლობები.

ახლა $\psi(x)$ ფუნქციისთვის x^0 წერტილზე შემოვიღოთ **ძლიერი** $^{\pm}$**გრადიენტები** შემდეგი ტოლობებით:

$$^{+}\operatorname{strgrad}\psi(x^0)=\big(\partial^{+}_{[x_1]}\psi(x^0),\partial^{+}_{[x_2]}\psi(x^0)\big), \qquad (6)$$

$$^{-}\operatorname{strgrad}\psi(x^0)=\big(\partial^{-}_{[x_1]}\psi(x^0),\partial^{-}_{[x_2]}\psi(x^0)\big), \qquad (7)$$

რომლებიც $\operatorname{strgrad}\psi(x^0)$ ძლიერ გრადიენტს უკავშირდებიან შემდეგნაირად (იხ. 4.6.(3) ტოლობა).

წინადადება 6.1.1 ([105], [107]). $\operatorname{strgrad}\psi(x^0)$-ის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია ურთიერთტოლი $^-\operatorname{strgrad}\psi(x^0)$ და $^+\operatorname{strgrad}\psi(x^0)$ სიდიდეების არსებობა და მათი ტოლობის შემთხვევაში გვაქვს:

$$^-\operatorname{strgrad}\psi(x^0) = \operatorname{strgrad}\psi(x^0) = {}^+\operatorname{strgrad}\psi(x^0). \tag{8}$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 6.1.1 ([105], [107]). $\partial^-_{[x_i]}\psi(x^0)$ და $\partial^+_{[x_i]}\psi(x^0)$ სიდიდეების სასრულობიდან გამომდინარეობს $\psi(x)$ ფუნქციის x_i ცვლადით სასრული **ძლიერი სიმეტრიული კერძო წარმოებულის** არსებობა x^0 წერტილზე (იხ. განსაზღვრა 7.4.1 ქვემოთ), სიმბოლურად $\partial^{(1)}_{[x_i]}\psi(x^0)$, რომლისთვისაც ადგილი აქვს

$$\partial^{(1)}_{[x_i]}\psi(x^0) = \frac{1}{2}\left[\partial^-_{[x_i]}\psi(x^0) + \partial^+_{[x_i]}\psi(x^0)\right], \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

ტოლობას. ამასთან ერთად, არსებობს ფუნქცია, რომლისთვისაც (9) ტოლობის მარცხენა მხარე ნულია და ამავე ტოლობის მარჯვენა მხარის შესაკრებები წარმოადგენენ მოპირდაპირე ნიშნიან უსასრულოებს.

დამტკიცება. ნათქვამი შევამოწმოთ, მაგალითად x_1 ცვლადისთვის. რადგანაც შემდეგ ტოლობაში (იხ. 7.4.(1) ტოლობა ქვემოთ):

$$\partial^{(1)}_{[x_1]}\psi(x^0) =$$
$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\psi(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) - \psi(x_1^0 - h_1, x_2^0 + h_2)}{2h_1} \tag{10}$$

ზღვარქვეშა შეფარდება არის ლუწი ფუნქცია h_1 ცვლადის მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $h_1 > 0$ და გვექნება:

$$\partial^{(1)}_{[x_1]}\psi(x^0) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\ h_1>0}} \frac{\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0,x_2^0+h_2)}{h_1} +$$

$$+\frac{1}{2} \lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\ h_1>0}} \frac{\psi(x_1^0-h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0,x_2^0+h_2)}{-h_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\partial^+_{[x_1]}\psi(x^0)+\partial^-_{[x_1]}\psi(x^0)\Big].$$

თეორემის მეორე ნაწილისთვის გამოგვადგება $x^0=(0,0)$ წერტილის მიდამოში განსაზღვრული $\varphi(x_1,x_2)=|x_1|^{1/2}+|x_1|^{1/2}$ ფუნქცია. გვაქვს:

$$\partial^{(1)}_{[x_1]}\varphi(x^0) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\varphi(h_1,h_2)-\varphi(-h_1,h_2)}{2h_1} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1|^{1/2}+|h_2|^{1/2}-|-h_1|^{1/2}-|h_2|^{1/2}}{2h_1} = 0,$$

$$\partial^+_{[x_1]}\varphi(x^0) = \lim_{\substack{h_1\to0+\\ h_2\to0}} \frac{\varphi(h_1,h_2)-\varphi(0,h_2)}{h_1} =$$

$$= \lim_{\substack{h_1\to0+\\ h_2\to0}} \frac{|h_1|^{1/2}+|h_2|^{1/2}-|h_2|^{1/2}}{h_1} = +\infty,$$

$$\partial^-_{[x_1]}\varphi(x^0) = \lim_{\substack{h_1\to0-\\ h_2\to0}} \frac{|h_1|^{1/2}}{h_1} = -\lim_{\substack{h_1\to0-\\ h_2\to0}} \frac{|h_1|^{1/2}}{|h_1|} = -\infty.$$

6.2. ცალმხრივი კუთხური კერძო წარმოებული

$\psi(x)$ ფუნქციის **კუთხური კერძო $^{\pm}$წარმოებულები** x^0 წერტილზე x_1 და x_2 ცვლადების მიმართ განვსაზღვროთ

$$\partial^+_{\widehat{x}_1}\psi(x^0) = \lim_{\substack{h_1\to0+\\ |h_2|\le ah_1}} \frac{\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0,x_2^0+h_2)}{h_1}, \quad a>0, \quad (1)$$

$$\partial^+_{\widehat{x}_2}\psi(x^0)=\lim_{\substack{h_2\to 0+\\ h_2\geq b|h_1|}}\frac{\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0+h_1,x_2^0)}{h_2},\quad b>0, \quad (2)$$

$$\partial^-_{\widehat{x}_1}\psi(x^0)=\lim_{\substack{h_1\to 0-\\ |h_2|\leq -ch_1}}\frac{\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0,x_2^0+h_2)}{h_1},\quad c>0, \quad (3)$$

$$\partial^-_{\widehat{x}_2}\psi(x^0)=\lim_{\substack{h_2\to 0-\\ h_2\leq -d|h_1|}}\frac{\psi(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2)-\psi(x_1^0+h_1,x_2^0)}{h_2},\quad d>0, \quad (4)$$

ტოლობებით, თუკი თითოეული ეს ზღვარი არსებობს და არ არის დამოკიდებული მასში მონაწილე მუდმივზე (იხ. [105], [107]). $\partial^-_{\widehat{x}_i}\psi(x^0)$ და $\partial^+_{\widehat{x}_i}\psi(x^0)$ სიდიდეების არსებობა და მათი ურთიერთტოლობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა $\partial_{\widehat{x}_i}\psi(x^0)$-ის არსებობისთვის (იხ. 3.5).

$\psi(x)$ ფუნქციის **კუთხური $^\pm$გრადიენტები** x^0 წერტილზე განვსაზღვროთ

$$^+\operatorname{anggrad}\psi(x^0)=\big(\partial^+_{\widehat{x}_1}\psi(x^0),\partial^+_{\widehat{x}_2}\psi(x^0)\big), \quad (5)$$

$$^-\operatorname{anggrad}\psi(x^0)=\big(\partial^-_{\widehat{x}_1}\psi(x^0),\partial^-_{\widehat{x}_2}\psi(x^0)\big) \quad (6)$$

ტოლობებით, თუკი მათი კომპონენტები არსებობენ. აქედან, $\operatorname{anggrad}\psi(x^0)$ კუთხური გრადიენტისთვის (იხ. 3.5) გვაქვს შემდეგი

თეორემა 6.2.1 ([105], [107]). $\operatorname{anggrad}\psi(x^0)$-ის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს ურთიერთტოლი $^+\operatorname{anggrad}\psi(x^0)$ და $^-\operatorname{anggrad}\psi(x^0)$ სიდიდეები და მათი ტოლობის შემთხვევაში გვაქვს:

$$^-\operatorname{anggrad}\psi(x^0)=\operatorname{anggrad}\psi(x^0)={}^+\operatorname{anggrad}\psi(x^0). \quad (7)$$

ეს თეორემა, 3.5.1 თეორემის ძალით ასეც ყალიბდება.

თეორემა 6.2.2 ([105], [107]). სრული $d\psi(x^0)$ დიფერენციალის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია, x^0 წერტილზე არსებობდეს $\psi(x)$ ფუნქციის ურთიერთტოლი სასრული კუთხური $^\pm$გრადიენტები, განსაზღვრულნი (5) და (6) ტოლობებით.

6.3. ცალმხრივი კუთხური დიფერენციალი

რადგანაც $\operatorname{anggrad}\psi(x^0)$ სიდიდის სასრულობა არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა $d\psi(x^0)$ დიფერენციალის არსებობისთვის (იხ. თეორემა 3.5.1), ამიტომ კუთხური $^{\pm}$გრადიენტების მეშვეობით შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 6.3.1 ([105], [107]). $\psi(x)$ ფუნქციას ვუწოდოთ **კუთხურად $^{+}$დიფერენცირებადი** x^0 წერტილზე, თუ სასრულია $^{+}\operatorname{anggrad}\psi(x^0)$ და $\psi(x)$-ის **კუთხური $^{+}$დიფერენციალი** x^0 წერტილზე, სიმბოლურად $d^{+}_{\wedge}\psi(x^0)$, განვსაზღვროთ

$$d^{+}_{\wedge}\psi(x^0) = \partial^{+}_{\widehat{x}_1}\psi(x^0)dx_1 + \partial^{+}_{\widehat{x}_2}\psi(x^0)dx_2 \tag{1}$$

ტოლობით.

ანალოგიურად, $^{-}\operatorname{anggrad}\psi(x^0)$-ის სასრულობისას **კუთხური $^{-}$დიფერენციალი** განვსაზღვროთ

$$d^{-}_{\wedge}\psi(x^0) = \partial^{-}_{\widehat{x}_1}\psi(x^0)dx_1 + \partial^{-}_{\widehat{x}_2}\psi(x^0)dx_2 \tag{2}$$

ტოლობით.

ამრიგად, მართებულია შემდეგი

წინადადება 6.3.1 ([105], [107]). $d\psi(x^0)$ დიფერენციალის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს ურთიერთტოლი $d^{-}_{\wedge}\psi(x^0)$ და $d^{+}_{\wedge}\psi(x^0)$ **კუთხური $^{\pm}$დიფერენციალები**, რომელთა ტოლობისას გვაქვს დამოკიდებულება

$$d^{-}_{\wedge}\psi(x^0) = d\psi(x^0) = d^{+}_{\wedge}\psi(x^0). \tag{3}$$

შენიშვნა 6.3.1. $^{+}\operatorname{strgrad}\psi(x^0)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს $^{+}\operatorname{anggrad}\psi(x^0)$-ის სასრულობა და, მაშასადამე, $d^{+}_{\wedge}\psi(x^0)$-ის არსებობა. ანალოგიური ფაქტი გვაქვს $d^{-}_{\wedge}\psi(x^0)$-ის მიმართაც.

§ 7. ორი ცვლადის ფუნქციის სიმეტრიული დიფერენცირებადობა

7.1. სიმეტრიული წარმოებული

1. $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ ინტერვალზე სასრულ $\lambda(t)$ ფუნქციას აქვს **სიმეტრიული წარმოებული** t_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\lambda^{(1)}(t_0)$, თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო

$$\lambda^{(1)}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda(t_0+h)-\lambda(t_0-h)}{2h} \tag{1}$$

ზღვარი.

სიმეტრიული წარმოებულის ცნება შემოიღო დიუ ბუა რეიმონმა, 1875 წელს ([98], [44], გვ. 216). უფრო ადრე, 1841 წლის შრომაში (1) ზღვრით სარგებლობდა ოსტროგრადსკი ([47], გვ. 166; [44], გვ. 216).

სიმეტრიული წარმოებული უკავშირდება პუასონის ინტეგრალის წარმოებულის რადიალურ ზღვარს ([30], გვ. 166), ტრიგონომეტრიული მწკრივის შეჯამებადობას ლებეგის მეთოდით ([30], გვ. 505), გარკვეული კლასის ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობას ([41], გვ. 475) და ამოზნექილ ფუნქციებს ([16], გვ. 66–67).

რადგანაც $[\lambda(t_0+h)-\lambda(t_0-h)]/h$ შეფარდება h-ის ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ (1) ტოლობაში ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავწეროთ $h\to 0+$.

$\lambda(t)$ ფუნქციის სიმეტრიული $\lambda^{(1)}(t_0)$ წარმოებული მისივე მარჯვენა და მარცხენა

$$\lambda'_+(t_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{\lambda(t_0+h)-\lambda(t_0)}{h}, \tag{2}$$

$$\lambda'_-(t_0) = \lim_{h\to 0-} \frac{\lambda(t_0+h)-\lambda(t_0)}{h} \tag{3}$$

წარმოებულებთან t_0 წერტილზე (იხ. 1.9), დაკავშირებულია შემდეგი წინადადებით.

წინადადება 7.1.1. სასრული ცალმხრივი $\lambda'_+(t_0)$ და $\lambda'_-(t_0)$ წარმოებულების არსებობა იწვევს სასრული სიმეტრიული $\lambda^{(1)}(t_0)$ წარმოებულის არსებობას და

$$\lambda^{(1)}(t_0) = \frac{1}{2}\left[\lambda'_-(t_0) + \lambda'_+(t_0)\right] \tag{4}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. (1) ტოლობის შეფარდება გადავწეროთ ასე

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda(t_0+h) - \lambda(t_0)}{h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda(t_0-h) - \lambda(t_0)}{-h}$$

და გავითვალისწინოთ, რომ $h \to 0+$. წინადადება დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ სასრული $\lambda'(t_0)$ წარმოებულის არსებობის შემთხვევაში ადგილი აქვს

$$\lambda'_-(t_0) = \lambda'(t_0) = \lambda'_+(t_0) \tag{5}$$

ტოლობებს. ამიტომ სასრული $\lambda'(t_0)$ წარმოებულის არსებობა იწვევს სასრული სიმეტრიული $\lambda^{(1)}(t_0)$ წარმოებულის არსებობას და

$$\lambda^{(1)}(t_0) = \lambda'(t_0) \tag{6}$$

ტოლობას.

მაგალითის სახით განვიხილოთ

$$\omega(t) = \begin{cases} -t, & \text{როცა } t \in (-\infty, 0], \\ t^2 \sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right), & \text{როცა } t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

ფუნქცია, რომელიც დიფერენცირებადია ყველა $t \neq 0$ წერტილზე. ამასთან ერთად, $\omega'_-(0) = -1$ და $\omega'_+(0) = 0$. ამიტომ, (4) ფორმულის ძალით გვაქვს $\omega^{(1)}(0) = -1/2$ ტოლობა. მაშასადამე, $\omega(t)$ ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია ყველგან.

თუ $\mu(t)$ ფუნქცია ლუწია t_0 წერტილის მიმართ (იხ. თავი I, 11.1), მაშინ ადგილი აქვს $\mu^{(1)}(t_0) = 0$ ტოლობას, მიუხედავად იმისა, არსებობს თუ არა $\mu'(t_0)$ წარმოებული. მაგალითად, ასეთია $\nu(t) = |t|$

ფუნქცია $t = 0$ წერტილზე, რომლისთვისაც (4)-ის ძალით გვაქვს $\nu^{(1)}(0) = 0$ ტოლობა.

წინადადება 7.1.2. ვთქვათ, $\lambda(t)$ ფუნქცია კენტია t_0 წერტილის მიმართ. მაშინ სასრული $\lambda'(t_0)$ წარმოებულის არსებობისთვის აუცილებელი და საკმარისია არსებობდეს სასრული სიმეტრიული $\lambda^{(1)}(t_0)$ წარმოებული. ამასთან, სასრული $\lambda^{(1)}(t_0)$-ის არსებობა იწვევს $\lambda'(t_0) = \lambda^{(1)}(t_0)$ ტოლობას.

დამტკიცება. აუცილებლობა და აღნიშნული ტოლობა გამომდინარეობს (5) და (4) ტოლობებიდან. საკმარისობის დასადგენად გავითვალისწინოთ, რომ $\lambda(t_0) = 0$, $\lambda(t_0 - h) = -\lambda(t_0 + h)$ და (1) ტოლობის შეფარდება გადავწეროთ

$$\frac{\lambda(t_0 + h) - \lambda(t_0) + \lambda(t_0 + h) - \lambda(t_0)}{2h} = \frac{\lambda(t_0 + h) - \lambda(t_0)}{h}$$

სახით. აქედან ვიღებთ $\lambda^{(1)}(t_0) = \lambda'(t_0)$ ტოლობას. წინადადება დამტკიცებულია.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ სიმეტრიული წარმოებულისთვის მართებულია ჩვეულებრივი გაწარმოების ცნობილი წესები ჯამისთვის, ნამრავლისთვის და შეფარდებისთვის. მაგრამ, ადგილი არ აქვს დარბუს (იხ. 1.12) და როლლის თეორემებს ([71], გვ. 379). მართლაც, განვიხილოთ $[0, 1]$ სეგმენტზე ისეთი უწყვეტი $\omega(x)$, $\omega(0) = 0 = \omega(1)$, ფუნქცია, რომელსაც $(0, 1/2)$ ინტერვალზე ექნება დადებითი და $(1/2, 1)$ ინტერვალზე უარყოფითი წარმოებული. გარდა ამისა, $x = 1/2$ წერტილზე ჰქონდეს 1-ის ტოლი მარცხენა წარმოებული და ნულის ტოლი მარჯვენა წარმოებული. მაშინ (4) ტოლობის ძალით $\omega^{(1)}(1/2) = \frac{1}{2}$. ამრიგად, $\omega(x)$ ფუნქციას $(0, 1)$ ინტერვალზე აქვს ნულისგან განსხვავებული სიმეტრიული წარმოებული. მაშასადამე, ადგილი არ აქვს როლლის თეორემას. ამასთან, $\omega^{(1)}(x)$ არ იღებს შუალედურ 0 მნიშვნელობას. ამრიგად, $\omega(x)$ ფუნქციის სიმეტრიული წარმოებულისთვის ადგილი არ აქვს დარბუს თეორემასაც.

ცნობილია, რომ ზომადი ფუნქციის სიმეტრიული წარმოებული არ შეიძლება უსასრულობა იყოს დადებითი ზომის სიმრავლეზე ([24], გვ. 130).

გარდა ამისა, არსებობს გარკვეული კავშირი სიმეტრიულ წარმოებულსა და φ-წარმოებულს შორის ([56]).

2. ბუნებრივია შემდეგი ამოცანა: დახასიათდეს სიმრავლე ყველა იმ წერტილისა, რომლებზედაც სიმეტრიული წარმოებულის არსებობა იწვევს ჩვეულებრივი წარმოებულის არსებობას.

თეორემა 7.1.1 ([71], გვ. 381)**.** თუ ზომად $\lambda(t)$ ფუნქციას ზომადი E სიმრავლის ყოველ წერტილზე აქვს სასრული სიმეტრიული წარმოებული, მაშინ $\lambda(t)$ ფუნქციას E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილზე აქვს სასრული ჩვეულებრივი წარმოებული და იგი ტოლია სიმეტრიული წარმოებულის იმავე წერტილზე.

ხინჩინის ამ თეორემის გაუმჯობესებაა შემდეგი

თეორემა 7.1.2 ([84], გვ. 266)**.** ვთქვათ, ზომად f ფუნქციას ზომადი E სიმრავლის ყოველ x წერტილზე აქვს სასრული სიმეტრიული $f^{(1)}(x)$ წარმოებული. მაშინ სასრული ჩვეულებრივი $f'(x)$ წარმოებული არსებობს ყოველ $x \in E \setminus e$ წერტილზე, სადაც e არის **σ-ფოროვანი სიმრავლე** (σ-ფოროვანი სიმრავლე უფრო მწირია, ვიდრე პირველი კატეგორიის ნულზომიანი სიმრავლე ([36], გვ. 357–258).

აღვნიშნოთ ხინჩინის კიდევ ერთი თეორემა თითქმის ყველგან სასრული წარმოებულის არსებობის საკმარისი პირობის შესახებ, რომელშიც ფიგურირებს სიმეტრიული წარმოებულისთვის საჭირო შეფარდება და ეს თეორემა აძლიერებს 1.17.2 შედეგს.

თეორემა 7.1.3 ([128], გვ. 217)**.** ზომად $\lambda(t)$ ფუნქციას სასრული წარმოებული აქვს თითქმის ყველა იმ t წერტილზე, რომლისთვისაც შესრულებულია

$$\varlimsup_{h\to 0} \frac{\lambda(t+h)-\lambda(t-h)}{2h} < +\infty \tag{7}$$

პირობა – სასრულია **ზედა სიმეტრიული** $\overline{\lambda}^{(1)}(t)$ **წარმოებული**.

გარდა ამისა, მართებულია შემდეგი ორი თეორემაც.

თეორემა 7.1.4 ([71], გვ. 380)**.** ინტერვალზე დადებითი სიმეტრიული წარმოებულის მქონე უწყვეტი ფუნქცია ზრდადია ამ ინტერვალზე.

თეორემა 7.1.5 ([71], გვ. 381)**.** ინტერვალზე ნულოვანი სიმეტრიული წარმოებულის მქონე უწყვეტი ფუნქცია მუდმივია იმავე ინტერვალზე.

შევნიშნოთ, რომ ხინჩინის თეორემა 7.1.1-ს ანალოგი აქვს L^p აზრით წარმოებულსა და L^p აზრით სიმეტრიულ წარმოებულს შორის კავშირის შესახებ ([178], [58], გვ. 315).

კიდევ ერთი თეორემა სიმეტრიული და ჩვეულებრივი წარმოებულების ურთიერთმიმართების შესახებ.

თეორემა 7.1.6 ([81])**.** ვთქვათ, $f(x)$ და $f^{(1)}(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია ღია (a, b) ინტერვალზე. მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ჩვეულებრივი $f'(x)$ წარმოებული და $f'(x) = f^{(1)}(x)$, $x \in (a, b)$.

შენიშვნა 7.1.1. ცალკე აღებული ერთი წერტილისთვის 7.1.6 თეორემა მცდარია. ამას ადასტურებს შემდეგი

მაგალითი 7.1.1 ([117])**.** არსებობს $x = 0$ წერტილზე უწყვეტი $F(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც $F^{(1)}(x)$ უწყვეტია ყველგან, მაგრამ $F'(0)$ არ არსებობს. ფუნქცია F განვსაზღვროთ $F(\pm\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ ტოლობებით ყოველი მთელი დადებითი n-თვის და $F(x) = 0$ ყველა დანარჩენი x-თვის. მაშინ $F^{(1)}(x) = 0$ ყველა x-თვის და F უწყვეტია $x = 0$ წერტილზე. ამასთან ერთად, $F'(0)$ არ არსებობს ($\overline{F}'(0) = 1$, $\underline{F}'(0) = -1$).

ამ მაგალითთან დაკავშირებით მართებულია შემდეგი

თეორემა 7.1.7 ([81])**.** ვთქვათ სიმეტრიული $f^{(1)}(x)$ წარმოებული უწყვეტია a წერტილზე, ხოლო $f(x)$ ფუნქცია კი უწყვეტია

a წერტილის მიდამოში. მაშინ a წერტილზე არსებობს ჩვეულებრივი $f'(a)$ წარმოებული და $f'(a) = f^{(1)}(a)$.

დამტკიცებულია დებულებები ლიპშიცის პირობისა და სიმეტრიული წარმოებულის ურთიერთმიმართების შესახებ ([81], [130]).

სახელდობრ, თუ (a, b) ინტერვალზე f უწყვეტია და $f^{(1)}$ კი შემოსაზღვრული, მაშინ ([81])

$$|f(x) - f(t)| \leq A|x - t|, \ \ x \in (a, b), \ \ t \in (a, b).$$

საჭიროა აღინიშნოს, რომ არის ისეთი შემთხვევაც, როცა სიმეტრიული წარმოებულის არსებობა რაიმე წერტილზე იწვევს მისი ტოლი ჩვეულებრივი წარმოებულის არსებობას იმავე წერტილზე. სახელდობრ, მართებულია შემდეგი (იხ. თავი II, განსაზღვრა 1.9.1)

წინადადება 7.1.3 ([41], გვ. 475)**.** x_0 წერტილზე სიმეტრიული $f^{(1)}(x_0)$ წარმოებულის მქონე $f(x)$ ფუნქციას ჩვეულებრივი $f'(x_0)$ წარმოებული რომ ჰქონდეს, აუცილებელია და საკმარისი $f(x)$-ის გლუვობა x_0 წერტილზე და ასეთ პირობებში მართებულია $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$ ტოლობა.

დამტკიცება. ეს გამომდინარეობს ტოლობიდან

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = \\ = 2\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

შედეგი 7.1.1. 1.9.3 შედეგში ნახსენები $g(x)$ ფუნქცია სიმეტრიულადაც არადიფერენცირებადია თითქმის ყველგან.

7.2. ლაგრანჟის ფორმულა სიმეტრიული წარმოებულისთვის

თეორემა 7.2.1 ([81])**.** ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და (a, b) ინტერვალის ყოველ წერტილზე არსებობს სასრული სიმეტრიული $f^{(1)}(x)$ წარმოებული. მაშინ არსებობს ისეთი $x_1 \in$

(a,b) და $x_2 \in (a,b)$ წერტილები, რომ

$$f^{(1)}(x_2) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f^{(1)}(x_1). \qquad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ (1) დამოკიდებულებათა გავრცელება ზედა და ქვედა სიმეტრიულ $\overline{f}^{(1)}$ და $\underline{f}^{(1)}$ წარმოებულებზე მოცემულია [130] და [152] ნაშრომებში.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 7.2.2 ([130])**.** ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$-ზე და ყოველ $x \in (a,b)$ წერტილზე არსებობს სასრული სიმეტრიული $f^{(1)}(x)$ წარმოებული, რომელსაც (a,b)-ზე აქვს დარბუს თვისება (იხ. [6], გვ. 302). მაშინ:

1) არსებობს ისეთი $c_1 \in (a,b)$ წერტილი, რომ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^{(1)}(c_1), \ \ a < c_1 < b; \qquad (2)$$

2) არსებობს ისეთი $c_2 \in (a,b)$ წერტილი, რომ

$$\frac{f(c_2)-f(a)}{b-c_2} = f^{(1)}(c_2), \ \ a < c_2 < b. \qquad (3)$$

შენიშვნა 7.2.1. თუ 7.2.2 თეორემაში დარბუს თვისების ნაცვლად იქნება უწყვეტობა, მაშინ 7.1.6 თეორემის ძალით (a,b)-ში არსებობს სასრული ჩვეულებრივი $f'(x)$ წარმოებული და (2) და (3) ტოლობები მიიღებენ 1.5.(1) და 1.6.(2) სახეებს.

7.3. სიმეტრიული დიფერენცირებადობა ([147])

ვთქვათ, ორი ცვლადის სასრული $\varphi(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $p_0 = (x_0, y_0)$ წერტილის მიდამოში.

განსაზღვრა 7.3.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის x **ცვლადით სიმეტრიული კერძო წარმოებული** p_0 **წერტილზე**, სიმბოლურად

$\varphi_x^{(1)}(p_0)$, ეწოდება

$$\varphi_x^{(1)}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h, y_0) - \varphi(x_0-h, y_0)}{2h} \tag{1}$$

ზღვარს, თუ იგი არსებობს სასრული ან უსასრულო.

ანალოგიურად განისაზღვრება φ ფუნქციის y **ცვლადით სიმეტრიული კერძო წარმოებული** p_0 **წერტილზე**:

$$\varphi_y^{(1)}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{\varphi(x_0, y_0+k) - \varphi(x_0, y_0-k)}{2k}\,. \tag{2}$$

თუ φ ფუნქციას p_0 წერტილზე აქვს x-ით კერძო $\varphi'_x(p_0)$ წარმოებული, მაშინ φ-ს p_0 წერტილზე აქვს $\varphi_x^{(1)}(p_0)$ და $\varphi_x^{(1)}(p_0)=\varphi'_x(p_0)$.

ანალოგიური მდგომარეობა გვაქვს y ცვლადის მიმართაც.

ცხადია, რომ $\varphi_x^{(1)}(p_0)$-ის სასრულობა იწვევს φ ფუნქციის x ცვლადის მიმართ სიმეტრიულ უწყვეტობას p_0 წერტილზე (იხ. თავი I, 11.2).

ამასთან ერთად, არსებობს მოცემულ წერტილზე უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც ამ წერტილზე არ აქვს სასრული სიმეტრიული კერძო წარმოებულები. ასეთი თვისებისაა, მაგალითად, $(0,0)$ წერტილზე $\psi(x,y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ ფუნქცია.

განსაზღვრა 7.3.2. φ ფუნქციას ეწოდება **სიმეტრიულად დიფერენცირებადი** p_0 წერტილზე, თუ არსებობენ ისეთი სასრული A და B რიცხვები, რომ

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varphi(x_0+h, y_0+k) - \varphi(x_0-h, y_0-k) - 2Ah - 2Bk}{|h|+|k|} = 0. \tag{3}$$

ასეთ შემთხვევაში, φ ფუნქციის **სიმეტრიული დიფერენციალი** p_0 წერტილზე ეწოდება $Ah+Bk$ გამოსახულებას და ვწერთ:

$$d^{sym}\varphi(x_0, y_0) = Ah + Bk. \tag{4}$$

ამასთან ერთად, A და B მუდმივებს ეწოდებათ p_0 წერტილზე $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **სიმეტრიული დიფერენციალის კოეფიციენტები**.

წინადადება 7.3.1. თუ φ ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია p_0 წერტილზე, მაშინ $\varphi_x^{(1)}(p_0)$ და $\varphi_y^{(1)}(p_0)$ სასრულებია და ადგილი აქვს

$$d^{sym}\varphi(p_0) = \varphi_x^{(1)}(p_0)dx + \varphi_y^{(1)}(p_0)dy \tag{5}$$

ტოლობას. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. (3) ტოლობიდან $k = 0$ შემთხვევისთვის გამომდინარე ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\lim_{h\to 0} \frac{2h}{|h|} \cdot \frac{\varphi(x_0+h, y_0) - \varphi(x_0-h, y_0) - 2Ah}{2h} = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$\varphi_x^{(1)}(p_0) = A \tag{6}$$

ტოლობა.

ანალოგიურად მიიღება

$$\varphi_y^{(1)}(p_0) = B. \tag{7}$$

ამრიგად, სიმეტრიული $d^{sym}\varphi(p_0)$ დიფერენციალის კოეფიციენტები წარმოადგენენ φ ფუნქციის სიმეტრიულ კერძო წარმოებულებს სიმეტრიული დიფერენცირებადობის p_0 წერტილზე, რასაც ადგილი არ აქვს აპროქსიმატული დიფერენციალისთვის ([54], გვ. 434).

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა ჩანს

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{x^2+y^2}, & \text{როცა } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{როცა } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{8}$$

ფუნქციის მაგალითზე, რომლისთვისაც $u_x^{(1)}(0,0) = 0 = u_y^{(1)}(0,0)$ და

$$\frac{u(h,k) - u(-h,-k) - 2h\cdot 0 - 2k\cdot 0}{|h|+|k|} =$$

$$= \frac{2h|k|}{(h^2+k^2)(|h|+|k|)} \to +\infty,$$

როცა $0 < k = h \to 0$.

თეორემა 7.3.1. φ ფუნქციის დიფერენცირებადობა p_0 წერტილზე იწვევს φ-ს სიმეტრიულ დიფერენცირებადობას იმავე წერტილზე და $d\varphi(p_0) = d^{sym}\varphi(p_0)$ ტოლობას. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. φ ფუნქციის p_0 წერტილზე დიფერენცირებადობის გამო სასრულია $\varphi'_x(p_0)$ და $\varphi'_y(p_0)$ კერძო წარმოებულები. ამიტომ სასრულია $\varphi^{(1)}_x(p_0)$ და $\varphi^{(1)}_y(p_0)$.

მაშასადამე, შეგვიძლია განვიხილოთ

$$\frac{\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)-2h\varphi^{(1)}_x(p_0)-2k\varphi^{(1)}_y(p_0)}{|h|+|k|}$$

სასრული სიდიდე, რომელიც წარმოვადგინოთ ასე:

$$\frac{\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0,y_0)-h\varphi'_x(x_0,y_0)-k\varphi'_y(x_0,y_0)}{|h|+|k|} -$$

$$-\frac{\varphi(x_0-h,y_0-k)-\varphi(x_0,y_0)-(-h)\varphi'_x(x_0,y_0)-(-k)\varphi'_y(x_0,y_0)}{|-h|+|-k|}.$$

φ ფუნქციის p_0 წერტილზე დიფერენცირებადობის გამო, თითოეული ეს შეფარდება ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h,k) \to (0,0)$ (იხ. 3.5.(1) ტოლობა).

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა გამომდინარეობს $(0,0)$ წერტილზე არადიფერენცირებადი (იხ. ტოლობა 3.4.(4))

$$\mu(x,y) = \sqrt{|x|\cdot|y|} \tag{9}$$

ფუნქციის მაგალითზე, რომლისთვისაც $\mu'_x(0,0) = \mu^{(1)}_x(0,0) = 0 = \mu'_y(0,0) = \mu^{(1)}_y(0,0)$ და $\mu(h,k) - \mu(-h,-k) = 0$. ამიტომ $\mu(x,y)$

ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილზე და

$$d^{sym}\mu(0,0)=0. \tag{10}$$

წინადადება 7.3.2. მოცემულ წერტილზე სიმეტრიულად დიფერენცირებადი ფუნქცია სიმეტრიულად უწყვეტია იმავე წერტილზე. ამავე დროს, არსებობს $(0,0)$ წერტილზე სიმეტრიულად არადიფერენცირებადი ფუნქცია, რომელიც $(0,0)$-ზე სიმეტრიულად უწყვეტია და ამ წერტილზე მას აქვს სასრული სიმეტრიული კერძო წარმოებულები.

დამტკიცება. φ ფუნქციის სიმეტრიული დიფერენცირებადობა $p_0=(x_0,y_0)$ წერტილზე იწვევს $\varphi_x^{(1)}(p_0)$ და $\varphi_y^{(1)}(p_0)$ სიდიდეების სასრულობას და (6), (7) ტოლობები უნდა გამოვიყენოთ (3) ტოლობაში. ამიტომ ნულისკენ ისწრაფვის

$$\begin{gathered}\Big|\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)\Big|\le\\ \le\Big|\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)-\\ -2h\varphi_x^{(1)}(x_0,y_0)-2k\varphi_y^{(1)}(x_0,y_0)\Big|+\\ +\Big|2h\varphi_x^{(1)}(x_0,y_0)+2k\varphi_y^{(1)}(x_0,y_0)\Big|\end{gathered}$$

უტოლობის მარჯვენა მხარე, როცა $(h,k)\to(0,0)$. ეს ნიშნავს φ ფუნქციის სიმეტრიულ უწყვეტობას (x_0,y_0) წერტილზე.

წინადადების მეორე ნაწილის ილუსტრაციისთვის განვიხილოთ

$$v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{|x|+|y|}, & \text{როცა } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{როცა } (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{11}$$

ფუნქცია, რომლის სიმეტრიული უწყვეტობა $(0,0)$ წერტილზე გამომდინარეობს

$$\Big|v(h,k)-v(-h,-k)\Big|=\frac{2|h|\cdot|k|}{|h|+|k|}\to0,\ \ (h,k)\to(0,0),$$

დამოკიდებულებიდან.

ამავე დროს, $v_x^{(1)}(0,0) = 0 = v_y^{(1)}(0,0)$ და

$$\frac{v(h,k) - v(-h,-k) - 2hv_x^{(1)}(0,0) - 2kv_y^{(1)}(0,0)}{|h| + |k|} =$$
$$= \frac{2|h|\cdot|k|}{(|h|+|k|)^2} = \frac{1}{2}$$

კერძო $|k| = |h|$ შემთხვევაში. ამრიგად, v ფუნქცია არ არის სიმეტრიულად დიფერენცირებადი $(0,0)$ წერტილზე.

წინადადება 7.3.3. არსებობს $(0,0)$ წერტილზე სასრული სიმეტრიული კერძო წარმოებულების მქონე ფუნქცია, რომელიც არ არის სიმეტრიულად უწყვეტი $(0,0)$-ზე.

დამტკიცება. ასეთია თავი I-დან 11.2.(5) ტოლობით, იგივე (8) ტოლობით, მოცემული $u(x,y)$ ფუნქცია.

7.4. სიმეტრიული ძლიერი კერძო წარმოებული

განსაზღვრა 7.4.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის x **ცვლადით სიმეტრიული ძლიერი კერძო წარმოებული** (x_0,y_0) წერტილზე, სიმბოლურად $\varphi_{[x]}^{(1)}(x_0,y_0)$, ეწოდება

$$\varphi_{[x]}^{(1)}(x_0,y_0) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varphi(x_0+h, y_0+k) - \varphi(x_0-h, y_0+k)}{2h} \quad (1)$$

ზღვარს, თუ იგი არსებობს სასრული ან უსასრულო.

ანალოგიურად, $\varphi(x,y)$ ფუნქციის y **ცვლადით სიმეტრიული ძლიერი კერძო წარმოებული** (x_0,y_0) წერტილზე ეწოდება

$$\varphi_{[y]}^{(1)}(x_0,y_0) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varphi(x_0+h, y_0+k) - \varphi(x_0+h, y_0-k)}{2k} \quad (2)$$

ზღვარს.

წინადადება 7.4.1. სასრული $\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0)$-ის არსებობიდან გამომდინარეობს სასრული $\varphi^{(1)}_{x}(x_0,y_0)$-ის არსებობა და $\varphi^{(1)}_{x}(x_0,y_0)=\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0)$ ტოლობა. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. ამ წინადადების პირველი ნაწილი მიიღება (1) ტოლობაში კერძო $k=0$ მნიშვნელობის ჩასმით.

წინადადების მეორე ნაწილის ილუსტრაცია მოვახდინოთ

$$w(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{როცა } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{როცა } (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{3}$$

ფუნქციაზე $(0,0)$ წერტილისთვის. გვაქვს $w^{(1)}_x(0,0)=0=w^{(1)}_y(0,0)$. $w^{(1)}_{[x]}(0,0)$-ის არსებობის შემთხვევაში იგი ტოლი უნდა იყოს

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{w(h,k)-w(-h,k)}{2h}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k}{h^2+k^2}=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{როცა } k=0,\ \ h\to 0,\\ +\infty, & \text{როცა } k=h\to 0+\end{cases}$$

ზღვრის. ამრიგად, $w^{(1)}_{[x]}(0,0)$ არ არსებობს. არ არსებობს აგრეთვე $w^{(1)}_{[y]}(0,0)$.

ცხადია, რომ წინადადება 7.4.1 მართებულია y ცვლადის მიმართაც.

თეორემა 7.4.1. სასრული $\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0)$ და $\varphi^{(1)}_{[y]}(x_0,y_0)$ სიდიდეების არსებობა იწვევს $\varphi(x,y)$ ფუნქციის სიმეტრიულ დიფერენცირებადობას (x_0,y_0) წერტილზე და ადგილი აქვს

$$d^{sym}\varphi(x_0,y_0)=\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0)dx+\varphi^{(1)}_{[y]}(x_0,y_0)dy \tag{4}$$

ტოლობას. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. გვაქვს ტოლობა

$$\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)-$$
$$-2h\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0)-2k\varphi^{(1)}_{[y]}(x_0,y_0)=$$
$$=\Big[\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0+k)-2h\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0)\Big]+$$
$$+\Big[\varphi(x_0-h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)-2k\varphi^{(1)}_{[y]}(x_0,y_0)\Big]\equiv$$
$$\equiv M+N. \tag{5}$$

$\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0)$-ის სასრულობის გამო ყოველ $\varepsilon>0$ რიცხვს შეესაბამება $\delta_1=\delta_1(\varepsilon,x_0,y_0,\varphi)>0$ რიცხვი ისეთი, რომ $|M|<2\varepsilon|h|$, როცა $|h|<\delta_1$ და $|k|<\delta_1$. ასევე, $|N|<2\varepsilon|k|$, როცა $|h|<\delta_2$ და $|k|<\delta_2$. აქედან გამომდინარეობს, რომ (5) ტოლობის მარცხენა მხარის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია $2\varepsilon(|h|+|k|)$ სიდიდეზე, როცა $|h|<\delta$ და $|k|<\delta$, სადაც $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

მაშასადამე, $\varphi(x,y)$ ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილზე.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა შეიძლება შემოწმდეს (3) ტოლობით მოცემულ $w(x,y)$ ფუნქციაზე, რომლისთვისაც $w^{(1)}_{[x]}(0,0)$ და $w^{(1)}_{[y]}(0,0)$ არ არსებობენ. ამავე დროს, $w^{(1)}_x(0,0)=0=w^{(1)}_y(0,0)$ და

$$\frac{w(h,k)-w(-h,-k)-2hw^{(1)}_x(0,0)-2kw^{(1)}_y(0,0)}{|h|+|k|}=0.$$

მაშასადამე, $w(x,y)$ ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილზე და

$$d^{sym}w(0,0)=0. \tag{6}$$

თეორემის დამტკიცება დამთავრებულია.

განსაზღვრა 7.4.2. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **სიმეტრიული ძლიერი გრადიენტი** (x_0,y_0) წერტილზე, სიმბოლურად $\operatorname{strgrad}^{(1)}\varphi(x_0,y_0)$,

ეწოდება

$$\operatorname{strgrad}^{(1)}\varphi(x_0,y_0)=\big(\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0),\varphi^{(1)}_{[y]}(x_0,y_0)\big) \tag{7}$$

სიდიდეს, თუკი არსებობს $\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0)$ და $\varphi^{(1)}_{[y]}(x_0,y_0)$.

ახლა, 7.4.1 თეორემა ასე ჩამოყალიბდება.

თეორემა 7.4.2. $\operatorname{strgrad}^{(1)}\varphi(x_0,y_0)$-ის სასრულობა იწვევს $\varphi(x,y)$ ფუნქციის სიმეტრიულ დიფერენცირებადობას (x_0,y_0) წერტილზე და (4) ტოლობას. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

7.4.2 თეორემის პირველი ნაწილის ფონზე ისმება კითხვა:

$\operatorname{strgrad}^{(1)}\varphi(x_0,y_0)$-ის სასრულობა ხომ არ იწვევს $\varphi(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობას (x_0,y_0) წერტილზე.

პასუხი უარყოფითია. უფრო მეტი, მართებულია შემდეგი

თეორემა 7.4.3. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა (იხ. 3.5) (x_0,y_0) წერტილზე და $\operatorname{strgrad}^{(1)}\varphi(x_0,y_0)$-ის სასრულობა $\varphi(x,y)$ ფუნქციის ურთიერთარასადარი თვისებებია (x_0,y_0) წერტილზე.

დამტკიცება. 3.4.(4) ტოლობით განსაზღვრული $\mu(x,y)$ ფუნქცია არადიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილზე და, ამავე დროს, $\mu^{(1)}_{[x]}(0,0)=0=\mu^{(1)}_{[y]}(0,0)$.

მეორე მხრივ,

$$F(x,y)=x^{1/3}y^{4/3}+x^{4/3}y^{1/3} \tag{8}$$

ფუნქცია დიფერენცირებადია* $(0,0)$ წერტილზე, რადგანაც $F'_x(0,0)=0=F'_y(0,0)$ და

$$\Big|\frac{F(h,k)-F(0,0)-hF'_x(0,0)-kF'_y(0,0)}{|h|+|k|}\Big|\le |h|^{1/3}\cdot|k|^{1/3}\to 0,$$

როცა $(h,k)\to(0,0)$.

---

*ეს გამომდინარეობს წინადადება 3.4.1-დანაც.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\operatorname{strgrad}^{(1)} F(0,0)$ არ არსებობს. მართლაც, $F^{(1)}_{[x]}(0,0)$-ის არსებობის შემთხვევაში იარსებებდა

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h>0}} \frac{F(h,k)-F(-h,k)}{2h} = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h>0}} \left(\frac{k^{4/3}}{h^{2/3}} + h^{1/3}k^{1/3}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ h>0}} \left(\frac{k^2}{h}\right)^{2/3} = \begin{cases} 1, & \text{როცა } k^2 = h, \\ 0, & \text{როცა } k = h \end{cases}$$

ზღვარიც. ანალოგიურად დადგინდება $F^{(1)}_{[y]}(0,0)$-ის არარსებობა. თეორემა დამტკიცებულია.

7.5. სიმეტრიული კუთხური კერძო წარმოებული

განსაზღვრა 7.5.1. თუ ყოველი $c>0$ მუდმივისთვის არსებობს c-გან დამოუკიდებელი

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ |k|\le c|h|}} \frac{\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0+k)}{2h} \tag{1}$$

ზღვარი, მაშინ მას ეწოდება $\varphi(x,y)$ ფუნქციის x **ცვლადით სიმეტრიული კუთხური კერძო წარმოებული** (x_0,y_0) წერტილზე და აღინიშნება $\varphi^{(1)}_{\widehat{x}}(x_0,y_0)$ სიმბოლოთი.

ანალოგიურად,

$$\varphi^{(1)}_{\widehat{y}}(x_0,y_0) = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ |h|\le \ell|k|}} \frac{\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0+h,y_0-k)}{2k}, \tag{2}$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს ყოველი $\ell>0$ მუდმივისთვის და არაა დამოკიდებული ℓ-ზე.

წინადადება 7.5.1. $\varphi^{(1)}_{[x]}(x_0,y_0)$-ის არსებობიდან გამომდინარეობს $\varphi^{(1)}_{\widehat{x}}(x_0,y_0)$-ის არსებობა და მათი ტოლობა. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. წინადადების პირველი ნაწილი აშკარაა. მეორე ნაწილი შევამოწმოთ ფუნქციაზე

$$\phi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{y}+\dfrac{y^4}{x}\,, & \text{როცა } x\cdot y\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x\cdot y=0.\end{cases} \tag{3}$$

გვაქვს

$$\frac{\phi(h,k)-\phi(-h,k)}{2h}=\frac{k^4}{h^2}\,. \tag{4}$$

$|k|\le c|h|$ პირობის შესრულების შემთხვევაში (4) შეფარდების აბსოლუტური მნიშვნელობა არ აღემატება c^4h^2 სიდიდეს, რომელიც ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $h\to 0$. ეს ნიშნავს $\phi^{(1)}_{\widehat{x}}(0,0)=0$ ტოლობას.

თუ (4) ტოლობაში ჩავსვმათ $h=k^2$, მაშინ შეფარდება უტოლდება 1-ს, ხოლო ჩასმისას $h=k^4$ შეფარდება ისწრაფვის $+\infty$-კენ, როცა $k\to 0$. ეს ნიშნავს, რომ $\varphi^{(1)}_{[x]}(0,0)$ არ არსებობს.

განსაზღვრა 7.5.2. $\varphi^{(1)}_{\widehat{x}}(x_0,y_0)$ და $\varphi^{(1)}_{\widehat{y}}(x_0,y_0)$ სიდიდეების არსებობის შემთხვევაში, $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **სიმეტრიული კუთხური გრადიენტი** (x_0,y_0) წერტილზე შემოვიღოთ

$$\operatorname{anggrad}^{(1)}\varphi(x_0,y_0)=\big(\varphi^{(1)}_{\widehat{x}}(x_0,y_0),\varphi^{(1)}_{\widehat{y}}(x_0,y_0)\big) \tag{5}$$

ტოლობით.

ახლა წინადადება 7.5.1-დან მიიღება

წინადადება 7.5.2. $\operatorname{strgrad}^{(1)}\varphi(x_0,y_0)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს $\operatorname{anggrad}^{(1)}\varphi(x_0,y_0)$-ის სასრულობა და მათი ტოლობა. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

წინადადება 7.5.3. $\varphi^{(1)}_{\widehat{x}}(x_0,y_0)$-ის არსებობიდან გამომდინარეობს $\varphi^{(1)}_{x}(x_0,y_0)$-ის არსებობა და მათი ტოლობა. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

დამტკიცება. (1) ზღვრის არსებობიდან გამომდინარეობს მისი არსებობა $k = 0$ კერძო შემთხვევაშიც, რაც ტოლია $\varphi_x^{(1)}(x_0, y_0)$-ის.

შებრუნებული მტკიცების მცდარობა ჩანს

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{როცა } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{როცა } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{6}$$

ფუნქციის მაგალითზე. ცხადია, რომ $\psi_x^{(1)}(0,0) = 0 = \psi_y^{(1)}(0,0)$.

თუკი

$$\frac{\psi(h,k) - \psi(-h,k)}{2h} = \frac{k}{|h|+|k|} \tag{7}$$

შეფარდებას ექნებოდა $c > 0$ მუდმივისგან დამოუკიდებელი ზღვარი $|k| \leq c|h|$ პირობის შესრულებისას, მაშინ იგივე ფაქტს ექნებოდა ადგილი $k = c|h|$ კერძო შემთხვევაშიც. მაგრამ ამ შემთხვევაში (7) შეფარდება უტოლდება $c/(1+c)$ სიდიდეს. ეს ნიშნავს $\psi_{\widehat{x}}^{(1)}(0,0)$-ის არარსებობას. წინადადება დამტკიცებულია.

თეორემა 7.5.1. სიმეტრიული დიფერენცირებადობა და სიმეტრიული კუთხური გრადიენტის სასრულობა, ურთიერთარასადარი თვისებებია წერტილზე.

დამტკიცება. 7.4.1 თეორემის დამტკიცებისას დადგენილ იქნა, რომ 7.4.(3) ტოლობით მოცემული $w(x,y)$ ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია $(0,0)$ წერტილზე და $d^{sym}w(0,0) = 0$.

ახლა ვაჩვენოთ $w_{\widehat{x}}^{(1)}(0,0)$-ის და $w_{\widehat{y}}^{(1)}(0,0)$-ის არარსებობა. მაგალითად,

$$\frac{w(h,k) - w(-h,k)}{2h} = \frac{k}{h^2+k^2}$$

შეფარდება ისწრაფვის $+\infty$-კენ, როცა $0 < h = k \to 0$ და ისწრაფვის $-\infty$-კენ, როცა $0 > -h = k \to 0$. ამიტომ $w_{\widehat{x}}^{(1)}(0,0)$ არ არსებობს. ასევე არ არსებობს $w_{\widehat{y}}^{(1)}(0,0)$.

შემდეგ, (3) ტოლობით განსაზღვრული $\phi(x,y)$ ფუნქციისთვის $\operatorname{anggrad}^{(1)}\phi(0,0)$ სასრულია, როგორც ეს 7.5.1 წინადადების დამტკიცებისას ვნახეთ. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\phi(x,y)$ არ არის სიმეტრიულად დიფერენცირებადი $(0,0)$ წერტილზე. რადგანაც $\phi_x^{(1)}(0,0)=0=\phi_y^{(1)}(0,0)$, ამიტომ

$$\frac{\phi(h,k)-\phi(-h,k)-2h\phi_x^{(1)}(0,0)-2k\phi_y^{(1)}(0,0)}{|h|+|k|}= \\ =\frac{2(h^5+k^5)}{hk(|h|+|k|)} \tag{8}$$

შეფარდება ისწრაფვის 2-სკენ, როცა $k^3=h\to 0$. მაშასადამე, $\phi(x,y)$ არ არის სიმეტრიულად დიფერენცირებადი $(0,0)$ წერტილზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 7.5.1. საინტერესოა 7.5.1 თეორემის შედარება 3.5.1 თეორემასთან.

თეორემა 7.5.2. თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია სიმეტრიულად დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილზე და არსებობს სასრული $\varphi_{[x]}^{(1)}(x_0,y_0)$ (ან $\varphi_{[y]}^{(1)}(x_0,y_0)$), მაშინ არსებობს სასრული $\varphi_{\widehat{y}}^{(1)}(x_0,y_0)$ (შესაბამისად $\varphi_{\widehat{x}}^{(1)}(x_0,y_0)$).

დამტკიცება. გვაქვს ტოლობა

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0+h,y_0-k)-2k\varphi_y^{(1)}(x_0,y_0)=\\ &\quad=\Big[\varphi(x_0+h,y_0+k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)-\\ &\qquad\qquad-2h\varphi_x^{(1)}(x_0,y_0)-2k\varphi_y^{(1)}(x_0,y_0)\Big]-\\ &-\Big[\varphi(x_0+h,y_0-k)-\varphi(x_0-h,y_0-k)-2h\varphi_x^{(1)}(x_0,y_0)\Big]\equiv\\ &\equiv A-B.\end{aligned}$$

ავიღოთ რაიმე $c > 0$ მუდმივი და $\varepsilon > 0$ კი იყოს ნებისმიერად მცირე რიცხვი. φ ფუნქციის (x_0, y_0) წერტილზე სიმეტრიული დიფერენცირებადობის გამო $\varepsilon_1 = \varepsilon/(1+c)$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0, y_0, c) > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $|A| < \varepsilon_1(|h|+|k|)$, როცა $|h| < \delta_1$ და $|k| < \delta_1$. ასევე, ε_1-თვის არსებობს ისეთი $\delta_2 > 0$ რიცხვი, რომ $|B| < 2\varepsilon_1|h|$, როცა $|h| < \delta_2$ და $|k| < \delta_2$. ცხადია, რომ დადებითი $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ რიცხვისთვის გვაქვს

$$\Big|\varphi(x_0+h, y_0+k) - \varphi(x_0+h, y_0-k) - 2k\varphi_y^{(1)}(x_0,y_0)\Big| <$$
$$< 3\varepsilon_1\big(|h|+|k|\big)$$

შეფასება, როცა $|h| < \delta$ და $|k| < \delta$. აქედან ვიღებთ, რომ

$$\Big|\frac{\varphi(x_0+h, y_0+k) - \varphi(x_0+h, y_0-k)}{2k} - \varphi_y^{(1)}(x_0,y_0)\Big| <$$
$$< 2\varepsilon_1\Big(1+\frac{|h|}{|k|}\Big). \tag{9}$$

როცა (h,k) ისწრაფვის $(0,0)$-კენ $|h| \le c|k|$ პირობის დაცვით, მაშინ (9) უტოლობის მარცხენა მხარე ნაკლებია 2ε-ზე. ეს ნიშნავს სასრული $\varphi_{\widehat{y}}^{(1)}(x_0,y_0)$-ის არსებობას, რომელიც $\varphi_y^{(1)}(x_0,y_0)$ რიცხვის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

7.6. სიმეტრიული ძლიერი წარმოებული ([8])

$\varphi(x,y)$ ფუნქციისთვის $p_0 = (x_0, y_0)$ წერტილზე შერეული სიმეტრიული $\Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k)$ სხვაობის (იხ. თავი I, 11.6.(1) ტოლობა) გამოყენებით, შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა 7.6.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **სიმეტრიული ძლიერი წარმოებული** p_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\varphi_s'^{\,sym}(x_0,y_0)$, ეწოდება

$$\varphi_s'^{\,sym}(p_0) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta^{sym}\varphi(p_0; h,k)}{4hk} \tag{1}$$

ზღვარს, თუ ის არსებობს სასრული ან უსასრულო.

ამ ტოლობის მნიშვნელში $4hk$ ნამრავლის მოტივირების მიზნით (x_0, y) წერტილზე x ცვლადით შევადგონოთ φ ფუნქციის სიმეტრიული კერძო წარმოებული (იხ. 7.3.(1) ტოლობა)

$$\partial_x^{(1)} \varphi(x_0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h, y) - \varphi(x_0 - h, y)}{2h} \,. \tag{2}$$

(2) ტოლობის მარცხენა მხარე აღვნიშოთ $\beta(y)$-ით და მისთვის y_0 წერტილზე შევადგინოთ სიმეტრიული წარმოებული

$$\begin{aligned} \beta^{(1)}(y_0) &= \lim_{k \to 0} \frac{\beta(y_0 + k) - \beta(y_0 - k)}{2k} = \\ &= \big(\partial_x^{(1)} \varphi(x_0, y)\big)^{(1)}(y_0) \equiv \partial_y^{(1)} \partial_x^{(1)} \varphi(x_0, y_0). \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\partial_y^{(1)} \partial_x^{(1)} \varphi(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^{sym} \varphi(p_0; h, k)}{4hk} \,. \tag{3}$$

ანალოგიურად მიიღება

$$\partial_x^{(1)} \partial_y^{(1)} \varphi(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \lim_{k \to 0} \frac{\Delta^{sym} \varphi(p_0; h, k)}{4hk} \tag{4}$$

ტოლობა.

ორ უკანასკნელ ტოლობაში იგივე შეფარდება გვაქვს, რაც (1) ტოლობაში.

7.4.(7) ტოლობით განსაზღვრული $\operatorname{strgrad}^{(1)} \varphi(p_0)$-ის გამოყენებით დავამტკიცოთ

თეორემა 7.6.1. $\operatorname{strgrad}^{(1)} \varphi(p_0)$-ის სასრულობა იწვევს

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\Delta^{sym} \varphi(p_0; h, k)}{|h| + |k|} = 0 \tag{5}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. შემოვიღოთ $A = \varphi^{(1)}_{[x]}(p_0)$ და $B = \varphi^{(1)}_{[y]}(p_0)$ აღნიშვნები. ადვილად დავრწმუნდებით

$$\Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k) =$$
$$= \big[\varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0 - h, y_0 - k) - 2Ah - 2Bk\big] -$$
$$- \big[\varphi(x_0 + h, y_0 - k) - \varphi(x_0 - h, y_0 - k) - 2Ah\big] -$$
$$- \big[\varphi(x_0 - h, y_0 + k) - \varphi(x_0 - h, y_0 - k) - 2Bk\big] \qquad (6)$$

ტოლობის სისწორეში. 7.4.2 თეორემის ძალით, $\mathrm{strgrad}^{(1)}\,\varphi(p_0)$-ის სასრულობა იწვევს $\varphi(x, y)$ ფუნქციის სიმეტრიულ დიფერენცირებადობას p_0 წერტილზე, რაც ნიშნავს

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varphi(x_0{+}h, y_0{+}k){-}\varphi(x_0{-}h, y_0{-}k){-}2h\varphi^{(1)}_x(p_0){-}2k\varphi^{(1)}_y(p_0)}{|h| + |k|} =$$
$$= 0 \qquad (7)$$

ტოლობას (იხ. 7.3.2 განსაზღვრა). ამიტომ (6) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველ კვადრატულ ფრჩხილში ჩასმული გამოსახულების აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია $\varepsilon(|h| + |k|)$-ზე, საკმარისად მცირე h და k-თვის. გარდა ამისა, (6) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მეორე და მესამე კვადრატული ფრჩხილების აბსოლუტური მნიშვნელობანი ნაკლებია $\varepsilon|h|$-ზე და $\varepsilon|k|$-ზე, შესაბამისად. მაშასადამე, $|\Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k)| < 2\varepsilon(|h| + |k|)$, როცა $|h| < \delta$, $|k| < \delta$ და $|h| + |k| > 0$; $\delta = \delta(p_0, \varepsilon)$. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 7.6.1. (5) ტოლობა წარმოადგენს 3.5.(14) ტოლობის განზოგადებას.

შედეგი 7.6.1. $\mathrm{strgrad}^{(1)}\,\varphi(p_0)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს $\varphi(x, y)$ ფუნქციის შერეული სიმეტრიული უწყვეტობა (იხ. თავი I, 11.6).

დასასრულს აღვნიშნოთ სიმეტრიული ძლიერი წარმოებულის სასრულობით გამოწვეული შემდეგი

წინადადება 7.6.1. თუ ${\varphi'_s}^{sym}(p_0)$ სასრულია, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ორ ფაქტს:

1) $\varphi(x, y)$ ფუნქცია შერეულ სიმეტიულად უწყვეტია p_0 წერტილზე;

2) $\Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k)$, როგორც (h, k)-ს ფუნქცია, უწყვეტია $(0, 0)$ წერტილზე.

დამტკიცება. ჯერ ერთი

$$\Delta^{sym}\varphi(p_0; 0, 0) = \Delta^{sym}\varphi(p_0; h, 0) = \Delta^{sym}\varphi(p_0; 0, k) = 0. \quad (8)$$

მეორეც, ${\varphi'_s}^{sym}(p_0)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k) = 0 \quad (9)$$

ტოლობა, რაც ნიშნავს $\varphi(x, y)$-ის შერეულ სიმეტრიულ უწყვეტობას $(0, 0)$ წერტილზე. გარდა ამისა,

$$\Delta^{sym}\varphi(p_0; 0, 0) = 0$$

ტოლობის ძალით, (9) ტოლობა ნიშნავს $\Delta^{sym}\varphi(p_0; h, k)$-ის უწყვეტობას $(0, 0)$ წერტილზე. წინადადება დამტკიცებულია.

§ 8. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემული დიფერენციალები ფართო აზრით

1. $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ წერტილის მიდამოში სასრული $F(x, y)$ ფუნქციის **ზედა დიფერენციალი** რაიმე p_0 წერტილზე განისაზღვრება შემდეგნაირად ([121], [54], გვ. 448).

სასრული A და B რიცხვებისგან შემდგარ $\{A, B\}$ წყვილს ეწოდება $F(x, y)$ ფუნქციის ზედა დიფერენციალი (x_0, y_0) წერტილზე, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1) $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ სიბრტყე არის $z = F(x, y)$ ზედაპირისადმი შუალედური მხები სიბრტყე (x_0, y_0, z_0) წერტილზე, სადაც $z_0 = F(x_0, y_0)$;

2) ადგილი აქვს

$$\overline{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}} \frac{F(x,y)-F(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{|x-x_0|+|y-y_0|}=0 \quad (0.1)$$

ტოლობას.

ანალოგიურად განისაზღვრება **ქვედა დიფერენციალი**. ზედა და ქვედა დიფერენციალებს ეწოდებათ **ექსტრემული დიფერენციალები**.

თუ $F(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია (x_0,y_0) წერტილზე, მაშინ ამ წერტილზე მისი ექსტრემული დიფერენციალები ტოლია F-ის დიფერენციალის იმავე წერტილზე. შებრუნებით, თუ F ფუნქციას (x_0,y_0) წერტილზე აქვს ურთიერთტოლი ექსტრემული დიფერენციალები, მაშინ ისინი წარმოადგენენ F-ის დიფერენციალს ამავე წერტილზე.

ვთქვათ (0.1) ტოლობის შეფარდებას ნულოვანი ზღვარი აქვს ზომადი ისეთი $E\subset\mathbb{R}^2$ სიმრავლის გასწვრივ, რომლისთვისაც (x_0,y_0) სიმკვრივის წერტილია (იხ. თავი I, § 13). მაშინ F ფუნქციას ეწოდება **აპროქსიმატულად დიფერენცირებადი** (x_0,y_0) წერტილზე და $\{A,B\}$ წყვილს კი – F ფუნქციის **აპროქსიმატული დიფერენციალი** ამავე წერტილზე. ასეთ შემთხვევაში, A და B რიცხვებს ეწოდებათ F ფუნქციის **აპროქსიმატული დიფერენციალის კოეფიციენტები**. დიფერენციალის კოეფიციენტებისაგან განსხვავებით (იხ. 2.3), აპროქსიმატული დიფერენციალის კოეფიციენტები არ წარმოადგენენ აპროქსიმატულ კერძო წარმოებულებს, საზოგადოდ. მათ ტოლობას ადგილი აქვს თითქმის ყველგან, როგორც ამას ადასტურებს სტეპანოვის ქვემოთ მოყვანილი თეორემა 8.0.3.

ახლა აღვნიშნოთ ექსტრემული დიფერენციალის კავშირი აპროქსიმატულ დიფერენცირენციალთან ([54], გვ. 434).

თეორემა 8.0.1 ([177], [54], გვ. 452)**.** ვთქვათ ზომად $E\subset\mathbb{R}^2$ სიმრავლეზე სასრულ და ზომად $f(x,y)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემული

დიფერენციალი E სიმრავლის ყოველ წერტილზე. მაშინ ეს ექსტრემული დიფერენციალი ამავე დროს არის f-ის აპროქსიმატული დიფერენციალი თითქმის ყველგან E-ზე.

ვარდის (Ward A. J.) ეს თეორემა წარმოადგენს ერთი ცვლადის ფუნქციის შესახებ ბეზიკოვიჩის შემდეგი თეორემის ანალოგს.

თეორემა 8.0.2 ([15], გვ. 531; [54], გვ. 423). თუ ზომად $E \subset \mathbb{R}$ სიმრავლეზე სასრულ და ზომად $\lambda(t)$ ფუნქციას ამ სიმრავლის ყოველ წერტილზე აქვს დინის ერთ-ერთი სასრული წარმოებული რიცხვი, მაშინ ეს წარმოებული რიცხვი თითქმის ყველა წერტილზე არის λ ფუნქციის აპროქსიმატული წარმოებული.

უნდა აღინიშნოს, რომ $M \subset \mathbb{R}^2$ სიმრავლეზე აპროქსიმატულად დიფერენცირებადი ორი ცვლადის ფუნქცია შეიძლება წყვეტილი იყოს ისეთ სიმრავლეზე, რომლის ზომა ნებისმიერად ახლოსაა M-ის ზომასთან. ასეთია ტოლსტოვის თეორემა 2.1.1-ში ნახსენები F ფუნქცია, რომელსაც სასრული კერძო წარმოებულები აქვს ერთეულოვანი კვადრატის ყოველ შიგა წერტილზე. ამიტომ F ფუნქცია აპროქსიმატულად დიფერენცირებადია ამ კვადრატის თითქმის ყველა წერტილზე, სტეპანოვის შემდეგი 8.0.3 თეორემის ძალით და იმის გათვალისწინებით, რომ კერძო წარმოებულის სასრულობა იწვევს იმავე ცვლადით კერძო აპროქსიმატული წარმოებულის სასრულობას და მათ ტოლობას.

თეორემა 8.0.3 ([166], [54], გვ. 434–435). ზომად $E \subset \mathbb{R}^2$ სიმრავლეზე სასრული და ზომადი $\phi(x, y)$ ფუნქციის აპროქსიმატულად დიფერენცირებადობისთვის თითქმის ყველგან E-ზე, აუცილებელი და საკმარისია ϕ ფუნქციას E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილზე ჰქონდეს სასრული აპროქსიმატული კერძო წარმოებულები. აპროქსიმატული დიფერენციალის არსებობისას მისი კოეფიციენტები აპროქსიმატული კერძო წარმოებულების ტოლია თითქმის ყველგან.

შევნიშნოთ, რომ სტეპანოვის ამ თეორემასთან კავშირშია ნაშრომი [149].

8.0.1 თეორემიდან გამომდინარეობს

შედეგი 8.0.1. ვთქვათ, ზომად $E \subset \mathbb{R}^2$ სიმრავლეზე სასრულ და ზომად $f(x,y)$ ფუნქციას E სიმრავლის ყოველ წერტილზე აქვს ექსტრემული დიფერენციალები. მაშინ f ფუნქცია დიფერენცირებადია E სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილზე.

2. სრულიად ბუნებრივია შემდეგი კითხვა*: $\{A,B\}$ წყვილი როგორ უკავშირდება (0.1) ტოლობის შემსრულებელ F ფუნქციას?

ამის გასარკვევად, (0.1) ტოლობაში ჩავსვათ კერძო მნიშვნელობა $y=y_0$, მივიღებთ**

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\,\frac{F(x,y_0)-F(x_0,y_0)-A(x-x_0)}{|x-x_0|}\le 0 \tag{0.2}$$

უტოლობას.

განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

I) ვთქვათ $x>x_0$. მაშინ (0.2) უტოლობიდან გამომდინარეობს**, რომ

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}}\,\frac{F(x,y_0)-F(x_0,y_0)-A(x-x_0)}{x-x_0}\le 0,$$

ე. ი.

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}}\,\Big(\frac{F(x,y_0)-F(x_0,y_0)}{x-x_0}-A\Big)\le 0.$$

აქ გამოვიყენოთ 1.10.(10) ტოლობა თავი I-დან. მივიღებთ

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}}\,\frac{F(x,y_0)-F(x_0,y_0)}{x-x_0}\le A \tag{0.3}$$

უტოლობას.

---

*ამ პარაგრაფში განხილული საკითხები, თავი I-დან § 12-ის მასალასთან ერთად, წარმოაჩენს იმ გართულებებს, რაც უკავშირდება ორი ცვლადის ფუნქციისთვის ზედა და ქვედა ზღვრების განხილვას ზღვრისგან განსხვავებით.

**ქვესიმრავლის მიმართ ზედა ზღვარი, არ აღემატება ზედა ზღვარს ძირითადი სიმრავლის მიმართ.

II) როცა $x < x_0$, მაშინ (0.2) უტოლობიდან მიიღება

$$\overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0) - A(x - x_0)}{-(x - x_0)} \le 0,$$

ანუ

$$\overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}} \Big[-\frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} + A \Big] \le 0.$$

აქედან მიიღება, (0.3) უტოლობის მსგავსად,

$$\overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}} \Big(-\frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} \Big) \le -A.$$

აქ კი გამოვიყენოთ 1.10.(17) ტოლობა თავი I-დან. მივიღებთ

$$-\underline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} \le -A.$$

ამრიგად,

$$\underline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} \ge A. \tag{0.4}$$

(0.3) და (0.4) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}}} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} \le A \le \underline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}}} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0}. \tag{0.5}$$

(0.3) უტოლობის მარცხენა მხარეს, სიმბოლურად $\overline{\partial}_x^{\,+} F(p_0)$, ეწოდება ([54], გვ. 166 და 432) $F(x, y)$ ფუნქციის x **ცვლადით მარჯვენა ზედა კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე.

ანალოგიურად, (0.4) უტოლობის მარცხენა მხარეს, სიმბოლურად $\underline{\partial}_x^{\,-} F(p_0)$, ეწოდება $F(x, y)$ ფუნქციის x **ცვლადით მარცხენა ქვედა კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე.

მაშასადამე, თუ $F(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (0.1) ტოლობას, მაშინ

$$\overline{\partial}_x^{\,+} F(p_0) \le A \le \underline{\partial}_x^{\,-} F(p_0). \tag{0.6}$$

ანალოგიურად, თუ $F(x,y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (0.1) ტოლობას, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებსაც:

$$\overline{\partial}_y^{\,+} F(p_0) \leq B \leq \underline{\partial}_y^{-} F(p_0). \tag{0.7}$$

(0.7) დამოკიდებულებების მარცხენა მხარეს ეწოდება $F(x,y)$ ფუნქციის y ცვლადით **მარჯვენა ზედა კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე, ხოლო მისსავე მარჯვენა მხარეს კი ეწოდება $F(x,y)$ ფუნქციის y ცვლადით **მარცხენა ქვედა კერძო წარმოებული რიცხვი** იმავე წერტილზე.

ამრიგად, მართებულია შემდეგი

წინადადება 8.0.1 ([54], გვ. 453)**.** თუ $F(x,y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (0.1) ტოლობას, მაშინ მართებულია სასრულწევრებიანი

$$\overline{\partial}_x^{\,+} F(p_0) \leq A \leq \underline{\partial}_x^{-} F(p_0), \tag{0.8}$$

$$\overline{\partial}_y^{\,+} F(p_0) \leq B \leq \underline{\partial}_y^{-} F(p_0). \tag{0.9}$$

უტოლობები.

აქედან აშკარაა, რომ ზემოდან დიფერენცირებადობის განსაზღვრისას (0.1) ტოლობასთან ერთად 1) პირობა მოთხოვნილია $\{A, B\}$ წყვილის ერთადერთობის მიზნით [121].

3. ჩვენთვის უკვე ცნობილი ზედა წარმოებულისა (იხ. ამ თავის 1.16) და ზემოდან ნახევრადუწყვეტობის (იხ. თავი I, § 12) ცნებანი მიღებულია სათანადო ტოლობებში ზღვრის ნაცვლად ზედა ზღვრის განხილვით.

ანალოგიურად, დიფერენცირებადობის ცნებიდან ([54], გვ. 433) შეიძლება მივიღოთ ორი ცნება, ზედა და ქვედა ზღვრების მოშველიებით, რომელთაც ქვემოთ დავარქმევთ ზემოდან და ქვემოდან დიფერენცირებადობას ფართო აზრით.

ორი ცვლადის ფუნქციისთვის დიფერენციალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების გამოყენებით (იხ. თეორემა 3.5.1), ქვემოთ მითითებული იქნება ფართო აზრით ზემოდან (ქვემოდან) დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობები.

ამ მიზნის შესასრულებლად დაგვჭირდება ზოგიერთი ცნება $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ წერტილის $U(p_0, \delta) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - x_0| + |y - y_0| < \delta\big\}$, $\delta > 0$, მიდამოში განსაზღვრული $\varphi(x,y)$ ფუნქციისთვის.

8.1. ზედა დიფერენციალი ფართო აზრით ([174])

1. განსაზღვრა 8.1.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებადი** რაიმე p_0 წერტილზე, თუ არსებობს სასრულ რიცხვთა ერთადერთი ისეთი $A = (A_1, A_2)$ წყვილი, რომ სრულდება

$$\overline{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)-A_1(x-x_0)-A_2(y-y_0)}{|x-x_0|+|y-y_0|}=0 \quad (1)$$

ტოლობა.

ასეთ შემთხვევაში, $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **ფართო აზრით ზედა დიფერენციალი** p_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\overline{d}\varphi(p_0)$, განისაზღვრება

$$\overline{d}\varphi(p_0) = A_1 dx + A_2 dy \quad (2)$$

ტოლობით.

ცხადია, რომ ზედა დიფერენციალის განსაზღვრისას მოთხოვნილი 1) და 2) პირობები ერთობლივად არ არის სუსტი, ვიდრე (1) ტოლობაში ერთადერთი (A_1, A_2) წყვილის არსებობის მოთხოვნა. ამიტომაც არის 8.1.1 განსაზღვრაში ფრაზა “ფართო აზრით”.

ამრიგად, ზემოდან დიფერენცირებადობა იწვევს ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებადობას (სავარაუდოა შებრუნებითაც!).

(0.8) და (0.9) უტოლობანი და კუთხური კერძო $^{\pm}$წარმოებულები (იხ. 6.2), მიგვანიშნებენ შემდეგი განსაზღვრების მიზანშეწონილობაზე.

განსაზღვრა 8.1.2. $\varphi(x,y)$ ფუნქციას აქვს x **ცვლადით მარჯვენა ზედა კუთხური კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)$, თუ ყოველი $c \geq 0$ მუდმივისთვის

არსებობს c-გან დამოუკიდებელი ზედა ზღვარი

$$\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)=\overline{\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ |y-y_0|\le c(x-x_0)}}}\ \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)}{x-x_0}\,. \tag{3}$$

$\varphi(x,y)$ ფუნქციის y **ცვლადით მარჯვენა ზედა კუთხური კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე განსაზღვრულია

$$\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,+}\varphi(p_0)=\overline{\lim_{\substack{y\to y_0^+\\ |x-x_0|\le \ell(y-y_0)}}}\ \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)}{x-x_0} \tag{4}$$

ტოლობით, თუ ეს ზედა ზღვარი ერთი და იგივეა ყველა $\ell\ge 0$ მუდმივისთვის.

ქვედა ზღვრის მეშვეობით ანალოგიურად განისაზღვრება x **ცვლადით მარცხენა ქვედა კუთხური** $\underline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,-}\varphi(p_0)$ **კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე (იხ. (13) ტოლობა ქვემოთ) და y **ცვლადით მარცხენა ქვედა კუთხური** $\underline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,-}\varphi(p_0)$ **კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე.

$\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს $\overline{\partial}_{x}^{\,+}\varphi(p_0)$-ის სასრულობა, რაც შეესაბამება კერძო $c=0$ შემთხვევას, და მათი ტოლობა. შებრუნებული მტკიცება მცდარია.

$\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)$ და $\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,+}\varphi(p_0)$ სიდიდეთა არსებობისას

$$^{+}\,\overline{\mathrm{anggrad}}\varphi(p_0)=\big(\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0),\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,+}\varphi(p_0)\big) \tag{5}$$

ტოლობით მოიცემა $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **მარჯვენა ზედა კუთხური გრადიენტი** p_0 წერტილზე და $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება თითოეული ცვლადით **მარჯვნიდან ზემოდან კუთხურად წარმოებადი** p_0 წერტილზე.

თუკი $\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)$ და $\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,+}\varphi(p_0)$ სასრული რიცხვებია, მაშინ $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **თითოეული ცვლადით მარჯვნიდან ზემოდან კუთხურად დიფერენცირებადი** p_0 წერტილზე.

ანალოგიურად,

$$
{}^{-}\underline{\mathrm{anggrad}}\varphi(p_0) = \left(\underline{\partial}^{-}_{\widehat{x}}\varphi(p_0), \underline{\partial}^{-}_{\widehat{y}}\varphi(p_0)\right) \tag{6}
$$

ტოლობით განისაზღვრება $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **მარცხენა ქვედა კუთხური გრადიენტი** p_0 **წერტილზე**.

ფართო აზრით ზედა $\overline{d}\varphi(p_0)$ დიფერენციალის არსებობის საკმარისი პირობები მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 8.1.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებადობისთვის რაიმე p_0 წერტილზე, საკმარისია ${}^{-}\underline{\mathrm{anggrad}}\varphi(p_0) = {}^{+}\overline{\mathrm{anggrad}}\varphi(p_0)$ ტოლობა ანუ, რაც იგივეა,

$$
\underline{\partial}^{-}_{\widehat{x}}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0), \tag{7}
$$

$$
\underline{\partial}^{-}_{\widehat{y}}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{+}_{\widehat{y}}\varphi(p_0) \tag{8}
$$

ტოლობები მათი ყოველი წევრის სასრულობის მოთხოვნით და ამ პირობებში სრულდება

$$
\begin{aligned}
\overline{d}\varphi(p_0) &= \overline{\partial}^{+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0)dx + \overline{\partial}^{+}_{\widehat{y}}\varphi(p_0)dy = \\
&= \overline{\partial}^{+}_{x}\varphi(p_0)dx + \overline{\partial}^{+}_{y}\varphi(p_0)dy,
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{d}\varphi(p_0) &= \underline{\partial}^{-}_{\widehat{x}}\varphi(p_0)dx + \underline{\partial}^{-}_{\widehat{y}}\varphi(p_0)dy = \\
&= \underline{\partial}^{-}_{x}\varphi(p_0)dx + \underline{\partial}^{-}_{y}\varphi(p_0)dy
\end{aligned} \tag{10}
$$

ტოლობანი.

დამტკიცება. (3) ტოლობის მარჯვენა მხარის სასრულობიდან და $\overline{\partial}^{+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0)$ სიდიდესთან მისი ტოლობიდან ყველა $c \geq 0$ მუდმივისთვის, გამომდინარეობს

$$
\overline{\lim_{\substack{x\to x_0+\\ |y-y_0|\leq x-x_0}}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)}{x-x_0} = \overline{\partial}^{+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0) \tag{11}
$$

ტოლობა.

შემოვიღოთ სიმრავლე

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y - y_0| \le x - x_0, \ x > x_0\}.$$

სიმრავლე ყველა იმ (x, y) წერტილისა M_1-დან, რომლებიც მიეკუთვნებიან p_0 წერტილის η-მიდამოს, აღვნიშნოთ M_1^η სიმბოლოთი. (11) ტოლობა ჩავწეროთ ასე:

$$\overline{\lim_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ (x,y)\in M_1^\eta}}} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y)}{x - x_0} - \lim_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ (x,y)\in M_1^\eta}} \overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+} \varphi(p_0) = 0.$$

თავი I-დან 1.10.(10) ტოლობის თანახმად ვიღებთ

$$\overline{\lim_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ (x,y)\in M_1^\eta}}} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y) - (x - x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+} \varphi(p_0)}{x - x_0} = 0$$

ტოლობას, რაც ასეც იწერება (რადგანაც $x > x_0$)

$$\overline{\lim_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ (x,y)\in M_1^\eta}}} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y) - (x - x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+} \varphi(p_0)}{|x - x_0|} = 0. \qquad (12)$$

(7) ტოლობის გამოყენებით ახლა ვაჩვენოთ, რომ (12) მართებულია $x < x_0$ შემთხვევისთვისაც, სიმბოლურად $(x, y) \in M_2$, სადაც $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y - y_0| \le x_0 - x, \ x < x_0\}$. მართლაც,

$$\underline{\partial}_{\widehat{x}}^{-} \varphi(p_0) = \underline{\lim_{\substack{x\to x_0- \\ |y-y_0|\le x_0-x}}} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y)}{x - x_0} \qquad (13)$$

ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით (ტოლობა 1.10.(11)-ის ძალით თავი I-დან)

$$\underline{\lim_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ (x,y)\in M_2^\eta}}} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y) - (x - x_0)\underline{\partial}_{\widehat{x}}^{-} \varphi(p_0)}{x - x_0} = 0$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\varliminf_{\substack{(x,y)\to p_0\\(x,y)\in M_2^\eta}} \Big[-\frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)-(x-x_0)\underline{\partial}_{\widehat{x}}^{-}\varphi(p_0)}{|x-x_0|}\Big]=0$$

სახით.

ახლა გამოვიყენოთ (7) ტოლობა და თავი I-დან 1.10.(17) ტოლობა. მივიღებთ

$$-\varlimsup_{\substack{(x,y)\to p_0\\(x,y)\in M_2^\eta}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)-(x-x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{+}\varphi(p_0)}{|x-x_0|}=0$$

ანუ

$$\varlimsup_{\substack{(x,y)\to p_0\\(x,y)\in M_2^\eta}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)-(x-x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{+}\varphi(p_0)}{|x-x_0|}=0 \tag{14}$$

ტოლობას. (12) და (14) ტოლობები შეიძლება გავაერთიანოთ შემდეგი სახით:

$$\varlimsup_{\substack{(x,y)\to p_0\\(x,y)\in M^\eta}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)-(x-x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{+}\varphi(p_0)}{|x-x_0|}=0, \tag{15}$$

სადაც $M=M_1\cup M_2$.

ავიღოთ ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვი ε. ზედა ზღვრის ცნების გათვალისწინებით ([7], გვ. 79 ან [21], გვ. 13–14) (15) ტოლობიდან გამომდინარეობს ε რიცხვის თანადი ისეთი დადებითი $\delta_1=\delta_1(p_0,\varepsilon,\varphi)$ რიცხვის არსებობა, რომ

$$\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)-(x-x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{+}\varphi(p_0)<\varepsilon|x-x_0| \tag{16}$$

უტოლობას ადგილი აქვს ყველა $(x,y)\in M^{\delta_1}$ წერტილზე.

ანალოგიური მსჯელობით მიიღება

$$\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)-(y-y_0)\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{+}\varphi(p_0)<\varepsilon|y-y_0| \tag{17}$$

უტოლობა ყველა $(x,y)\in N^{\delta_2}$ წერტილისთვის, სადაც N სიმრავლე მიიღება ისეთივე წესით, რა წესითაც მივიღეთ $M=M_1\cup M_2$ სიმრავლე. ცხადია, რომ M და N სიმრავლეების გაერთიანება ფარავს p_0 წერტილის უცენტრო $U(p_0)\setminus\{p_0\}$ მიდამოს.

თუ (1) ტოლობას დავადგენთ M და N ქვესიმრავლეებისთვის, მაშინ იგივე ტოლობა დადგენილ იქნება მათი გაერთიანებისთვისაც, რადგან სასრული გაერთიანების მიმართ ზედა ზღვარი ტოლია ზედა ზღვართა შორის უდიდესის. გარკვეულობისთვის ვიგულისხმოთ $(x,y)\to p_0$, $(x,y)\in M^{\delta_1}$ პირობა.

(17) უტოლობას ადგილი აქვს, კერძოდ, ყველა $(x_0,y)\in N^{\delta_2}$ წერტილისთვისაც. მაშასადამე, გვაქვს

$$\varphi(x_0,y)-\varphi(x_0,y_0)-(y-y_0)\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,+}\varphi(p_0)<\varepsilon|y-y_0|. \tag{18}$$

ახლა კი დავწეროთ ცხადი

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&-\varphi(x_0,y_0)-(x-x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)-(y-y_0)\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,+}\varphi(p_0)=\\&=\Big[\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)-(x-x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)\Big]+\\&+\Big[\varphi(x_0,y)-\varphi(x_0,y_0)-(y-y_0)\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,+}\varphi(p_0)\Big]\end{aligned} \tag{19}$$

ტოლობა.

(16) და (18) უტოლობების საფუძველზე, (19) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&-\varphi(x_0,y_0)-(x-x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)-(y-y_0)\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,+}\varphi(p_0)<\\&<\varepsilon\big(|x-x_0|+|y-y_0|\big)\end{aligned} \tag{20}$$

უტოლობა ყველა $(x,y)\in M^{\delta}$ წერტილისთვის, სადაც $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

თეორემის დამტკიცების დასასრულებლად აუცილებელია (20) უტოლობასთან ერთად გვქონდეს გარკვეული უტოლობა, ზედა ზღვრის ცნების მოთხოვნის შესაბამისი.

ერთი მხრივ, $\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)=\overline{\partial}_{x}^{\,+}\varphi(p_0)$, რაც შეესაბამება $c=0$ შემთხვევას. მეორე მხრივ, $\overline{\partial}_{x}^{\,+}\varphi(p_0)$-თვის არსებობს p_0 წერტილისკენ კრებად წერტილთა (x_k,y_0), $x_k>x_0$, ისეთი მიმდევრობა, რომ

$$\varphi(x_k,y_0)-\varphi(x_0,y_0)-(x_k-x_0)\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)>-\varepsilon|x_k-x_0|. \quad (21)$$

ეს ნიშნავს, რომ p_0 წერტილისკენ კრებად წერტილთა (x_k,y_0) მიმდევრობისთვის (19) ტოლობის მარჯვენა მხარე და ამიტომ მისივე მარცხენა მხარე მეტია, ვიდრე – $\varepsilon(|x_k-x_0|+|y_o-y_0|)$.

ეს ფაქტი, (20) უტოლობასთან ერთად ნიშნავს (1) ტოლობას

$$A_1=\overline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,+}\varphi(p_0)=\underline{\partial}_{\widehat{x}}^{\,-}\varphi(p_0), \quad (22)$$

$$A_2=\overline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,+}\varphi(p_0)=\underline{\partial}_{\widehat{y}}^{\,-}\varphi(p_0) \quad (23)$$

რიცხვებისთვის ანუ, ზემოთ აღნიშნულის გამო (კუთხურის არსებობა იწვევს ჩვეულებრივის არსებობას და მათ ტოლობას),

$$A_1=\overline{\partial}_{x}^{\,+}\varphi(p_0)=\underline{\partial}_{x}^{\,-}\varphi(p_0), \quad (24)$$

$$A_2=\overline{\partial}_{y}^{\,+}\varphi(p_0)=\underline{\partial}_{y}^{\,-}\varphi(p_0) \quad (25)$$

რიცხვებისთვის.

აქედან, (2) ტოლობის თანახმად, ვიღებთ (9) და (10) ტოლობებს. თეორემა დამტკიცებულია.

8.2. ქვედა დიფერენციალი ფართო აზრით ([174])

1. თუ $p_0=(x_0,y_0)$ წერტილის მიდამოში სასრული $\varphi(x,y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს

$$\varliminf_{(x,y)\to p_0}\frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)-M(x-x_0)-N(y-y_0)}{|x-x_0|+|y-y_0|}=0 \quad (1)$$

ტოლობას სასრული M და N რიცხვებისთვის, მაშინ ადგილი აქვს

$$\varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{\varphi(x,y_0)-\varphi(x_0,y_0)}{x-x_0}\le M\le \varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{\varphi(x,y_0)-\varphi(x_0,y_0)}{x-x_0}\,, \quad (2)$$

$$\varlimsup_{\substack{y\to y_0\\ y<y_0}} \frac{\varphi(x_0,y)-\varphi(x_0,y_0)}{y-y_0} \le N \le \varliminf_{\substack{y\to y_0\\ y>y_0}} \frac{\varphi(x_0,y)-\varphi(x_0,y_0)}{y-y_0} \quad (3)$$

უტოლობებს*. (2) დამოკიდებულების მარცხენა მხარეს ეწოდება $\varphi(x,y)$ ფუნქციის x **ცვლადით მარცხენა ზედა კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\overline{\partial}_x^{\,-}\varphi(p_0)$, ხოლო (2)-ის მარჯვენა მხარეს კი – $\varphi(x,y)$ ფუნქციის x **ცვლადით მარჯვენა ქვედა კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\underline{\partial}_x^{+}\varphi(p_0)$.

ამიტომ (2) დამოკიდებულება ჩაიწერება ასე

$$\overline{\partial}_x^{\,-}\varphi(p_0) \le M \le \underline{\partial}_x^{+}\varphi(p_0), \quad (4)$$

ხოლო (3) დამოკიდებულება მიიღებს სახეს:

$$\overline{\partial}_y^{\,-}\varphi(p_0) \le N \le \underline{\partial}_y^{+}\varphi(p_0). \quad (5)$$

მაშასადამე, (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს (4) და (5) დამოკიდებულებანი.

2. განსაზღვრა 8.2.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **ფართო აზრით ქვემოდან დიფერენცირებადი** რაიმე $p_0=(x_0,y_0)$ წერტილზე, თუ არსებობს სასრულ რიცხვთა ერთადერთი ისეთი $B=(B_1,B_2)$ წყვილი, რომ

$$\varliminf_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)-B_1(x-x_0)-B_2(y-y_0)}{|x-x_0|+|y-y_0|}=0. \quad (6)$$

ასეთ შემთხვევაში $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **ფართო აზრით ქვედა დიფერენციალი p_0 წერტილზე**, სიმბოლურად $\underline{d}\varphi(p_0)$, განისაზღვრება

$$\underline{d}\varphi(p_0)=B_1dx+B_2dy \quad (7)$$

ტოლობით.

---

*ქვესიმრავლის მიმართ ქვედა ზღვარი, არ არის ნაკლები ძირითადი სიმრავლის მიმართ ქვედა ზღვარზე.

ახლა შემოვიტანოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$\underline{\partial}^{+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0) = \varliminf_{\substack{x\to x_0+\\ |y-y_0|\le c(x-x_0)}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)}{x-x_0}, \quad c\ge 0, \tag{8}$$

$$\underline{\partial}^{+}_{\widehat{y}}\varphi(p_0) = \varliminf_{\substack{y\to y_0+\\ |x-x_0|\le \ell(y-y_0)}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)}{y-y_0}, \quad \ell\ge 0 \tag{9}$$

და ანალოგიური ტოლობებით $\overline{\partial}^{-}_{\widehat{x}}\varphi(p_0)$ და $\overline{\partial}^{-}_{\widehat{y}}\varphi(p_0)$ სიდიდეები.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 8.2.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის ფართო აზრით ქვემოდან დიფერენცირებადობისთვის p_0 წერტილზე, საკმარისია

$$^{+}\underline{\mathrm{anggrad}}\varphi(p_0) = {}^{-}\overline{\mathrm{anggrad}}\varphi(p_0)$$

ტოლობა ანუ, რაც იგივეა,

$$\underline{\partial}^{+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{-}_{\widehat{x}}\varphi(p_0), \tag{10}$$

$$\underline{\partial}^{+}_{\widehat{y}}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{-}_{\widehat{y}}\varphi(p_0) \tag{11}$$

ტოლობები მათი წევრების სასრულობისას და ასეთ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\begin{aligned} \underline{d}\varphi(p_0) &= \underline{\partial}^{+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0)dx + \underline{\partial}^{+}_{\widehat{y}}\varphi(p_0)dy = \\ &= \underline{\partial}^{+}_{x}\varphi(p_0)dx + \underline{\partial}^{+}_{y}\varphi(p_0)dy, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \underline{d}\varphi(p_0) &= \overline{\partial}^{-}_{\widehat{x}}\varphi(p_0)dx + \overline{\partial}^{-}_{\widehat{y}}\varphi(p_0)dy = \\ &= \overline{\partial}^{-}_{x}\varphi(p_0)dx + \overline{\partial}^{-}_{y}\varphi(p_0)dy. \end{aligned} \tag{13}$$

8.3. სრული დიფერენციალის შესახებ ([174])

ფართო აზრით ზედა და ქვედა დიფერენციალებს ეწოდებათ **ფართო აზრით ექსტრემული დიფერენციალები**.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა იმის შესახებ, თუ როგორი კავშირია დიფერენციალის არსებობას და ფართო აზრით ექსტრემული დიფერენციალების ტოლობას შორის.

თეორემა 8.3.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციას p_0 წერტილზე რომ ჰქონდეს სრული $d\varphi(p_0)$ დიფერენციალი, აუცილებელი და საკმარისია p_0-ზე $\varphi(x,y)$-ს ჰქონდეს ურთიერთტოლი ფართო აზრით $\overline{d}\varphi(p_0)$ და $\underline{d}\varphi(p_0)$ ექსტრემული დიფერენციალები. თუ ეს პირობაა შესრულებული, მაშინ

$$\underline{d}\varphi(p_0) = d\varphi(p_0) = \overline{d}\varphi(p_0). \tag{1}$$

დამტკიცება. როცა არსებობს $d\varphi(p_0)$, მაშინ ადგილი აქვს 3.5.(1) და 3.5.(5) ტოლობებს. ამიტომ 8.1.(1) და 8.2.(6) შესრულებულია $A_1 = B_1 = \varphi'_{\widehat{x}}(p_0)$ და $A_2 = B_2 = \varphi'_{\widehat{y}}(p_0)$ რიცხვებისთვის. ამის გამო ადგილი აქვს (1)-ს.

თუ $\underline{d}\varphi(p_0) = \overline{d}\varphi(p_0)$, მაშინ 8.1.(1) და 8.2.(6) ტოლობებში $A_1 = B_1$ და $A_2 = B_2$. ეს ნიშნავს, რომ დიფერენცირებადობის განსაზღვრაში მონაწილე შეფარდების ზედა ზღვარი და ქვედა ზღვარი ნულია. ამიტომ ამ შეფარდების ზღვარია ნული. მაშასადამე, $\varphi(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია p_0 წერტილზე და $\varphi'_{\widehat{x}}(p_0) = A_1 = B_1$, $\varphi'_{\widehat{y}}(p_0) = A_2 = B_2$. ამიტომ მართებულია (1). თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 8.3.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის p_0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს

$$\underline{\partial}^{-}_{\widehat{x}}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0) = \underline{\partial}^{+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{-}_{\widehat{x}}\varphi(p_0) \tag{2}$$

და

$$\underline{\partial}^{-}_{\widehat{y}}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{+}_{\widehat{y}}\varphi(p_0) = \underline{\partial}^{+}_{\widehat{y}}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{-}_{\widehat{y}}\varphi(p_0) \tag{3}$$

დამოკიდებულებანი თითოეულ მათგანში შემავალი ყოველი წევრის სასრულობის მოთხოვნით.

დამტკიცება. როცა $\varphi(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია p_0 წერტილზე, მაშინ $\varphi'_{\widehat{x}}(p_0)$ და $\varphi'_{\widehat{y}}(p_0)$ სასრულია (იხ. თეორემა 3.5.1),

რომელთა ტოლია, შესაბამისად, (2) და (3) დამოკიდებულებების თითოეული წევრი. ამიტომ ადგილი აქვს (2) და (3) ტოლობებს.

შებრუნებით, (2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს მისი ყოველი წევრის ტოლი სასრული $\varphi'_{\widehat{x}}(p_0)$-ის არსებობა. ასევე, (3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს მასში შემავალი თითოეული წევრის ტოლობა სასრულ $\varphi'_{\widehat{y}}(p_0)$-თან. ამიტომ არსებობს სასრული $\operatorname{anggrad}\varphi(p_0)$. ეს კი ეკვივალენტურია $\varphi(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობის p_0 წერტილზე (იხ. თეორემა 3.5.1).

შედეგი 8.3.2. ფართო აზრით ექსტრემული დიფერენციალების ტოლობის შემთხვევაში, მათი არსებობის საკმარისი 8.1.(7), 8.1.(8) და 8.2.(10), 8.2.(11) პირობები ემთხვევა დიფერენციალის არსებობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს, 3.5.1 თეორემის ძალით.

რადგანაც ზედა და ქვედა დიფერენციალების ტოლობა ეკვივალენტურია დიფერენცირებადობის (იხ. [53], გვ. 448), ამიტომ 8.3.1 თეორემიდან გამომდინარეობს

შედეგი 8.3.3. ფართო აზრით ექსტრემული დიფერენციალების ტოლობა ეკვივალენტურია ექსტრემული დიფერენციალების ტოლობის.

8.4. კიდევ საკმარისი პირობები ([174])

1. ძლიერი კერძო $^{\pm}$წარმოებულების ცნებანი (იხ. 6.1) საშუალებას იძლევიან შემოვიღოთ შემდეგი სიდიდეები.

განსაზღვრა 8.4.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის x **ცვლადით მარჯვენა ზედა ძლიერი კერძო წარმოებული რიცხვი** რაიმე p_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)$, ეწოდება

$$\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)=\varlimsup_{\substack{(x,y)\to p_0\\ x\to x_0+}}\frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)}{x-x_0}\tag{1}$$

ზედა ზღვარს.

ასევე, $\varphi(x,y)$ ფუნქციის y **ცვლადით მარჯვენა ზედა ძლიერი კერძო წარმოებული რიცხვი** p_0 წერტილზე ეწოდება

$$\overline{\partial}^{\,+}_{[y]}\varphi(p_0) = \varlimsup_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ y\to y_0+}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)}{y-y_0} \tag{2}$$

ზედა ზღვარს.

$\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)$ და $\overline{\partial}^{\,+}_{[y]}\varphi(p_0)$ სიდიდეების არსებობის შემთხვევაში

$${}^{+}\overline{\mathrm{strgrad}}\varphi(p_0) = \big(\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0), \overline{\partial}^{\,+}_{[y]}\varphi(p_0)\big) \tag{3}$$

ტოლობით განსაზღვრულია $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **მარჯვენა ზედა ძლიერი გრადიენტი** p_0 წერტილზე და $\varphi(x,y)$-ს ეწოდება **თითოეული ცვლადით მარჯვნიდან ზემოდან ძლიერ წარმოებადი** p_0 წერტილზე. $\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)$ და $\overline{\partial}^{\,+}_{[y]}\varphi(p_0)$ სიდიდეთა სასრულობისას კი, $\varphi(x,y)$-ს ეწოდება **თითოეული ცვლადით მარჯვნიდან ზემოდან ძლიერ დიფერენცირებადი** p_0 წერტილზე.

ანალოგიურად განისაზღვრება $\varphi(x,y)$ ფუნქციის **მარცხენა ქვედა ძლიერი**

$${}^{-}\underline{\mathrm{strgrad}}\varphi(p_0) = \big(\underline{\partial}^{\,-}_{[x]}\varphi(p_0), \underline{\partial}^{\,-}_{[y]}\varphi(p_0)\big) \tag{4}$$

გრადიენტი, სადაც

$$\underline{\partial}^{\,-}_{[x]}\varphi(p_0) = \varliminf_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ x\to x_0-}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)}{x-x_0}\,, \tag{5}$$

$$\underline{\partial}^{\,-}_{[y]}\varphi(p_0) = \varliminf_{\substack{(x,y)\to p_0 \\ y\to y_0-}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)}{y-y_0}\,. \tag{6}$$

ცხადია, შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$\overline{\partial}^{\,+}_{\widehat{x}}\varphi(p_0) \le \overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0), \tag{7}$$

$$\underline{\partial}^{\,-}_{[x]}\varphi(p_0) \le \underline{\partial}^{\,-}_{\widehat{x}}\varphi(p_0). \tag{8}$$

2. ჩვენ ქვემოთ დაგვჭირდება $\varphi(x,y)$ ფუნქციის x **და** y **ცვლადებით კერძო წარმოებულები** p_0 წერტილზე:

$$\partial_x\varphi(p_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x,y_0)-\varphi(x_0,y_0)}{x-x_0}\,, \tag{9}$$

$$\partial_y\varphi(p_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{\varphi(x_0,y)-\varphi(x_0,y_0)}{y-y_0}\,. \tag{10}$$

თეორემა 8.4.1. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებადობისთვის რაიმე p_0 წერტილზე, საკმარისია შესრულდეს ერთი რომელიმე ტოლობა შემდეგი ორიდან:

$$\underline{\partial}^-_{[x]}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^+_{[x]}\varphi(p_0), \tag{11}$$

$$\underline{\partial}^-_{[y]}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^+_{[y]}\varphi(p_0), \tag{12}$$

ხოლო დარჩენილი ცვლადით კი $\varphi(x,y)$-ს ჰქონდეს სასრული კერძო წარმოებული p_0 წერტილზე.

დამტკიცება. გარკვეულობისთვის დავუშვათ, რომ სრულდება (11) ტოლობა და $\partial_y\varphi(p_0)$ სასრულია. უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$\overline{d}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^+_{[x]}\varphi(p_0)dx + \partial_y\varphi(p_0)dy. \tag{13}$$

8.1.(11)–8.1.(15) ტოლობებთან დაკავშირებული გარდაქმნების მსგავსად, (1) ტოლობიდან (11)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\varlimsup_{\substack{(x,y)\to p_0\\(x,y)\in U(p_0,\eta)\setminus J(x_0,\eta)}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)-(x-x_0)\overline{\partial}^+_{[x]}\varphi(p_0)}{|x-x_0|} = 0, \tag{14}$$

სადაც შემოღებულია Oy ღერძის პარალელური ინტერვალი $J(x_0,\eta) = \big\{(x_0,y):\ |y-y_0|<\eta\big\}$, $\eta>0$.

ავიღოთ ნებისმიერად მცირე რიცხვი $\varepsilon>0$. (14) ტოლობა ნიშნავს ისეთი $\delta_1=\delta_1(\varepsilon,p_0,\varphi)>0$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)-(x-x_0)\overline{\partial}^+_{[x]}\varphi(p_0) < \varepsilon|x-x_0| \tag{15}$$

სრულდება ყველა $(x,y) \in U(p_0,\delta_1) \setminus J(x_0,\delta_1)$ წერტილზე.

(10) ტოლობიდან კი, $\partial_y\varphi(p_0)$-ის სასრულობის გამო, გამომდინარეობს

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\varphi(x_0,y)-\varphi(x_0,y_0)-(y-y_0)\partial_y\varphi(p_0)}{y-y_0}=0 \tag{16}$$

ტოლობა. უკვე დასახელებული ε-თვის, უკანასკნელი ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$-\varepsilon|y-y_0|<\varphi(x_0,y)-\varphi(x_0,y_0)-(y-y_0)\partial_y\varphi(p_0)<\varepsilon|y-y_0|, \tag{17}$$

რომელიც სრულდება ყველა $(x_0,y) \in J(x_0,\eta_1) \setminus \{p_0\}$, $\eta_1>0$, წერტილზე.

ვთქვათ, (x,y) წერტილი ისწრაფვის p_0 წერტილისკენ ისე, რომ $(x,y)\in U(p_0,\eta_1)\setminus J(x_0,\eta_1)$ და დავწეროთ

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)-(x-x_0)\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)-(y-y_0)\partial_y\varphi(p_0)=&\\ =\Big[\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)-(x-x_0)\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)\Big]+&\\ +\Big[\varphi(x_0,y)-\varphi(x_0,y_0)-(y-y_0)\partial_y\varphi(p_0)\Big]&\end{aligned} \tag{18}$$

ტოლობა, რომლის მიმართ (15) და (17) უტოლობების გამოყენებით ვიღებთ

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)-(x-x_0)\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)-(y-y_0)\partial_y\varphi(p_0)<&\\ <\varepsilon\big(|x-x_0|+|y-y_0|\big)&\end{aligned} \tag{19}$$

უტოლობას, რომელიც მართებულია ყველა $(x,y)\in U(p_0,\delta)\setminus J(x_0,\delta)$ წერტილზე, სადაც $\delta=\min\{\delta_1,\eta_1\}$.

(14) ტოლობის გამო არსებობს p_0 წერტილისკენ კრებად წერტილთა $(x_k,y_k)\in U(p_0,\eta_2)\setminus J(x_0,\eta_2)$, $\eta_2>0$, ისეთი მიმდევრობა, რომ სრულდება

$$\varphi(x_k,y_k)-\varphi(x_0,y_k)-(x_k-x_0)\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)>-\varepsilon|x_k-x_0| \tag{20}$$

უტოლობა.

ახლა განვიხილოთ p_0 წერტილისკენ კრებადი (x_0, y_k) მიმდევრობა. (17) უტოლობის მარცხენა ნაწილს (y_k) მიმდევრობისთვის აქვს სახე:

$$\varphi(x_0, y_k) - \varphi(x_0, y_0) - (y_k - y_0)\partial_y \varphi(p_0) > -\varepsilon|y_k - y_0|. \quad (21)$$

(20) და (21) უტოლობანი ერთად ნიშნავს, რომ p_0 წერტილისკენ კრებადი $(x_k, y_k) \in U(p_0, \eta) \setminus J(x_0, \eta)$ მიმდევრობისთვის, სადაც $\eta = \min\{\delta, \eta_2\}$, (18) ტოლობის მარცხენა მხარე მეტია, ვიდრე $-\varepsilon(|x_k - x_0| + |y_k - y_0|)$. ეს კი, (19) უტოლობასთან ერთად ნიშნავს 8.1.(1)-ის შესრულებას $A_1 = \overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)$ და $A_2 = \partial_y \varphi(p_0)$ რიცხვებისთვის, როცა (x, y) ისწრაფვის p_0 წერტილისკენ $U(p_0, \eta) \setminus J(x_0, \eta)$ სიმრავლის გასწვრივ.

ახლა, ვთქვათ, p_0 წერტილისკენ მისწრაფება გვაქვს $J(x_0, \eta)$ ინტერვალის გასწვრივ, ე. ი. $(x_0, y) \in J(x_0, \eta)$. ცხადია, რომ (16) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\varlimsup_{(x_0,y)\to p_0} \frac{\varphi(x_0, y) - \varphi(x_0, y_0) - (x_0 - x_0)\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0) - (y - y_0)\partial_y \varphi(p_0)}{|x_0 - x_0| + |y - y_0|} = 0$$

ტოლობა. ეს კი ნიშნავს ისევ 8.1.(1) ტოლობის შესრულებას $\overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)$ და $\partial_y \varphi(p_0)$ რიცხვებისთვის, ოღონდ $J(x_0, \eta)$ ინტერვალის გასწვრივ.

მაშასადამე, 8.1.(1) ტოლობა შერულებულია $U(p_0)$ მიდამოში $A_1 = \overline{\partial}^{\,+}_{[x]}\varphi(p_0)$ და $A_2 = \partial_y \varphi(p_0)$ რიცხვებისთვის.

3. ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 8.4.2. $\varphi(x, y)$ ფუნქციის ფართო აზრით ქვემოდან დიფერენცირებადობისთვის p_0 წერტილზე, საკმარისია შესრულდეს ერთ-ერთი ტოლობა შემდეგი ორიდან:

$$\underline{\partial}^{+}_{[x]}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{\,-}_{[x]}\varphi(p_0) \quad (22)$$

და

$$\underline{\partial}^{+}_{[y]}\varphi(p_0) = \overline{\partial}^{\,-}_{[y]}\varphi(p_0), \quad (23)$$

ხოლო დარჩენილი ცვლადის მიმართ კი $\varphi(x,y)$-ს ჰქონდეს სასრული კერძო წარმოებული p_0 წერტილზე.

8.5. შებრუნებული შემთხვევა ([174])

1. ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის კარგად არის ცნობილი ზედა და ქვედა წარმოებულის ცნებები, რომელნიც ზოგჯერ იწოდებიან **ორმხრივ წარმოებულ რიცხვებად** ან კიდევ **ექსტრემულ წარმოებულ რიცხვებად** (იხ. 1.16 და 1.17).

ჩვენ ქვემოთ დაგვჭირდება ზედა და ქვედა კუთხური კერძო წარმოებულების (იგივე, ზედა და ქვედა ორმხრივი კუთხური კერძო წარმოებული რიცხვების ანუ ექსტრემული კუთხური წარმოებული რიცხვების) ცნებები, რომელთაც ახლა შემოვიღებთ.

განსაზღვრა 8.5.1. $p_0=(x_0,y_0)$ წერტილის $U(p_0)$ მიდამოში სასრულ $\varphi(p)$, $p=(x,y)$, ფუნქციას აქვს x **ცვლადით ზედა კუთხური კერძო წარმოებული** p_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\overline{\partial}_{\widehat{x}}\varphi(p_0)$, თუ ყოველი $c\geq 0$ მუდმივისთვის არსებობს c-გან დამოუკიდებელი შემდეგი ზედა ზღვარი:

$$\overline{\partial}_{\widehat{x}}\varphi(p_0)=\varlimsup_{\substack{x\to x_0\\ |y-y_0|\leq c|x-x_0|}}\frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)}{x-x_0}\,. \tag{1}$$

ასევე განისაზღვრება $\varphi(x,y)$ ფუნქციის y **ცვლადით ზედა კუთხური კერძო წარმოებული** p_0 წერტილზე:

$$\overline{\partial}_{\widehat{y}}\varphi(p_0)=\varlimsup_{\substack{y\to y_0\\ |x-x_0|\leq \ell|y-y_0|}}\frac{\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)}{y-y_0}\,,\quad \ell\geq 0. \tag{2}$$

2. ახლა განვიხილოთ თეორემა 8.1.1.-ის შებრუნების საკითხი, გარკვეული აზრით.

თეორემა 8.5.1. ვთქვათ, $\varphi(x,y)$ ფუნქცია არის ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებადი რაიმე p_0 წერტილზე და ერთ-ერთი დამოუკიდებელი ცვლადით კი, p_0-ზე მას აქვს სასრული კერძო წარმოებული.

მაშინ $\varphi(x,y)$ ფუნქციას p_0 წერტილზე აქვს სასრული ზედა კუთხური კერძო წარმოებული დარჩენილი ცვლადით.

დამტკიცება. ვთქვათ p_0 წერტილზე ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებად $\varphi(x,y)$ ფუნქციას ამავე წერტილზე აქვს x-ით სასრული $\partial_x\varphi(p_0)$ კერძო წარმოებული. დავამტკიცოთ სასრული $\overline{\partial}_{\widehat{y}}\varphi(p_0)$-ის არსებობა.

ავიღოთ ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვი და ასევე ნებისმიერი $\ell \geq 0$ რიცხვი. რადგანაც $\varphi(x,y)$ ფუნქცია არის ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებადი p_0 წერტილზე, ამიტომ არსებობს სასრული $\overline{\partial}_x^{\,+}\varphi(p_0)$ და $\overline{\partial}_y^{\,+}\varphi(p_0)$ (იხ. (0.8) და (0.9) დამოკიდებულებანი, რომელთა ორივე მხარე, შესაბამისად, ტოლია ერთადერთი სასრული A_1 და A_2 რიცხვების). ზედა ზღვრის ცნების გათვალისწინებით, $\varepsilon^* = \varepsilon/2(1+\ell)$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta_1 = \delta_1(p_0,\ell,\varepsilon,\varphi) > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ (ახლა გვაქვს $\overline{\partial}_x^{\,+}\varphi(p_0) = \partial_x\varphi(p_0)$)

$$\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0) - (x-x_0)\partial_x\varphi(p_0) - (y-y_0)\overline{\partial}_y^{\,+}\varphi(p_0) < \\ < \varepsilon\big(|x-x_0| + |y-y_0|\big) \tag{3}$$

უტოლობას ადგილი აქვს ყველა $(x,y) \in U(p_0,\delta_1)\setminus\{p_0\}$ წერტილზე.

8.4.(9) ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულებანი (იხ. ანალოგიური 8.4.(17) დამოკიდებულებანი):

$$-\varepsilon^*|x-x_0| < \varphi(x,y_0) - \varphi(x_0,y_0) - (x-x_0)\partial_x\varphi(p_0) < \varepsilon^*|x-x_0| \tag{4}$$

ყველა $(x,y_0) \in I(\delta_2,y_0) \setminus \{p_0\}$ წერტილზე, სადაც Ox ღერძის პარალელური ინტერვალი $I(\delta_2,y_0) = \big\{(x,y_0):\ |x-x_0| < \delta_2\big\}$.

ახლა დავწეროთ შემდეგი ტოლობა:

$$\varphi(x,y) - \varphi(x,y_0) - (y-y_0)\overline{\partial}_y^{\,+}\varphi(p_0) = \\ = \Big[\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0) - (x-x_0)\partial_x\varphi(p_0) - (y-y_0)\overline{\partial}_y^{\,+}\varphi(p_0)\Big] - \\ - \Big[\varphi(x,y_0) - \varphi(x_0,y_0) - (x-x_0)\partial_x\varphi(p_0)\Big]. \tag{5}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე ნაკლებია, (3) და (4) უტოლობების გამო, ვიდრე

$$\begin{aligned}&\varepsilon^*\big(|x-x_0|+|y-y_0|\big)+\varepsilon^*|x-x_0|\le\\&\quad\le 2\varepsilon^*\big(|x-x_0|+|y-y_0|\big)\end{aligned}\tag{6}$$

ყველა $(x,y)\in U(p_0,\delta)\setminus\{p_0\}$ წერტილზე, სადაც $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

თუ $|x-x_0|+|y-y_0|<\delta$ პირობასთან ერთად შესრულებულია $|x-x_0|\le\ell|y-y_0|$ პირობაც, მაშინ (5) და (6) დამოკიდებულებებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned}&\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)-(y-y_0)\overline{\partial}_y^{\,+}\varphi(p_0)\le\\&\quad\le 2\varepsilon^*|y-y_0|(1+\ell)=\varepsilon|y-y_0|.\end{aligned}\tag{7}$$

თეორემის დამტკიცება დამთავრებული იქნება, თუ (7) უტოლობასთან ერთად შესრულებულია გარკვეული უტოლობა, რომელიც დაკავშირებულია ზედა ზღვრის ცნებასთან. $\varphi(x,y)$ ფუნქციის ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებადობის გამო p_0 წერტილზე, არსებობს წერტილთა ისეთი $(x_k,y_k)\in U(p_0,\delta)\setminus\{p_0\}$ მიმდევრობა, რომ (3) უტოლობასთან ერთად სრულდება

$$\begin{aligned}&\varphi(x_k,y_k)-\varphi(x_0,y_0)-(x_k-x_0)\partial_x\varphi(p_0)-(y_k-y_0)\overline{\partial}_y^{\,+}\varphi(p_0)>\\&\quad>-\varepsilon\big(|x_k-x_0|+|y_k-y_0|\big)\end{aligned}\tag{8}$$

უტოლობა. მეორე მხრივ, $\{x_k\}\to x_0$ მიმდევრობისთვის (4) უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned}&-\varepsilon^*|x_k-x_0|<\varphi(x_k,y_0)-\varphi(x_0,y_0)-(x_k-x_0)\partial_x\varphi(p_0)<\\&\quad<\varepsilon^*|x_k-x_0|.\end{aligned}\tag{9}$$

(8) და (9)-ის მარჯვენა მხარეები გამოვიყენოთ (5) ტოლობის მიმართ, მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\varphi(x_k,y_k)-\varphi(x_k,y_0)-(y_k-y_0)\overline{\partial}_y^{\,+}\varphi(p_0)>\\&\quad>-\varepsilon^*\big(|x_k-x_0|+|y_k-y_0|\big)-\varepsilon^*|x_k-x_0|>\end{aligned}$$

$$> -2\varepsilon^*\big(|x_k - x_0| + |y_k - y_0|\big) \geq$$
$$\geq -2\varepsilon^*|y_k - y_0|(1+\ell) = -\varepsilon|y_k - y_0|, \quad (10)$$

რადგანაც $|x_k - x_0| \leq \ell|y_k - y_0|$.

(7) და (10) უტოლობები გვიჩვენებენ, რომ არსებობს სასრული $\overline{\partial}_y^{\,+}\varphi(p_0)$-ის ტოლი შემდეგი ზედა ზღვარი:

$$\varlimsup_{\substack{(x,y)\to p_0\\ |x-x_0|\leq\ell|y-y_0|}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)}{y-y_0} = \overline{\partial}_{\widehat{y}}\varphi(p_0).$$

ამრიგად, $\varphi(x,y)$ ფუნქციას p_0 წერტილზე გააჩნია სასრული ზედა კუთხური კერძო $\overline{\partial}_{\widehat{y}}\varphi(p_0)$ წარმოებული. თეორემა დამტკიცებულია.

3. ფართო აზრით ქვემოდან დიფერენცირებადი ფუნქციისთვის ადგილი აქვს თეორემა 8.5.1-ის ანალოგს, რის ჩამოსაყალიბებლადაც დაგვჭირდება შემდეგი განსაზღვრებანი, (1) და (2) ტოლობების ანალოგები.

განსაზღვრა 8.5.2. $p_0 = (x_0, y_0)$ წერტილის მიდამოში სასრულ $\varphi(p)$, $p = (x,y)$, ფუნქციას აქვს x **ცვლადით ქვედა კუთხური კერძო წარმოებული** p_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\underline{\partial}_{\,\widehat{x}}\varphi(p_0)$, თუ ყოველი $c \geq 0$ მუდმივისთვის არსებობს c-გან დამოუკიდებელი შემდეგი ქვედა ზღვარი:

$$\underline{\partial}_{\,\widehat{x}}\varphi(p_0) = \varliminf_{\substack{x\to x_0\\ |y-y_0|\leq c|x-x_0|}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y)}{x-x_0}\,. \quad (11)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $\varphi(x,y)$ ფუნქციის y **ცვლადით ქვედა კუთხური კერძო წარმოებული** p_0 წერტილზე:

$$\underline{\partial}_{\,\widehat{y}}\varphi(p_0) = \varliminf_{\substack{y\to y_0\\ |x-x_0|\leq\ell|y-y_0|}} \frac{\varphi(x,y)-\varphi(x,y_0)}{y-y_0}\,, \quad \ell \geq 0. \quad (12)$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 8.5.2. ვთქვათ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია ფართო აზრით ქვემოდან დიფერენცირებადია p_0 წერტილზე და ერთ-ერთი ცვლადით მას აქვს სასრული კერძო წარმოებული p_0-ზე. მაშინ $\varphi(x,y)$-ს p_0 წერტილზე აქვს სასრული ქვედა კუთხური კერძო წარმოებული დარჩენილი ცვლადით.

8.6. შენიშვნები

1. ზემოთ ჩვენ ვისარგებლეთ იმით (იხ. 8.4.(17) უტოლობა), რომ ერთი ცვლადის $f(x)$ ფუნქციისთვის სასრული $f'(x_0)$ წარმოებულის არსებობა ეკვივალენტურია როგორც

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=0, \tag{1}$$

ისე

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{|x-x_0|}=0 \tag{2}$$

ტოლობის (იხ. შენიშვნა 2.4.3).

შენიშვნა 8.6.1. ვთქვათ, სასრული A მუდმივისთვის ადგილი აქვს

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\,\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{|x-x_0|}=0 \tag{3}$$

ტოლობას.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) თუ $x>0$, მაშინ (3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A\right]\le 0.$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}}\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le A \tag{4}$$

უტოლობას (იხ. თავი I-დან ტოლობა 1.10.(10)), რომლის მარცხენა მხარე სასრულია.

2) როცა $x < x_0$, მაშინ (3) იღებს სახეს:

$$\overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}}\Big[-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+A\Big]\le 0,\quad \overline{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}}\Big[-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Big]\le -A.$$

აქედან ვიღებთ (იხ. თავი I, 1.10.(17) ტოლობა)

$$\underline{\lim}_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge A, \tag{5}$$

ისევ სასრული მარცხენა მხარით.

(4) უტოლობის მარცხენა მხარეს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **მარჯვენა ზედა წარმოებული რიცხვი** x_0 წერტილზე და აღინიშნება $\overline{f}^{\,+}(x_0)$ სიმბოლოთი. ანალოგიურად, (5) უტოლობის მარცხენა მხარეს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **მარცხენა ქვედა წარმოებული რიცხვი** x_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\underline{f}^{-}(x_0)$ (იხ. [54], გვ. 166).

მაშასადამე, (3)-დან გამომდინარეობს

$$\overline{f}^{\,+}(x_0)\le A\le \underline{f}^{-}(x_0) \tag{6}$$

სასრულწევრებიანი დამოკიდებულებანი.

როცა $\underline{f}^{-}(x_0)=\overline{f}^{\,+}(x_0)$, მაშინ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს $(x_0,f(x_0))$ წერტილზე აქვს ზედა ექსტრემული მხები $y-f(x_0)=k(x-x_0)$, რომლის კუთხური k კოეფიციენტი ტოლია ურთიერთმოპირდაპირე $\underline{f}^{-}(x_0)$ და $\overline{f}^{\,+}(x_0)$ წარმოებული რიცხვების საერთო მნიშვნელობის (იხ. 1.17.2 შედეგის მომდევნო აბზაცი). შებრუნებით, თუ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს $(x_0,f(x_0))$ წერტილზე აქვს ზედა ექსტრემული მხები $y-f(x_0)=k(x-x_0)$, სადაც $k\ne\pm\infty$, მაშინ $\underline{f}^{-}(x_0)=\overline{f}^{\,+}(x_0)$ (იხ. [54], გვ. 388).

მაშასადამე, მართებულია შემდეგი

წინადადება 8.6.1 ([54], გვ. 448). სასრულწევრებიანი $\underline{f}^{-}(x_0) = \overline{f}^{+}(x_0)$ ტოლობის საერთო მნიშვნელობა შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც ზედა დიფერენციალი $f(x)$ ფუნქციისა x_0 წერტილზე. გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე ზედა ექსტრემული მხების არსებობას სასრული კუთხური $\underline{f}^{-}(x_0) = \overline{f}^{+}(x_0)$ კოეფიციენტით.

უკანასკნელი წინადადებიდან ჩანს, რომ x_0 წერტილზე $f(x)$ ფუნქციის ზედა $\underline{f}^{-}(x_0) = \overline{f}^{+}(x_0)$ დიფერენციალი არ უკავშირდება, საზოგადოდ, ამავე წერტილზე $f(x)$ ფუნქციის ზედა $\overline{f}'(x_0)$ წარმოებულს (იხ. 1.16).

2. ახლა ვნახოთ, თუ რა შეესაბამება ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებადობას ისევ ერთი ცვლადის $f(x)$ ფუნქციისთვის.

თუ $f(x)$ ფუნქცია ფართო აზრით ზემოდან დიფერენცირებადია x_0 წერტილზე, მაშინ (3) ტოლობა შესრულებულია ერთადერთი სასრული A რიცხვისთვის და (6) დამოკიდებულებებიდან ვიღებთ:

$$\underline{f}^{-}(x_0) = A = \overline{f}^{+}(x_0). \tag{7}$$

შებრუნებით, თუ ადგილი აქვს $\underline{f}^{-}(x_0) = \overline{f}^{+}(x_0)$ ტოლობას, მაშინ (3) შესრულებულია ერთადერთი სასრული A რიცხვისთვის, რომელიც ტოლია როგორც $\underline{f}^{-}(x_0)$, ისე $\overline{f}^{+}(x_0)$ რიცხვის.

ამრიგად, მართებულია

წინადადება 8.6.2. ერთი ცვლადის $f(x)$ ფუნქციის ზემოდან (ქვემოდან) დიფერენცირებადობა და ფართო აზრით ზემოდან (ქვემოდან) დიფერენცირებადობა ერთსა და იმავე x_0 წერტილზე, ურთიერთეკვივალენტური ცნებებია.

შენიშვნა 8.6.2. თუ რაიმე სასრული B რიცხვისთვის სრულდება

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - B(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \tag{8}$$

ტოლობა, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილზე აქვს ზედა $\overline{f}\,'(x_0)$ წარმოებული (იხ. 1.16; [54]-ში 165 და 389 გვერდებზე გამოყენებულია სიმბოლო $\overline{f}(x_0)$) და ადგილი აქვს $B=\overline{f}\,'(x_0)$ ტოლობას.

შედეგი 8.6.1. (3) და (8) ტოლობები არ არიან ურთიერთეკვივალენტურნი, განსხვავებით ურთიერთეკვივალენტური (1) და (2) ტოლობებისა.

ამრიგად, ზღვრის ჩანაცვლებამ ზედა ზღვრით დაარღვია ტოლობათა ეკვივალენტობა. ეს ნიშნავს, რომ არაეკვივალენტურ ტოლობებში ზედა ზღვრის ჩანაცვლებამ ზღვრით შეიძლება წარმოშვას ეკვივალენტური ტოლობები.

§ 9. ორი ცვლადის ფუნქციის გლუვობა და ცალმხრივ დიფერენცირებადობა

ერთი ცვლადის ფუნქციის სასრული ცალმხრივი წარმოებულის (იხ. გვ. 159) და გლუვობის (იხ. გვ. 165) ცნებანი, რომელთა ერთდროულობა რომელიმე ფუნქციისთვის რაიმე წერტილზე ეკვივალენტურია ამ ფუნქციის დიფერენცირებადობის იმავე წერტილზე, შეიძლება გავრცელდეს ორი ცვლადის ფუნქციაზე შემდეგნაირად:

1. განსაზღვრა 9.1 ([110′]). (x_0,y_0) წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება **გლუვი** (x_0,y_0) წერტილზე, თუ სრულდება ტოლობა

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)+f(x_0-h,y_0-k)-2f(x_0,y_0)}{|h|+|k|}=0. \quad (1)$$

ცხადია, რომ f ფუნქციის გლუვობა (x_0,y_0) წერტილზე იწვევს კერძო $f(x,y_0)$ და $f(x_0,y)$ ფუნქციების გლუვობას x_0 და y_0 წერტილებზე, შესაბამისად.

წინადადება 9.1 ([110′]). დიფერენცირებადობის წერტილის მქონე ფუნქცია გლუვია იმავე წერტილზე, შებრუნებით კი არა.

დამტკიცება. f ფუნქციის დიფერენციარებადობა (x_0, y_0) წერტილზე ნიშნავს ტოლობას (II, 3.5)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk}{|h|+|k|} = 0, \qquad (2)$$

სადაც $A = f'_{\widehat{x}}(x_0, y_0)$ და $B = f'_{\widehat{y}}(x_0, y_0)$.

ახლა f-ის გლუვობა (x_0, y_0) წერტილზე გამომდინარეობს

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k) + f(x_0-h, y_0-k) - 2f(x_0, y_0)}{|h|+|k|} =$$
$$= \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk}{|h|+|k|} +$$
$$+ \frac{f(x_0-h, y_0-k) - f(x_0, y_0) - A(-h) - B(-k)}{|-h|+|-k|} \qquad (3)$$

ტოლობიდან, რადგანაც მისი მარჯვენა მხარე ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h,k) \to (0,0)$. შებრუნებული წინადადების მცდარობას ადასტურებს მაგალითები.

2. რადგანაც სიმეტრიული დიფერენცირებადობა არ იწვევს დიფერენცირებადობას (II, თეორემა 7.3.1), ამიტომ აუცილებელია გაირკვეს, თუ რა დამატებითი თვისება უზრუნველყოფს დიფერენცირებადობას. ამასთან დაკავშირებით მართებულია

წინადადება 9.2 ([110′]). (x_0, y_0) წერტილზე სიმეტრიულად დიფერენცირებადი f ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის ამავე წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია f-ის გლუვობა (x_0, y_0)-ზე.

დამტკიცება. ეს გამომდინარეობს

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k) + f(x_0-h, y_0-k) - 2f(x_0, y_0)}{|h|+|k|} +$$
$$+ \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0-h, y_0-k) - 2Ah - 2Bk}{|h|+|k|} =$$

$$= 2\,\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-Ah-Bk}{|h|+|k|} \quad (4)$$

ტოლობიდან.

3. ახლა შემოვიღოთ მარჯვნიდან (მარცხნიდან) დიფერენცირებადობა და დავამტკიცოთ, რომ იგი გლუვობასთან ერთად უზრუნველყოფს დიფერენცირებადობას.

განსაზღვრა 9.2 ([110′]). f ფუნქციას ეწოდება მარჯვნიდან დიფერენცირებადი (x_0,y_0) წერტილზე, თუ რაიმე სასრული A^+ და B^+ მუდმივებისთვის სრულდება

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\in A_{12}^+}} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-A^+h-B^+k}{|h|+|k|} = 0, \quad (5)$$

ტოლობა და f-ის მარჯვენა დიფერენციალი (x_0,y_0) წერტილზე, სიმბოლურად $d^+f(x_0,y_0)$, ვუწოდოთ წრფივ A^+h+B^+k ფუნქციას, როცა $(h,k)\in A_{12}^+$ და დავწეროთ

$$d^+f(x_0,y_0) = A^+h+B^+k. \quad (6)$$

განსაზღვრა 9.3 ([110′]). f ფუნქციას ეწოდება მარცხნიდან დიფერენცირებადი (x_0,y_0) წერტილზე, თუ რაიმე სასრული A^- და B^- მუდმივებისთვის მართებულია

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\in A_{12}^-}} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-A^-h-B^-k}{|h|+|k|} = 0, \quad (7)$$

ტოლობა და f-ის მარცხენა დიფერენციალი (x_0,y_0) წერტილზე, სიმბოლურად $d^-f(x_0,y_0)$, ვუწოდოთ წრფივ A^-h+B^-k ფუნქციას, როცა $(h,k)\in A_{12}^-$ და დავწეროთ

$$d^-f(x_0,y_0) = A^-h+B^-k. \quad (8)$$

ამ განსაზღვრებებში მონაწილე A_{12}^+ და A_{12}^- სიმრავლეების შესახებ იხ. პუნქტი 10.3 თავი I-დან.

ცხადია შემდეგი

წინადადება 9.3. 1) (x_0, y_0) წერტილზე დიფერენცირებადი f ფუნქცია ორივე მხრიდან დიფერენცირებადია იმავე წერტილზე და

$$A^+ = A^- = f'_{\widehat{x}}(x_0, y_0), \quad B^+ = B^- = f'_{\widehat{y}}(x_0, y_0),$$
$$d^+ f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) = d^- f(x_0, y_0);$$

2) თუ f ფუნქცია ორივე მხრიდან დიფერენცირებადია (x_0, y_0) წერტილზე და $A^+ = A^-$, $B^+ = B^-$, მაშინ f დიფერენცირებადია (x_0, y_0)-ზე.

თეორემა 9.1 ([110′]). (x_0, y_0) წერტილზე გლუვი f ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის იმავე წერტილზე, აუცილებელია და საკმარისი ერთ-ერთი მხრიდან f-ის დიფერენცირებადობა (x_0, y_0)-ზე.

დამტკიცება. ნებისმიერი სასრული A და B მუდმივებისთვის მართებულია

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k) + f(x_0-h, y_0-k) - 2f(x_0, y_0)}{|h|+|k|} =$$
$$= \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk}{|h|+|k|} +$$
$$+ \frac{f(x_0-h, y_0-k) - f(x_0, y_0) - A(-h) - B(-k)}{|-h|+|-k|} \qquad (9)$$

ტოლობა. f ფუნქციის გლუვობის გამო (x_0, y_0) წერტილზე, (9) ტოლობის მარცხენა მხარე ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h, k) \to (0, 0)$, კერძოდ $(h, k) \in A_{12}^+$ პირობის შესრულებისას. შემდეგ, f ფუნქციის მარჯვნიდან დიფერენცირებადობისას (x_0, y_0) წერტილზე, (9) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები ისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $(h, k) \to (0, 0)$ ისე, რომ $(h, k) \in A_{12}^+$. ამიტომ (9) ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრებიც ისწრაფვის ნულისკენ, როცა

$(h,k) \to (0,0)$ და $(h,k) \in A_{12}^{+}$. ეს ნიშნავს f-ის მარცნიდან დიფერენცირებადობას (x_0,y_0) წერტილზე, რადგანაც $(-h,-k) \in A_{12}^{-}$.

ამრიგად, $d^{+}f(x_0,y_0) = Ah + Bk$, $d^{-}f(x_0,y_0) = Ah + Bk$. აქედან კი გამომდინარეობს, წინადადება 9.3-დან მტკიცება 2)-ის ძალით, f ფუნქციის დიფერენცირებადობა (x_0,y_0) წერტილზე.

თ ა ვ ი III

ორჯერ დიფერენცირებადობა, ბეტაცისმიერი წარმოებული და შერეული კერძო წარმოებულები

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

მრავალი ცვლადის ფუნქციებისთვის სრულიად ბუნებრივი და აუცილებელია, პირველი რიგის კერძო წარმოებულების და დიფერენციალის გვერდით განხილულ იქნას მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალები. ამ თვალსაზრისით უპირველესად განიხილება მეორე რიგის კერძო წარმოებულები და დიფერენციალი. ამასთან ერთად, ორცვლადიანი ფუნქციისთვის განხილულია ე. წ. ბეტაცისმიერი წარმოებული და მისი კავშირი შერეულ კერძო წარმოებულთან.

ამ თავის მასალა პარაგრაფებში ასეა გადანაწილებული.

§ 1. მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულებისთვის უმთავრესი პრობლემაა იმ პირობების დადგენა, რომელნიც უზრუნველყოფენ მათ ტოლობას. ამ მიმართულებით ფუნდამენტური მნიშვნელობისაა უ. იანგის კლასიკური “ლოკალური” თეორემა. ამავე დროს, ადგილი აქვს ტოლსტოვის “გლობალურ” თეორემას. ამას უსწრებს ტოლსტოვის უარყოფითი ხასიათის შედეგები, მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულების უტოლობის წერტილთა სიმრავლის შესაძლო სიფართოვის შესახებ. აქვე არის ჭელიძის საკმარისი პირობები მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულების ტოლობისთვის.

§ 2. პირველი რიგის დიფერენციალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ბუნებრივად ვრცელდება მაღალი რიგის დიფერენციალზე, უპირველესად მეორე რიგის დიფერენციალზე. აქვეა ორცვლადიანი ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობის სხვა საკმარისი პირობაც.

მოცემულია უ. იანგის თეორემის გავრცელება n ცვლადის ორჯერ დიფერენცირებად ფუნქციაზე, მისი შერეული კუთხური კერძო წარმოებულების ტოლობის შესახებ.

ორჯერ დიფერენცირებადი ორი ცვლადის ფუნქციისთვის, გარდა ამისა, დადგენილია მისი მეორე რიგის შერეული კუთხური კერძო წარმოებულების ტოლობა მისივე რეგულარულ წარმოებულთან.

§ 3. ორცვლადიანი ფუნქციისთვის ბეტაცის მიერ 1884 წლის შრომაში შემოღებული იყო წარმოებულის ცნება, რომელსაც სეგმენტის ფუნქციებთან კავშირში შემდგომ ეწოდა ძლიერი წარმოებული. ავტორს მართლზომიერად მიაჩნია, რომ ბეტაცის მიერ შემოღებულ წარმოებულს ეწოდოს **ბეტაცისმიერი წარმოებული**, ხოლო მის აღსანიშნავად კი შენარჩუნებულ იქნას ძლიერი წარმოებულისთვის უკვე დამკვიდრებული სიმბოლო.

დადგენილია ბეტაცისმიერი წარმოებულის თვისებანი, ამ წარმოებულის კავშირები უწყვეტობასთან, დიფერენცირებადობასთან და შერეულ კერძო წარმოებულთან. გამოვლენილია დიფერენცირებადობის კავშირი შერეული კერძო წარმოებულის ზღვართან (უწყვეტობასთან).

§ 1. მაღალი რიგის კერძო წარმოებულები

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x^0 = (x_1, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ წერტილის $U(x^0, \delta)$ მიდამოში, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U(x^0, \delta)$, $\delta > 0$.

დავუშვათ, რომ f ფუნქციას ყოველ $x \in U(x^0, \delta)$ წერტილზე აქვს სასრული კერძო წარმოებული რომელიმე x_i ცვლადით, სიმბოლურად $f'_{x_i}(x)$ ან $\partial_{x_i} f(x)$. მას ეწოდება f ფუნქციის x_i ცვლადით პირველი რიგის კერძო წარმოებული x წერტილზე (იხ. თავი II, 2.1.(2) ტოლობა).

ცხადია, რომ ეს კერძო წარმოებული არის $U(x^0, \delta)$ მიდამოში განსაზღვრული x-ის სასრული ფუნქცია და შესაძლოა მას, თავის მხრივ, ჰქონდეს კერძო წარმოებული რომელიმე x_j ცვლადით x წერტილზე, სიმბოლურად $f''_{x_i,x_j}(x)$ ან $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x)$. ამას კი ეწოდება f ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებული x წერტილზე ჯერ x_i

ცვლადით და შემდეგ x_j ცვლადით ანუ, მოკლედ, მეორე რიგის კერძო წარმოებული x_i, x_j ცვლადების მიმართ x წერტილზე.

თუ $j \neq i$, მაშინ მას ეწოდება f ფუნქციის x_i, x_j ცვლადებით მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებული x წერტილზე.

თუ $j = i$, მაშინ მას ეწოდება მეორე რიგის კერძო წარმოებული x_i ცვლადით x წერტილზე და წერენ $f''_{x_i^2}(x)$ ან $\partial^2_{x_i} f(x)$ (აქ $\partial^2_{x_i} f(x) = \partial_{x_i}\partial_{x_i} f(x)$).

ამბობენ, რომ f ფუნქციას x_k ცვლადით აქვს ყველა რიგის კერძო წარმოებული x წერტილზე, თუ ყველა $p = 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობისთვის სასრულია x_k ცვლადით მისი p რიგის კერძო წარმოებული x წერტილზე, სიმბოლურად $\partial^p_{x_k} f(x)$ ან $\frac{\partial^p}{\partial x_k^p} f(x)$.

შესაძლოა, f ფუნქციას $x \in U(x^0, \delta)$ წერტილზე ჰქონდეს მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებული x_j, x_i ცვლადებით; ესე იგი ჯერ x_j ცვლადით და შემდეგ x_i ცვლადით*, სიმბოლურად $f''_{x_j,x_i}(x)$ ან $\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x)$.

1.1. მაგალითები შერეულ კერძო წარმოებულებზე

მეორე რიგის შერეულ კერძო წარმოებულთათვის მთავარია პასუხი კითხვაზე: f ფუნქციის რა თვისება უზრუნველყოფს

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x) = \partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x) \tag{1}$$

ტოლობას? (1)-ით გამოხატულ თვისებას ზოგჯერ ეწოდება f ფუნქციისთვის მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულების სიმეტრიულობა x წერტილზე ანუ x_i და x_j ცვლადებით გაწარმოების რიგის შენაცვლების თვისება.

საზოგადოდ, როგორც ამას გვიჩვენებს სხვადასხვა მაგალითი, ადგილი აქვს

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} f(x) \neq \partial_{x_j}\partial_{x_i} f(x) \tag{2}$$

*როგორც ვხედავთ, გაწარმოების თანამიმდევრობა სიმბოლიკაში დაფიქსირებულია ცვლადებს შორის გრამატიკული ნიშნის – “მძიმის” დასმით.

უტოლობას. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ორი მაგალითი. პირველ შემთხვევაში (2) ტოლობის ერთი მხარე არსებობს და მეორე კი არა. მეორე შემთხვევაში (2)-ის ორივე მხარე სასრულია, მაგრამ ურთიერთგანსხვავებული (ამ მეორე მაგალითს სხვა დანიშნულებაც აქვს სამომავლოდ).

მაგალითი 1.1.1. განვიხილოთ $\varphi(x_1, x_2) = \alpha(x_1) + \beta(x_2)$ ფუნქცია, სადაც $\alpha(x_1)$ არის ყველა $x_1 \in \mathbb{R}$ წერტილზე სასრული წარმოებულის მქონე ფუნქცია, ხოლო $\beta(x_2)$ ფუნქცია წარმოებულს მოკლებულია ყველგან (იხ. თავი II, 1.14). მაშინ $\partial_{x_2}\partial_{x_1}\varphi(x_1, x_2) = \partial_{x_2}\alpha'(x_1) = 0$ ყველა (x_1, x_2) წერტილზე და $\partial_{x_1}\partial_{x_2}\varphi(x_1, x_2)$-ის არსებობის (x_1, x_2) წერტილთა სიმრავლე კი ცარიელია, რადგანაც $\partial_{x_2}\varphi(x_1, x_2) = \beta'(x_2)$-ის არსებობის x_2 წერტილთა სიმრავლეა ცარიელი.

მაგალითი 1.1.2 ([23], გვ. 153)**.** დავამტკიცოთ, რომ

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \cdot x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{როცა } \ x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ 0, & \text{როცა } \ x_1 = 0 = x_2 \end{cases} \tag{3}$$

ფუნქციისთვის ადგილი აქვს

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1}\psi(0,0) \neq \partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi(0,0) \tag{4}$$

უტოლობას (იხ. შედეგი 1.1.1 ქვემოთ).

თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ თითოეულ საკოორდინატო ღერძზე მდებარე ყველა წერტილზე გვაქვს $\psi = 0$. ეს გამომდინარეობს (3) ტოლობის ზედა სტრიქონიდან, როცა $x_1 \cdot x_2$ ნამრავლის ერთ-ერთი მამრავლია ნული და გამომდინარეობს მეორე სტრიქონიდან, როცა ორივე ცვლადია ნული (ასეთია $\psi(x_1, x_2)$ ფუნქციის განსაზღვრის წესი). ამრიგად, $\psi(0, x_2) = \psi(x_1, 0) = \psi(0,0) = 0$. (4) უტოლობის მარცხენა მხარის საპოვნელად ჯერ უნდა ვიპოვოთ $\psi(x_1, x_2)$ ფუნქციის კერძო წარმოებული x_1 ცვლადით $(0, x_2)$ წერტილებზე, რაც აღინიშნება $\psi_{x_1}\psi(0, x_2)$ სიმბოლოთი. ეს უკანასკნელი კი არის x_2 ცვლადის ფუნქცია და უნდა ვიპოვოთ მისი წარმოებული $x_2 = 0$

მნიშვნელობისთვის, ე. ი. უნდა ვიპოვოთ $(\partial_{x_1}\psi(0,x_2))'(0)$. ანალოგიურად, (4) უტოლობის მარჯვენა მხარე არის $(\partial_{x_2}\psi(x_1,0))'(0)$.

დავიწყოთ (4)-ის მარცხენა მხარის პოვნით, ახლახან აღწერილი თანამიმდევრობით. წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$\partial_{x_1}\psi(0,x_2)=\lim_{x_1\to 0}\frac{\psi(x_1,x_2)-\psi(0,x_2)}{x_1-0}.$$

აქ $x_1\neq 0$ და ამიტომ $\psi(x_1,x_2)$ მნიშვნელობანი მოიცემა (3)-ის ზედა სტრიქონით (ეს ასეა, როცა x_1 და x_2 ცვლადთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისგან; სწორედ ამას ნიშნავს $x_1^2+x_2^2>0$ პირობა). ამასთან ერთად, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $\psi(0,x_2)=0$. ამიტომ $x_2\neq 0$ პირობის შემთხვევაში გვაქვს:

$$\partial_{x_1}\psi(0,x_2)=\lim_{x_1\to 0}\frac{\psi(x_1,x_2)}{x_1}=\lim_{x_1\to 0}x_2\,\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}=$$
$$=x_2\,\frac{-x_2^2}{x_2^2}=-x_2.$$

თუკი $x_2=0$, მაშინ $\partial_{x_1}\psi(0,0)$ ნიშნავს $\psi(x_1,0)=0$ ფუნქციის წარმოებულს $x_1=0$ წერტილზე. ამიტომ $\partial_{x_1}\psi(0,0)=0$. მაშასადამე,

$$\partial_{x_1}\psi(0,x_2)=\begin{cases}-x_2, & \text{როცა }\ x_2\neq 0,\\ 0, & \text{როცა }\ x_2=0.\end{cases}\tag{5}$$

როგორც უკვე ვთქვით, $\partial_{x_2}\partial_{x_1}\psi(0,0)$ ნიშნავს $\frac{d}{dx_2}\,\partial_{x_1}\psi(0,x_2)$ წარმოებულს $x_2=0$ წერტილზე. ამასთან, $\frac{d}{dx_2}\,\partial_{x_1}\psi(0,x_2)$-ის $x_2=0$ წერტილზე გამოსათვლელ ტოლობაში, ზღვრის შიგნით აუცილებელია $x_2\neq 0$ პირობის დაცვა (წარმოებულის ცნება თხოულობს ამას!). ამიტომ, (5) ტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\frac{d}{dx_2}\,\partial_{x_1}\psi(0,0)=\lim_{x_2\to 0}\frac{\partial_{x_1}\psi(0,x_2)-\partial_{x_1}\psi(0,0)}{x_2-0}=$$
$$=\lim_{x_2\to 0}\ \frac{-x_2-0}{x_2}=\lim_{x_2\to 0}(-1)=-1.$$

ამრიგად,

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1}\psi(0,0) = -1. \tag{6}$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

$$\partial_{x_2}\psi(x_1,0) = \begin{cases} x_1, & \text{როცა} \ \ x_1 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \ \ x_1 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

და

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi(0,0) = 1. \tag{8}$$

ამით (4) უტოლობა დადგენილია.

შედეგი 1.1.1. (3) ტოლობით განსაზღვრული $\psi(x_1,x_2)$ ფუნქციის $\operatorname{grad}\psi(x_1,x_2)$ უწყვეტია ყველგან და ამიტომ ყველგან არსებობს $d\psi(x_1,x_2)$ დიფერენციალი და სასრული $\operatorname{strgrad}\psi(x_1,x_2)$ ძლიერი გრადიენტი.

დამტკიცება. როცა $(x_1,x_2)\neq(0,0)$, მაშინ (3) ტოლობის პირველი სტრიქონიდან ვიღებთ:

$$\psi'_{x_1}(x_1,x_2) = \frac{x_2(x_1^4 - x_2^4 + 4x_1^2x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}\,, \ \ \text{როცა} \ \ x_1^2+x_2^2>0, \tag{9}$$

$$\psi'_{x_2}(x_1,x_2) = \frac{x_1(x_1^4 - x_2^4 - 4x_1^2x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}\,, \ \ \text{როცა} \ \ x_1^2+x_2^2>0. \tag{10}$$

აქედან ჩანს, რომ კერძო წარმოებულები წარმოადგენენ უწყვეტი ფუნქციების შეფარდებას და ამასთან მათი მნიშვნელი $(x_2^2+x_2^2)\neq 0$, რადგანაც $x_2^2+x_2^2>0$. ეს კი იწვევს $\psi'_{x_1}(x_1,x_2)$ და $\psi'_{x_2}(x_1,x_2)$ კერძო წარმოებულების უწყვეტობას $(0,0)$-გან განსხვავებულ ყველა (x_1,x_2) წერტილზე.

$\psi'_{x_1}(x_1,x_2)$ კერძო წარმოებულის უწყვეტობა $(0,0)$ წერტილზე გამომდინარეობს, $\psi'_{x_1}(0,0)=0$ ტოლობის (იხ. (5) ტოლობის მეორე სტრიქონი) გათვალისწინებით,

$$\left|\psi'_{x_1}(x_1,x_2)\right| \leq \frac{|x_2|(x_1^4+x_2^4+2x_1^2x_2^2+2x_1^2x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2} \leq$$

$$\leq \frac{|x_2|\,[(x_1^2+x_2^2)^2+x_1^4+x_2^4]}{(x_1^2+x_2^2)^2} \leq$$

$$\leq \frac{|x_2|\,[(x_1^2+x_2^2)^2+(x_1^2+x_2^2)^2]}{(x_1^2+x_2^2)^2} =$$

$$= 2|x_2| \to 0, \;\; x_2 \to 0$$

შეფასებებიდან. ამრიგად,

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \psi'_{x_1}(x_1,x_2) = \psi'_{x_1}(0,0), \tag{11}$$

რაც ნიშნავს $\psi'_{x_1}(x_1,x_2)$ კერძო წარმოებულის უწყვეტობას $(0,0)$ წერტილზე. ანალოგიურად მტკიცდება $\psi'_{x_2}(x_1,x_2)$ კერძო წარმოებულის უწყვეტობა იმავე $(0,0)$ წერტილზე.

სრული $d\psi$ დიფერენციალისა და სასრული $\operatorname{strgrad}\psi(x_1,x_2)$-ის ყველგან არსებობა გამომდინარეობს $\operatorname{grad}\psi(x_1,x_2)$-ის ყველგან უწყვეტობიდან (იხ. თავი II, 4.2. და 4.4).

შენიშვნა 1.1.1. (4) უტოლობა და უ. იანგის თეორემა (იხ. შენიშვნა 1.3.2 ქვემოთ) გვიჩვენებენ, რომ $\psi(x_1,x_2)$ ფუნქცია არ არის ორჯერ დიფერენცირებადი $(0,0)$ წერტილზე (ორჯერ დიფერენცირებადობის ცნება იხილე 2.1-ში ქვემოთ). ამასთან, $\psi(x_1,x_2)$ ფუნქციას აქვს ყველა რიგის სრული დიფერენციალი $(0,0)$-გან განსხვავებულ ნებისმიერ წერტილზე (მისი ყველა რიგის კერძო წარმოებულის უწყვეტობის გამო ასეთ წერტილებზე) და ამიტომ, ისევ უ. იანგის თეორემის ძალით,

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1}\psi(x_1,x_2) = \partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi(x_1,x_2) \tag{12}$$

ტოლობა სრულდება ყველა $(x_1,x_2)\neq(0,0)$ წერტილზე.

1.2. ტოლსტოვის შედეგები შერეული კერძო წარმოებულების უტოლობის შესახებ

როგორც ვნახეთ, 1.1.(3) ტოლობით განსაზღვრული $\psi(x_1,x_2)$ ფუნქციის გრადიენტი უწყვეტია ყველგან (იხ. შედეგი 1.1.1) და

1.1.(2) უტოლობას იგი აკმაყოფილებს ერთადერთ $(0,0)$ წერტილზე.

სავსებით ბუნებრივია კითხვა: ყველგან უწყვეტი გრადიენტის მქონე ზოგიერთი ფუნქციისთვის რამდენად ფართო შეძლება იყოს სიმრავლე იმ წერტილებისა, რომელთათვისაც სრულდება 1.1.(2) უტოლობა?

ამ კითხვასთან დაკავშირებით ადგილი აქვს შემდეგ დებულებებს, სადაც K-ით აღნიშნულია $\{(x_1,x_2): \ 0\le x_1\le 1, \ 0\le x_2\le 1\}$ კვადრატი.

თეორემა 1.2.1 ([63], წინადადება II)**.** არსებობს K^0-ში უწყვეტი გრადიენტის მქონე $F(x_1,x_2)$ ფუნქცია, რომელსაც K^0-ში თითქმის ყველა წერტილზე აქვს ორივე მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებული და

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2}F(x_1,x_2)\neq\partial_{x_2}\partial_{x_1}F(x_1,x_2) \tag{1}$$

უტოლობა შესრულებულია თითქმის ყველა $(x_1,x_2)\in K^0$ წერტილზე*.

მაშასადამე, არსებობს K^0-ში უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომელსაც თითქმის ყველგან K^0-ში აქვს ორივე მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებული და ისინი ერთიმეორისგან განსხვავდებიან თითქმის ყველგან (უწყვეტად დიფერენცირებადობის ცნება იხ. 2.3-ში თავი II-დან).

თეორემა 1.2.2 ([63], წინადადება I)**.** ყოველი დადებითი $\eta<\frac{1}{2}$ რიცხვისთვის არსებობს $\Psi(x_1,x_2)$ ფუნქცია, რომელსაც K^0-ში აქვს ორივე მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებული და უწყვეტი გრადიენტი. ამასთან ერთად, არსებობს η^2 ბრტყელი ზომის მქონე ზომადი ისეთი $Q\subset K$ სიმრავლე, რომ ყოველ $(x_1,x_2)\in Q^0$ წერტილზე სრულდება

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2}\Psi(x_1,x_2)\neq\partial_{x_2}\partial_{x_1}\Psi(x_1,x_2) \tag{2}$$

---

*E^0 აღნიშნავს E სიმრავლის **შიგნეულს** (E-ს ყველა შიგა წერტილის სიმრავლეს).

უტოლობა და Q-ს დამატებაზე კი შერეული კერძო წარმოებულები ტოლია**.

1.3. უ. იანგის, ტოლსტოვისა და ჭელიძის შედეგები შერეული კერძო წარმოებულების ტოლობის შესახებ

აქ მოცემული იქნება მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულების ტოლობის საკმარისი პირობები.

თეორემა 1.3.1 ([62], თეორემა 8)**.** თუ $\phi(x_1, x_2)$ ფუნქციას G არეში ყველგან აქვს სასრული $\partial^2_{x_1}\psi$, $\partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi$, $\partial_{x_2}\partial_{x_1}\psi$ და $\partial^2_{x_2}\psi$ წარმოებულები, მაშინ სასრულწევრებიანი

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1}\phi(x_1, x_2) = \partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi(x_1, x_2) \tag{1}$$

ტოლობა სრულდება თითქმის ყველა $(x_1, x_2) \in G$ წერტილზე.

შენიშვნა 1.3.1. თეორემა 1.3.1-ის პირობები ვერ უზრუნველყოფს, საზოგადოდ, (1) ტოლობის ყველგან შესრულებას. ამას ადასტურებს 1.1.(3) ტოლობით განსაზღვრული $\psi(x_1, x_2)$ ფუნქცია. მართლაც, მისი ყველა მეორე რიგის კერძო წარმოებულის სასრულობა და შერეული კერძო წარმოებულების ტოლობა ნებისმიერ $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ წერტილზე, გამომდინარეობს 1.1.(9) და 1.1.(10) ტოლობებიდან. შერეული კერძო წარმოებულების სასრულობა $(0, 0)$ წერტილზე, ჩანს 1.1.(6) და 1.1.(8) ტოლობებიდან. შემდეგ, სიდიდე $\partial^2_{x_1}\psi(0, 0)$ ნიშნავს $(\partial_{x_1}\psi(x_1, 0)'(0)$ წარმოებულს. ამიტომ $\partial_{x_1}\psi(x_1, 0)$-ში უნდა შესრულდეს $x_1 \neq 0$ პირობა, რაც იწვევს $\partial_{x_1}\psi(x_1, 0) = 0$ ტოლობას, თანახმად 1.1.(9) ტოლობისა. ამრიგად, $\partial^2_{x_1}\psi(0, 0) = (0)'(0) = 0$. ასევე მიიღება $\partial^2_{x_2}\psi(0, 0) = 0$ ტოლობაც. მაშასადამე, $\psi(x_1, x_2)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს თეორემა 1.3.1-ის პირობებს ყველა $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

**ეს ფორმულირება ოდნავ განსხვავდება ავტორისეული ფორმულირებისგან. ავტორი ამბობს, რომ Q სიმრავლის ბრტყელი ზომა დადებითია. მაგრამ თეორემის მტკიცების პროცესში დგინდება, რომ Q-ს ბრტყელი ზომაა $(\frac{\lambda-3}{\lambda-2})^2$ და Q-ს დამატებაზე შერეული კერძო წარმოებულები ტოლია, სადაც $3 < \lambda < 4$ (იხ. [63], გვ. 33).

წერტილზე. მიუხედავად ამისა, როგორც უკვე ვნახეთ, ადგილი აქვს 1.1.(4) უტოლობას.

უკანასკნელი თეორემა აზოგადებს უ. იანგის მიერ ორი ცვლადის ფუნქციისთვის დამტკიცებულ შემდეგ კლასიკურ "ლოკალურ" თეორემას გაწარმოების თანმიმდევრობის შენაცვლების შესახებ (იხ. [6], გვ. 406–408; [7], გვ. 174–175; [122], გვ. 427).

თეორემა 1.3.2 (იანგი უ., 1908–1909.)**.** თუ $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x_1, x_2)$ ფუნქციას აქვს სასრული $\partial_{x_1} f(x_1, x_2)$ და $\partial_{x_2} f(x_1, x_2)$ და თუ ეს კერძო წარმოებულები დიფერენცირებადი ფუნქციებია თვით x^0 წერტილზე, მაშინ ადგილი აქვს სასრულწევრებიან

$$\partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x^0) = \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x^0) \tag{2}$$

ტოლობას და უფრო ძლიერ

$$\partial_{\widehat{x}_2} \partial_{x_1} f(x^0) = \partial_{\widehat{x}_1} \partial_{x_2} f(x^0) \tag{2'}$$

ტოლობასაც* .

შენიშვნა 1.3.2. უ. იანგის ეს თეორემა მოკლედ ასე გამოითქმის: თუ $f(x_1, x_2)$ ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე, მაშინ f-ის მეორე რიგის შერეული კერძო წარმოებულები ტოლია ამ წერტილზე (ორჯერ დიფერენცირებადობის ცნება იხილე ქვემოთ, 2.1-ში).

შენიშვნა 1.3.3. უ. იანგის ამ თეორემის განზოგადებანი მოცემული იქნება ქვემოთ (იხ. 2.4).

შენიშვნა 1.3.4. ტოლსტოვის თეორემა 1.3.1 არ გამომდინარეობს უ. იანგის თეორემა 1.3.2-დან. მართლაც, 1.3.1 თეორემის პირობებიდან გამომდინარეობს $\partial_{x_1} \psi$ და $\partial_{x_2} \psi$ ფუნქციებისთვის კერძო

---

*კერძო $\partial_{x_1} f$ და $\partial_{x_2} f$ წარმოებულების დიფერენცირებადობის გამო x^0 წერტილზე (იხ. II, თეორემა 3.2.1).

წარმოებულების მხოლოდ სასრულობა, რაც არ იწვევს ამ ფუნქციების დიფერენცირებადობას.

პირიქით კი, უ. იანგის თეორემა 1.3.2-ის პირობების ყველგან შესრულება იწვევს ტოლსტოვის 1.3.1 თეორემას.

2. ვთქვათ, ორი ცვლადის $\phi(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $G\subset\mathbb{R}^2$ არეში და ვიგულისხმოთ, რომ ამ ფუნქციას G არეში აქვს სასრული კერძო $p(x,y)=\phi'_x(x,y)$ და $q(x,y)=\phi'_y(x,y)$ წარმოებულები.

ადგილი აქვს ჭელიძის შემდეგ ორ თეორემას.

თეორემა 1.3.3 ([170]). თუ $p(x,y)$ და $q(x,y)$ უწყვეტი ფუნქციებია G არეში და ერთ-ერთი მათგანი, მაგალითად, $p(x,y)$ აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1) $$\left|\frac{p(x,y+k)-p(x,y)}{k}\right|\leq\varphi(x) \tag{3}$$

ჯამებადი რაიმე $\varphi(x)$ ფუნქციისთვის;

2) თითქმის ყველგან G-ში არსებობს სასრული კერძო $p'_y(x,y)$ წარმოებული.

მაშინ თითქმის ყველგან G-ში არსებობს სასრული კერძო $q'_x(x,y)$ წარმოებული და თითქმის ყველა ასეთ წერტილზე ადგილი აქვს

$$q'_x(x,y)=p'_y(x,y) \tag{4}$$

ტოლობას.

თეორემა 1.3.4 ([170]). თუ $A(x_0,y_0)$ წერტილის მიდამოში არსებობს სასრული კერძო $p'_y(x,y)$ წარმოებული და იგი x ცვლადის მიმართ უწყვეტია A წერტილზე, მაშინ არსებობს სასრული $q'_x(x_0,y_0)$ კერძო წარმოებული და ადგილი აქვს

$$p'_y(x_0,y_0)=q'_x(x_0,y_0) \tag{5}$$

ტოლობას.

1.4. მიმდევრობითი წარმოებულები

ვთქვათ, ნამდვილი t ცვლადის $\lambda(t)$ ფუნქცია განსაზღვულია t_0 წერტილის $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ მიდამოში, $\delta>0$. დავუშვათ, რომ ამ მიდამოში არსებობს პირველი რიგის სასრული $\lambda'(t)$, $t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$, წარმოებული. $\lambda(t)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული t_0 წერტილზე, სიმბოლურად $\lambda''(t_0)$, ეწოდება $\lambda'(t)$ ფუნქციის $(\lambda'(t))'(t_0)$ წარმოებულს t_0 წერტილზე, თუ ეს უკანასკნელი არსებობს. ამავე წესით განისაზღვრება მესამე რიგის $\lambda'''(t_0)$ წარმოებული, როცა ის არსებობს. ასე შემდეგ, თუკი ამის საშუალებას იძლევა $\lambda(t)$ ფუნქციის დიფერენციალური თვისებები.

საზოგადოდ, $\lambda(t)$ ფუნქციის n რიგის წარმოებული t_0 წერტილზე ეწოდება λ ფუნქციის $(n-1)$ რიგის $\lambda^{(n-1)}(t)$ წარმოებულის წარმოებულს t_0 წერტილზე, თუ ის არსებობს:

$$\lambda^{(n)}(t_0)=\big(\lambda^{(n-1)}(t)\big)'(t_0).$$

ამ წესით, t_0 წერტილზე მიღებულ წარმოებულებს ეწოდებათ $\lambda(t)$ ფუნქციის **მიმდევრობითი წარმოებულები** (succesive derivatives) t_0 წერტილზე.

მიმდევრობითი n-ური წარმოებული უნდა განვასხვავოთ ე. წ. n-ური სხვაობითი წარმოებულისგან, $n\ge 2$ ([13], გვ. 29–32). ზემოთ შემოღებული მეორე რიგის კერძო წარმოებულები სწორედ მიმდევრობითი მეორე რიგის კერძო წარმოებულებია.

§ 2. მეორე რიგის გრადიენტი, კუთხური და ძლიერი გრადიენტები

2.1. ორჯერ დიფერენცირებადობა

ვთქვათ, $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში განსაზღვრულია $f(x)$ ფუნქცია, $x=(x_1,\dots,x_n)\in U(x^0)$ და დავუშვათ, რომ ყოველ $x\in U(x^0)$ წერტილზე f-ს აქვს სრული $df(x)=f'_{\widehat{x}_1}(x)dx_1+\dots+f'_{\widehat{x}_n}(x)dx_n$ დიფერენციალი.

თუ x ცვლადის $df(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია თვით x^0 წერტილზე, მაშინ f ფუქციას ეწოდება **ორჯერ დიფერენცირებადი** x^0 წერტილზე ([4], გვ. 223; [6], გვ. 411; [7], გვ. 177; [21], გვ. 144; [66], გვ. 411), ე. ი. თუ კუთხური კერძო $f'_{\widehat{x}_1}(x), \dots, f'_{\widehat{x}_n}(x)$ წარმოებულებია* დიფერენცირებადი x^0-ზე.

1. უკვე ვიცით, რომ $df(x)$ დიფერენციალის არსებობისთვის აუცილებელია და საკმარისი $\operatorname{anggrad} f(x)$-ის ანუ, რაც იგივეა, $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{\widehat{x}_k}(x)\, dx_k$ ჯამის სასრულობა (იხ. თავი II, თეორემები 3.2.1 და 3.2.2). ამიტომ მართებულია შემდეგი

თეორემა 2.1.1 ([102], [107]). f ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია $(f_{\widehat{x}_i}(x))'_{\widehat{x}_j}(x^0)$ სიდიდეების სასრულობა $i = 1, \dots, n$ და $j = 1, \dots, n$ მნიშვნელობებისთვის.

f ფუნქციის **მეორე რიგის კუთხური გრადიენტი** x^0 წერტილზე ვუწოდოთ მატრიცს, რომლის ელემენტებია x^0 წერტილზე f-ის ყველა მეორე რიგის კუთხური $(f'_{\widehat{x}_i}(x))'_{\widehat{x}_j}(x^0)$ კერძო წარმოებული და იგი აღვნიშნოთ $\operatorname{anggrad}^{(2)}(x^0)$ სიმბოლოთი.

ახლა თეორემა 2.1.1 ასე ყალიბდება.

თეორემა 2.1.2 ([102], [107]). $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობისთვის $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია x^0 წერტილზე სასრული იყოს **მეორე რიგის**

---

*როგორც ვიცით (იხ. II, 2.4.1 და 3.2.1 შენიშვნები), აქამდე ცნობილი არ იყო დიფერენცირებადობის აუცილებელი პირობა, გარდა კერძო წარმოებულების სასრულობისა დიფერენცირებადობის წერტილზე. ამიტომ, φ ფუნქციის x წერტილზე დიფერენცირებადობიდან მიიღებოდა $d\varphi(x) = \varphi'_{x_1}(x)dx_1 + \cdots + \varphi'_{x_n}(x)dx_n$ ტოლობა მხოლოდ სასრული კერძო წარმოებულებით. ამიტომაც, φ ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობა x^0 წერტილზე განისაზღვრა, როგორც $\varphi'_{x_1}(x), \dots, \varphi'_{x_n}(x)$ კერძო წარმოებულების სასრულობა x^0 წერტილის მიდამოში და მათი დიფერენცირებადობა იმავე x^0 წერტილზე.

კუთხური $\operatorname{anggrad}^{(2)} f(x^0)$ **გრადიენტი** ანუ, რაც იგივეა, სასრული იყოს

$$\sum_{i,j=1}^{n} f''_{\widehat{x}_i\widehat{x}_j}(x^0)\, dx_i\, dx_j \tag{1}$$

ორმაგი ჯამი.

ახლა, 2.1.2 თეორემიდან და თავი II-ის 3.3.1 თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 2.1.3 ([107]). f ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე, აუცილებელია და საკმარისი $D_{\widehat{x}_i}D_{\widehat{x}_j}f(x^0)$ სიდიდეების სასრულობა $i,\ j=1,\dots,n$ მნიშვნელობებისთვის ანუ, რაც იგივეა, სასრულობა

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_{\widehat{x}_i}D_{\widehat{x}_j}f(x^0)\, dx_i\, dx_j \tag{2}$$

ორმაგი ჯამისა*.

2. როგორც ვიცით, F ფუნქციის ძლიერი გრადიენტის სასრულობა x^0 წერტილზე საკმარისია F-ის დიფერენცირებადობისთვის x^0-ზე (იხ. თავი II, თეორემა 4.4.1). ეს ნიშნავს, რომ $df(x)$, $x\in U(x^0)$, დიფერენციალის დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე საკმარისია $(f'_{\widehat{x}_i}(x))'_{[x_j]}(x^0)$ სიდიდეების სასრულობა $i=1,\dots,n$ და $j=1,\dots,n$ მნიშნელობებისთვის.

$\operatorname{strgrad}^{(2)} f(x^0)$ **სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მატრიცი, რომლის ელემენტებია** $(f'_{\widehat{x}_i}(x))'_{[x_j]}(x^0)$.

მართებულია შემდეგი

---

*კუთხური კერძო წარმოებულების თანამიმდევრობას (1) და (2) ჯამებში მნიშვნელობა არ აქვს, ქვემოთ დამტკიცებული თეორემა 2.4.1-ის ძალით. ამიტომაც, ცვლადებს შორის “მძიმე” საჭირო არ არის (იხ. სქოლიო 1.1-ში).

თეორემა 2.1.4 ([107]). $f(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობისთვის $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე, საკმარისია $\operatorname{strgrad}^{(2)} f(x^0)$ სიდიდის სასრულობა.

შემდეგ, $F(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციას ეწოდება **ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი** $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე, თუ $df(x)$, $x \in U(x^0)$, დიფერენციალს x^0 წერტილზე აქვს უწყვეტი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები (იხ. II, განსაზღვრა 2.3.3). ამიტომ მართებულია შემდეგი თეორემა, რომელშიც $\operatorname{grad}^{(2)} f(x)$-ით აღნიშნულია მატრიცი, რომლის ელემენტებია $(f'_{x_i})'_{x_j}(x)$, $i = 1, \ldots, n$ და $j = 1, \ldots, n$.

თეორემა 2.1.5 ([107]). $f(x_1, \ldots, x_n)$ ფუნქციის ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადობისთვის $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია $\operatorname{grad}^{(2)} f(x)$-ის უწყვეტობა x^0 წერტილზე.

ცხადია, რომ $\operatorname{grad}^{(2)} f(x)$-ის x^0 წერტილზე უწყვეტობა საკმარისი პირობაა $f(x_1, \ldots, x_n)$-ის x^0-ზე ორჯერ დიფერენცირებადობისთვის.

2.2. ორი ცვლადის ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობის საკმარისი პირობა

$\varphi(x)$, $x = (x_1, x_2)$, ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობისთვის $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე, 2.1.2 თეორემის თანახმად, აუცილებელი და საკმარისია $\operatorname{anggrad}^{(2)} \varphi(x_0)$-ის სასრულობა.

$\varphi(x)$ ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე საკმარისია როგორც $\operatorname{strgrad}^{(2)} \varphi(x^0)$-ის სასრულობა, ისე $\operatorname{grad}^{(2)} \varphi(x)$-ის უწყვეტობა x^0 წერტილზე.

აქ მოცემული იქნება, ორჯერ დიფერენცირებადობის განსხვავებული ბუნების საკმარისი პირობა. გავიხსენოთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციას ეწოდება ორჯერ დიფერენცირებადი x^0 წერტილზე, თუ კუთხური

$\varphi'_{\widehat{x}_1}(x)$ და $\varphi'_{\widehat{x}_2}(x)$ კერძო წარმოებულები სასრულია $U(x^0)$ მიდამოში და წარმოადგენენ x^0 წერტილზე დიფერენცირებად ფუნქციებს. აქედან გამომდინარეობს, თავი II-დან 3.5.1 თეორემის ძალით, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია ორი კუთხური

$$\operatorname{anggrad}\varphi'_{\widehat{x}_1}(x^0) = \big((\varphi'_{\widehat{x}_1})'_{\widehat{x}_1}(x^0), (\varphi'_{\widehat{x}_1})'_{\widehat{x}_2}(x^0)\big), \tag{1}$$

$$\operatorname{anggrad}\varphi'_{\widehat{x}_2}(x^0) = \big((\varphi'_{\widehat{x}_2})'_{\widehat{x}_1}(x^0), (\varphi'_{\widehat{x}_2})'_{\widehat{x}_2}(x^0)\big) \tag{2}$$

გრადიენტის სასრულობა.

ახლა კი დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 2.2.1 ([99])**.** თუ ორკომპონენტიან

$$\big(\partial^2_{\widehat{x}_1}\varphi(x), \partial_{\widehat{x}_2}\partial_{\widehat{x}_1}\varphi(x)\big), \quad \big(\partial_{\widehat{x}_1}\partial_{\widehat{x}_2}\varphi(x), \partial^2_{\widehat{x}_2}\varphi(x)\big) \tag{3}$$

სიდიდეებში თითო კომპონენტი უწყვეტია და თითო კი სასრული x^0 წერტილზე, მაშინ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია ამავე წერტილზე და ადგილი აქვს

$$\partial_{\widehat{x}_1}\partial_{\widehat{x}_2}\varphi(x^0) = \partial_{\widehat{x}_2}\partial_{\widehat{x}_1}\varphi(x^0) \tag{4}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. რადგან

$$\Big(\partial_{\widehat{x}_1}\partial_{\widehat{x}_1}\varphi(x),\ \partial_{\widehat{x}_2}\partial_{\widehat{x}_1}\varphi(x)\Big)$$

წყვილში ერთი კომპონენტი უწყვეტია და მეორე სასრული x^0 წერტილზე, ამიტომ x_1-ით კუთხური $\varphi'_{\widehat{x}_1}(x_1, x_2)$ წარმოებული დიფერენცირებადია x^0 წერტილზე თომეს თეორემის ძალით (იხ. თავი II, თეორემა 4.6.4). ანალოგიურად დამტკიცდება $\varphi'_{\widehat{x}_2}(x_1, x_2)$-ის დიფერენცირებადობა x^0 წერტილზე. (4) ტოლობა გამომდინარეობს უ. იანგის განზოგადებული, ქვემოთ მოყვანილი თეორემა 2.4.1-დან.

2.2.1 თეორემიდან შეიძლება მიღებულ იქნას ორჯერ დიფერენცირებადობის სხვა საკმარისი პირობაც. ერთ-ერთია შემდეგი

თეორემა 2.2.2 ([99]). ვთქვათ, $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქციისთვის $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე სასრულია შერეული კერძო $\varphi''_{x_1,x_2}(x^0)$ და $\varphi''_{x_2,x_1}(x^0)$ წარმოებულები, ხოლო x_1-ით და x_2-ით მეორე რიგის კერძო $\varphi''_{x_1^2}(x_1, x_2)$ და $\varphi''_{x_2^2}(x_1, x_2)$ წარმოებულები, როგორც ორი ცვლადის ფუნქციები, უწყვეტია x^0-ზე. მაშინ $\varphi(x_1, x_2)$ ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია x^0 წერტილზე და მართებულია (4) ტოლობა.

2.3. მეორე რიგის დიფერენციალი

ვთქვათ, $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე, რაც ეკვივალენტურია მისი ყველა პირველი რიგის კუთხური კერძო $f'_{\hat{x}_j}(x)$, $j = 1, \dots, n$, წარმოებული-ფუნქციის დიფერენცირებადობის x^0 წერტილზე.

f ფუნქციის **მეორე დიფერენციალი** ანუ მეორე რიგის დიფერენციალი x^0 წერტილზე, სიმბოლურად $d^2 f(x^0)$, ეწოდება f-ის დიფერენციალის ანუ მისი პირველი რიგის

$$df(x) = f'_{\hat{x}_1}(x)dx_1 + \cdots + f'_{\hat{x}_n}(x)dx_n \tag{1}$$

დიფერენციალის (იხ. თავი II, 3.2.(3) ტოლობა) დიფერენციალს x^0 წერტილზე, ე. ი.

$$d^2 f(x^0) = d(df(x))(x^0).$$

კარგად ცნობილია, რომ პირველი რიგის დიფერენციალს აქვს ინვარიანტულობის თვისება: (1) ტოლობა ინარჩუნებს თავის ფორმას მაშინაც, როცა $x_1, \dots, x_n$ ცვლადები წარმოადგენენ სხვა ცვლადების ფუნქციებს.

მეორე და მასზე მაღალი რიგის დიფერენციალისთვის ადგილი არ აქვს ინვარიანტულობის თვისებას და ამ ცნობილ ფაქტს ახლა ვნახავთ. ამ მიზნით განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) $x_1, \dots, x_n$ ცვლადები არ არიან დამოკიდებულნი სხვა ცვლადებზე;

2) $x_1, \dots, x_n$ ცვლადები წარმოადგენენ სხვა ცვლადების შესაბამის რიცხვჯერ დიფერენცირებად ფუნქციებს.

სანამ ამ შემთხვევების განხილვაზე გადავიდოდეთ შევნიშნოთ, რომ (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, საზოგადოდ, შემდეგი

$$d\big(df(x)\big)(x^0) = \sum_{i=1}^{n} d\big(f'_{\widehat{x}_i}(x)\big)(x^0)dx_i + \sum_{i=1}^{n} f'_{\widehat{x}_i}(x^0)d(dx_i) \qquad (2)$$

ტოლობა.

1. დამოუკიდებელი ცვლადების შემთხვევა. როცა $x_1, \dots, x_n$ ცვლადები არ არიან დამოკიდებულნი სხვა ცვლადზე ან ცვლადებზე, მაშინ dx_i ნაზრდები მუდმივებია $x_1, \dots, x_n$ ცვლადების მიმართ. ამიტომ (2) ტოლობის მეორე ჯამში $d(dx_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$. ამასთან ერთად,

$$d\big(f'_{\widehat{x}_i}(x)\big)(x^0) = \sum_{j=1}^{n} f''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}(x^0)dx_j. \qquad (3)$$

მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში (2) იღებს სახეს

$$d^2f(x^0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}(x^0)\, dx_j\, dx_i. \qquad (4)$$

რადგანაც f ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია x^0 წერტილზე, დაშვების ძალით, ამიტომ ადგილი აქვს

$$\partial_{\widehat{x}_i}\partial_{\widehat{x}_j} f(x^0) = \partial_{\widehat{x}_i}\partial_{\widehat{x}_j} f(x^0) \qquad (5)$$

ტოლობას (იხ. შენიშვნა 1.3.2). ეს ნიშნავს, რომ (4)-ში i და j ინდექსების ურთიერთშენაცვლებით მისი მარჯვენა და, მაშასადამე, მარცხენა მხარე არ იცვლება.

ამრიგად,

$$d^2f(x^0) = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{\widehat{x}_i\widehat{x}_j}(x^0)\, dx_i\, dx_j \qquad (6)$$

ტოლობით გამოითვლება x^0 წერტილზე ორჯერ დიფერენცირებადი f ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი, თუკი $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადები არ არიან დამოკიდებულნი რაიმე სხვა ცვლადზე ან ცვლადებზე*.

მაშასადამე, 2.1.(1) ჯამი ტოლია $d^2 f(x^0)$-ის, როცა $x_1, \ldots, x_n$ დამოუკიდებელი ცვლადებია.

თუ გამოვიყენებთ დიფერენციალურ

$$dx_1 \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_1} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_n} \tag{7}$$

სიმბოლოს, მაშინ (6) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$d^2 f(x^0) = \left(\left(dx_1 \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_1} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_n} \right)^2 f \right)(x^0), \tag{8}$$

რაც ასე უნდა გვესმოდეს: ფრჩხილში ჩასმული გამოსახულება უნდა ავაკვადრატოთ (ავიყვანოთ კვადრატში) და შემდეგ ∂-ს ხარისხებს (რაც წარმოებულის რიგს ნიშნავს) მარჯვნიდან მივუწეროთ f. ასე მიღებული გამოსახულების მნიშვნელობა უნდა გამოვთვალოთ x^0 წერტილზე.

საზოგადოდ, f ფუნქციის m **რიგის დიფერენციალი** x^0 წერტილზე განისაზღვრება

$$d^m f(x^0) = d\big(d^{m-1} f(x)\big)(x^0) \tag{9}$$

ტოლობით (რეკურენტული წესით), თუკი $d^{m-1} f(x)$ ფუნქცია სასრულია x^0 წერტილის მიდამოში და დიფერენცირებადი თვით x^0 წერტილზე.

ადვილი მისახვედრია

$$d^m f(x^0) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial \widehat{x}_{i_1} \cdots \partial \widehat{x}_{i_m}}(x^0) dx_{i_1} \cdots dx_{i_m} \tag{10}$$

---

* (6) ტოლობაში, ცვლადებს შორის “მძიმის” დასმა საჭირო არ არის.

ტოლობის მართებულობა, როცა $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადები არ არიან სხვა ცვლადებზე დამოკიდებულნი. (7) ტოლობით მოცემული დიფერენციალური სიმბოლოს გამოყენებით, (10) ასე იწერება:

$$d^m f(x^0) = \Big(dx_1 \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_1} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_n}\Big)^m f(x^0). \qquad (11)$$

ქვემოთ დამტკიცებული 2.5.1 თეორემა საშუალებას გვაძლევს (10) ანუ, რაც იგივეა (11), ასე ჩავწეროთ:

$$d^m f(x^0) = \\ = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\partial^m f}{\partial \widehat{x}_1^{\alpha_1} \cdots \partial \widehat{x}_n^{\alpha_n}}(x^0)(dx_1)^{\alpha_1} \cdots (dx_n)^{\alpha_n}. \qquad (12)$$

2. ფუნქციური ცვლადების შემთხვევა. როცა $x_1, \ldots, x_n$ ცვლადები დამოკიდებულია სხვა ცვლადებზე, მაშინ (2) ტოლობის მეორე ჯამში $d(dx_i) = d^2 x_i$ აღარ იქნება ნული, საზოგადოდ. ამიტომ ამ შემთხვევაში

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{\widehat{x}_i \widehat{x}_j}(x^0)\, dx_i\, dx_j + \sum_{j=1}^{n} f'_{\widehat{x}_i}(x^0)\, d^2 x_i \qquad (13)$$

ანუ, (7) სიმბოლოს გამოყენებით,

$$d^2 f(x^0) = \bigg(\Big(dx_1 \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_1} + \cdots + dx_n \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_n}\Big)^2 f\bigg)(x^0) + \\ + \big(f'_{\widehat{x}_1}(x^0)\, d^2 x_1 + \cdots + f'_{\widehat{x}_n}(x^0)\, d^2 x_n\big). \qquad (14)$$

(8) და (14) წარმოდგენების ურთიერთშედარებით ვრწმუნდებით, რომ მეორე რიგის დიფერენციალს აღარ აქვს ინვარიანტულობის თვისება (პირველი რიგის დიფერენციალის ინვარიანტულობისგან განსხვავებით).

შენიშვნა 2.3.1. (14) ტოლობიდან აშკარაა, რომ მეორე დიფერენციალის ინვარიანტულობის მაჩვენებლი (8) ტოლობა შენარჩუნებულია მაშინაც, როცა $x_1, \dots, x_n$ წარმოადგენენ $t_1, \dots, t_m$ დამოუკიდებელი ცვლადების წრფივ

$$x_i = c_{i0} + c_{i1}t_1 + \cdots + c_{im}t_m \;\; (i = 1, \dots, n) \tag{15}$$

ფუნქციებს.

3. $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ წერტილზე m-ჯერ დიფერენცირებადი $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციისთვის შეგვიძლია შემოვიღოთ x^0 წერტილზე m რიგის კუთხური $\operatorname{anggrad}^{(m)} f(x^0)$ გრადიენტი და დამტკიცდეს, რომ $\operatorname{anggrad}^{(m)} f(x^0)$-ის სასრულობა აუცილებელი და საკმარისი პირობაა f-ის m-ჯერ დიფერენცირებადობისთვის x^0 წერტილზე.

2.4. რეგულარული წარმოებულის და შერეული კუთხური კერძო წარმოებულების კავშირი ([33])

$f(x_1, x_2)$ ფუნქციისთვის $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე ფართო აზრით ნაზრდია

$$\Delta^2_{[x^0]} f(h,k) =$$
$$= f(x_1^0 + h, x_2^0 + k) - f(x_1^0, x_2^0 + k) - f(x_1^0 + h, x_2^0) + f(x_1^0, x_2^0).$$

განსაზღვრა 2.4.1 ([54], გვ. 162–163.). $f(x_1, x_2)$ ფუნქციას აქვს **რეგულარული წარმოებული** $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე, სიმბოლურად $f'_{rg}(x^0)$, თუ ყოველი $\lambda > 1$ რიცხვისთვის არსებობს სასრული ან უსასრულო

$$f'_{rg}(x^0) = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0) \\ \frac{1}{\lambda} \le \frac{|k|}{|h|} \le \lambda}} \frac{\Delta^2_{[x^0]} f(h,k)}{hk} \tag{1}$$

ზღვარი და თუ ეს ზღვარი არ არის დამოკიდებული λ რიცხვზე*.

1. რეგულარული წარმოებული აქ გვაინტერესებს შერეულ კუთხურ კერძო წარმოებულთან კავშირში. მართებულია შემდეგი

თეორემა 2.4.1. თუ $f(x)$, $x=(x_1,x_2)$, ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილზე, მაშინ f ფუნქციას x^0 წერტილზე აქვს სასრული რეგულარული $f'_{rg}(x^0)$ წარმოებული და სრულდება

$$\partial_{\widehat{x}_2}\partial_{\widehat{x}_1}f(x^0)=f'_{rg}(x^0)=\partial_{\widehat{x}_1}\partial_{\widehat{x}_2}f(x^0) \tag{2}$$

ტოლობები.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება გარკვეული ტოლობები, n ცვლადის ფუნქციის მეორე რიგის შერეული კუთხური კერძო წარმოებულების მონაწილეობით. ეს ტოლობანი მოცემულია შემდეგ ლემაში, რომელშიც გამოყენებულია $x(x_i^0)$, $x^0(x_j)$ და $x^0(x_i,x_j)$ სიმბოლოები (იხ. I, 2.1.(1), 2.1.(2) და 3.3.(1) ტოლობები).

ლემა 2.4.1. თუ $\phi(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე, მაშინ $i,\,j=1,\dots,n$ მნიშვნელობებისთვის მართებულია

$$B_\phi(x^0;h,k)=hk\phi''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}(x^0)+h\big(|h|+|k|\big)\cdot\omega_1(h,k), \tag{3}$$

$$B_\phi(x^0;h,k)=hk\phi''_{\widehat{x}_j,\widehat{x}_i}(x^0)+k\big(|h|+|k|\big)\cdot\omega_2(h,k) \tag{4}$$

ტოლობანი, სადაც

$$B_\phi(x^0;h,k)=\phi_{ij}(h,k)-\phi_i(h)-\phi_j(k)+\phi(x^0), \tag{5}$$

$$\phi_{ij}(h,k)=\phi\big(x^0(x_i^0+h,x_j^0+k)\big), \tag{6}$$

$$\phi_i(h)=\phi\big(x^0(x_i^0+h)\big),\ \ \phi_j(k)=\phi\big(x^0(x_j^0+k)\big), \tag{7}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\omega_1(h,k)=0,\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\omega_2(h,k)=0. \tag{8}$$

---

*ამ ტიპის ზღვარი ორი ცვლადის ფუნქციისთვის, პირველად განიხილა რიმანმა შრომაში "ფუნქციის წარმოდგენა ტრიგონომეტრიული მწკრივით" (1854 წ.). ამრიგად, ორი ცვლადის ფუნქციისთვის გვაქვს ზღვარი რიმანის აზრით.

დამტკიცება. განვიხილოთ t_i ცვლადის

$$\varphi(t_i, k) = \phi\big(x^0(t_i, x_j^0 + k)\big) - \phi(x^0(t_i)) \tag{9}$$

ფუნქცია. აქედან

$$\varphi(x_i^0 + h, k) - \varphi(x_i^0, k) = \phi\big(x^0(x_i^0 + h, x_j^0 + k)\big) - \\ - \phi\big(x^0(x_i^0 + h)\big) - \phi\big(x^0(x_j^0 + k)\big) + \phi(x^0) \tag{10}$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\varphi(x_i^0 + h, k) - \varphi(x_i^0, k) = \phi_{ij}(h, k) - \phi_i(h) - \phi_j(k) + \phi(x^0). \tag{11}$$

მაშასადამე,

$$B_\phi(x^0; h, k) = \varphi(x_i^0 + h, k) - \varphi(x_i^0, k). \tag{12}$$

ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად:

$$\varphi(x_i^0 + h, k) - \varphi(x_i^0, k) = h\phi'(x_i^0 + \theta_1 h, k), \quad 0 < \theta_1 < 1. \tag{13}$$

ამიტომ

$$B_\phi(x^0; h, k) = h\varphi'(x_i^0 + \theta_1 h, k), \quad 0 < \theta_1 < 1. \tag{14}$$

მეორე მხრივ,

$$\varphi'(x_i^0 + \theta_1 h, k) = \\ = \phi'_{\widehat{x}_i}\big(x^0(x_i^0 + \theta_1 h, x_j^0 + k)\big) - \phi'_{\widehat{x}_i}\big(x^0(x_i^0 + \theta_1 h)\big). \tag{15}$$

ახლა (15) ტოლობა გადავწეროთ ასე:

$$\varphi'(x_i^0 + \theta_1 h, k) = \Big[\phi'_{\widehat{x}_i}\big(x^0(x_i^0 + \theta_1 h, x_j^0 + k)\big) - \phi'_{\widehat{x}_i}(x^0)\Big] - \\ - \Big[\phi'_{\widehat{x}_i}\big(x^0(x_i^0 + \theta_1 h)\big) - \phi'_{\widehat{x}_i}(x^0)\Big]. \tag{16}$$

რადგანაც ϕ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები დიფე-რენცირებადი ფუნქციებია x^0 წერტილზე, ამიტომ (16)-ის კვადრა-ტულ ფრჩხილებში ჩასმული გამოსახულებანი შეგვიძლია შევცვალოთ

ცნობილი ტოლობების მიხედვით (იხ. თავი II, 2.4.(8) და 2.4.(1) ტოლობები) და მივიღებთ:

$$\varphi'(x_i^0+\theta_1 h,k)=\theta_1 h\phi''_{\widehat{x}_i^2}(x^0)+k\phi''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}(x^0)+$$
$$+\big(|\theta_1 h|+|k|\big)\cdot\omega_3(h,k)-\theta_1 h\phi''_{\widehat{x}_i^2}(x^0)+|\theta_1 h|\cdot\omega_4(h,k)=$$
$$=k\phi''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}(x^0)+\big(|h|+|k|\big)\cdot\omega_1(h,k). \tag{17}$$

ახლა (3) მიიღება (14) და (17) ტოლობებიდან.

ანალოგიურად მტკიცდება (4) ტოლობაც.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ (3) და (4) ტოლობებში h და k ცვლადები ურთიერთდამოუკიდებელნი არიან. ლემა დამტკიცებულია.

2. თეორემა 2.4.1-ის დამტკიცება. (5)–(7) ტოლობებში ავიღოთ კერძო $n=2$, $i=1$, $j=2$ მნიშვნელობანი და ϕ ფუნქცია შევცვალოთ f ფუნქციით. მივიღებთ

$$f_{12}(h,k)=f(x_1^0+h,x_2^0+k),$$
$$f_1(h)=f(x_1^0+h,x_2^0),\quad f_2(k)=f(x_1^0,x_2^0+k),$$
$$B_f(x^0;h,k)=f(x_1^0+h,x_2^0+k)-f(x_1^0,x_2^0+k)-$$
$$-f(x_1^0+h,x_2^0)+f(x_1^0,x_2^0).$$

მაშასადამე,

$$B_f(x^0;h,k)=\Delta^2_{[x_0]}f(h,k). \tag{18}$$

ამიტომ (3) და (4) ტოლობანი მიიღებენ სახეს:

$$\Delta^2_{[x_0]}f(h,k)=hkf''_{\widehat{x}_1,\widehat{x}_2}(x^0)+h\big(|h|+|k|\big)\cdot\omega_1(h,k), \tag{19}$$
$$\Delta^2_{[x_0]}f(h,k)=hkf''_{\widehat{x}_2,\widehat{x}_1}(x^0)+k\big(|h|+|k|\big)\cdot\omega_2(h,k). \tag{20}$$

აქედან ვიღებთ

$$\frac{\Delta^2_{[x_0]}f(h,k)}{hk}=f'_{\widehat{x}_1,\widehat{x}_2}(x^0)+\left(1+\frac{|h|}{|k|}\right)\cdot\omega_1(h,k)\cdot\operatorname{sign}k, \tag{21}$$
$$\frac{\Delta^2_{[x_0]}f(h,k)}{hk}=f''_{\widehat{x}_2,\widehat{x}_1}(x^0)+\left(1+\frac{|k|}{|h|}\right)\cdot\omega_2(h,k)\cdot\operatorname{sign}h. \tag{22}$$

ავიღოთ ნებისმიერი $\lambda > 1$ რიცხვი და ვთქვათ (h,k) ისწრაფვის $(0,0)$ წერტილისკენ $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{|k|}{|h|} \leq \lambda$ პირობების დაცვით. მაშინ (21) და (22) ტოლობებიდან მივიღებთ დასამტკიცებელ

$$f'_{rg}(x^0) = f''_{\widehat{x}_1,\widehat{x}_2}(x^0), \tag{23}$$

$$f'_{rg}(x^0) = f''_{\widehat{x}_2,\widehat{x}_1}(x^0) \tag{24}$$

ტოლობებს.

3. შედეგი 2.4.1. თუ $f(x)$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ წერტილზე, მაშინ i, $j = 1,\ldots,n$ მნიშვნელობებისთვის მართებულია

$$f''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}(x^0) = f''_{\widehat{x}_j,\widehat{x}_i}(x^0) \tag{25}$$

ტოლობა.

დამტკიცება. (3) და (4) ტოლობებში ავიღოთ კერძო $k = h$ შემთხვევა, მივიღებთ

$$B_f(x^0;h,h) = h^2 f''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}(x^0) + 2h^2 \cdot \operatorname{sign} h \cdot \omega_1(h,h), \tag{26}$$

$$B_f(x^0;h,h) = h^2 f''_{\widehat{x}_j,\widehat{x}_i}(x^0) + 2h^2 \cdot \operatorname{sign} h \cdot \omega_2(h,h). \tag{27}$$

აქედან მიიღება

$$f''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}(x^0) - f''_{\widehat{x}_j,\widehat{x}_i}(x^0) = 2 \cdot \operatorname{sign} h \cdot (\omega_1 - \omega_2) \tag{28}$$

ტოლობა, რომლის მარცხენა მხარე არაა დამოკიდებული h-ზე და მისი მარჯვენა მხარე კი ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $h \to 0$. ეს ნიშნავს $\omega_2(h,h) = \omega_1(h,h)$ ტოლობას. ამით (25) ტოლობა დამტკიცებულია.

შედეგი 2.4.2. ვთქვათ $f(x)$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, ფუნქციას $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$ წერტილის მიდამოში აქვს სასრული f'_{x_i}, f'_{x_j}, f''_{x_j,x_i} და f''_{x_i,x_j} წარმოებულები. თუ x_i და x_j ცვლადების $f''_{x_i,x_j}(x^0(x_i,x_j))$ და $f''_{x_j,x_i}(x^0(x_i,x_j))$ ფუნქციები უწყვეტია (x_i^0,x_j^0) წერტილზე, მაშინ ადგილი აქვს

$$f''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}(x^0) = f''_{\widehat{x}_j,\widehat{x}_i}(x^0) \tag{29}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. (15) ტოლობის მარჯვენა მხარე შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

$$kf''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}\big(x^0(x_i^0+\theta_1 h, x_j^0+\theta_2 k)\big), \quad 0<\theta_2<1. \tag{30}$$

ამიტომ (14)-დან ვიღებთ:

$$B_f(x^0;h,k)=hkf''_{\widehat{x}_i,\widehat{x}_j}\big(x^0(x_i^0+\theta_1 h, x_j^0+\theta_2 k)\big),\ 0<\theta_1,\ \theta_2<1. \tag{31}$$

ასევე, t_j ცვლადის

$$\psi(h,t_j)=f\big(x^0(x_i^0+h,t_j)\big)-f\big(x^0(t_j)\big)$$

ფუნქციის შემოღებით და ანალოგიური მსჯელობით მიიღება

$$B_f(x^0;h,k)=hkf''_{\widehat{x}_j,\widehat{x}_i}\big(x^0(x_i^0+\theta_3 h, x_j^0+\theta_4 k)\big),\ 0<\theta_3,\ \theta_4<1. \tag{32}$$

მაშასადამე, (31) და (32) ტოლობების მარჯვენა მხარეები ტოლია და შერეული კერძო წარმოებულების უწყვეტობა (x_i^0,x_j^0) წერტილზე იწვევს (29) ტოლობას.

2.5. m რიგის შერეული კუთხური კერძო წარმოებულების ტოლობა

თეორემა 2.5.1. თუ $f(x_1,\dots,x_n)$ ფუნქცია m-ჯერ დიფერენცირებადია $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ წერტილზე, მაშინ მისი m რიგის ყოველი შერეული კუთხური კერძო წარმოებულის მნიშვნელობა x^0 წერტილზე არ არის დამოკიდებული კუთხური კერძო გაწარმოების თანმიმდევრობაზე. ესე იგი, x^0 წერტილზე m რიგის ყველა შერეული კუთხური კერძო წარმოებული ტოლია.

დამტკიცება. ამ ფაქტის დასადგენად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თითოეული m რიგის შერეული კუთხური კერძო წარმოებული x^0 წერტილზე არ იცვლება მასში ორი ერთიმეორის მიმდევნო კუთხური კერძო გაწარმოების რიგის შენაცვლებით. ესე იგი საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{\partial^m f}{\partial \widehat{x}_{i_m} \cdots \partial \widehat{x}_{i_{k+1}} \partial \widehat{x}_{i_k} \cdots \partial \widehat{x}_{i_1}}(x^0) = \\ = \frac{\partial^m f}{\partial \widehat{x}_{i_m} \cdots \partial \widehat{x}_{i_k} \partial \widehat{x}_{i_{k+1}} \cdots \partial \widehat{x}_{i_1}}(x^0). \quad (1)$$

აქედან ჩანს, რომ $k+1 \leq m$, $k-1 \leq m-2$. ამიტომ $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \widehat{x}_{i_{k-1}} \cdots \partial \widehat{x}_{i_1}}(x)$ ფუნქცია არის x^0 წერტილზე ორჯერ დიფერენცირებადი x_{i_k}, $x_{i_{k+1}}$ ცვლადების მიმართ. ამიტომ 2.4.1 შედეგის ძალით

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial \widehat{x}_{i_{k+1}} \partial \widehat{x}_{i_k} \partial \widehat{x}_{i_{k-1}} \cdots \partial \widehat{x}_{i_1}}(x^0) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \widehat{x}_{i_k} \partial \widehat{x}_{i_{k+1}} \partial \widehat{x}_{i_{k-1}} \cdots \partial \widehat{x}_{i_1}}(x^0),$$

საიდანაც გამომდინარეობს (1) ტოლობის მართებულობა.

ეს თეორემა საშუალებას იძლევა x^0 წერტილზე m-ჯერ დიფერენცირებადი $f(x_1, \dots, x_n)$ ფუნქციის m რიგის შერეული კუთხური კერძო წარმოებული ჩავწეროთ ასე:

$$\frac{\partial^m f}{\partial \widehat{x}_1^{\alpha_1} \partial \widehat{x}_2^{\alpha_2} \cdots \partial \widehat{x}_n^{\alpha_n}}, \quad (2)$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ მთელი რიცხვები აკმაყოფილებენ $0 \leq \alpha_i \leq m$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m$ პირობებს; ე. ი. შერეული კუთხური კერძო წარმოებულის ჩაწერისას ერთი და იგივე ცვლადით რამდენჯერმე კუთხური გაწარმოება შეიძლება ერთად ჩავწეროთ.

§ 3. ბეტაცისმიერი წარმოებული და მისი კავშირი უწყვეტობასთან, დიფერენცირებადობასთან და შერეულ კერძო წარმოებულთან

3.1. შერეული კერძო წარმოებული, როგორც განმეორებითი ზღვარი

ვთქვათ ორი ცვლადის $f(x_1, x_2)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის $U(x^0)$ მიდამოში. დავუშვათ, რომ f ფუნქციას

ყოველ $(x_1^0, x_2) \in U(x^0)$ წერტილზე აქვს სასრული კერძო წარმოებული x_1 ცვლადის მიმართ

$$\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0 + h, x_2) - f(x_1^0, x_2)}{h}. \tag{1}$$

შევნიშნოთ, რომ $\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2)$-ის კერძო შემთხვევა არის (x_1^0, x_2^0) წერტილზე f ფუნქციის $\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0)$ კერძო წარმოებული x_1 ცვლადით, რადგანაც ეს უკანასკნელი არის ერთი ცვლადის $f(x_1, x_2^0)$ ფუნქციის წარმოებული x_1^0 წერტილზე.

ცხადია, რომ $\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2)$ არის x_2 ცვლადის ფუნქცია და მისთვის შემოვიღოთ $\beta(x_2) = \partial_{x_1} f(x_1^0, x_2)$ აღნიშვნა. თუ $\beta(x_2)$ ფუნქციას x_2^0 წერტილზე აქვს სასრული ან უსასრულო $\beta'(x_2^0)$ წარმოებული, მაშინ ეს ნიშნავს

$$\beta'(x_2^0) = \lim_{k \to 0} \frac{\beta(x_2^0 + k) - \beta(x_2^0)}{k} \tag{2}$$

ტოლობას. აშკარაა, რომ

$$\beta'(x_2^0) = \big(\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2)\big)'(x_2^0). \tag{3}$$

არსებობს შეთანხმება, რომ (3) ტოლობის მარჯვენა მხარე ჩაიწეროს $\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0)$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0) = \big(\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2)\big)'(x_2^0), \tag{4}$$

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_1^0, x_2^0) = \big(\partial_{x_2} f(x_1, x_2^0)\big)'(x_1^0). \tag{5}$$

ახლა ვიპოვოთ $\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0)$-ისა და $\partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_1^0, x_2^0)$-ის ზღვრით გამოსახვა. (2) და (3) ტოლობებიდან:

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0) = \lim_{k \to 0} \frac{\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0 + k) - \partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0)}{k}. \tag{6}$$

ახლა გამოვიყენოთ (1), გვექნება:

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0) = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k}\ \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big[f(x_1 + h, x_2^0 + k) -$$

$$-f(x_1^0, x_2^0 + k) - f(x_1^0 + h, x_2^0) + f(x_1^0, x_2^0)\Big]. \tag{7}$$

ანალოგიურად მიიღება

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_1^0, x_2^0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \Big[f(x_1 + h, x_2^0 + k) - \\ - f(x_1^0, x_2^0 + k) - f(x_1^0 + h, x_2^0) + f(x_1^0, x_2^0)\Big] \tag{8}$$

ტოლობა, თუ $\alpha(x_1) = \partial_{x_2} f(x_1, x_2^0)$ ფუნქციას აქვს $\alpha'(x_1^0)$ წარმოებული.

ახლა ვისარგებლოთ ორი ცვლადის f ფუნქციისთვის $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე ფართო აზრით

$$\Delta^2_{[x^0]} f(h, k) = f(x_1^0 + h, x_2^0 + k) - \\ - f(x_1^0, x_2^0 + k) - f(x_1^0 + h, x_2^0) + f(x_1^0, x_2^0) \tag{9}$$

ნაზრდით (იხ. თავი I, 7.2.(3) ტოლობა). ამიტომ (7) და (8) ტოლობები ასე ჩაიწერება:

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0) = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2_{[x^0]} f(h, k)}{hk}, \tag{10}$$

$$\partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_1^0, x_2^0) = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{\Delta^2_{[x^0]} f(h, k)}{hk}. \tag{11}$$

ამრიგად, კითხვა: (x_1^0, x_2^0) წერტილზე მართებულია თუ არა

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1^0, x_2^0) = \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_1^0, x_2^0) \tag{12}$$

ტოლობა, ეკვივალენტურია კითხვის: (x_1^0, x_2^0) წერტილზე ტოლია თუ არა (10) და (11) განმეორებითი ზღვრები?

3.2. ბეტაცისმიერი წარმოებული

1. ბუნებრივია, განვიხილოთ $\Delta^2_{[x^0]}f(h,k)/hk$ შეფარდების ზღვარი, როცა h და k ერთდროულად ისწრაფვიან ნულისკენ ერთიმეორისგან დამოუკიდებლად ანუ, მოკლედ, განხილულ იქნას

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta^2_{[x^0]}f(h,k)}{hk} \tag{1}$$

ზღვარი. სწორედ ამ ზღვარს, თუ ის არსებობს სასრული ან უსასრულო, **ბეტაციმ უწოდა** $f(x_1,x_2)$ **ფუნქციის წარმოებული** $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე ([85]).

$\Delta^2_{[x^0]}f(h,k)/hk$ გამოსახულება, როგორც (h,k)-ს ფუნქცია, კერძო, მაგრამ მნიშვნელოვან შემთხვევაში უკავშირდება ლებეგის ინტეგრალის წარმოებულს, რომელიც გავრცელებულია $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის შემცველ მართკუთხედებზე. ინტეგრალისთვის კი, საზოგადოდ, სეგმენტის ფუნქციისთვის დამკვიდრებულია ძლიერი წარმოებულისა და რეგულარული წარმოებულის ცნებანი.

ამიტომ $\Delta^2_{[x^0]}f(h,k)/hk$ შეფარდებას უკავშირდება ორი ტიპის წარმოებული: **ძლიერი წარმოებული** ანუ **ბეტაცისმიერი წარმოებული** და **რეგულარული წარმოებული**, რომლის შესახებაც უკვე იყო საუბარი 2.4-ში.

ამრიგად, $f(x_1,x_2)$ ფუნქციის ძლიერი წარმოებული ანუ ბეტაცისმიერი წარმოებული $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე, სიმბოლურად $f'_s(x^0)$, ეწოდება

$$f'_s(x^0) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta^2_{[x^0]}f(h,k)}{hk} \tag{2}$$

ზღვარს, თუ ის არსებობს სასრული ან უსასრულო. მაშასადამე, $f'_s(x^0)$ და $\partial_{x_1}\partial_{x_2}f(x^0)$, $\partial_{x_2}\partial_{x_1}f(x^0)$ სიდიდეებს შორის კავშირის დადგენა ნიშნავს ორმაგ (1) ზღვარსა და განმეორებით 3.1.(10), 3.1.(11) ზღვრებს შორის დამოკიდებულების დადგენას.

3.3. განმეორებითი ზღვარი

მრავალი ცვლადის $f(x_1,\ldots,x_n)$ ფუნქციის ზღვრის განხილვისას $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ წერტილზე (იხ. თავი I, 1.3), x ცვლადის ყოველი დამოუკიდებელი x_k კომპონენტი ისწრაფვის თავისი x_k^0 ზღვრისკენ. კომპონენტის ეს მისწრაფება არის სრულიად თავისუფალი იმ აზრით, რომ $x_1,\ldots,x_n$ ცვლადები თავიანთი $x_1^0,\ldots,x_n^0$ ზღვრებისკენ სწრაფვისას არ არიან შეზღუდულნი რაიმე პირობით. ასეთ ზღვარს ეწოდება n-ჯერადი ზღვარი (კერძოდ, ორმაგი, სამმაგი და ა. შ.).

სხვადასხვა ამოცანა მოითხოვს შესწავლილ იქნას $f(x_1,\ldots,x_n)$ ფუნქციის ყოფაქცევა $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ წერტილის მიდამოში, როცა ცვლადი $x_1,\ldots,x_n$ კომპონენტების სწრაფვა მუდმივი $x_1^0,\ldots,x_n^0$ კომპონენტებისკენ განიხილება თანდათანობით და სხვადასხვა თანმიმდევრობით.

აქ დავკმაყოფილდებით ორი ცვლადის ფუნქციის განხილვით. ვთქვათ, ორი ცვლადის $\varphi(x_1,x_2)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ წერტილის უცენტრო $U^0(x^0)$ ან $U(x^0)$ მიდამოში.

ვთქვათ, ყველა $x_2\neq x_2^0$ მნიშვნელობისთვის არსებობს სასრული $\lim\limits_{x_1\to x_1^0}\varphi(x_1,x_2)=\beta(x_2)$ ზღვარი. შემდეგ შეიძლება განხილულ იქნას $\beta(x_2)$ ფუნქციისთვის x_2^0-ზე ზღვრის არსებობის საკითხი. ამ გზით მიიღება ერთ-ერთი განმეორებითი ზღვარი $\varphi(x_1,x_2)$-თვის x^0-ზე:

$$\lim_{x_2\to x_2^0}\lim_{x_1\to x_1^0}\varphi(x_1,x_2). \tag{1}$$

მეორე განმეორებითი ზღვარი მიიღება ჯერ $x_2\to x_2^0$ მისწრაფებით ყოველი ფიქსირებული $x_1\neq x_1^0$ მნიშვნელობისთვის და შემდეგ $x_1\to x_1^0$ მისწრაფებით:

$$\lim_{x_1\to x_1^0}\lim_{x_2\to x_2^0}\varphi(x_1,x_2). \tag{2}$$

მაშასადამე, ვიხილავთ დამოკიდებულებებს

$$\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0}}\varphi(x_1,x_2) \tag{3}$$

ზღვარს (რომელსაც ზოგჯერ ეწოდება ორმაგი ზღვარი) და განმეორებით (1) და (2) ზღვრებს შორის.

1. ეს სიდიდეები საზოგადოდ სხვადასხვაა. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 3.3.1.

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{როცა } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{როცა } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

ფუნქციას ზღვარი არ აქვს $(0,0)$ წერტილზე (იხ. თავი I, მაგალითი 2.2.2). ამავე დროს, ყოველი $x_2 \neq 0$ მნიშვნელობისთვის გვაქვს $\lim\limits_{x_1 \to 0} \psi(x_1, x_2) = 0$. ამიტომ

$$\lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} \psi(x_1, x_2) = 0.$$

ანალოგიურად მიიღება

$$\lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} \psi(x_1, x_2) = 0.$$

ამრიგად, $\psi(x_1, x_2)$ ფუნქციას ზღვარი არ აქვს $(0,0)$ წერტილზე, თუმც ამ წერტილზე მისი განმეორებითი ზღვრები ტოლია.

მაგალითი 3.3.2.

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 \sin \dfrac{1}{x_1}, & \text{როცა } x_1 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x_1 = 0 \end{cases}$$

ფუნქციისთვის გვაქვს:

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}} \chi(x_1, x_2) = 0, \quad \lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} \chi(x_1, x_2) = 0,$$

ხოლო $\lim\limits_{x_2 \to 0} \lim\limits_{x_1 \to 0} \chi(x_1, x_2)$ არ არსებობს. მაშასადამე, $\chi(x_1, x_2)$ ფუნქციას $(0,0)$ წერტილზე აქვს ზღვარი და ერთ-ერთი განმეორებითი

ზღვარი, ხოლო მეორე განმეორებითი ზღვარი არ არსებობს იმავე წერტილზე.

მაგალითი 3.3.3.

$$\omega(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{როცა } \ x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } \ x_1 = 0 = x_2 \end{cases}$$

ფუნქციას $(0, 0)$ წერტილზე აქვს ორივე განმეორებითი ზღვარი და ისინი ურთიერთგანსხვავებულია:

$$\lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} \omega(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{x_1^2}{x_1^2} = 1,$$

$$\lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} \omega(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \to 0} \frac{-x_2^2}{x_2^2} = -1.$$

ამ ფუნქციას $(0, 0)$ წერტილზე ზღვარი არ აქვს, რადგანაც ამ წერტილზე მისი განცალებული ზღვრები ურთიერთგანსხვავებულია:

$$\lim_{x_1 \to 0} \omega(x_1, 0) = 1, \quad \lim_{x_2 \to 0} \omega(0, x_2) = -1$$

(მოვიგონოთ, რომ განცალებული ზღვრების ტოლობა არის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი ზღვრის არსებობისთვის – იხ. თავი I, 2.1).

შენიშვნა 3.3.1. ზემოთ აღწერილ სიტუაციას, ანალოგი აქვს ორმაგი მიმდევრობისთვისაც ([4], გვ. 93–119; [74]).

2. ახლა მოვიყვანოთ დადებითი ხასიათის შედეგები.

თეორემა 3.3.1 ([66], გვ. 361)**.** თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1) არსებობს სასრული ან უსასრულო

$$A = \lim_{(x_1, x_2) \to (x_1^0, x_2^0)} F(x_1, x_2) \tag{4}$$

ზღვარი (ორმაგი ზღვარი);

2) ყოველი $x_1 \neq x_1^0$ მნიშვნელობისთვის x_2^0-ზე არსებობს x_2-ის მიმართ სასრული

$$\lambda(x_1) = \lim_{x_2 \to x_2^0} F(x_1, x_2) \tag{5}$$

ზღვარი.

მაშინ არსებობს განმეორებითი

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lambda(x_1) = \lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} F(x_1, x_2) \tag{6}$$

ზღვარი და ის ტოლია ორმაგი A ზღვრის.

თეორემა 3.3.2 ([66], გვ. 362)**.** თუ წინა თეორემის 1) და 2) პირობებთან ერთად შესრულებულია შემდეგი პირობაც:

3) ყოველი $x_2 \neq x_2^0$ მნიშვნელობისთვის x_1^0-ზე არსებობს x_1-ის მიმართ სასრული

$$\mu(x_2) = \lim_{x_1 \to x_1^0} F(x_1, x_2) \tag{7}$$

ზღვარი.

მაშინ $F(x_1, x_2)$ ფუნქციას (x_1^0, x_2^0) წერტილზე აქვს ორივე განმეორებითი ზღვარი და თითოეული მათგანი ტოლია ორმაგი A ზღვრის:

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} F(x_1, x_2) = A = \lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} F(x_1, x_2). \tag{8}$$

მაგალითი 3.3.4. 1829 წელს დირიჰლემ განიხილა $\varphi(x)$, $x \in [0, 1]$, ფუნქცია, რომელიც ტოლია c რიცხვის რაციონალურ x-ზე და d რიცხვის ირაციონალურ x-ზე. 1899 წელს პრინსჰეიმმა კი დაამტკიცა

$$\varphi(x) = d + (c - d) \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} (\cos n!\pi x)^{2m} \tag{9}$$

ტოლობა ([12], გვ. 157).

$\varphi(x)$-ს ეწოდება დირიჰლეს ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია ყველგან $[0, 1]$-ზე და ეკუთვნის ბერის მეორე კლასს ([45], გვ. 384).

შევნიშნოთ, რომ $x\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია ერთადერთ $x = 0$ წერტილზე.

შენიშვნა 3.3.2. (4) სახის სასრული ზღვრის არსებობის ან არარსებობის დასადგენად შეიძლება გამოყენებულ იქნას თავი I-ის 8.3.1 თეორემა.

3.4. ბეტაცისმიერი წარმოებულის თვისებები ([99], [107])

თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ ორცვლადიან ფუნქციას შეიძლება ყველგან ჰქონდეს ბეტაცისმიერი სასრული წარმოებული და, ამავე დროს, ყველგან მოკლებული იყოს კერძო წარმოებულებს. ასეთია $\varphi(x_1, x_2) = \alpha(x_1) + \beta(x_2)$ ფუნქცია, სადაც სასრული $\alpha(x_1)$ და $\beta(x_2)$ ფუნქციები ყველგან მოკლებულია წარმოებულს (იხ. თავი II, 1.14). ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\Delta^2_{[x^0]}\varphi(h, k) = 0$ ყველა $x^0 = (x^0_1, x^0_2)$ წერტილზე (იხ. თავი I, 7.5.(3) ტოლობა). ამიტომ $\varphi'_s(x^0) = 0$ ყველგან.

თუკი $\lambda(x_1)$ და $\mu(x_2)$ ფუნქციებს ექნებათ სასრული $\lambda'(x^0_1)$ და $\mu'(x^0_2)$ წარმოებულები, მაშინ $\psi(x_1, x_2) = \lambda(x_1)\mu(x_2)$ ფუნქციას აქვს ბეტაცისმიერი წარმოებული (x^0_1, x^0_2) წერტილზე და სრულდება

$$\psi'_s(x^0_1, x^0_2) = \lambda'(x^0_1) \cdot \mu'(x^0_2) \tag{1}$$

ტოლობა. აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს

$$(x_1 \cdot x_2)'_s(x^0_1, x^0_2) = 1 \tag{2}$$

ტოლობა ყველა (x^0_1, x^0_2) წერტილზე.

წინადადება 3.4.1. ვთქვათ $f(x_1, x_2)$ ფუნქციას $x^0 = (x^0_1, x^0_2)$ წერტილზე აქვს სასრული $f'_s(x^0)$. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ფაქტებს:

1) $f(x_1, x_2)$ ფართო აზრით უწყვეტია x^0 წერტილზე;

2) $\Delta^2_{[x^0]}f(h, k)$, როგორც (h, k)-ს ფუნქცია, უწყვეტია $(0, 0)$ წერტილზე.

დამტკიცება. ჯერ ერთი

$$\Delta^2_{[x^0]} f(0,0) = \Delta^2_{[x^0]} f(h,0) = \Delta^2_{[x^0]} f(0,k) = 0. \tag{3}$$

მეორეც, $f'_s(x^0)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta^2_{[x^0]} f(h,k) = 0 \tag{4}$$

ტოლობა, რაც ნიშნავს f-ის ფართო აზრით უწყვეტობას x^0 წერტილზე. $\Delta^2_{[x^0]} f(0,0) = 0$ ტოლობის გათვალისწინებით (4) იძლევა $\Delta^2_{[x^0]} f(h,k)$-ის უწყვეტობას $(0,0)$ წერტილზე. წინადადება დამტკიცებულია.

დიფერენციალის არსებობა და ბეტაცისმიერი წარმოებული, ასე არიან დაკავშირებულნი.

თეორემა 3.4.1. თუ $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$, $f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$ და $f'_s(x_1^0, x_2^0)$ სასრულია, მაშინ არსებობს $df(x_1^0, x_2^0)$ დიფერენციალი. ამასთან, სასრული $f'_s(x_1^0, x_2^0)$-ის არსებობა არ გამომდინარეობს $\operatorname{strgrad} f(x_1^0, x_2^0)$-ის სასრულობიდან და, მით უფრო, არ გამომდინარეობს $df(x_1^0, x_2^0)$-ის არსებობიდან.

დამტკიცება. $f'_s(x_1^0, x_2^0)$-ის სასრულობიდან და

$$f'_s(x_1^0, x_2^0) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta^2_{[x^0]} f(h,k)}{|h|+|k|} \cdot \frac{|h|+|k|}{hk}$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს თავი II-ის 3.5.(14) ტოლობა, ვინაიდან $(|h|+|k|)/|hk|$ ისწრაფვის $+\infty$-კენ, როცა $(h,k) \to (0,0)$. ამიტომ f ფუნქციის დიფერენცირებადობას (x_1^0, x_2^0) წერტილზე ადასტურებს 3.5.4 თეორემა იმავე თავიდან.

შემდეგ, თავი II-ის 3.4.(12) ტოლობით განსაზღვრულ $g(x_1, x_2)$ ფუნქციას $(0,0)$ წერტილზე აქვს სასრული $\operatorname{strgrad} g(0,0)$ (იხ. თავი II-ში 4.2-ის დასასრული). ამასთანავე, ამ ფუნქციისთვის $\Delta^2_{[0,0]} g(h,k) = hk \sin \frac{1}{hk}$ და ამიტომ $g'_s(0,0)$ არ არსებობს. თეორემა დამტკიცებულია.

ბეტაცისმიერი სასრული წარმოებულის მქონე ფუნქციის წარმოდგენის შესახებ მართებულია

თეორემა 3.4.2. ვთქვათ, $f(x_1, x_2)$ ფუნქციას $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილზე აქვს სასრული $f'_s(x^0)$. მაშინ არსებობს x^0 წერტილზე უწყვეტი $g(x_1, x_2)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეგი ორი თვისება:

$$f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) + f(x_1, x_2^0) + f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0), \tag{5}$$

$$g'_s(x^0) = f'_s(x^0). \tag{6}$$

თუკი დამატებით $f(x_1, x_2)$ ფუნქცია განცალებით უწყვეტია x^0 წერტილზე, მაშინ $f(x_1, x_2)$ უწყვეტია x^0-ზე.

დამტკიცება. 3.1.(9) ტოლობაში ავიღოთ $x_1^0 + h = x_1$, $x_2^0 + k = x_2$ და იგი ასე გადავწეროთ:

$$f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) + f(x_1^0, x_2) + f(x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0), \tag{7}$$

სადაც g ფუნქცია განსაზღვრულია

$$g(x_1, x_2) = \Delta^2_{[x^0]} f(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0) \tag{8}$$

ტოლობით. $g(x_1, x_2)$ ფუნქცია უწყვეტია x^0 წერტილზე წინადადება 3.4.1-ის ძალით. $g'_s(x_1^0, x_2^0)$-ის გამოსათვლელად საჭიროა შევადგინოთ $\Delta^2_{[x^0]} g(h, k)$. გვაქვს:

$$\Delta^2_{[x^0]} g(h, k) = g(x_1^0 + h, x_2^0 + k) - g(x_1^0, x_2^0 + k) -$$
$$-g(x_1^0 + h, x_2^0) + g(x_1^0, x_2^0).$$

მაგრამ (3) ტოლობის ძალით, $g(x_1^0, x_2^0 + k) = g(x_1^0 + h, x_2^0) = g(x_1^0, x_2^0) = 0$. ამიტომ $\Delta^2_{[x^0]} g(h, k) = g(x_1^0 + h, x_2^0 + k)$. მაგრამ $g(x_1^0 + h, x_2^0 + k) = \Delta^2_{[x^0]} f(h, k)$. ამრიგად,

$$\Delta^2_{[x^0]} g(h, k) = \Delta^2_{[x^0]} f(h, k).$$

რადგან არსებობს სასრული $f'_s(x^0)$, ამიტომ $g'_s(x^0)$-იც სასრულია და ადგილი აქვს (6) ტოლობას.

თეორემის მეორე ნაწილი აშკარაა (5) ტოლობიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

ორი უკანასკნელი თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 3.4.3. თუ $f(x_1, x_2)$ ფუნქციისთვის სასრულია $f'_s(x_1^0, x_2^0)$, მაშინ:

1) $f(x_1, x_2)$ ფუნქციის განცალებით კერძო უწყვეტობა (x_1^0, x_2^0) წერტილზე იწვევს $f(x_1, x_2)$-ის უწყვეტობას იმავე წერტილზე;

2) $f(x_1, x_2)$ ფუნქციის განცალებით დიფერენცირებადობა (x_1^0, x_2^0) წერტილზე იწვევს $f(x_1, x_2)$-ის დიფერენცირებადობას (x_1^0, x_2^0)-ზე.

დამოკიდებულება ბეტაცისმიერ წარმოებულსა და შერეულ კერძო წარმოებულს შორის ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ორი თეორემის სახით.

თეორემა 3.4.4. თუ $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის მიდამოში სასრულია $f(x_1, x_2)$ ფუნქციის ერთი მაინც შერეული კერძო წარმოებული, მაშინ $f'_s(x^0)$-ის არსებობისთვის აუცილებელია და საკმარისი ამ შერეულ კერძო წარმოებულს ჰქონდეს ზღვარი x^0 წერტილზე. ამ ზღვრის არსებობის შემთხვევაში, მისი ტოლია $f'_s(x^0)$.

დამტკიცება. ვთქვათ, x^0 წერტილის მიდამოში სასრულია $\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1, x_2)$. შემოვიღოთ $\nu(x_2) = f(x_1^0 + h, x_2) - f(x_1^0, x_2)$ ფუნქცია, რაც ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით ასე ჩაიწერება: $\nu(x_2) = hf'_{x_1}(x_1^0 + \theta_1 h, x_2)$, სადაც $0 < \theta_1 < 1$. ამასთან, $\nu(x_2^0 + k) - \nu(x_2^0)$ არის, ერთი მხრივ, $\Delta^2_{[x^0]} f(h, k)$ და, მეორე მხრივ, კი $k\nu'(x_2^0 + \theta_2 k) = hk\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1^0 + \theta_1 h, x_2^0 + \theta_2 k)$, $0 < \theta_2 < 1$. მაშასადამე,

$$\Delta^2_{[x^0]} f(h, k) = hk\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_1^0 + \theta_1 h, x_2^0 + \theta k), \qquad (9)$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი*.

*თეორემაში აღნიშნული შერეული კერძო წარმოებულის ზღვარი თუ სასრულია x^0 წერტილზე, მაშინ ეს შერეული კერძო წარმოებული უწყვეტია x^0-ზე (იხ.

შედეგი 3.4.1. ვთქვათ, $f(x_1, x_2)$ ფუნქციას x^0 წერტილის მიდამოში აქვს სასრული ორივე შერეული კერძო წარმოებული. თუ ორივე შერეულ კერძო წარმოებულს აქვს ზღვარი x^0 წერტილზე, მაშინ ეს ორივე ზღვარი სასრულია ან უსასრულო და ტოლია $f'_s(x^0)$ სიდიდის. ერთ-ერთი ზღვრის სასრულობა იწვევს ორივე შერეული კერძო წარმოებულის უწყვეტობას x^0 წერტილზე.

თეორემა 3.4.5. ვთქვათ, $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის მიდამოში $f(x_1, x_2)$ ფუნქციას აქვს სასრული $f'_{x_1}(x_1, x_2)$, $f'_{x_2}(x_1, x_2)$ და ერთი მაინც შერეული კერძო წარმოებული. მაშინ $f'_s(x^0)$-ის არსებობისთვის აუცილებელია და საკმარისი ამ შერეულ კერძო წარმოებულს ზღვარი ჰქონდეს x^0 წერტილზე.

ამ ზღვრის არსებობის შემთხვევაში, რაც აღვნიშნოთ $C(x^0)$-ით, x^0 წერტილზე არსებობს ორივე შერეული კერძო წარმოებული და ადგილი აქვს

$$f'_s(x^0) = \partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x^0) = \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x^0) = C(x^0) \tag{10}$$

ტოლობებს.

დამტკიცება. მტკიცების პირველი ნაწილი და $f'_s(x^0) = C(x^0)$ ტოლობა გამომდინარეობს თეორემა 3.4.4-დან. მაშასადამე, არსებობს

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta^2_{[x^0]} f(h,k)}{hk} = C(x^0). \tag{11}$$

x^0 წერტილის მიდამოში $f'_{x_1}(x_1, x_2)$-ის სასრულობიდან გამომდინარეობს, რომ საკმარისად მცირე ყველა k-თვის სასრულია $f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0 + k) - f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ სხვაობა. მაგრამ ეს სხვაობა, x_1-ით კერძო წარმოებულის განსაზღვრის ძალით, ტოლია

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0 + k) - f(x_1^0, x_2^0 + k)}{h} -$$

---

[21], გვ. 151) და ამ წერტილზე $f'_s(x^0)$ მისი მნიშვნელობაა. იგივეს თქმა შეიძლება ქვემოთ მოყვანილი შედეგი 3.4.1-ის და თეორემა 3.4.5-ის შესახებაც, უკვე ორივე შერეული კერძო წარმოებულის მიმართ.

$$-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1^0+h,x_2^0)-f(x_1^0,x_2^0)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1^0+h,x_2^0+k)-f(x_1^0,x_2^0+k)-f(x_1^0+h,x_2^0)+f(x_1^0,x_2^0)}{h}$$

ზღვრის. ამრიგად, საკმარისად მცირე k-თვის არსებობს სასრული

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2_{[x^0]}f(h,k)}{h}=f'_{x_1}(x_1^0,x_2^0+k)-f'_{x_1}(x_1^0,x_2^0) \qquad (12)$$

ზღვარი. ანალოგიურად, საკმარისად მცირე h-თვის სასრულია

$$\lim_{k\to 0}\frac{\Delta^2_{[x^0]}f(h,k)}{k}=f'_{x_2}(x_1^0+h,x_2^0)-f'_{x_2}(x_1^0,x_2^0) \qquad (13)$$

ზღვარიც. მაშასადამე, შესრულებულია თეორემა 3.3.2-ის პირობები. ამიტომ არსებობს განმეორებითი

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2_{[x^0]}f(h,k)}{h}=$$
$$=\lim_{k\to 0}\frac{f'_{x_1}(x_1^0,x_2^0+k)-f'_{x_1}(x_1^0,x_2^0)}{k}=\partial_{x_2}\partial_{x_1}f(x^0), \qquad (14)$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\lim_{k\to 0}\frac{\Delta^2_{[x^0]}f(h,k)}{k}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'_{x_2}(x_1^0+h,x_2^0)-f'_{x_2}(x_1^0,x_2^0)}{h}=\partial_{x_1}\partial_{x_2}f(x^0) \qquad (15)$$

ზღვრები და ისინი ტოლია ორმაგი (11) ზღვრის. თეორემა დამტკიცებულია.

უკანასკნელი თეორემიდან მიიღება

შედეგი 3.4.2. ვთქვათ, $f(x_1, x_2)$ ფუნქციას $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის მიდამოში აქვს სასრული კერძო $f'_{x_1}(x_1, x_2)$, $f'_{x_2}(x_1, x_2)$ წარმოებულები და ერთი მაინც შერეული კერძო წარმოებული. თუ ეს შერეული კერძო წარმოებული უწყვეტია x^0 წერტილზე ანუ, რაც იგივეა, მას აქვს სასრული ზღვარი x^0-ზე, მაშინ ადგილი აქვს სასრულწევრებიან

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x^0) = f'_s(x^0) = \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x^0) \tag{16}$$

ტოლობებს.

3.5. ბეტაცისმიერი წარმოებულის სასრულობის სხვა საკმარისი პირობა ([99])

როგორც ვნახეთ, ბეტაცისმიერი წარმოებულის წერტილზე არსებობა დაკავშირებულია შერეული კერძო წარმოებულისთვის ზღვრის არსებობასთან იმავე წერტილზე.

ცხადია, რომ წერტილზე ფუნქციის ორჯერ დიფერენცირებადობიდან არ გამომდინარეობს, საზოგადოდ, ამ წერტილის მიდამოში მისი რომელიმე შერეული კერძო წარმოებულის სასრულობა და მით უფრო მისი ზღვრის არსებობა აღებულ წერტილზე.

მარტივი და აშკარად გამოხატული საკმარისი პირობა ბეტაცისმიერი წარმოებულის არსებობისთვის მიიღება შედეგი 3.4.2-ისა და თეორემა 2.1.5-ის საფუძველზე.

თეორემა 3.5.1. თუ $f(x_1, x_2)$ ფუნქცია არის ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი (x_1^0, x_2^0) წერტილზე, მაშინ არსებობს სასრული $f'_s(x_1^0, x_2^0)$ და იგი ემთხვევა ორივე შერეულ კერძო წარმოებულს (x_1^0, x_2^0) წერტილზე.

3.6. დიფერენცირებადობის კავშირი შერეული კერძო წარმოებულის ზღვართან

თეორემა 3.6.1 ([99]). ვთქვათ $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ წერტილის მიდამოში სასრულია $f'_{x_1}(x_1, x_2)$, $f'_{x_2}(x_1, x_2)$ და $f(x_1, x_2)$-ის ერთი

მაინც შერეული კერძო წარმოებული. თუ ამ შერეულ კერძო წარმოებულს აქვს სასრული ზღვარი (უწყვეტია) x^0 წერტილზე, მაშინ $f(x_1, x_2)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x^0 წერტილზე.

დამტკიცება. დაშვებულ პირობებში არსებობს სასრული $f'_s(x^0)$, შედეგი 3.4.2-ის ძალით. ახლა საკმარისია გამოვიყენოთ 3.4.1 თეორემა. თეორემა დამტკიცებულია.

3.7. ლაგრანჟის ფორმულა შერეული და ბეტაცისმიერი წარმოებულებისთვის

თეორემა 3.7.1. ვთქვათ R მართკუთხედზე უწყვეტ $F(x, y)$ ფუნქციას R^0-ის ყოველ წერტილზე აქვს სასრული F'_x, F'_y, $F''_{x,y}$ და ამასთან, $F''_{x,y}$ უწყვეტია ყოველ წერტილზე R^0-დან. მაშინ ყოველი $r = [a, b] \times [c, d] \subset R^0$ მართკუთხედისთვის ადგილი აქვს

$$F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) = (b-a)(d-c)F''_{xy}(\xi, \eta), \quad (1)$$

$$F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) = (b-a)(d-c)F'_s(\xi, \eta) \quad (2)$$

ტოლობებს, სადაც $a < \xi < b$ და $c < \eta < d$.

დამტკიცება. თეორემის პირობებში ადგილი აქვს 3.4.(16) ტოლობებს F ფუნქციისთვის. გარდა ამისა, მართებულია

$$F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) = \int_a^b \int_c^d F''_{xy}(x,y)\, dx\, dy \quad (3)$$

ტოლობაც (იხ. მაგ. [69], გვ. 6). თუ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარისთვის გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის პირველ ფორმულას ([7], გვ. 319), მაშინ (3) ტოლობა მიიღებს (1) სახეს. ეს უკანასკნელი კი, ისევ 3.4.(16) ტოლობების ძალით, ჩაიწერება (2) სახითაც.

მართებულია აგრეთვე შემდეგი ფორმულებიც.

თეორემა 3.7.2 ([87], გვ. 62)**.** თუ R მართკუთხედზე უწყვეტ F ფუნქციას R^0-ის ყოველ წერტილზე აქვს სასრული F'_s, მაშინ R^0-ში არსებობს (ξ,η) წერტილი ისეთი, რომ ადგილი აქვს (2) ტოლობას.

თეორემა 3.7.3 ([87], გვ. 62)**.** თუ R მართკუთხედზე უწყვეტ F ფუნქციას R^0-ის ყოველ (x,y) წერტილზე აქვს სასრული $F'_s(x,y)$, $F'_x(x,c)$ და $F'_y(a,y)$, მაშინ არსებობს $(\xi,\eta)\in R^0$ წერტილი ისეთი, რომ ადგილი აქვს

$$\begin{gathered}F(b,d)-F(a,c)=(b-a)F'_x(\xi,c)+\\ +(d-c)F'_y(a,\eta)+(b-a)(d-c)F'_s(\xi,\eta)\end{gathered}\tag{4}$$

ტოლობას.

თ ა ვ ი IV

განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალის და აბსოლუტურად უწყვეტი ორცვლადიანი ფუნქციის შესახებ

ამ თავში დამტკიცებულია თითქმის ყველგან ძლიერი გრადიენტის სასრულობა, კერძოდ სრული დიფერენციალის არსებობა, განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალისთვის და აბსოლუტურად უწყვეტი ორი ცვლადის ფუნქციისთვის.

ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციისთვის შემოღებულია ლებეგის ინტენსური წერტილის ცნება და დადგენილია, რომ ყოველი ჯამებადი ფუნქციისთვის ლებეგის ინტენსური წერტილია თითქმის ყველა წერტილი.

დადგენილია ლებეგის ინტენსურ წერტილებზე ძლიერი გრადიენტის სასრულობა, კერძოდ, სრული დიფერენციალის არსებობა როგორც განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალისთვის, ისე ორცვლადიანი აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციისთვის.

პარამეტრიანი განუსაზღვრელი ინტეგრალისთვის დამტკიცებულია ძლიერი გრადიენტის თითქმის ყველგან სასრულობა, რომელიც წარმოადგენს როგორც ვალე პუსენის (1916), ისე ლებეგის (1903) თეორემების განზოგადებას.

გამოკვლეულია განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალის ორჯერ დიფერენცირებადობის საკითხი. მითითებულია ლებეგის ინტენსური წერტილის საკმარისი პირობები.

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

1. კოშის აზრით ინტეგრალი. როგორც თავის დროზე აღინიშნა, გაწარმოება არის მათემატიკური ანალიზის უმნიშვნელოვანესი

ოპერაცია. ეს განპირობებულია იმით, რომ ბუნების ბევრი მოვლენა-ფაქტის შესწავლა აუცილებლობით უკავშირდება ამ მოვლენა-ფაქტის აღმწერი ფუნქციური დამოკიდებულების წარმოებადობის თვისებას.

ასეთია მოძრავი მატერიალური წერტილის სიჩქარე მოცემული მომენტისთვის და ფიზიკური შინაარსის ბევრი სხვა ამოცანა.

ეს ამოცანები ბევრი მკვლევარისთვის ცნობილი იყო რამდენიმე საუკუნით ადრე, ვიდრე მოხდებოდა ამ ამოცანების მათემატიკური ფორმულირება (მათემატიზება) და გადაჭრა. აქ პირველები იყვნენ, თავიანთი მათემატიკური შედეგებით, ნიუტონი და ლაიბნიცი. ისინი ერთიმეორისგან დამოუკიდებლად მივიდნენ წარმოებულის ცნებამდე და მისი აღმნიშვნელი სიმბოლიკაც სხვადასხვა ჰქონდათ. სწორედ ლაიბნიცის მიერაა შემოღებული ის სიმბოლიკა, რითაც ახლა ვსარგებლობთ.

ფუნქციის წარმოებულის პოვნა და წარმოებულით **ანტიწარმოებულის** (პირველადი ფუნქციის) პოვნა, მჭიდრო კავშირშია ერთიმეორესთან: ერთ-ერთის წინ წაწევა იწვევს მეორეს წინ წაწევას და შებრუნებით.

აუცილებელია აღინიშნოს, რომ ფუნქციათა თეორიის განვითარება მჭიდრო კავშირშია ორივე ამ პრობლემის დაძლევასთან. დაბოლოს, ორივე პრობლემის გადაჭრა თხოულობს ზღვრის მოშველიებას და ადრინდელმა მკვლევარებმა ვერ დაძლიეს ეს პრობლემები სწორედ იმიტომ, რომ არ იყო სათანადოდ დამუშავებილი ზღვრის ცნება. ზღვრის ცნების დროულ დამუშავებას ხელს უშლიდა ფიზიკურ ამოცანათა მხოლოდ და მხოლოდ გეომეტრიულ-ფიზიკური ინტერპრეტაცია. ზღვარზე ჰქონდათ ზედაპირული წარმოდგენა. საჭირო იყო ზღვრის ცნების ისეთი ფორმულირება, რომელსაც ექნებოდა სამუშაო ძალა ყველა კონკრეტული ამოცანისთვის. კონკრეტულ ამოცანაზე პასუხი უნდა იყოს ზოგადის გამოვლინება.

ზღვრის მოხერხებული ცნება ეკუთვნის კოშის (1820 წ.), თუმცა 1817 წელს ის უკვე ჰქონდა ბოლცანოს. მას ხომ თავისი სიცოცხლის ბოლო 28 წლის განმავლობაში აკრძალული ჰქონდა წერა და საჯარო გამოსვლა (იხ. თავი II, 1.14).

კოშიმ (1823 წ.) ნაშრომში “დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის მოკლე კურსი” დაადგინა სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის შესაბამისი ინტეგრალური ჯამებისთვის სასრული ზღვრის არსებობა და ამ ზღვარს უწოდა ინტეგრალი აღებულ სეგმენტზე მოცემული ფუნქციიდან.

კოშიმ იქვე შემოიტანა ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრალი, აჩვენა რა ამ უკანასკნელისთვის წარმოებულის არსებობა და მისი ტოლობა საინტეგრებელ ფუნქციასთან (**ინტეგრანდთან**). მაშასადამე, მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქციისთვის დამტკიცდა ანტიწარმოებულის არსებობა, რომელიც არის მისგან ცვლადსაზღვრიანი ინტეგრალი მუდმივი შესაკრების სიზუსტით.

ამრიგად, ორმხრივია კავშირი გაწარმოებასა და ინტეგრებას შორის: განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული იძლევა **ინტეგრანდს** (ინტეგრალქვეშა ფუნქციას) და განუსაზღვრელი ინტეგრალი არის ინტეგრანდის **ანტიწარმოებული** (პირველადი ფუნქცია).

2. რიმანის აზრით ინტეგრალი. შემდგომი მნიშვნელოვანი წინსვლა ინტეგრების თეორიაში ეკუთვნის რიმანს. მან ინტეგრალური ჯამები შეადგინა შემოსაზღვრული ფუნქციისთვის და მათთვის სასრული ზღვრის არსებობის შემთხვევაში ამ ზღვარს უწოდა ინტეგრალი აღებული ფუნქციიდან მოცემულ სეგმენტზე (რიმანმა ინტეგრალური ჯამები შეადგინა სასრული ფუნქციისთვის, მაგრამ მსჯელობებში სარგებლობდა შემოსაზღვრულობით. დღეისთვის ეს აშკარა განსხვავება, იმ დროს გამოკვეთილი არ იყო).

პრობლემა, რამაც რიმანი მიიყვანა ინტეგრალის ცნების გაფართოებამდე, ჩანს მისი ნაშრომის სახელწოდებიდან “ფუნქციის წარმოდგენა ტრიგონომეტრიული მწკრივით” (დაიწერა 1854 წელს და გამოაქვეყნა დედეკინმა 1867 წელს, რიმანის გარდაცვალების (1866) შემდეგ). რიმანამდე, ფუნქციის წარმოსადგენად ფურიეს მწკრივის სახით, ეძებდნენ საკმარის პირობებს ფუნქციაზე. რიმანმა დასვა ამოცანა: ფუნქციის წარმოდგენა ტრიგონომეტრიული მწკრივის სახით, რა აუცილებელ პირობებს მოითხოვს ფუნქციისგან?

რიმანის ინტეგრალის შემთხვევაში დარღვეული აღმოჩნდა ის ჰარმონია, რაც კოშის აზრით ინტეგრებისას არსებობდა გაწარმოებასა და ინტეგრებას შორის. რიმანს არც კი უცდია ამ კავშირის გამოკვლევა, მის მასწავლებელ დირიჰლეს გავლენით. რიმანი გრძნობდა, უეჭველად, ამ კავშირის დარღვევის შესაძლებლობას და ამიტომაც იკავებდა თავს აღნიშნული ნაშრომის გამოქვეყნებისგან.

1875 წელს დარბუმ აჩვენა ამ ჰარმონიის დარღვევის ფაქტი საინტეგრებელი ფუნქციის წყვეტის წერტილზე და იქვე აჩვენა ჰარმონიის შენარჩუნების ფაქტი უწყვეტობის წერტილზე ([10], გვ. 216–217).

იმავე 1875 წელს თომემ შემოიღო ცალმხრივი წარმოებულის ცნება, რაც მიუყენა რიმანის ინტეგრალს და დაამტკიცა ([10], გვ. 216–217): თუ რიმანის აზრით ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული მარჯვენა $f(x_0+)$ ზღვარი (ან სასრული მარცხენა $f(x_0-)$ ზღვარი) x_0 წერტილზე, მაშინ მის განუსაზღვრელ $F(x)$ ინტეგრალს x_0 წერტილზე აქვს მარჯვენა $F'_+(x_0)$ წარმოებული და $F'_+(x_0)=f(x_0+)$ (შესაბამისად $F'_-(x^0) = f(x_0-)$). თუ $f(x)$-ს არ აქვს მარჯვენა სასრული ზღვარი x_0-ზე, მაშინ არ არსებობს სასრული $F'_+(x_0)$ (ანალოგიური მდგომარეობაა მარცხენა წარმოებულისთვის). ეს დებულებანი მოიცავს დარბუს თეორემას უწყვეტობის x_0 წერტილისთვის.

დარბუს და თომეს თეორემები უწყვეტობის წერტილისთვის ჩამოვაყალიბოთ ცალკე ([10], გვ. 217).

თეორემა (დარბუ, თომე; 1875 წ.)**.** რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული ტოლია ინტეგრანდისა, ამ უკანასკნელის უწყვეტობის წერტილზე.

ამ მტკიცებას ადგილი აქვს თითქმის ყველა წერტილზე. ეს გამომდინარეობს ამ თეორემიდან და ლებეგის მიერ მოგვიანებით (1910 წელს) დამტკიცებული თეორემიდან, რომლის ძალითაც რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლის ზომა ლებეგის აზრით ნულია. ამასთან, $e \subset [a, b]$ სიმრავლის ზომა ნულია ლებეგის აზრით ნიშნავს ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ინტერვალების

სასრული ან თვლადი ისეთი სისტემის არსებობას, რომელთა გაერთიანება მოიცავს e სიმრავლეს და ამ სისტემის ინტერვალების სიგრძეების ჯამი (მწკრივის ჯამი) ნაკლებია ε-ზე.

უკვე მალე გამოჩნდა უფრო დიდი დაშორება გაწარმოებასა და რიმანის აზრით ინტეგრებას შორის. 1881 წელს ვოლტერამ ააგო შემოსაზღვრული წარმოებულის მქონე ფუნქცია და ეს წარმოებული არ არის R-ინტეგრებადი. გარდა ამისა, 1884 წელს შეფერმა ააგო სასრული სიგრძის მქონე უწყვეტი წირი, რომლის სიგრძის გამოთვლა იმ დროისთვის უკვე ცნობილი ფორმულით შეუძლებელი იყო მისი წარმოებულის არა R-ინტეგრებადობის გამო.

3. ლებეგის აზრით ინტეგრალი. ახლახან ჩამოთვლილი ფაქტები მიუთითებდა ინტეგრალის ცნების გაფართოების აუცილებლობაზე, რაც ბრწყინვალედ შეასრულა ლებეგმა. მან აჩვენა, რომ R-ინტეგრებადი ფუნქციები ქმნიან საკუთრივ ქვეკლასს L-ინტეგრებად ფუნქციათა კლასში. ლებეგისთვის გამორჩეულად დამახასიათებელია იდეის გამჭვირვალება და გადმოცემის იშვიათი სიზუსტე (რამაც მას გარკვეული სიძნელეები შეუქმნა: მის ზოგიერთ შედეგს იოლად დასადგენ ფაქტად თვლიდნენ). ამის ერთ-ერთ მაგალითად გამოდგება მისი დებულება იმის შესახებ, რომ შემოსაზღვრული ფუქციის L-ინტეგრალს შეიძლება მივუახლოვდეთ რიმანის ჯამებითაც, თუკი ამ ჯამებს შევადგენთ ინტერვალის სპეციალური დაყოფისთვის და ქვეინტერვალებზე სპეციალურად შერჩეული წერტილებისთვის ([44], გვ. 261; [122], გვ. 641).

კიდევ უფრო მნიშვნელოვანია ლებეგის შედეგები წარმოებადობის საკითხებში. ჟორდანის მიერ შემოღებულ (1881 წ.) სასრული ვარიაციის ფუნქციებს წარმოებული რომ აქვთ თითქმის ყველგან ეს არის ლებეგის ფუნდამენტური შედეგი. მ. რისის სიტყვებით "ეს არის ანალიზის უმნიშვნელოვანესი და განსაცვიფრებელი შედეგი". საქმე ისაა, რომ ამ თეორემით პირველად გამოიყო კლასი წარმოებადი ფუნქციებისა. ლებეგის ამ თეორემის შედეგი ჩამოვაყალიბოთ ცალკე, ვიტალის მიერ (1905 წ) შემოღებული აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციებისთვის.

თეორემა (ლებეგი 1903 წ; [130]). მონაკვეთზე აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას ანუ ამ მონაკვეთზე ჯამებადი ფუნქციისთვის ლებეგის განუსაზღვრელ ინტეგრალს, თითქმის ყველგან აქვს სასრული წარმოებული და იგი თითქმის ყველგან ემთხვევა საინტეგრებელი ფუნქციის მნიშვნელობას (იხ. თავი II, 1.15).

4. ჯერადი ინტეგრალის რეგულარული წარმოებული. კიდევ უფრო მრავალფეროვანი აღმოჩნდა ჯერადი L-ინტეგრალის გაწარმოების ამოცანა, რომლის კვლევა ლებეგმა დაიწყო **სიმრავლის ფუნქციისთვის წარმოებულის** ცნების შემოღებით. მან თავიდანვე გამოყო წერტილისკენ **სიმრავლეთა მოჭიმვის ორი სახეობა**: **რეგულარული** და **არარეგულარული** ანუ **ძლიერი**.

მოცემული წერტილის შემცველ სიმრავლეთა სისტემის **რეგულარული მოჭიმვა** ამ წერტილისკენ ნიშნავს, რომ ამ წერტილიდან სისტემის თითოეული სიმრავლის საზღვრამდე უმცირესი და უდიდესი დაშორებების შეფარდება შემოსაზღვრულია ქვემოდან ყველა სიმრავლისთვის ერთი და იგივე დადებითი რიცხვით. თუ წერტილისკენ იკუმშება მართკუთხედების სისტემა, რასაც ადგილი აქვს უმეტეს შემთხვევაში, მაშინ ამ სისტემის მოჭიმვა იქნება **რეგულარული**, როცა თითოეული მართკუთხედის მცირე გვერდის შეფარდება მის დიდ გვერდთან შემოსაზღვრულია ქვემოდან ამ სისტემის ყველა მართკუთხედისთვის ერთი და იგივე დადებითი რიცხვით (ე. ი. ეს დადებითი რიცხვი დამოკიდებულია აღებულ სისტემაზე და არაა დამოკიდებული ამ სისტემის თითოეულ მართკუთხედზე). ამასთან ერთად იგულისხმება, რომ მართკუთხედების გვერდები პარალელურია საკოორდინატო ღერძების. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ განიხილება **მართკუთხედების სტანდარტული სისტემა**.

ძლიერი მოჭიმვისას რაიმე შეზღუდვა არ არის (ზიგმუნდმა განიხილა შუალედური შემთხვევა: თითოეული მართკუთხედის მცირე გვერდის შეფარდება მისივე დიდ გვერდთან, არაა ნაკლები ამ დიდ გვერდზე).

ლებეგის შედეგები გაწარმოების საკითხებშიც გამოკვეთილად ერთპიროვნულია. საკსი წერს: “ბევრი ეცადა ინტეგრების კოში–რიმანის პროცესის განზოგადებას, მაგრამ მხოლოდ ლებეგმა შეძლო პირველს მიეღწია ნამდვილი პროგრესისთვის. მისი ნაშრომების დიდი მნიშვნელობა ისიც არის, რომ მან ინტეგრების თეორიის პარალელურად შექმნა გაწარმოების თეორია”.

ლებეგის შედეგებიდან ერთ-ერთი ძირითადია

თეორემა ([134], [135], [3], გვ. 404; [54], გვ. 176)**.** სიმრავლის ადიციურ და აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას თითქმის ყველგან აქვს სასრული რეგულარული წარმოებული, რომელიც ჯამებადია და მისგან განუსაზღვრელი ინტეგრალი აღადგენს სიმრავლის გამოსავალ ფუნქციას.

ამ თეორემის შედეგია

თეორემა ([135], [54], გვ. 180)**.** ჯამებადი ფუნქციის ჯერად განუსაზღვრელ ინტეგრალს თითქმის ყველგან აქვს სასრული რეგულარული წარმოებული და იგი თითქმის ყველგან ემთხვევა საინტეგრებელი ფუნქციის მნიშვნელობებს.

ეს ნიშნავს, რომ ყოველი $f \in L(Q)$ ფუნქციისთვის არსებობს ზომადი $E \subset Q$ სიმრავლე ისეთი, რომ $|E| = |Q|$ და f-ის განუსაზღვრელ ინტეგრალს ყოველ $x \in E$ წერტილზე აქვს $f(x)$-ის ტოლი წარმოებული ყოველი რეგულარული სისტემის მიმართ.

5. ჯერადი ინტეგრალის ძლიერი წარმოებული. გასარკვევი დარჩა მეტად მძიმე და მრავალმხრივ საინტერესო პრობლემა: რა მდგომარეობაა **ძლიერი წარმოებულის** შემთხვევაში?

ამ პრობლემაზე მუშაობა სათავეს იღებს XX საუკუნის 10-იანი წლებიდან და გრძელდება დღესაც. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგებიდან აუცილებელია გამოიყოს შემდეგი ძირითადი თეორემები.

თეორემა ([94], [54], გვ. 201)**.** არსებობს ორი ცვლადის ჯამებადი ფუნქცია, რომლის განუსაზღვრელი ინტეგრალის ზედა ძლიერი წარმოებული ყველგან $+\infty$ არის.

თეორემა ([160], [26], გვ. 92). სიმრავლე იმ ჯამებადი ფუნქციებისა, რომელთა განუსაზღვრელი ინტეგრალის ზედა ძლიერი წარმოებული არის $+\infty$ ყველა წერტილზე, ქმნის მეორე კატეგორიის სიმრავლეს ჯამებად ფუნქციათა კლასში.

თეორემა ([125], [54], გვ. 201 და 222). თუ n ცვლადის f ფუნქცია ისეთია, რომ $|f|(1+\log^+|f|)^{n-1} \in L$, მაშინ f-ის განუსაზღვრელ ინტეგრალს თითქმის ყველგან აქვს ძლიერი წარმოებული და იგი თითქმის ყველა x-თვის ტოლია $f(x)$-ის.

ცნობილია უკანასკნელი თეორემის გამარტივებული დამტკიცება [92].

საინტერესოა პაპულისის ასეთი

შედეგი ([148], [31], გვ. 494). არსებობს ისეთი ჯამებადი ფუნქცია, რომლის განუსაზღვრელი ინტეგრალი ძლიერ წარმოებადია თითქმის ყველგან და $|f|$-ის განუსაზღვრელი ინტეგრალი კი ძლიერ წარმოებადია თითქმის არსად.

მაშასადამე, ჯამებად ფუნქციათა მთლიან კლასში მათი ინტეგრალისთვის ძლიერი წარმოებულის არსებობის საკითხი უარყოფითადაა გადაწყვეტილი.

ზემოთ აღნიშნულ თეორემებში ძლიერი წარმოებული განხილულია სტანდარტული მართკუთხედების (პარალელეპიპედების) მიმართ, ე. ი. რომელთა გვერდები (წიბოები) პარალელურია საკოორდინატო ღერძების. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით: ძლიერი წარმოებული სტანდარტული მართკუთხედების (პარალელეპიპედების) მიმართ. სხვა შემთხვევაში ვიტყვით: ძლიერი წარმოებული **არასტანდარტული მართკუთხედების (პარალელეპიპედების) მიმართ**.

თეორემა (ზიგმუნდი, 1927; შენიშვნა [144] ნაშრომის ბოლოში (იხ. [26], გვ. 6 და 114)). ძლიერი წარმოებული არასტანდარტული მართკუთხედების მიმართ შეიძლება არ ჰქონდეს შემოსაზღვრული ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალს: არსებობს შემოსაზღვრული ფუნქცია, რომლის განუსაზღვრელ ინტეგრალს ერთი მიმართულებით

(სტანდარტული მიმართულებით) აქვს ძლიერი წარმოებული და მეორე მიმართულებით (არასტანდარტული მიმართულებით) კი არ აქვს ძლიერი წარმოებული.

ამ შედეგთან დაკავშირებით ზიგმუნდმა დასვა შემდეგი ამოცანა ([26], გვ. 95 და 114): ორი ცვლადის ყოველი ჯამებადი f ფუნქციისთვის არსებობს თუ არა ორთოგონალურ მიმართულებათა ისეთი წყვილი, რომელთა თანამიმართულგვერდებიანი მართკუთხედების მიმართ ძლიერი წარმოებული ექნება f-ის განუსაზღვრელ ინტეგრალს?

ამ ამოცანაზე პასუხი უარყოფითია ([139]).

ამ ფაქტებმა დასაბამი მისცა უფრო ზოგადი სიტუაციების განხილვას, რომელთა შესახებ ვრცელი საუბარია გუსმანის მონოგრაფიაში ([26]).

ამ მონოგრაფიაში დასმული ამოცანების გადაწყვეტამ ხელი შეუწყო ახალი კონცეფციების ფორმირებას. ასე, ონიანის მონოგრაფიაში ([46]) და ზერეკიძის დისერტაციაში ([32]) მოცემულია ამ კონცეფციების ვრცელი მიმოხილვა და მნიშვნელოვნადაა გამდიდრებული ახალი შედეგებით. აქ ციტირებული ლიტერატურა შეიძლება შეივსოს [136], [140] და [167] ნაშრომებით.

6. განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალი და ორი ცვლადის აბსოლუტურად უწყვეტი, კერძოდ ლიპშიცის კლასის, ფუნქცია წარმოადგენენ კვლევის ობიექტებს სხვა თვალსაზრისითაც.

სახელდობრ, ამ თავში გამოკვლეულია შემდეგი ამოცანა: განუსაზღვრელ ორმაგ ინტეგრალს და ორი ცვლადის აბსოლუტურად უწყვეტ, კერძოდ ლიპშიცის კლასის, ფუნქციას აქვს თუ არა სასრული ძლიერი გრადიენტი, კერძოდ, სრული დიფერენციალი?

ეს ამოცანა დადებითად არის გადაწყვეტილი თითქმის ყველა წერტილისთვის. ამასთან ერთად, მოცემულია დახასიათება იმ წერტილებისა, ლებეგის ინტენსური წერტილების სახით, რომელთათვისაც დადებითად წყდება აღნიშნული ამოცანა.

§ 1. განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალის დიფერენცირებადობა

1.1. კერძო და შერეული კერძო წარმოებულები განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალისთვის

ვთქვათ, ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქცია ჯამებადია $Q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\big\}$ მართკუთხედზე. განვიხილოთ f-ის **განუსაზღვრელი ორჯერადი**

$$F(x,y) = \int\limits_a^x \int\limits_c^y f(t,\tau)\, dt\, d\tau \tag{1}$$

ინტეგრალი, რომელიც სასრული ფუნქციაა ყველა $(x,y) \in Q$ წერტილზე. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\iint\limits_Q |f(t,\tau)|\, dt\, d\tau$-ის სასრულობა იწვევს $\int\limits_a^x \int\limits_c^y |f(t,\tau)|\, dt\, d\tau$-ის სასრულობას ყველა $(x,y) \in Q$ წერტილზე. აქედან კი გამომდინარეობს $\int\limits_a^x \int\limits_c^y f(t,\tau)\, dt\, d\tau$-ის სასრულობა ყოველ $(x,y) \in Q$ წერტილზე.

ფუბინის თეორემის ძალით ([3], გვ. 487), (1) ტოლობა შეიძლება ჩაიწეროს ორნაირად:

$$F(x,y) = \int\limits_a^x \Big(\int\limits_c^y f(t,\tau)\, d\tau \Big)\, dt, \tag{2}$$

$$F(x,y) = \int\limits_c^y \Big(\int\limits_a^x f(t,\tau)\, dt \Big)\, d\tau. \tag{3}$$

თუ (2) ტოლობის მიმართ გამოვიყენებთ ლებეგის თეორემას (იხ. შესავალი, 3), მაშინ სიმრავლე იმ x წერტილებისა, რომელთათვისაც

სრულდება

$$F'_x(x,y) = \int_c^y f(x,\tau)\,d\tau \tag{4}$$

ტოლობა, დამოკიდებულია y პარამეტრზე. y-ის ცვლილებისას იცვლება სიმრავლე იმ x-ებისა, რომელთათვისაც ადგილი აქვს (4) ტოლობას.

ეს სიტუაცია შეისწავლა ტოლსტოვმა და დაამტკიცა

თეორემა 1.1.1 ([63], § 7). ყოველი $f \in L(Q)$ ფუნქციისთვის არსებობენ ისეთი ზომადი $e_1 \subset [a,b]$, $|e_1| = b - a$ და $e_2 \subset [c,d]$, $|e_2| = d - c$ სიმრავლეები, რომ (1) ტოლობით Q-ზე განსაზღვრულ სასრულ $F(x,y)$ ფუნქციას აქვს შემდეგი თვისებები:

1) სასრულწევრებიანი

$$F'_x(x,y) = \int_c^y f(x,\tau)\,d\tau \tag{5}$$

ტოლობა სრულდება ყველა (x,y) წერტილზე, როცა $x \in e_1$ და $c \le y \le d$;

2) სასრულწევრებიანი

$$F'_y(x,y) = \int_a^x f(t,y)\,dt \tag{6}$$

ტოლობა სრულდება ყველა (x,y) წერტილზე, როცა $a \le x \le b$ და $y \in e_2$;

3) არსებობს ისეთი ზომადი $E \subset Q$ სიმრავლე, რომ $|E| = |Q|$ და სასრულწევრებიანი

$$F''_{x,y}(x,y) = f(x,y) = F_{y,x}(x,y) \tag{7}$$

ტოლობები* სრულდება ყველა $(x,y) \in E$ წერტილზე.

ამ თეორემის 1) და 2) მტკიცებანი გვიჩვენებენ, რომ ორცვლადიანი F'_x და F'_y ფუნქციები სასრულია თითქმის ყველგან Q-ზე.

უფრო ზუსტად: $F'_x(x,y)$ ფუნქცია სასრულია $\mathcal{E}_1 = \big\{(x,y) \in Q:\ x \in e_1,\ c \le y \le d\big\}$, $|\mathcal{E}_1| = |Q|$, სიმრავლეზე და $F'_y(x,y)$ კი სასრულია $\mathcal{E}_2 = \big\{(x,y) \in Q:\ a \le x \le b,\ y \in e_2\big\}$, $|\mathcal{E}_2| = |Q|$, სიმრავლეზე.

ბუნებრივია, გაირკვეს F'_x და F'_y ფუნქციების Q-ზე ჯამებადობის საკითხი. ამასთან დაკავშირებით მართებულია

წინადადება 1.1.1. F'_x და F'_y ფუნქციები ჯამებადია Q-ზე.

დამტკიცება. რადგან $f \in L(Q)$, ამიტომ $|f| \in L(Q)$, ე. ი.

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d \big|f(t,\tau)\big|\, dt\, d\tau \equiv I(f)$$

სასრული რიცხვია. ეს კი (5) ტოლობიდან გამომდინარე

$$\big|F'_x(t,\tau)\big| \le \int\limits_c^y \big|f(x,\tau)\big|\, d\tau \le \int\limits_c^d \big|f(x,\tau)\big|\, d\tau,\ \ x \in e_1,$$

უტოლობის გათვალისწინებით იძლევა, რომ

$$\int\limits_a^b \big|F'_x(x,y)\big|\, dx \le I(f).$$

აქედან კი გამომდინარეობს შეფასება

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d \big|F'_x(x,y)\big|\, dx\, dy \le (d-c)\cdot I(f) < +\infty,$$

---

*მოვიგონოთ (იხ. თავი III, § 1) $F''_{x,y} = \partial y \partial x F$ და $F''_{y,x} = \partial x \partial y F$ სიმბოლოები.

რის გამოც $F'_x \in L(Q)$. ასევე დგინდება, რომ $F'_y \in L(Q)$.

ორივე შერეული კერძო წარმოებულის ჯამებადობა Q-ზე კი, გამომდინარეობს (7) ტოლობებიდან.

1.2. განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალის დიფერენცირებადობა

ვთქვათ, ერთი ცვლადის $\varphi(x)$ ფუნქცია ჯამებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და განვიხილოთ მისი **განუსაზღვრელი**

$$\phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in L([a,b]), \tag{1}$$

ინტეგრალი.

ლებეგის თეორემის (1903 წ.) ძალით არსებობს ისეთი ზომადი $e \subset [a,b]$, $|e| = b-a$, სიმრავლე, რომ $\phi'(x) = \varphi(x)$ ტოლობა ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varphi(t)\,dt = \varphi(x) \tag{2}$$

ტოლობა სრულდება ყველა $x \in e$ წერტილზე.

შევნიშნოთ, რომ (2) ტოლობა სრულდება φ ფუნქციის ლებეგის x წერტილებზე. კერძოდ კი, φ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილებზე, თუკი ასეთი წერტილები აქვს φ ფუნქციას. ეს უკანასკნელი შემთხვევა წარმოადგენს R-ინტეგრალისთვის დარბუს და თომეს (იხ. შესავალი) თეორემის გავრცელებას L-ინტეგრალზე.

სავსებით ბუნებრივია შემდეგი ორი ამოცანა:

I) $Q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\big\}$ მართკუთხედზე ჯამებადი f ფუნქციის შესაბამის განუსაზღვრელ ორმაგ

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(t,\tau)\,dt\,d\tau \tag{3}$$

ინტეგრალს აქვს თუ არა დიფერენციალი?

II) თუკი $F(x,y)$ ფუნქციას აქვს დიფერენციალი, მაშინ f ფუნქციით როგორ ხასიათდება F-ის დიფერენცირებადობის წერტილები?

ამოცანა I) განიხილება აქვე, ხოლო ამოცანა II) შესწავლილია § 4-ში.

დავიწყოთ შემდეგი ლემით.

ლემა 1.2.1 ([100], [107])**.** ყოველი ჯამებადი $f \in L(Q)$ ფუნქციისთვის არსებობს ისეთი ზომადი $E \subset Q$ სიმრავლე $|E| = |Q|$ თვისების, რომ ყველა $(x,y) \in E$ წერტილზე შესრულებულია

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ |k|\le c|h|}} \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} \int\limits_{y}^{y+k} f(t,\tau)\, dt\, d\tau = 0, \tag{4}$$

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ |h|\le \ell|k|}} \frac{1}{k} \int\limits_{x}^{x+h} \int\limits_{y}^{y+k} f(t,\tau)\, dt\, d\tau = 0 \tag{5}$$

ტოლობები ყოველი $c > 0$ და $\ell > 0$ მუდმივებისთვის.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $h > 0$ და $k > 0$. როცა $k \le ch$, სადაც $c > 0$ ნებისმიერი მუდმივია, გვაქვს

$$\left|\frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} \int\limits_{y}^{y+k} f(t,\tau)\, dt\, d\tau\right| \le \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} \int\limits_{y}^{y+ch} |f(t,\tau)|\, dt\, d\tau =$$

$$= ch\left(\frac{1}{h\cdot ch} \int\limits_{x}^{x+h} \int\limits_{y}^{y+ch} \big|f(t,\tau)\big|\, dt\, d\tau\right). \tag{6}$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალისთვის რეგულარული წარმოებულის არსებობის შესახებ ლებეგის (იხ. შესავალი, 4) თეორემის ([54], გვ. 176

ან 180) ძალით არსებობს ისეთი ზომადი $E_1 \subset Q$, $|E_1| = |Q|$, სიმრავლე, რომ (6) ტოლობის ფრჩხილებში ჩასმული გამოსახულების ზღვარია სასრული $|f(x,y)|$ სიდიდე ყველა $(x,y) \in E_1$ წერტილზე და ყოველი $c > 0$ მუდმივისთვის, როცა $h \to 0$. ამის გათვალისწინებით, (6)-დან გამომდინარეობს (4) ტოლობა $(x,y) \in E_1$ წერტილებისთვის.

შევნიშნოთ, რომ (4) სრულდება $(x,y) \in E_1$ წერტილებზე ყოველი $c > 0$ მუდმივისთვის და არ სრულდება თანაბრად $c > 0$ მუდმივების მიმართ, საზოგადოდ.

ანალოგიურად დგინდება (5) ტოლობა ყოველი $\ell > 0$ მუდმივისთვის გარკვეულ ზომად $E_2 \subset Q$ სიმრავლეზე, სადაც $|E_2| = |Q|$.

ახლა განვიხილოთ $E = E_1 \cap E_2$ სიმრავლე. ცხადია, რომ $|E| = |Q|$ და $(x,y) \in E$ წერტილებზე სრულდება (4) და (5) ტოლობები ყოველი $c > 0$ და $\ell > 0$ მუდმივებისთვის. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.2.1 ([100], [107]). Q მართკუთხედზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციის **განუსაზღვრელი ორმაგი**

$$F(x,y) = \int\limits_a^x \int\limits_c^y f(t,\tau)\,dt\,d\tau \tag{7}$$

ინტეგრალი დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან Q-ზე.

დამტკიცება. ამ თეორემის დასამტკიცებლად აუცილებელი და საკმარისია, თანახმად თეორემა 3.5.3-ისა თავი II-დან, დამტკიცდეს $D_{\widehat{x}}F(x,y)$ და $D_{\widehat{y}}F(x,y)$ სიდიდეების სასრულობა თითქმის ყველა $(x,y) \in Q$ წერტილზე.

დავადგინოთ, მაგალითად $D_{\widehat{x}}F(x,y)$-ის სასრულობა თითქმის ყველა $(x,y) \in Q$ წერტილზე. ამ მიზნით განვიხილოთ

$$\frac{F(x+h,y+k) - F(x,y+k)}{h} - \int\limits_c^y f(x,\tau) =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} \int\limits_{c}^{y+k} f(t,\tau)\, dt\, d\tau - \int\limits_{c}^{y} f(x,\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} \Big(\int\limits_{c}^{y} \big[f(t,\tau) - f(x,\tau) \big]\, d\tau \Big)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} \int\limits_{y}^{y+k} f(t,\tau)\, dt\, d\tau \equiv I_h(x,y) + J_{h,k}(x,y) \tag{8}$$

გამოსახულება. (4) ტოლობის ძალით არსებობს ისეთი ზომადი $E \subset Q$ სიმრავლე $|E| = |Q|$ თვისების, რომ ყოველ $(x,y) \in E$ წერტილზე სრულდება

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ |k|\le|h|}} J_{h,k}(x,y) = 0 \tag{9}$$

ტოლობა. ახლა დავადგინოთ

$$\lim_{h\to 0} I_h(x,y) = 0 \tag{10}$$

ტოლობა თითქმის ყველა $(x,y) \in Q$ წერტილისთვის. ამ მიზნით ვისარგებლოთ თეორემა 1.1.1-ში აღნიშნული e_1 და e_2 სიმრავლეებით და მათი მეშვეობით იქვე მიღებული $\mathcal{E}_1$ და $\mathcal{E}_2$ სიმრავლეებითაც.

$\mathcal{E}_1$ სიმრავლეზე შესრულებულია 1.1.(5) ტოლობა ანუ

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h} = \int\limits_{c}^{y} f(x,\tau)\, d\tau, \quad (x,y) \in \mathcal{E}_1, \tag{11}$$

ტოლობა. აქედან ცხადია ნულისკენ სწრაფვა

$$\frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h} - \int\limits_{c}^{y} f(x,\tau) =$$

$$= \frac{1}{h}\Bigg(\int\limits_a^{x+h} \int\limits_c^{y} - \int\limits_a^{x} \int\limits_c^{y} \Bigg) f(t,\tau)\,dt\,d\tau - \int\limits_c^{y} f(x,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} \int\limits_c^{y} f(t,\tau)\,dt\,d\tau - \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} \int_c^{y} f(x,\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} \Bigg(\int\limits_c^{y} f(t,\tau)\,d\tau - \int\limits_c^{y} f(x,\tau)\,d\tau \Bigg) dt =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} \Bigg(\int\limits_c^{y} \big[f(t,\tau) - f(x,\tau)\big]\,d\tau \Bigg) dt = I_h(x,y)$$

სხვაობის, როცა $h \to 0$.

ახლა ცხადია, რომ (9) და (10) ტოლობები ერთდროულად სრულდება $(x,y) \in E^*$ წერტილებზე, სადაც $E^* = E \cap \mathcal{E}_1$, $|E^*| = |Q|$. ყველაფერი ეს ნიშნავს, (8) ტოლობის გათვალისწინებით, რომ $(x,y) \in E^*$ წერტილებზე სასრულია $D_{\widehat{x}}F(x,y)$ და

$$D_{\widehat{x}}F(x,y) = \int\limits_c^{y} f(x,\tau)\,d\tau, \;\; (x,y) \in E^*, \;\; |E^*| = |Q|. \tag{12}$$

ანალოგიურად დგინდება $D_{\widehat{y}}F(x,y)$-ის სასრულობა $(x,y) \in E^{**} = E \cap \mathcal{E}_2$, $|E^{**}| = |Q|$, წერტილებზე და ტოლობა

$$D_{\widehat{y}}F(x,y) = \int\limits_a^{x} f(t,y)\,dt, \;\; (x,y) \in E^{**}, \;\; |E^{**}| = |Q|. \tag{13}$$

ცხადია, რომ $M = E^* \cap E^{**}$, $|M| = |Q|$, სიმრავლის ყოველ (x,y) წერტილზე სასრულია (იხ. თავი II, 3.3.(4))

$$\widehat{D}F(x,y) = \big(D_{\widehat{x}}F(x,y),\, D_{\widehat{y}}F(x,y)\big) \tag{14}$$

და ადგილი აქვს

$$dF(x,y) = D_{\widehat{x}}F(x,y)\,dx + D_{\widehat{y}}F(x,y)\,dy \tag{15}$$

ტოლობას (იხ. თავი II, 3.5.(11)). თეორემა დამტკიცებულია*.

აქედან მიიღება დარბუს და თომეს თეორემის (იხ. შესავალი, 2) შემდეგი განზოგადება, იქვე აღნიშნული ლებეგის თეორემის გათვალისწინებით ([135]).

თეორემა 1.2.2 ([107]). Q მართკუთხედზე R-ინტეგრებადი ყოველი ψ ფუნქციის განუსაზღვრელი ორმაგი

$$\Psi(x,y) = \int_a^x \int_c^y \psi(t,\tau)\,dt\,d\tau \tag{16}$$

ინტეგრალი დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან Q-ზე.

თეორემა 1.2.3 ([100], [107]). $f \in L(Q)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი (7) ინტეგრალის დიფერენცირებადობის ყოველ $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე ადგილი აქვს

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{1}{|h|+|k|} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} f(t,\tau)\,dt\,d\tau = 0 \tag{17}$$

ტოლობას. კერძოდ, (17)-ს ადგილი აქვს თითქმის ყველა $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე (იხ. 3.2.(9) ტოლობაც ქვემოთ).

დამტკიცება. (7) ტოლობით მოცემული $F(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობის $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე სასრულია $D_{\widehat{x}}F(x_0,y_0)$

---

*ამ თეორემის სრულიად სხვაგვარი დამტკიცება მოცემულია [93] შრომაში (იხ. თავი II, შედეგი 2.6.1).

და $D_{\widehat{y}}F(x_0,y_0)$. კერძოდ, სასრულია $F'_x(x_0,y_0)$ და $F'_y(x_0,y_0)$. ამიტომ მართებულია

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{F(x_0+h,y_0+k)-F(x_0,y_0+k)-F(x_0+h,y_0)+F(x_0,y_0)}{|h|+|k|}=0 \tag{18}$$

ტოლობა, 3.5.4 თეორემის ძალით თავი II-დან. თუ (7) ტოლობით მოცემული $F(x,y)$ ფუნქციისთვის გამოვითვლით (18)-ის მრიცხველს, მივიღებთ (17)-ს.

(17) ტოლობის შესრულება თითქმის ყველგან Q-ზე, გამომდინარეობს 1.2.1 თეორემიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.2.4 ([99], [107]). ვთქვათ, $f\in L(Q)$ ფუნქციის განუსაზღვრელ (7) ინტეგრალს $(x_0,y_0)\in Q^0$ წერტილის მიდამოში აქვს სასრული $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ და $F''_{x,y}(x,y)$. მაშინ $F(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობისთვის (x_0,y_0) წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{hk}{|h|+|k|}\,F''_{x,y}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)=0,\ \ 0<\theta_1,\ \ \theta_2<1, \tag{19}$$

ტოლობა.

თუკი დამატებით ცნობილია, რომ (x_0,y_0) წერტილის მიდამოში შესრულებულია $F''_{x,y}(x,y)=f(x,y)$ ტოლობაც, მაშინ $F(x,y)$ ინტეგრალის დიფერენცირებადობისთვის (x_0,y_0) წერტილზე აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{hk}{|h|+|k|}f(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)=0,\ \ 0<\theta_1,\ \ \theta_2<1, \tag{20}$$

ტოლობა.

დამტკიცება. შესრულებულია 3.5.4 თეორემის პირობები თავი II-დან. ამიტომ (18) ტოლობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ $F(x,y)$ ფუნქცია იყოს დიფერენცირებადი (x_0,y_0) წერტილზე. მაგრამ (18)-ის მრიცხველი შეიძლება ჩაიწეროს $F''_{x,y}(x_0+$

$\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)$ სახით, 3.4.(9) ტოლობის ძალით თავი III-დან. ახლა ყველაფერი ცხადია.

§ 2. ორი ცვლადის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის დიფერენცირებადობა

2.1. ორგანზომილებიანი სეგმენტის ფუნქციის აბსოლუტური უწყვეტობის ცნება

შემდგომში სეგმენტი აღნიშნავს ორგანზომილებიან ჩაკეტილ სეგმენტს, ან ცარიელ სიმრავლეს.

ვთქვათ, $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ მართკუთხედზე განსაზღვრულია სეგმენტის ნამდვილი ϕ ფუნქცია. ეს ნიშნავს, რომ ყოველ $I=\{(t,\tau)\in Q:\ x_1\le t\le x_2,\ y_1\le\tau\le y_2\}\subset Q$ სეგმენტს შეესაბამება ერთადერთი ნამდვილი $\phi(I)$ რიცხვი. ამასთან ერთად, ცარიელი $\varnothing$ სიმრავლისთვის მიღებულია $\phi(\varnothing)=0$ ტოლობა.

სეგმენტის ϕ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი Q-ზე, თუ ყოველ $\varepsilon>0$ რიცხვს ეთანადება ისეთი დადებითი $\delta=\delta(\varepsilon,\phi)$ რიცხვი, რომ $|I|<\delta$ თვისების მქონე ყოველი $I\subset Q$ სეგმენტისთვის სრულდება $|\phi(I)|<\varepsilon$ უტოლობა. ესე იგი, თუ (თანაბრად) სრულდება

$$\lim_{|I|\to 0}\phi(I)=0 \tag{1}$$

ტოლობა. ორ $I_1\subset Q$ და $I_2\subset Q$ სეგმენტს ეწოდებათ **ურთიერთ არაგადამფარავი** (საერთო შიგა წერტილის არმქონე), თუ ადგილი აქვს $I_1\cap I_2^0=\varnothing=I_1^0\cap I_2$ ტოლობებს, სადაც E^0 აღნიშნავს $E\subset\mathbb{R}^2$ სიმრავლის **შიგნეულს** (ყველა შიგა წერტილის სიმრავლეს). სეგმენტის ϕ ფუნქციას ეწოდება ადიციური Q-ზე, თუ წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა ყოველი სასრული $I_1\subset Q,\dots,I_p\subset Q$ სისტემისთვის სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$\phi\Big(\bigcup_{k=1}^{p} I_k\Big)=\sum_{k=1}^{p}\phi(I_k). \tag{2}$$

განსაზღვრა 2.1.1. სეგმენტის ϕ ფუნქციას ეწოდება **აბსოლუტურად უწყვეტი** Q მართკუთხედზე, თუ ნებისმიერ $\varepsilon > 0$ რიცხვს ეთანადება ისეთი დადებითი $\eta = \eta(\varepsilon, \phi)$ რიცხვი, რომ $|I_1| + \cdots + |I_q| < \eta$ თვისების მქონე წყვილ-წყვილად არაგადამფარავ სეგმენტთა ყოველი სასრული $I_1 \subset Q, \ldots, I_q \subset Q$ სისტემისთვის სრულდება

$$\sum_{j=1}^{q} \left|\phi(I_k)\right| < \varepsilon \tag{3}$$

უტოლობა.

სეგმენტის აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია Q-ზე, ამავე დროს არის სეგმენტის უწყვეტი ფუნქცია Q-ზე. ამის შესამჩნევად საკმარისია, აბსოლუტური უწყვეტობის განსაზღვრაში ავიღოთ კერძო $q = 1$ შემთხვევა. შებრუნებული წინადადება მცდარია, საზოგადოდ.

2.2. წერტილის და ორგანზომილებიანი სეგმენტის ფუნქციების კავშირი

წერტილის ყოველ $\varphi(x, y)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს Q მართკუთხედზე, უკავშირდება სეგმენტის $\phi(I)$, $I \subset Q$, ფუნქცია. ეს ასე კეთდება: ავიღოთ ნებისმიერი $I = \big\{(x, y) \in Q : \ x_1 \leq x \leq x_2, \ y_1 \leq y \leq y_2\big\} \subset Q$ სეგმენტი და მას შევუსაბამოთ $\phi(I)$ რიცხვი

$$\phi(I) = \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) - \varphi(x_2, y_1) + \varphi(x_1, y_1) \tag{1}$$

ტოლობით. უნდა შევნიშნოთ, რომ ეს თანადობა არ არის უნაკლო. საქმე ისაა, რომ (1) ტოლობის მარჯვენა მხარეში φ-ს ნაცვლად ახალი $\psi(x, y) = \varphi(x, y) + \alpha(x) + \beta(y)$ ფუნქციის ჩასმა იძლევა იმავე $\phi(I)$-ს, სადაც $\alpha(x)$ და $\beta(y)$ წარმოადგენენ სრულიად ნებისმიერ სასრულ ფუნქციებს $[a, b]$ და $[c, d]$ მონაკვეთებზე, შესაბამისად. ამაში გვარწმუნებს

$$\begin{aligned}
&\psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_2) - \psi(x_2, y_1) + \psi(x_1, y_1) = \\
&= \varphi(x_2, y_2) + \alpha(x_2) + \beta(y_2) - \varphi(x_1, y_2) - \alpha(x_1) - \beta(y_2) - \\
&- \varphi(x_2, y_1) - \alpha(x_2) - \beta(y_1) + \varphi(x_1, y_1) + \alpha(x_1) + \beta(y_1) =
\end{aligned}$$

$$= \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_2) - \varphi(x_2, y_1) + \varphi(x_1, y_1) = \phi(I)$$

ტოლობები.

ეს ფაქტი მიგვანიშნებს იმაზე, რომ $\varphi(x, y)$ ფუნქციის Q-ზე აბსოლუტურად უწყვეტობის განსაზღვრისას, არ უნდა დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ მისი შესაბამისი სეგმენტის $\phi(I)$ ფუნქციის აბსოლუტური უწყვეტობით Q მართკუთხედზე.

განსაზღვრა 2.2.1 ([57], გვ. 246). $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in Q$, ფუნქციას ეწოდება **აბსოლუტურად უწყვეტი** Q მართკუთხედზე, თუ (1) ტოლობით განსაზღვრული მისი შესაბამისი სეგმენტის $\phi(I)$ ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი Q-ზე და, ამის გარდა, თითოცვლადიანი $\varphi(x, c)$ და $\varphi(a, y)$ ფუნქციები აბსოლუტურად უწყვეტია $[a, b]$ და $[c, d]$ მონაკვეთებზე შესაბამისად.

მაშასადამე, (1) ტოლობით მოიცემა სეგმენტის ფუნქცია წერტილის ფუნქციის მეშვეობით.

შებრუნებითაც: სეგმენტის ფუნქციიდან შეიძლება მივიღოთ წერტილის ფუნქცია. მართლაც, ვთქვათ გვაქვს სეგმენტის $\Psi(I)$, $I \subset Q$, ფუნქცია. ავიღოთ ნებისმიერი $(x, y) \in Q$ წერტილი, სადაც $a < x \leq b$, $c < y \leq d$ და მივიღოთ

$$\begin{aligned}
&\psi(x, y) = \Psi(I_{x,y}),\\
&\psi(x, c) = 0, \ \text{როცა} \ a \leq x \leq b,\\
&\psi(a, y) = 0, \ \text{როცა} \ c \leq y \leq d
\end{aligned}$$

ტოლობანი, სადაც

$$I_{x,y} = \big\{(t, \tau) \in Q : \ a < t \leq x, \ c < \tau \leq y\big\}.$$

ასე განსაზღვრული $\psi(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (1) ტოლობას, რომლის მარცხენა მხარეში იქნება $\Psi(I)$, $I \subset Q$ და მარჯვენა მხარეში $\psi(x, y)$ ფუნქციის შესაბამისი ოთხწევრიანი გამოსახულება.

Q მართკუთხედზე აბსოლუტურად უწყვეტი $\varphi(x, y)$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია, კერძოდ, უწყვეტია Q-ზე.

2.3. აბსოლუტურად უწყვეტი ორცვლადიანი ფუნქციის წარმოდგენა და მისი კერძო წარმოებულების ჯამებადობა

Q მართკუთხედზე აბსოლუტურად უწყვეტ ყოველ $\phi(x,y)$ ფუნქციას შეესაბამება $\varphi(x,y) \in L(Q)$, $g(x) \in L([a,b])$ და $h(y) \in L([c,d])$ ფუნქციების სამეული ისეთი, რომ ადგილი აქვს

$$\phi(x,y)=\int_a^x\int_c^y\varphi(t,\tau)dtd\tau+\int_a^x g(t)\,dt+\int_c^y h(\tau)\,d\tau+\phi(a,c) \tag{1}$$

ტოლობას და შებრუნებითაც ([57], გვ. 246).

თეორემა 1.1.1-დან 1) მტკიცების გამოყენებით ორმაგი ინტეგრალისადმი (1) ტოლობიდან და აგრეთვე ლებეგის თეორემის (1903) გამოყენებით პირველი მარტივი ინტეგრალისადმი, დგინდება ისეთი ზომადი $e_1^* \subset [a,b]$ სიმრავლის არსებობა $|e_1^*| = b-a$ თვისების, რომ ყოველ (x,y) წერტილზე, როცა $x \in e_1^*$ და $c \le y \le d$, სასრულია კერძო $\phi_x'(x,y)$ წარმოებული და

$$\phi_x'(x,y) = \int_c^y \varphi(x,\tau)\,d\tau + g(x), \;\; x \in e_1^*, \;\; c \le y \le d. \tag{2}$$

ასევე დგინდება ისეთი ზომადი $e_2^* \subset [c,d]$ სიმრავლის არსებობა $|e_2^*| = d-c$ თვისების, რომ ყოველ (x,y) წერტილზე, როცა $a \le x \le b$ და $y \in e_2^*$, სასრულია კერძო $\phi_y'(x,y)$ წარმოებული და

$$\phi_y'(x,y) = \int_a^x \varphi(t,y)\,dt + h(y), \quad a \le x \le b, \quad y \in e_2^*. \tag{3}$$

დაბოლოს, არსებობს ისეთი ზომადი $E^* \subset Q$ სიმრავლე $|E^*| = |Q|$ თვისების, რომ ყოველ $(x,y) \in E^*$ წერტილზე ადგილი აქვს

$$\phi_{x,y}''(x,y) = \varphi(x,y) = \phi_{y,x}(x,y) \tag{4}$$

სასრულწევრებიან ტოლობებს.

მართებულია შემდეგი

წინადადება 2.3.1. (1) ტოლობით Q-ზე განსაზღვრული აბსოლუტურად უწყვეტი $\phi(x,y)$ ფუნქციისთვის (2)–(4) ტოლობებით მოცემული ϕ'_x, ϕ'_y, $\phi''_{x,y}=\phi''_{y,x}$ წარმოებულები ეკუთვნიან $L(Q)$ სივრცეს.

2.4. აბსოლუტურად უწყვეტი ორცვლადიანი ფუნქციის დიფერენცირებადობა

Q მართკუთხედზე აბსოლუტურად უწყვეტი ყოველი $\phi(x,y)$ ფუნქციისთვის ადგილი აქვს 2.3.(1) წარმოდგენას. ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი ორმაგი ინტეგრალისთვის, 1.2.1 თეორემის თანახმად, უკვე დამტკიცებული გვაქვს სრული დიფერენციალის არსებობა თითქმის ყველგან Q-ზე. გარდა ამისა, იმავე ტოლობის თითოცვლადიან ორ აბსოლუტურად უწყვეტ

$$\alpha(x)=\int\limits_a^x g(t)\,dt,\quad \beta(y)=\int\limits_c^y h(\tau)\,d\tau$$

ფუნქციას სრული დიფერენციალი აქვს თითქმის ყველგან Q მართკუთხედზე*.

მაშასადამე, მართებულია

თეორემა 2.4.1 ([99], [107]). Q მართკუთხედზე აბსოლუტურად უწყვეტ ყოველ $\phi(x,y)$ ფუნქციას დიფერენციალი აქვს თითქმის ყველგან Q-ზე და მისი კერძო და შერეული კერძო წარმოებულები

*ორი ცვლადის $F(x,y)$ ფუნქცია Q მართკუთხედზე განვსაზღვროთ $F(x,y)=\alpha(x)$ ტოლობით. მაშინ ყველა y_0-თვის და თითქმის ყველა x_0-თვის გვაქვს

$$\frac{F(x_0+h,y_0+k)-F(x_0,y_0)-\alpha'(x_0)h}{|h|+|k|}=\frac{\alpha(x_0+h)-\alpha(x_0)-\alpha'(x_0)h}{|h|+|k|}=$$
$$=\frac{o(h)}{|h|+|k|}\to 0,\quad \text{როცა}\quad (h,k)\to(0,0).$$

ეს კი ნიშნავს $F(x,y)=\alpha(x)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობას $(x_0,y_0)\in Q$ წერტილზე, ე. ი. თითქმის ყველგან.

მოიცემიან 2.3.(2)–2.3.(4) ტოლობებით, რომელნიც ჯამებადი ფუნქციებია Q-ზე.

შენიშვნა 2.4.1. 1.2.1 და 2.4.1 თეორემები წარმოადგენენ ლებეგის თეორემის ([132], იხ. შესავალი, 3) გავრცელებას ორი ცვლადის ფუნქციებზე. ლებეგის ამ თეორემის კიდევ ერთი განზოგადება მოცემული იქნება ქვემოთ, § 5-ში, 5.2.(2) ტოლობის სახით.

2.5. ლიპშიცის კლასის ფუნქციის დიფერენცირებადობა

რადგან **ლიპშიცის კლასის ფუნქცია** არის აბსულუტურად უწყვეტი ([54], გვ. 252.), ამიტომ თეორემა 2.4.1-დან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 2.5.1. Q მართკუთხედზე ლიპშიცის კლასის ფუნქცია დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან Q-ზე.

ეს თეორემა არის თავი II-დან თეორემა 2.6.1-ის კერძო შემთხვევა $n = 2$ მნიშვნელობისთვის, მაგრამ მტკიცების მისგან განსხვავებული მეთოდით.

თეორემა 2.5.1-ის გაძლიერება მოცემული იქნება ქვემოთ, თეორემა 3.4.1-ის სახით.

§ 3. განუსაზღვრელი ინტეგრალის და აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის ძლიერი გრადიენტის სასრულობა

3.1. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძლიერი გრადიენტის სასრულობა

როგორც უკვე ვიცით, მოცემულ წერტილზე ძლიერი გრადიენტის სასრულობა უფრო მეტს ნიშნავს, ვიდრე ამ ფუნქციის დიფერენციალის არსებობა იმავე წერტილზე. უფრო მეტიც, ადგილი აქვს თავი II-დან თეორემა 4.4.2-ს.

ისიც ვიცით, რომ ყოველი ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელ ორმაგ ინტეგრალს დიფერენციალი აქვს თითქმის ყველა წერტილზე.

ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ ყოველი ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელ ინტეგრალს თითქმის ყველგან აქვს სასრული ძლიერი გრადიენტიც. ამასთან დაკავშირებით მართებულია

თეორემა 3.1.1 ([99], [107])**.** ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქცია ჯამებადია $Q=\big\{(x,y):\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\big\}$ მართკუთხედზე. მაშინ მის განუსაზღვრელ

$$F(x,y)=\int\limits_a^x\int\limits_c^y f(t,\tau)\,dt\,d\tau \tag{1}$$

ორმაგ ინტეგრალს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) თითქმის ყველა x_0-თვის $[a,b]$-დან და ყველა y_0-თვის $[c,d]$-დან არსებობს x-ით სასრული ძლიერი კერძო $F'_{[x]}(x_0,y_0)$ წარმოებული და

$$F'_{[x]}(x_0,y_0)=\int\limits_c^{y_0} f(x_0,\tau)\,d\tau; \tag{2}$$

2) ყველა x_0-თვის $[a,b]$-დან და თითქმის ყველა y_0-თვის $[c,d]$-დან არსებობს y-ით სასრული ძლიერი კერძო $F'_{[y]}(x_0,y_0)$ წარმოებული და

$$F'_{[y]}(x_0,y_0)=\int\limits_a^{x_0} f(t,y_0)\,dt; \tag{3}$$

3) Q-დან თითქმის ყველა (x_0,y_0) წერტილზე არსებობს სასრული ძლიერი $\operatorname{strgrad}F(x_0,y_0)$ გრადიენტი, კერძოდ, $dF(x_0,y_0)$ დიფერენციალი.

შენიშვნა 3.1.1. რადგან $f\in L(Q)\iff|f|\in L(Q)$, ამიტომ (1)–(3) ტოლობების მარჯვენა მხარეში f შეიძლება შეიცვალოს $|f|$-ით და მარცხენა მხარეში F კი Φ-თი, სადაც $\Phi(x,y)=\int\limits_a^x\int\limits_c^y|f(t,\tau)|\,dt\,d\tau$.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ახლა x_0 და y_0 დამოკიდებული იქნება $|f|$-ზე.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად გამოყენებული იქნება ტოლსტოვის შემდეგი

ლემა 3.1.1 ([61], ლემა 15 და შენიშვნა 2 გვ. 89-ზე). ვთქვათ, Q მართკუთხედზე მოცემულია

$$\phi(x,y) = \int_a^x \varphi(t,y)\,dt, \quad (x,y) \in Q, \tag{4}$$

ფუნქცია, რომლისთვისაც შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1) თითქმის ყველა ფიქსირებული x-თვის $[a,b]$-დან, $\varphi(x,y)$ ფუნქცია y-ის მიმართ უწყვეტია $[c,d]$-ზე;

2) არსებობს $[a,b]$-ზე ჯამებადი $M(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ თითქმის ყველა x-თვის $[a,b]$-დან და ყველა y-თვის $[c,d]$-დან შესრულებულია

$$|\varphi(x,y)| \le M(x) \tag{5}$$

უტოლობა.

მაშინ ყოველი $\eta > 0$ რიცხვისთვის არსებობს სრულყოფილი ისეთი $E \subset [a,b]$ სიმრავლე, რომ $|E| > b - a - \eta$ და

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big[\phi(x+h,y) - \phi(x,y)\big] = \varphi(x,y) \tag{6}$$

ტოლობა სრულდება თანაბრად (x,y)-ის მიმართ, როცა $x \in E$ და $c \le y \le d$.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა 3.1.2 ([99], [107]). თუ შესრულებულია 3.1.1 ლემის პირობები, მაშინ არსებობს ისეთი ზომადი $e \subset [a,b]$ სიმრავლე, რომ $|e| = b - a$ და

$$\phi'_{[x]}(x_0,y_0) = \varphi(x_0,y_0) \tag{7}$$

ტოლობა სრულდება ყველა (x_0, y_0) წერტილზე, როცა $x_0 \in e$ და $y_0 \in [c, d]$.

დამტკიცება. 3.1.1 ლემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big[\phi(x+h, y) - \phi(x, y)\big] = \varphi(x, y) \tag{8}$$

ტოლობა სრულდება თითქმის ყველა x-თვის თანაბრად y-ის მიმართ $[c, d]$-დან. ეს ნიშნავს, რომ (8)-ის შემსრულებელი ყოველი ფიქსირებული x-თვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი დადებითი $h_0 = h_0(\varepsilon, x)$ რიცხვი, რომ

$$\Big|\frac{\phi(x+h, y) - \phi(x, y)}{h} - \varphi(x, y)\Big| < \varepsilon, \tag{9}$$

როცა $0 < |h| < h_0$ და $c \le y \le d$.

e-თი აღვნიშნოთ ყველა იმ x-ის სიმრავლე $[a, b]$-დან, რომელთათვისაც ერთდროულად სრულდება (8) ტოლობა და 3.1.1 ლემის 1) პირობა. ცხადია, $|e| = b - a$.

(x_0, y_0) იყოს ნებისმიერი წერტილი, სადაც $x_0 \in e$ და $c \le y_0 \le d$. რადგანაც $\varphi(x_0, y)$ ფუნქცია უწყვეტია y_0 წერტილზე, ამიტომ იგივე ε-თვის არსებობს დადებითი ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon, x_0, y_0)$ რიცხვი, რომ $|y - y_0| < \delta$ პირობა იწვევს

$$\big|\varphi(x_0, y) - \varphi(x_0, y_0)\big| < \varepsilon, \ \ |y - y_0| < \delta, \tag{10}$$

უტოლობას. (9) და (10) შეფასებებიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{1}{h} \big[\phi(x_0+h, y) - \phi(x_0, y)\big] = \varphi(x_0, y_0) \tag{11}$$

ტოლობა, რაც ნიშნავს (7) ტოლობას. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.1.1-ის დამტკიცება. (1) ტოლობით განსაზღვრული $F(x,y)$ ფუნქცია ჩავწეროთ ასე:

$$F(x,y) = \int\limits_a^x \varphi(t,y)\,dt, \tag{12}$$

სადაც

$$\varphi(t,y) = \int\limits_c^y f(t,\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

რადგანაც $f \in L(Q)$, ამიტომ თითქმის ყველა t-თვის $[a,b]$-დან, ფუბინის თეორემის ძალით, სასრულია $\int\limits_c^d f(t,\tau)\,d\tau$ ინტეგრალი. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ასეთი t-თვის $\varphi(t,y)$ ფუნქცია უწყვეტია y-ის მიმართ, ე. ი. თითქმის ყველა t-თვის $[a,b]$-დან, $\varphi(t,y)$ უწყვეტია y-ის მიმართ $[c,d]$-ზე. ამრიგად, შესრულებულია 3.1.1 ლემის 1) პირობა.

2) პირობის შესრულება კი გამომდინარეობს

$$|\varphi(t,y)| \leq \int\limits_c^y |f(t,\tau)|\,d\tau \leq \int\limits_c^d |f(t,\tau)|\,d\tau \equiv M(t) \in L([a,b])$$

დამოკიდებულებებიდან.

მაშასადამე, შესრულებულია 3.1.2 ლემის პირობები და ამიტომ ადგილი აქვს (7) ტოლობას, რომელშიც ϕ შეცვლილია F-ით და $\varphi(x_0,y_0)$ რიცხვი კი $\int\limits_c^{y_0} f(x_0,\tau)\,d\tau$ ინტეგრალით.

ამრიგად, ადგილი აქვს 3.1.1 თეორემის 1) მტკიცებას ყველა (x_0,y_0) წერტილზე, როცა x_0 ეკუთვნის e სიმრავლეს ლემა 3.1.2-დან და $c \leq y_0 \leq d$.

ანალოგიურად დგინდება იმავე თეორემის 2) მტკიცება.

მტკიცება 3) კი არის, 1) და 2) მტკიცებების შედეგი. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 3.1.2. ახლახან დამტკიცებული 3.1.1 თეორემის n-განზომილებიანი ანალოგია შემდეგი

თეორემა 3.1.2 ([106]). n-განზომილებიან კუბზე ჯამებადი ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან. უფრო მეტი, მას სასრული ძლიერი გრადიენტი აქვს თითქმის ყველგან.

3.2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძლიერი გრადიენტის სასრულობის შედეგები

ყველა ეს ინფორმაცია საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ შემდეგი დებულებანი.

თეორემა 3.2.1 ([99], [107]). $Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ მართკუთხედზე ჯამებადი ყოველი f ფუნქციისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ფაქტებს:

1) არსებობს ისეთი ზომადი $e_1\subset[a,b]$ სიმრავლე, რომ $|e_1| = b-a$ და ყოველ (x_0,y_0) წერტილზე, როცა $x_0\in e_1$ და $c\le y_0\le d$, სრულდება

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ y\to y_0}}\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\int\limits_{c}^{y} f(t,\tau)\,dt\,d\tau=\int\limits_{c}^{y_0} f(x_0,\tau)\,d\tau \tag{1}$$

ტოლობა;

2) არსებობს ისეთი ზომადი $e_2\subset[c,d]$ სიმრავლე, რომ $|e_2| = d-c$ და ყოველ (x_0,y_0) წერტილზე, როცა $a\le x_0\le b$ და $y_0\in e_2$, სრულდება

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ x\to x_0}}\frac{1}{k}\int\limits_{y_0}^{y_0+k}\int\limits_{a}^{x} f(t,\tau)\,dt\,d\tau=\int\limits_{a}^{x_0} f(t,y_0)\,dt \tag{2}$$

ტოლობა;

3) (1) და (2) ტოლობები ერთდროულად სრულდება $E = e_1 \times e_2$ სიმრავლეზე, $|E| = |Q|$.

მოპოვებული ინფორმაცია შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ სხვაგვარადაც, რისთვისაც შემოვიღოთ შემდეგი სიმრავლეები:

1)
$$E_1 = \bigcup_{x_0 \in e_1} m(x_0), \tag{3}$$

სადაც $|e_1| = b-a$ თვისებით ზომადი $e_1 \subset [a,b]$ სიმრავლე აღებულია 3.2.1 თეორემის 1) მტკიცებიდან და ვერტიკალური $m(x_0)$ სეგმენტი განსაზღვრულია

$$m(x_0) = \Big\{(x_0, y) : \ c \le y \le d\Big\} \tag{4}$$

ტოლობით;

2)
$$E_2 = \bigcup_{y_0 \in e_2} n(y_0), \tag{5}$$

სადაც $|e_2| = d - c$ თვისების ზომადი $e_2 \subset [c,d]$ სიმრავლე აღებულია 3.2.1 თეორემის 2) მტკიცებიდან და ჰორიზონტალური $n(y_0)$ სეგმენტი კი განსაზღვრულია

$$n(y_0) = \Big\{(x, y_0) : \ a \le x \le b\Big\} \tag{6}$$

ტოლობით.

ახლა 3.2.1 თეორემა შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად.

თეორემა 3.2.2 ([99], შენიშვნა 6.2; [107]). ყოველი $f \in L(Q)$ ფუნქციისთვის (1) და (2) ტოლობები შესაბამისად შესრულებულია $(x_0, y_0) \in E_1$ და $(x_0, y_0) \in E_2$ წერტილებზე. ამასთან, (1) და (2) ერთდროულად სრულდება $(x_0, y_0) \in E_3$ წერტილებზე, სადაც $E_3 = E_1 \cap E_2$, $|E_3| = |Q|$.

თეორემა 3.2.3 ([99], [107]). ყოველი $f \in L(Q)$ ფუნქციისთვის მართებულია შემდეგი მტკიცებები ((3) და (5) სიმრავლეებით):

1) $(x_0, y_0) \in E_1$ წერტილებზე ადგილი აქვს

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \int\limits_{y_0}^{y_0+k} f(t,\tau)\, dt\, d\tau = 0 \tag{7}$$

ტოლობას;

2) $(x_0, y_0) \in E_2$ წერტილებზე სრულდება

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \int\limits_{y_0}^{y_0+k} f(t,\tau)\, dt\, d\tau = 0 \tag{8}$$

ტოლობა;

3) (7) და(8) ტოლობები ერთდროულად სრულდება $(x_0, y_0) \in E_3$ წერტილებზე, სადაც $E_3 = E_1 \cap E_2$, $|E_3| = |Q|$;

4) $(x_0, y_0) \in E_3$ წერტილებზე მართებულია

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h+k}{hk} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \int\limits_{y_0}^{y_0+k} f(t,\tau)\, dt\, d\tau = 0 \tag{9}$$

ტოლობაც.

დამტკიცება. (1) ტოლობის მარცხენა მხარეში $[c, y]$ მონაკვეთზე ინტეგრალი შევცვალოთ ინტეგრალების ჯამით $[c, y_0]$ და $[y_0, y_0 + k]$ მონაკვეთებზე. ასე მიღებული პირველი ორმაგი ინტეგრალისთვის h^{-1} მამრავლით, გამოვიყენოთ ლებეგის 1.2.(2) ტოლობა და ზღვარი ტოლი აღმოჩნდება (1)-ის მარჯვენა მხარის. ეს კი ნიშნავს (7) ტოლობას.

ანალოგიურად დამტკიცდება (8) ტოლობაც.

მტკიცება 3) გამომდინარეოს 1) და 2) მტკიცებებიდან.

(9) ტოლობა კი მიიღება (7) და (8) ტოლობებიდან არითმეტიკული საშუალოთი. თეორემა დამტკიცებულია (იხ. (1.2.(17) ტოლობაც).

შენიშვნა 3.2.1 ([99], [107]). თუ $s(x,y) \in L(Q)$ არის საკსის ფუნქცია ([160], [26], გვ. 92), მაშინ

$$\frac{1}{hk}\int\limits_{x}^{x+h}\int\limits_{y}^{y+k} s(t,\tau)\,dt\,d\tau \tag{10}$$

გამოსახულების ძლიერი ზედა ზღვარია $+\infty$ ყველა $(x,y) \in Q$ წერტილზე (ასეთივეა ბუზემან–ფელერის ფუნქციაც [94], [54], გვ. 201). 3.2.3 თეორემა გვიჩვენებს, რომ (10) გამოსახულების სწრაფვა $+\infty$-კენ დაქვემდებარებულია (7) და (8) ტოლობებს $(x_0,y_0) \in E_1 \cap E_2$ წერტილებზე. მაშასადამე, თითქმის ყველა $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე ადგილი აქვს

$$\frac{1}{hk}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\int\limits_{y_0}^{y_0+k} s(t,\tau)\,dt\,d\tau = o\Big(\frac{1}{\max(h,k)}\Big) \tag{11}$$

ტოლობას.

შენიშვნა 3.2.2. რადგან

$$f \in L(Q) \Longleftrightarrow |f| \in L(Q),$$

ამიტომ (1), (2) და (7)–(9) ტოლობებში f შეიძლება შეიცვალოს $|f|$-ით, ოღონდ ახლა E_1, E_2, E_3 სიმრავლეები დამოკიდებული იქნებიან $|f|$-ზე.

3.3. აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციის ძლიერი გრადიენტის სასრულობა

რადგან ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებული შეიძლება განხილულ იქნას, როგორც ძლიერი კერძო წარმოებული (იხ. თავი II, 4.1), ამიტომ 2.3.(1)–2.3.(4) ტოლობების და 3.1.1 თეორემის გამოყენებით მიიღება

თეორემა 3.3.1 ([107]). Q მართკუთხედზე აბსოლუტურად უწყვეტ ყოველ ϕ ფუნქციას შეესაბამება $\varphi \in L(Q)$, $g \in L([a,b])$ და $h \in L([c,d])$ ფუნქციების ისეთი სამეული, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფაქტებს:

1) თითქმის ყველა x_0-თვის $[a,b]$-დან და ყველა y_0-თვის $[c,d]$-დან, არსებობს სასრული $\phi'_{[x]}(x_0,y_0)$ და

$$\phi'_{[x]}(x_0,y_0) = \int\limits_c^{y_0} \varphi(x_0,y)\,dy + g(x_0); \tag{1}$$

2) ყველა x_0-თვის $[a,b]$-დან და თითქმის ყველა y_0-თვის $[c,d]$-დან, არსებობს სასრული $\phi'_{[y]}(x_0,y_0)$ და

$$\phi'_{[y]}(x_0,y_0) = \int\limits_a^{x_0} \varphi(x,y_0)\,dx + h(y_0); \tag{2}$$

3) თითქმის ყველა $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე $\operatorname{strgrad}\phi(x_0,y_0)$, $\phi''_{x,y}(x_0,y_0)$, $\phi''_{y,x}(x_0,y_0)$ სასრულია და გვაქვს ტოლობები

$$\phi''_{x,y}(x_0,y_0) = \varphi(x_0,y_0) = \phi''_{y,x}(x_0,y_0). \tag{3}$$

3.4. ლიპშიცის კლასის ფუნქციის ძლიერი გრადიენტის სასრულობა

ვინაიდან ლიპშიცის კლასის ფუნქცია არის აბსოლუტურად უწყვეტი ([54], გვ. 252), ამიტომ თეორემა 3.3.1-დან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 3.4.1. Q მართკუთხედზე ლიპშიცის კლასის F ფუნქციისთვის თითქმის ყველა $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე სასრულია $\operatorname{strgrad} F(x_0,y_0)$, $F''_{x,y}(x_0,y_0)$, $F''_{y,x}(x_0,y_0)$ და ადგილი აქვს $F''_{x,y}(x_0,y_0) = F''_{y,x}(x_0,y_0)$ ტოლობას.

3.5. ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციის ძლიერი გრადიენტის სასრულობა

ერთი ცვლადის სასრული ვარიაციის ფუნქციები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ფუნქციათა თეორიაში. ლებეგის თეორემის თანახმად, სასრული ვარიაციის ფუნქციის ძირითადი თვისებაა ის, რომ მას თითქმის ყველგან აქვს სასრული და ჯამებადი წარმოებული (იხ. მაგალითად, [45], გვ. 205).

ორი ცვლადის ფუნქციისთვის არსებობს ვარიაციის სხვადასხვა ცნება.

ტონელის აზრით სასრული ვარიაციის (1926 წ.) ფუნქციებს გამოყენება აქვთ ზედაპირის ფართობის არსებობის საკითხში ([54], გვ. 268; [74], გვ. 222; [75], გვ. 111).

ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ორგანზომილებიან ჰარმონიულ ანალიზში ([28], გვ. 107–112, 123–135; [29], გვ. 220–235; [122], გვ. 345-347).

აქ ჩამოყალიბებული იქნება ახალი შედეგი ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციის დიფერენციალური თვისების შესახებ.

ამ მიზნით მოვიყვანოთ ვარიაციის ცნება ჰარდის აზრით.

განსაზღვრა 3.5.1 ([29], გვ. 220)**.** $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ მართკუთხედი დავყოთ $Q_{ik} = [x_i \le x < x_{i+1},\ y_k \le y < y_{k+1}]$ ქვემართკუთხედებად, სადაც $0 \le i \le m-1$, $0 \le k \le n-1$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ და $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Q მართკუთხედზე მოცემული სასრული $f(x, y)$ ფუნქციისთვის და $\{Q_{ik}\}$ დანაწილებისთვის შევადგინოთ

$$S = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{i+1}, y_{k+1}) - f(x_{i+1}, y_k) - f(x_i, y_{k+1}) + f(x_i, y_k) \right| \quad (1)$$

ჯამი. თუ არსებობს ისეთი დადებითი სასრული M რიცხვი, რომ $S \le M$ შეფასებას ადგილი აქვს ყოველი $\{Q_{ik}\}$ დანაწილებისთვის, მაშინ f ფუნქციას ეწოდება **ვიტალის აზრით სასრული ვარიაციის** Q მართკუთხედზე (1908 წ.).

განსაზღვრა 3.5.2 ([29], გვ. 220)**.** $f(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება **ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის** Q მართკუთხედზე, თუ f ფუნქცია Q-ზე არის ვიტალის აზრით სასრული ვარიაციის და, გარდა ამისა, თითოცვლადიანი $f(x,c)$ და $f(a,y)$ ფუნქციები წარმოადგენენ სასრული ვარიაციის ფუნქციებს $[a,b]$ და $[c,d]$ სეგმენტებზე, შესაბამისად (1905 წ.).

ტონელის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია შეიძლება იყოს არსად დიფერენცირებადი ([166], [54], გვ. 434), თუმცა მას **აპროქსიმატული დიფერენციალი** აქვს თითქმის ყველგან ([93]).

შედეგი 3.5.1. ტონელის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციის ზედა დიფერენციალი, საზოგადოდ, ვერ იქნება მისი ქვედა დიფერენციალის ტოლი დადებითი ზომის რომელიმე სიმრავლეზე, რადგანაც ეს გამოიწვევდა მის დიფერენცირებადობას დადებითი ზომის სიმრავლეზე (იხ. § 8-ის დასაწყისი თავი II-დან).

ცნობილია, რომ ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან ([93]).

სულ ახლახან დადგინდა, რომ ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციას დიფერენცირებადობაზე უფრო მნიშვნელოვანი თვისება აქვს, რადგანაც თითქმის ყველგან დიფერენცირებადი ფუნქციის ძლიერი გრადიენტი შეიძლება სასრული არ იყოს თითქმის ყველგან ([145] – იხ. თავი II, თეორემა 4.4.2). სახელდობრ, დადგენილია

თეორემა 3.5.1 ([83])**.** *ჰარდის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციის ძლიერი გრადიენტი სასრულია თითქმის ყველგან.*

§ 4. ლებეგის ინტენსური წერტილი და ამ წერტილებზე ძლიერი გრადიენტის სასრულობა განუსაზღვრელი ინტეგრალისთვის

განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალისთვის თითქმის ყველგან რეგულარული წარმოებულის არსებობის შესახებ ლებეგის თეორემას ([135], [54], გვ. 180; [26], გვ. 41) ბუნებრივად ეთანადება ორი ცვლადის ფუნქციისთვის ლებეგის რეგულარული წერტილის ცნება. უფრო

ზუსტად, $Q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\big\}$ მართკუთხედის (x_0, y_0) წერტილს ეწოდება **ლებეგის რეგულარული წერტილი** (p ხარისხის) $f \in L^p(Q)$, $p \ge 1$, ფუნქციისთვის, როცა

$$\frac{1}{|I|}\iint\limits_I \big|f(x,y) - f(x_0,y_0)\big|^p\,dx\,dy \longrightarrow 0 \qquad (4.0)$$

დამოკიდებულება სრულდება მართკუთხედთა ყოველი რეგულარული სისტემისთვის და წრეებისთვის, რომელნიც მოიჭიმებიან (x_0, y_0) წერტილისკენ* (იხ. ამ თავის შესავალი, პუნქტები 3–5).

ასეთი წერტილების სიმრავლის, სიმბოლურად $L^p(f)$, ზომა $|Q|$-ს ტოლია ([54], გვ. 180; [26], გვ. 42; [45], გვ. 344; [59], გვ. 20, 74; [150], [3], გვ. 501).

როგორც ვხედავთ, ლებეგის რეგულარული წერტილის ცნება დაფუძნებულია რეგულარული სისტემის ცნებაზე. არარეგულარულ ანუ ძლიერ სისტემაზე გადასვლა შესაძლებელია $L\log^+ L$ კლასის ფუნქციებისთვის, იესენ–მარცინკევიჩ–ზიგმუნდის თეორემის საფუძველზე ([125], [54], გვ. 222; [92]; [31], გვ. 459). ამ შემთხვევაში (4.0) ტოლობის შემსრულებელ (x_0, y_0) წერტილს ეწოდება **ლებეგის ძლიერი წერტილი**.

მაშასადამე, პირველ შემთხვევაში ფუნქცია ნებისმიერია $L(Q)$ კლასიდან, ოღონდ წერტილისკენ კუმშვადი სისტემა უნდა იყოს რეგულარული. მეორე შემთხვევაში – სისტემა კი არის ნებისმიერი, მაგრამ ფუნქცია აიღება ვიწრო $L\log^+ L$ კლასიდან.

4.1. ორცვლადიანი ჯამებადი ფუნქციისთვის ლებეგის ინტენსური წერტილი

ბუნებრივად ისმის ამოცანა: შესაძლებელია თუ არა ზემოთ აღნიშნული ორივე შეზღუდვისგან გათავისუფლება? პასუხი დადებითია.

აქ განვიხილავთ განსხვავებულ შემთხვევას. როგორც ვნახეთ, განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალის აქამდე დადგენილი თვისებები

*აქ იგულისხმება, რომ მართკუთხედთა რეგულარული სისტემა სტანდარტულია.

რაიმე წერტილზე, მოიცავს Ox ან Oy ღერძის პარალელურ მონაკვეთზე გავრცელებულ ინტეგრალს. ეს ნიშნავს, რომ ორი ცვლადის ჯამებად ფუნქციას უნდა ჰქონდეს საჭირო თვისება ამ მონაკვეთების გასწვრივ. ეს კი, თავის მხრივ, მიგვანიშნებს იმაზე, რომ აღნიშნული თვისების დადგენა ვერ ხერხდება ფუნქციის ლოკალური თვისებით წერტილზე, რასაც ადგილი აქვს ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის. კონკრეტულად, მხედველობაში გვაქვს ერთი ცვლადის ფუნქციისთვის ლებეგის წერტილის ცნება და შესაბამისი განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებულის არსებობა ამ წერტილზე ([45], გვ. 237).

განსაზღვრა 4.1.1 ([99], [107])**.** ვთქვათ, $f\in L^p(Q)$ რომელიმე $p\geq 1$ რიცხვისთვის, სადაც $Q=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\big\}$.

$(x_0,y_0)\in Q^0$ წერტილს ვუწოდოთ (x,y)**-ით ლებეგის ინტენსური წერტილი** (p ხარისხის) f ფუნქციისთვის, სიმბოლურად $(x_0,y_0)\in \operatorname{int} L^p_{x,y}(f)$, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი ტოლობა:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\bigg|\int\limits_{c}^{y_0+k} f(x,y)\,dy-\int\limits_{c}^{y_0} f(x_0,y)\,dy\bigg|^p dx=0, \quad (1)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{k}\int\limits_{y_0}^{y_0+k}\bigg|\int\limits_{a}^{x_0+h} f(x,y)\,dx-\int\limits_{a}^{x_0} f(x,y_0)\,dx\bigg|^p dy=0. \quad (2)$$

თუ შესრულებულია (1) ტოლობა, მაშინ (x_0,y_0) წერტილს ვუწოდოთ x**-ით ლებეგის ინტენსური წერტილი** (p ხარისხის) f ფუნქციისთვის, სიმბოლურად $(x_0,y_0)\in\operatorname{int} L^p_x(f)$.

(2) ტოლობის შესრულების შემთხვევაში კი, (x_0,y_0) წერტილს ვუწოდოთ y**-ით ლებეგის ინტენსური წერტილი** (p ხარისხის) f ფუნქციისთვის, სიმბოლურად $(x_0,y_0)\in\operatorname{int} L^p_y(f)$.

თეორემა 4.1.1 ([99], [107])**.** $L^p(Q)$, $p\geq 1$, კლასის ყოველი f ფუნქციისთვის მართებულია შემდეგი მტკიცებანი:

1) არსებობს ისეთი ზომადი $e_1^* \subset [a,b]$ სიმრავლე $|e_1^*| = b - a$ თვისების, რომ სიმრავლე ყველა (x_0, y_0) წერტილისა, როცა $x_0 \in e_1^*$ და $y_0 \in [c,d]$, არის $\operatorname{int} L_x^p(f)$, $|\operatorname{int} L_x^p(f)| = |Q|$;

2) არსებობს ისეთი ზომადი $e_2^* \subset [c,d]$ სიმრავლე $|e_2^*| = d - c$ თვისების, რომ სიმრავლე ყველა (x_0, y_0) წერტილისა, როცა $x_0 \in [a,b]$ და $y_0 \in e_2^*$, არის $\operatorname{int} L_y^p(f)$, $|\operatorname{int} L_y^p(f)| = |Q|$;

3) სიმრავლე ყველა (x_0, y_0) წერტილისა, როცა $x_0 \in e_1^*$ და $y_0 \in e_2^*$, არის $\operatorname{int} L_{x,y}^p(f)$, $|\operatorname{int} L_{x,y}^p(f)| = |Q|$.

დამტკიცება*. 1) ფუბინის თეორემის ძალით არსებობს ზომადი $E_0 \subset [a,b]$ სიმრავლე $|E_0| = b - a$ თვისების ისეთი, რომ ყოველ $x_0 \in E_0$ წერტილზე სასრულია

$$\int_c^d |f(x_0, y)|\, dy \tag{3}$$

ინტეგრალი.

ვთქვათ, $(Q_n(y))_{n=1}^{\infty}$ არის ყველა რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომების სიმრავლე. $|f(x,y) - Q_n(y)|^p \in L(Q)$ ფუნქციის მიმართ გამოვიყენოთ 3.2.1 თეორემის 1) მტკიცება. ამ მტკიცების თანახმად, არსებობს ზომადი $E_n \subset [a,b]$ სიმრავლე $|E_n| = b - a$ თვისების ისეთი, რომ ყოველ (x_0, y_0) წერტილზე, როცა $x_0 \in E_n$ და $y_0 \in [c,d]$, სრულდება

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_c^{y_0+k} \left|f(x,y) - Q_n(y)\right|^p dx\, dy = \\ = \int_c^{y_0} \left|f(x_0,y) - Q_n(y)\right|^p dy \end{aligned} \tag{4}$$

*[99]-ში ნათქვამია: “ლებეგის ძლიერი წერტილი”, ნაცვლად აქაური “ლებეგის ინტენსური წერტილი”-სა.

ტოლობა.

ყოველი $x_0 \in E_0$ წერტილისთვის და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს რაციონალურკოეფიციენტებიანი ისეთი $Q_m(y)$, $m = m(x_0, \varepsilon)$, პოლინომი, რომ

$$\int_c^d \left|f(x_0, y) - Q_m(y)\right|^p dy < \varepsilon.$$

ამიტომ ყოველ $y_0 \in [c, d]$ წერტილზე გვაქვს

$$\int_c^{y_0} \left|f(x_0, y) - Q_m(y)\right|^p dy < \varepsilon. \tag{5}$$

შემოვიღოთ $e_n = [a, b] \setminus E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, სიმრავლეები. ცხადია, რომ (4) ტოლობა e_n სიმრავლისთვის არ სრულდება და ამიტომ $|e_n| = 0$. კიდევ შემოვიღოთ $e = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ და $e_1^* = E_0 \setminus e$ სიმრავლეები. ცხადია, რომ $|e| = 0$ და $|e_1^*| = b - a$.

(1) ტოლობის მართებულობა დავადგინოთ ყველა (x_0, y_0) წერტილზე, როცა $x_0 \in e_1^*$ და $y_0 \in [c, d]$.

გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\left|\int_c^{y_0+k} f(x, y)\, dy - \int_c^{y_0} f(x_0, y)\, dy\right| \le$$

$$\le \left|\int_c^{y_0+k} f(x, y)\, dy - \int_c^{y_0} Q_m(y)\, dy\right| + \left|\int_c^{y_0} f(x_0, y)\, dy - \int_c^{y_0} Q_m(y)\, dy\right|.$$

მაგრამ (5) უტოლობის გათვალისწინებით

$$\left|\int_c^{y_0} f(x_0, y)\, dy - \int_c^{y_0} Q_m(y)\, dy\right| \le \int_c^{y_0} \left|f(x_0, y) - Q_m(y)\right| dy < \varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\left|\int_c^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int_c^{y_0} f(x_0,y)\,dy\right| <$$

$$< \varepsilon + \left|\int_c^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int_c^{y_0} Q_m(y)\,dy\right|. \quad (6)$$

(6) უტოლობის მარჯვენა მხარის მიმართ გამოვიყენოთ

$$(\alpha+\beta)^p \le 2^{p-1}(\alpha^p+\beta^p), \ \ \alpha>0, \ \ \beta>0, \ \ p\ge 1 \qquad (7)$$

უტოლობა ([3], გვ. 519) და მივიღებთ

$$2^{1-p}\left|\int_c^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int_c^{y_0} f(x_0,y)\,dy\right|^p <$$

$$< \varepsilon^p + \left|\int_c^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int_c^{y_0} Q_m(y)\,dy\right|^p \quad (8)$$

შეფასებას. აქედან გამომდინარეობს

$$2^{1-p}\cdot\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left|\int_c^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int_c^{y_0} f(x_0,y)\,dy\right|^p dx <$$

$$< \varepsilon^p + \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left|\int_c^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int_c^{y_0} Q_m(y)\,dy\right|^p dx \qquad (9)$$

უტოლობა.

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\left| \int_c^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int_c^{y_0} Q_m(y)\,dy \right| \leq$$

$$\leq \int_c^{y_0+k} \big|f(x,y) - Q_m(y)\big|\,dy + \int_{y_0}^{y_0+k} |Q_m(y)|\,dy.$$

აქედან, (7) უტოლობის გამოყენებით მარჯვენა მხარის მიმართ, მივიღებთ

$$2^{1-p}\left| \int_c^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int_c^{y_0} Q_m(y)\,dy \right|^p \leq$$

$$\leq \left(\int_c^{y_0+k} \big|f(x,y) - Q_m(y)\big|\,dy \right)^p + \left(\int_{y_0}^{y_0+k} |Q_m(y)|\,dy \right)^p. \tag{10}$$

ცხადია, რომ აღებული ε-თვის (იხ. (5) უტოლობა) არსებობს ისეთი დადებითი η_m რიცხვი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int_{y_0}^{y_0+k} |Q_m(y)|\,dy < \varepsilon, \ \text{ როცა } \ 0 < |k| < \eta_m. \tag{11}$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

I) როცა $p > 1$, მაშინ ჰელდერი–რისის უტოლობის თანახმად ([3], გვ. 520)

$$\int_c^{y_0+k} \big|f(x,y) - Q_m(y)\big|\,dy \leq$$

$$\leq \bigg(\int\limits_{c}^{y_0+k} \big| f(x,y) - Q_m(y) \big|^p \, dy \bigg)^{1/p} \cdot (y_0+k-c)^{1/q},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\bigg(\int\limits_{c}^{y_0+k} \big| f(x,y) - Q_m(y) \big| \, dy \bigg)^p \leq$$

$$\leq \int\limits_{c}^{y_0+k} \big| f(x,y) - Q_m(y) \big|^p \, dy \cdot (d-c)^{p/q}, \quad (12)$$

სადაც $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (10) უტოლობიდან, (11) და (12) შეფასებების ძალით ვიღებთ

$$2^{1-p} \bigg| \int\limits_{c}^{y_0+k} f(x,y) \, dy - \int\limits_{c}^{y_0} Q_m(y) \, dy \bigg|^p \leq$$

$$\leq \int\limits_{c}^{y_0+k} \big| f(x,y) - Q_m(y) \big|^p \, dy \cdot (d-c)^{p/q} + \varepsilon^p, \quad 0 < |k| < \eta_m. \quad (13)$$

უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$2^{1-p} \cdot \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \bigg| \int\limits_{c}^{y_0+k} f(x,y) \, dy - \int\limits_{c}^{y_0} Q_m(y) \, dy \bigg|^p dx \leq$$

$$\leq \varepsilon^p + (d-c)^{p/q} \cdot \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \int\limits_{c}^{y_0+k} \big| f(x,y) - Q_m(y) \big|^p \, dx \, dy, \quad (14)$$

როცა $0 < |k| < \eta_m$.

რადგან x_0 წერტილი არ ეკუთვნის e სიმრავლეს, ამიტომ (x_0, y_0) წერტილებზე, სადაც $y_0 \in [c, d]$, სრულდება (4) ტოლობა. ეს ნიშნავს ისეთი დადებითი $\delta < \eta_m$ რიცხვის არსებობას, რომ სრულდება

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \int\limits_{c}^{y_0+k} \left|f(x,y) - Q_m(y)\right|^p dx\, dy <$$

$$< \int\limits_{c}^{y_0} \left|f(x_0,y) - Q_m(y)\right|^p dy + \varepsilon < 2\varepsilon \quad (15)$$

დამოკიდებულებანი, (5)-ის ძალით, როცა $0<|h|<\delta$ და $0<|k|<\delta$. უკანასკნელი უტოლობის ძალით, (14) უტოლობიდან ვიღებთ

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \left| \int\limits_{c}^{y_0+k} f(x,y)\, dy - \int\limits_{c}^{y_0} Q_m(y)\, dy \right|^p dx \leq$$

$$\leq 2^{p-1}\left[\varepsilon^p + 2\varepsilon(d-c)^{p/q}\right], \quad (16)$$

როცა $0 < |h| < \delta$ და $0 < |k| < \delta$. ამ უტოლობის გათვალისწინებით, (9) უტოლობიდან ვიღებთ

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \left| \int\limits_{c}^{y_0+k} f(x,y)\, dy - \int\limits_{c}^{y_0} f(x_0,y)\, dy \right|^p dx <$$

$$< 2^p\varepsilon^p + 2^p\varepsilon(d-c)^{p/q} < \varepsilon \cdot 2^p\left[1 + (d-c)^{p/q}\right], \quad (17)$$

როცა $0 < |h| < \delta$ და $0 < |k| < \delta$. ამით $p > 1$ შემთხვევისთვის (1) ტოლობა დამტკიცებულია ε-ის სიმცირის გამო.

II) $p = 1$ შემთხვევისთვის ჰელდერ-რისის უტოლობა აღარ გვჭირდება და სხვა შეფასებანი ძალაშია.

ამით 1) მტკიცება დადგენილია, რომლის ანალოგიურად დგინდება 2) მტკიცება. 3) მტკიცება კი გამომადინარეობს წინა მტკიცებებიდან. თეორემა დამტკიცებულია.

4.2. ლებეგის ინტენსურ წერტილებზე ძლიერი გრადიენტის სასრულობა განუსაზღვრელი ინტეგრალისთვის

4.1.1 თეორემიდან $p = 1$ შემთხვევისთვის მიიღება შემდეგი თეორემა, თუ გავითვალისწინებთ 3.1.1 და 3.2.1 თეორემებს.

თეორემა 4.2.1 ([99], [107])**.** ვთქვათ, $f \in L(Q)$. მაშინ f-ის შესაბამის განუსაზღვრელ ორმაგ

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(t,\tau)\,dt\,d\tau \tag{1}$$

ინტეგრალს აქვს შემდეგი თვისებები:

1) ყოველ $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} L_x(f)$ წერტილზე სასრულია $F'_{[x]}(x_0, y_0)$ და

$$F'_{[x]}(x_0, y_0) = \int_c^{y_0} f(x_0, \tau)\,d\tau \tag{2}$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_c^{y_0+k} f(t,\tau)\,dt\,d\tau = \int_c^{y_0} f(x_0,\tau)\,d\tau; \tag{3}$$

2) ყოველ $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} L_y(f)$ წერტილზე სასრულია $F'_{[y]}(x_0, y_0)$ და

$$F'_{[y]}(x_0, y_0) = \int_a^{x_0} f(t, y_0)\,dt \tag{4}$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{1}{k} \int\limits_{y_0}^{y_0+k} \int\limits_{a}^{x_0+h} f(t,\tau)\,dt\,d\tau = \int\limits_{a}^{x_0} f(t,y_0)\,dt; \tag{5}$$

3) ყოველ $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} L_{x,y}(f)$ წერტილზე სასრულია $\operatorname{strgrad} F(x_0, y_0)$, კერძოდ, არსებობს $dF(x_0, y_0)$ დიფერენციალი.

განსაზღვრა 4.2.2 ([99], [107]). ერთგანზომილებიან

$$m^*(x_0) = \big\{(x_0, y) :\ x_0 \in e_1^*,\ c \le y \le d\big\} \tag{6}$$

სეგმენტს, სადაც e_1^* სიმრავლე აღებულია 4.1.1 თეორემის 1) მტკიცებიდან, ვუწოდოთ x_0 მნიშვნელობის შესაბამისი **ლებეგის ვერტიკალური სეგმენტი** $f \in L(Q)$ ფუნქციისთვის.

ასევე, ერთგანზომილებიან

$$n^*(y_0) = \big\{(x, y_0) :\ a \le x \le b,\ y_0 \in e_2^*\big\} \tag{7}$$

სეგმენტს, სადაც e_2^* სიმრავლე აღებულია 4.1.1 თეორემის 2) მტკიცებიდან, ვუწოდოთ y_0 მნიშვნელობის შესაბამისი **ლებეგის ჰორიზონტალური სეგმენტი** $f \in L(Q)$ ფუნქციისთვის.

ახლა შემოვიღოთ ზომადი სიმრავლეები:

$$E_1^* = \bigcup_{x_0 \in e_1^*} m^*(x_0), \quad E_2^* = \bigcup_{y_0 \in e_2^*} n^*(y_0), \quad E_3^* = E_1^* \cap E_2^*, \tag{8}$$

რომელთა მეშვეობით 4.1.1 თეორემა ასეც ყალიბდება.

თეორემა 4.2.2. ყოველი $f \in L^p(Q)$ ფუნქციისთვის, სადაც $p \ge 1$, მართებულია შემდეგი მტკიცებანი:

1) $\operatorname{int} L_x^p(f) = E_1^*$, $|E_1^*| = |Q|$;

2) $\operatorname{int} L_y^p(f) = E_2^*$, $|E_2^*| = |Q|$;

3) $\operatorname{int} L_{x,y}^p(f) = E_3^*$, $|E_3^*| = |Q|$.

აქედან ცხადია, რომ $\operatorname{int} L^p_x(f)$ შედგება ლებეგის ვერტიკალური, ხოლო $\operatorname{int} L^p_y(f)$ კი – ლებეგის ჰორიზონტალური სეგმენტებისგან, შესაბამისად.

შემდეგ, 4.1.1 თეორემა გვიჩვენებს, რომ თითქმის ყველა ვერტიკალური სეგმენტი Q-დან არის ლებეგის ვერტიკალური სეგმენტი $f \in L(Q)$ ფუნქციისთვის. ანალოგიური მდგომარეობა გვაქვს ლებეგის ჰორიზონტალური სეგმენტებისთვისაც.

ახლა 3.2.3 თეორემა შეიძლება ასე გაძლიერდეს.

თეორემა 4.2.3 ([99], [107])**.** ნებისმიერი $f \in L^p(Q)$, $p \geq 1$, ფუნქციისთვის მართებულია შემდეგი მტკიცებანი:

1) ყოველ $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} L^p_x(f)$ წერტილზე სრულდება

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \left| \int\limits_{y_0}^{y_0+k} f(x,y)\,dy \right|^p dx = 0 \tag{9}$$

ტოლობა;

2) ყოველ $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} L^p_y(f)$ წერტილზე შესრულებულია

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{k} \int\limits_{y_0}^{y_0+k} \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)\,dx \right|^p dy = 0 \tag{10}$$

ტოლობა;

3) ყოველ $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} L^p_{x,y}(f)$ წერტილზე ერთდროულად სრულდება (9) და (10) ტოლობანი.

დამტკიცება. 4.1.(1) ტოლობის მტკიცების პროცესიდან ჩანს, რომ იგი მართებული დარჩება თუ c-ს შევცვლით ნებისმიერი c_1 მნიშვნელობით $[c, d]$-დან, კერძოდ კი y_0-ით. ანალოგიური შეიძლება ითქვას 4.1.(2) ტოლობის მიმართაც. შედეგად მივიღებთ (9) და (10) ტოლობებს. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 4.2.1. ლებეგის ინტენსურ წერტილებს დავუბრუნდებით § 9-ში.

§ 5. პარამეტრიანი განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძლიერი გრადიენტი

მათემატიკური ანალიზის უმნიშვნელოვანესი ოპერაცია – გაწარმოება, წარმატებით გამოიყენება განსაზღვრული ინტეგრალით წარმოდგენილი ფუნქციების შესასწავლად. ასეთ შემთხვევაში შესასწავლი ფუნქციის არგუმენტი შედის ინტეგრალქვეშა ფუნქციაში პარამეტრის სახით, რომელიც ინტეგრებისას მუდმივად ითვლება.

თუ შესასწავლი ინტეგრალი ელემენტარულია (ე. ი. მისი წარმოდგენა შეიძლება სასრული რაოდენობის ელემენტარული ფუნქციებით), მაშინ საკითხი მარტივად წყდება: ინტეგრებით მიღებული შედეგის წარმოებული იქნება შესასწავლი ინტეგრალის წარმოებული. ამოცანა რთულდება იმ შემთხვევაში, როცა ინტეგრალი არ არის ელემენტარული. ასეთი შემთხვევა კი ხშირია, რადგანაც ინტეგრებას, როგორც წესი, გამოვყავართ ელემენტარულ ფუნქციათა კლასიდან გაწარმოებისგან განსხვავებით. ეს ის შემთხვევაა, როცა ინტეგრალში (ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ) პარამეტრით გაწარმოება არის თითქმის ერთადერთი გზა იმ ფუნქციის შესასწავლად, რომელიც ინტეგრალით არის წარმოდგენილი, თუკი ასეთი გაწარმოება მართლზომიერია.

მაშასადამე, საკითხი დგას ინტეგრალში პარამეტრით გაწარმოების შესაძლებლობის შესახებ. ასეთი გაწარმოების წესი მართლაც არსებობს, რომელსაც წარმატებით იყენებენ არაპარამეტრიანი ინტეგრალის გამოსათვლელადაც.

ინტეგრალში პარამეტრით გაწარმოების წესი დაადგინა ლაიბნიცმა, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია და პარამეტრით მისი წარმოებული უწყვეტი ფუნქციებია შესაბამის მართკუთხედზე. ამ წესს ჰქვია ლაიბნიცის წესი ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოებისთვის ([7], გვ. 272).

საჭიროა აღინიშნოს, რომ არსებობს $\psi(x,y)$ ფუნქცია

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b \psi(x,y)\,dx \neq \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial y}\,\psi(x,y)\,dx \qquad (5.0)$$

თვისების, თუმცა ამ უტოლობის ორივე ინტეგრალი არსებობს რიმანის აზრით ([23], გვ. 156; [52], გვ. 266).

ისიც აღვნიშნოთ, რომ ლაიბნიცის წესი ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოებისთვის მართებულია, გარკვეულ პირობებში, ორი კომპლექსური ცვლადის კომპლექსური ფუნქციისთვისაც ([68], გვ. 177–179).

5.1. ვალე პუსენის თეორემა

პარამეტრიანი ინტეგრალის გაწარმოების ლაიბნიცისმიერი წესი, შემდეგნაირად განაზოგადა ვალე პუსენმა (1916 წ.) L-ინტეგრალისთვის (ლებეგის აზრით ინტეგრალისთვის).

თეორემა 5.1.1 ([22], გვ. 110; [3], გვ. 517)**.** ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქცია არის x-ით ჯამებადი $[a,b]$ სეგმენტზე y-ის ყოველი მნიშვნელობისთვის $[c,d]$-დან. განვიხილოთ $[c,d]$ სეგმენტზე სასრული

$$\varphi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \quad y \in [c,d], \tag{1}$$

ფუნქცია – **განსაზღვრული ინტეგრალი** y **პარამეტრით**.

დავუშვათ, რომ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1) $f(x,y)$ არის y-ის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია $[c,d]$ სეგმენტზე ყოველი ფიქსირებული $x \in [a,b]$ მნიშვნელობისთვის;

2) y-ით კერძო $f'_y(x,y)$ წარმოებული არის ჯამებადი ფუნქცია $Q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\big\}$ მართკუთხედზე.

მაშინ y-ის თითქმის ყველა მნიშვნელობისთვის $[c,d]$-დან მართებულია ტოლობა

$$\varphi'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx. \tag{2}$$

5.2. პარამეტრიანი განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძლიერი გრადიენტი

აქ მოცემულია 5.1.1 თეორემის მტკიცების გაფართოება იმავე 1) და 2) პირობებში. ეს გაფართოება მოიცავს ლებეგის თეორემის (1903 წ.) განზოგადებასაც, ქვემომოყვანილი ტოლობა (2)-ის სახით.

თეორემა 5.2.1 ([107], [110]). ვთქვათ, $f(x,y)$ ფუნქციისთვის შესრულებულია 5.1.1 თეორემის 1) და 2) პირობები. მაშინ Q მართკუთხედზე სასრულ

$$p(x,y) = \int_a^x f(t,y)\,dt \tag{1}$$

ფუნქციას – **განუსაზღვრელ ინტეგრალს** y **პარამეტრით** – აქვს შემდეგი თვისებები:

1) ძლიერი კერძო $p'_{[x]}(x_0,y_0)$ წარმოებული სასრულია თითქმის ყველა $x_0 \in [a,b]$ და ყველა $y_0 \in [c,d]$ მნიშვნელობებისთვის. ამასთან, მართებულია

$$p'_{[x]}(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) \tag{2}$$

ტოლობა;

2) ძლიერი კერძო $p'_{[y]}(x_0,y_0)$ წარმოებული სასრულია ყველა $x_0 \in [a,b]$ და თითქმის ყველა $y_0 \in [c,d]$ მნიშვნელობებისთვის. ამასთან, გვაქვს

$$p'_{[y]}(x_0,y_0) = \int_a^{x_0} f'_y(t,y_0)\,dt \tag{3}$$

ტოლობა;

3) თითქმის ყველა $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე სასრულია $\operatorname{strgrad} p(x_0,y_0)$, კერძოდ არსებობს $dp(x_0,y_0)$ დიფერენციალი.

დამტკიცება. 1) გვაქვს

$$\frac{p(x_0+h,y_0+k)-p(x_0,y_0+k)}{h}=\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x,y_0+k)\,dx=$$

$$=\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\big[f(x,y_0+k)-f(x,y_0)\big]\,dx+\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x,y_0)\,dx=$$

$$=\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\bigg(\int\limits_{y_0}^{y_0+k} f'_y(x,y)\,dy\bigg)dx+\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x,y_0)\,dx\equiv$$

$$\equiv A_{h,k}(x_0,y_0)+B_h(x_0,y_0)$$

დამოკიდებულებანი, 5.1.1 თეორემის 1) პირობის გათვალისწინებით.

5.1.1 თეორემიდან 2) პირობის ძალით $f'_y\in L(Q)$. ამიტომ

$$A_{h,k}(x_0,y_0)=\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\int\limits_{y_0}^{y_0+k} f'_y(x,y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

(4) ტოლობის მარჯვენა მხარე თითქმის ყველა $x_0\in[a,b]$ და ყველა $y_0\in[c,d]$ მნიშვნელობებისთვის ისწრაფვის ნულისკენ, როცა $(h,k)\to(0,0)$ (იხ. თეორემა 3.2.3).

რადგანაც 5.1.(1) ინტეგრალი სასრულია ყოველი y-თვის $[c,d]$ სეგმენტიდან, ამიტომ y **პარამეტრიანი განუსაზღვრელი**

$$\int\limits_a^x f(t,y)\,dt=p(x,y)$$

ინტეგრალი (იხ. ტოლობა (1)) სასრულია ყველა $(x,y)\in Q$ წერტილზე.

ყველა $(x,y)\in Q$ წერტილისთვის მართებულია

$$\int\limits_a^x f(t,y)\,dt=\int\limits_a^x\int\limits_c^y f'_\tau(t,\tau)\;dt\,d\tau+\int\limits_a^x f(t,c)\,dt \tag{5}$$

ტოლობა, თეორემა 5.1.1-დან 1) და 2) პირობების საფუძველზე.

თეორემა 1.1.1-დან 1) მტკიცების თანახმად გვაქვს

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_a^x\int\limits_c^y f'_\tau(x,\tau)\;dt\,d\tau=\int\limits_c^y f'_\tau(x,\tau)\,d\tau=f(x,y)-f(x,c) \tag{6}$$

ყველა იმ (x,y) წერტილზე, როცა $x\in e_1$ და $y\in[c,d]$, სადაც $|e_1|=b-a$.

გარდა ამისა, ლებეგის თეორემის (1903 წ.) ძალით არსებობს c მუდმივზე დამოკიდებული ისეთი $e\subset[a,b]$ სიმრავლე, რომ $|e|=b-a$ და

$$\left(\int\limits_a^x f(t,c)\,dt\right)'=f(x,c) \tag{7}$$

ყოველ $x\in e$ წერტილზე.

ახლა (5)–(7) ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\left(\int\limits_a^x f(t,y)\,dt\right)'_x=f(x,y)$$

ტოლობა ყველა (x,y) წერტილზე, როცა $x\in e\cap e_1$ და $y\in[c,d]$.

ეს ნიშნავს, რომ თითქმის ყველა $x_0\in[a,b]$ და ყველა $y_0\in[c,d]$ მნიშვნელობებისთვის $B_h(x_0,y_0)$ გამოსახულება ისწრაფვის $f(x_0,y_0)$ მნიშვნელობისკენ, როცა $h\to 0$. ამით 1) მტკიცება დადგენილია.

2) ამჯერად გვაქვს დამოკიდებულებანი

$$\frac{p(x_0+h,y_0+k)-p(x_0+h,y_0)}{k}=$$

$$= \frac{1}{k}\int\limits_a^{x_0+h}\big[f(t,y_0+k)-f(t,y_0)\big]\,dt = \frac{1}{k}\int\limits_a^{x_0+h}\Bigg(\int\limits_{y_0}^{y_0+k} f'_\tau(t,\tau)\,d\tau\Bigg)\,dt =$$

$$= \frac{1}{k}\int\limits_{y_0}^{y_0+k}\int\limits_a^{x_0} f'_\tau(t,\tau)\;dt\,d\tau + \frac{1}{k}\int\limits_{y_0}^{y_0+k}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f'_\tau(t,\tau)\;dt\,d\tau \equiv$$

$$\equiv C_k(x_0,y_0) + D_{h,k}(x_0,y_0).$$

თეორემა 1.1.1-დან 2) მტკიცების საფუძველზე მიიღება

$$\lim_{k\to 0} C_k(x_0,y_0) = \int\limits_a^{x_0} f'_\tau(t,y_0)\,dt$$

ტოლობა ყველა $x_0 \in [a,b]$-თვის და თითქმის ყველა $y_0 \in [c,d]$-თვის (ანალოგიური მსჯელობა უკვე იყო ჩატარებული $B_h(x_0,y_0)$-თვის).

შემდეგ,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} D_{h,k}(x_0,y_0) = 0$$

ტოლობა ყველა $x_0 \in [a,b]$-თვის და თითქმის ყველა $y_0 \in [c,d]$-თვის ანალოგიურია $A_{h,k}(x_0,y_0)$-თვის ზემოთ დადგენილი ტოლობის. მაშასადამე, 2) მტკიცება მართებულია.

3) $\operatorname{strgrad} p(x_0,y_0)$-ის სასრულობა თითქმის ყველა $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე გამომდინარეობს 1) და 2) მტკიცებებიდან. $dp(x_0,y_0)$ დიფერენციალის არსებობა კი თითქმის ყველა $(x_0,y_0) \in Q$ წერტილზე გამომდინარეობს $\operatorname{strgrad} p(x_0,y_0)$-ის სასრულობიდან (იხ. თავი II, თეორემა 4.4.1). თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 5.2.1. თუ (1) ტოლობაში ავიღებთ კერძო $x = b$ მნიშვნელობას, მაშინ (3) ტოლობა $x_0 = b$ მნიშვნელობისთვის მიიღებს 5.1.(2)-ის სახეს იმის გამო, რომ ერთცვლადიანი ფუნქციის წარმოებული შეიძლება განხილულ იქნას ამ ფუნქციის ძლიერ კერძო წარმოებულად იმავე ცვლადის მიმართ.

ანალოგიურად, ლებეგის თეორემა (იხ. 1.2.(2)) მიიღება (2) ტოლობიდან, თუ (1)-ში f ფუნქცია არ იქნება დამოკიდებული y ცვლადზე.

შენიშვნა 5.2.2. თეორემა 3.1.1-დან (2) და (3) ტოლობები შეიძლება მივიღოთ თეორემა 5.2.1-დანაც. ამ მიზნით 3.1.(1) ტოლობა ჩავწეროთ

$$F(x,y) = \int\limits_a^x \Phi(t,y)\,dt$$

სახით, სადაც

$$\Phi(t,y) = \int\limits_c^y f(t,\tau))\,d\tau.$$

ეს Φ ფუნქცია აკმაყოფილებს ვალე პუსენის 5.1.1 თეორემის პირობებს. ამიტომ 5.2.(2) ტოლობის თანახმად,

$$F'_{[x]}(x_0,y_0) = \Phi(x_0,y_0) = \int\limits_c^{y_0} f(x_0,\tau)\,d\tau.$$

ასევე მიიღება 3.1.(3) ტოლობაც.

5.3. ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების ლოკალური შემთხვევა – ფატუს თეორემა

როგორც ვნახეთ, ლაიბნიცის და ვალე პუსენის თეორემებში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის (ინტეგრანდის) პარამეტრით წარმოებულს გლობალურად, მთელ მართკუთხედზე მოეთხოვება უწყვეტობა ან ჯამებადობა, შესაბამისად.

ფატუს **ლოკალური თეორემის** ჩამოსაყალიბებლად დაგვჭირდება ზოგიერთი ცნება.

ერთეულოვან ღია წრეში განსაზღვრულ $u(r,\theta)$, $0 \le r < 1$, $0 \le \theta < 2\pi$, ფუნქციას ერთეულოვანი წრეწირის $e^{i\theta_0}$ წერტილზე

კუთხურ ზღვრად აქვს $A(\theta_0)$ რიცხვი, სიმბოლურად

$$\lim_{(r,\theta)\xrightarrow{\frown}(1,\theta_0)} u(r,\theta) = A(\theta_0), \tag{1}$$

თუ ყოველი $c > 0$ რიცხვისთვის ადგილი აქვს $u(r,\theta) \to A(\theta_0)$ დამოკიდებულებას, როცა (r,θ) ისწრაფვის $e^{i\theta_0}$ წერტილისკენ $|\theta-\theta_0| < c(1-r)$ პირობის დაცვით. გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ $e^{i\theta_0}$ წერტილიდან გამოსული ორი ქორდით შედგენილი ბრტყელი კუთხის გასწვრივ $u(r,\theta)$ ფუნქციის ზღვარი $e^{i\theta_0}$ წერტილზე არის $A(\theta_0)$ რიცხვი (ქორდებით შედგენილი კუთხის სიდიდე დამოკიდებულია ნებისმიერად აღებულ $c > 0$ მუდმივზე). ყოველი ასეთი კუთხის გასწვრივ $u(r,\theta)$-ს ზღვრად $e^{i\theta_0}$ წერტილზე უნდა ჰქონდეს ერთი და იგივე $A(\theta_0)$ რიცხვი (აქ ლაპარაკი არაა ზღვრის თანაბრობაზე c-ს მიმართ!).

ვთქვათ, $f(t)$ არის 2π-პერიოდული და $[-\pi,\pi]$-ზე ჯამებადი ფუნქცია. f ფუნქციას შეესაბამება პუასონის

$$u_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)p_r(\theta-t)\,dt \tag{2}$$

ინტეგრალი (პუასონის ინტეგრალი ერთეულოვანი წრისთვის), სადაც

$$p_r(x) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x} = \tag{3}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx} \tag{4}$$

არის პუასონის გული. ცხადია, რომ θ პარამეტრზე დამოკიდებული (2) ინტეგრალისთვის გვაქვს

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\,u_f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,p_r(\theta-t)\,dt = \tag{5}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,p_r(\theta - t)\,dt \tag{6}$$

ტოლობები, ვალე პუსენის 5.1.1 თეორემის ძალით.

პუასონის გულის სპეციალური თვისებანი იწვევს (2) ინტეგრალის θ პარამეტრით $\frac{\partial}{\partial\theta}\,u_f(r,\theta)$ წარმოებულის ლოკალიზებას $(1,\theta_0)$ წერტილის მახლობლობაში, კუთხური ზღვრის მოშველიებით. უფრო ზუსტად, მართებულია შემდეგი

თეორემა 5.3.1 (ფატუ, 1906 წ.; [30], გვ. 167). თუ არსებობს სასრული $f'(\theta_0)$ წარმოებული, მაშინ ადგილი აქვს

$$\lim_{(r,\theta)\overset{\frown}{\longrightarrow}(1,\theta_0)} \frac{\partial}{\partial\theta}\,u_f(r,\theta) = f'(\theta_0) \tag{7}$$

ტოლობას*.

---

*ფატუს ამ თეორემის [14] წიგნში მოცემული დამტკიცება არაკორექტულია. გვერდ 158-ზე (56.7) ტოლობით განსაზღვრული $Q = Q_r(t,\omega)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის დადგენის მცდელობა, როცა $-\delta \le t \le \delta$ და ყოველი სასრული დადებითი c მუდმივისთვის შესრულებულია $|t| < c(1-r)$ უტოლობა, ემყარება მცდარ $|Q| = 2r(1-r^2)\,\frac{|t\cdot\sin(t-\omega)|}{|e^{it}-re^{i\omega}|^2}$ ტოლობას. აქ მნიშვნელში უნდა იყოს $|e^{it}-re^{i\omega}|^4$. იგივეა გამეორებული წიგნში: Г. М. Голузин, геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966, стр. 370. უფრო ზუსტად, $Q_r(t,\omega)$ ფუნქცია აღნიშნულ პირობებში არაა შემოსაზღვრული. მართლაც,

$$Q_r(t,\omega) = 2r(1-r^2)\,\frac{t\sin(t-\omega)}{\left[(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t-\omega}{2}\right]^2}$$

ტოლობიდან, როცა $0 \le t \le \delta$ გამომდინარეობს

$$Q_r(t,0) = 2r(1-r^2)\,\frac{t\sin t}{\left[(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2} \ge$$

$$\ge 2r(1-r^2)\,\frac{t\cdot t/2}{[(1-r)^2 + rt^2]^2} = r(1+r)(1-r)\,\frac{t^2}{[(1-r)^2 + rt^2]^2}\,.$$

შევნიშნოთ, რომ ლაიბნიცის და ვალე პუსენის თეორემების პირობებში ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოება შეიძლება გადატანილ იქნას ინტეგრალის შიგნით. (7) ტოლობა კი გვეუბნება, რომ მხოლოდ ერთ წერტილზე სასრული $f'(\theta_0)$ წარმოებული ტოლია პუასონის $u_f(r,\theta)$ ინტეგრალის θ პარამეტრით წარმოებულის კუთხური ზღვრისა $(1,\theta_0)$ წერტილზე. ამაში მდგომარეობს ფატუს თეორემის ლოკალურობა.

§ 6. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძლიერი კერძო წარმოებულების სასრულობა და უწყვეტობა

განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალისთვის აქამდე მიღებულ შედეგებში, მტკიცებანი სრულდება თითქმის ყველგან.

არანაკლებ საჭიროა გვქონდეს მოცემულ წერტილზე მართებული ამდაგვარი მტკიცება. ასე მაგალითად, თეორემა 1.2.4-ში გვაქვს განუსაზღვრელი $F(x,y)$ ინტეგრალის დიფერენცირებადობა მოცემულ წერტილზე, თუკი $F(x,y)$-ს აქვს გარკვეული თვისებანი ამ წერტილის მიდამოში. ქვემოთაც ვიგულისხმებთ, რომ $F(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია 4.2.(1) ტოლობით.

6.1. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძლიერი კერძო წარმოებულების სასრულობის წერტილები

დავიწყოთ შემდეგი ლემით, რომელშიც გამოყენებულია 9.1 განსაზღვრა თავი I-დან.

ლემა 6.1.1 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x,y)\in L(Q)$ ფუნქცია ზომადია y-ის მიმართ $[c,d]$-ზე ყოველი $x\in[a,b]$ მნიშვნელობისთვის

ვთქვათ, $0<t_n\to 0$, როცა $n\to\infty$ და ავიღოთ $r_n=1-t_n$. მაშინ $t_n/(1-r_n)=1$ და

$$Q_{r_n}(t_n,0)\ge r_n(1+r_n)\,\frac{t_n^3}{t_n^4(1+r_n)^2}\to+\infty,\ \text{როცა}\ n\to\infty.$$

და არის x-ით კერძო უწყვეტი x_0-ზე თანაბრად y-ის მიმართ $[c_1, d_1]$-ზე, სადაც $c \leq c_1 < d_1 \leq d$. მაშინ მართებულია შემდეგი მტკიცებანი:

1) არსებობს $\delta = \delta(x_0) > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $|x - x_0| < \delta$ თვისების ყველა x-თვის სასრულია

$$\int_{c_1}^{d_1} f(x, \tau)\, d\tau \tag{1}$$

ინტეგრალი და, მაშასადამე, $|x - x_0| < \delta$ და $c_1 \leq y \leq d_1$ პირობებში სასრულია

$$\int_{c_1}^{y} f(x, \tau)\, d\tau \tag{2}$$

ინტეგრალიც;

2) ორი ცვლადის სასრული

$$\psi(x, y) = \int_{c_1}^{y} f(x, \tau)\, d\tau, \quad |x - x_0| < \delta, \quad c_1 \leq y \leq d_1, \tag{3}$$

ფუნქცია უწყვეტია ყველა (x_0, y_0) წერტილზე, როცა $c_1 < y_0 < d_1$.

დამტკიცება. 1) 9.(1) ტოლობის ძალით თავი I-დან, არსებობს $\delta = \delta(x_0) > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $|x - x_0| < \delta$ და $\tau \in [c_1, d_1]$ პირობებში სრულდება $-1 < f(x, \tau) - f(x_0, \tau) < 1$ დამოკიდებულება და, მაშასადამე,

$$f(x_0, \tau) - 1 < f(x, \tau) < f(x_0, \tau) + 1. \tag{4}$$

რადგანაც $f \in L(Q)$, ამიტომ $\int\limits_{c_1}^{d_1} f(x, \tau)\, d\tau$ ინტეგრალი სასრულია თითქმის ყველა $x \in [a, b]$ მნიშვნელობისთვის, კერძოდ, $|x -$

$x_0| < \delta$ თვისების თითქმის ყველა x-თვის. თუ ასეთ x-ებს ვიგულისხმებთ (4)-ში, მაშინ მისი მარცხენა მხარე იძლევა $\int\limits_{c_1}^{d_1} f(x_0,\tau)\,d\tau$ ინტეგრალის სასრულობას. ეს კი, თავის მხრივ, (4) შეფასებათა მარჯვენა ნაწილის გათვალისწინებით, იძლევა (1) ინტეგრალის სასრულობას $|x-x_0|<\delta$ თვისების ყველა x-თვის.

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს (2) ინტეგრალის სასრულობა, როცა $|x-x_0|<\delta$ და $c_1 \le y \le d_1$.

2) ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. მაშინ თავი I-ის 9.(1) ტოლობის გამო $\varepsilon^* = \varepsilon/(d_1-c_1)$ რიცხვისთვის არსებობს $\delta^* = \delta^*(\varepsilon, x_0) > 0$ ისეთი, რომ სრულდება

$$f(x_0,\tau)-\varepsilon^* < f(x,\tau) < f(x_0,\tau)+\varepsilon^*, \quad |x-x_0|<\delta^*, \quad \tau\in[c_1,d_1] \quad (5)$$

დამოკიდებულებანი.

$\psi(x,y)$ ფუნქციის უწყვეტობის დასადგენად ყველა (x_0,y_0) წერტილზე, როცა $c_1 < y_0 < d_1$, შევამოწმოთ თავი I-დან თეორემა 6.1.2-ის პირობები. გვაქვს:

$$\begin{aligned}\psi(x_0+h, y_0+k) - \psi(x_0, y_0+k) &= \\ = \int\limits_{c_1}^{y_0+k} \big[f(x_0+h,\tau) - f(x_0,\tau)\big]\,d\tau,&\end{aligned} \quad (6)$$

$$\psi(x_0, y_0+k) - \psi(x_0,y_0) = \int\limits_{y_0}^{y_0+k} f(x_0,\tau)\,d\tau. \quad (7)$$

$c_1 < y_0 < d_1$ თვისების ყოველი y_0-თვის არსებობს $\eta_1 = \eta_1(y_0) > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ y_0+k წერტილები მიეკუთვნებიან $[c_1,d_1]$-ს, როცა $|k| < \eta_1$. ამიტომ (6) ინტეგრალის აბსოლუტური მნიშვნელობა (5)-ის ძალით ნაკლებია, ვიდრე $\varepsilon^*(d_1-c_1) = \varepsilon$, როცა $|h| < \delta^*$

და $|k| < \eta_1$. (7) ინტეგრალის აბსოლუტური მნიშვნელობა კი ნაკლებია ვიდრე ε, $\int\limits_{c_1}^{t} f(x_0,\tau)\,d\tau$ ინტეგრალის აბსოლუტური უწყვეტობის გამო, როცა $|k| < \eta_2$, სადაც $\eta_2 = \eta_2(x_0,\varepsilon) > 0$. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.1.1 ([99], [107])**.** ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ ფუნქცია ზომადია y-ით $[c,d]$-ზე ყოველი $x \in [a,b]$ მნიშვნელობისთვის და კერძო უწყვეტია x-ით x_0-ზე თანაბრად y-ის მიმართ $[c_1,d_1]$-ზე, სადაც $c \le c_1 < d_1 \le d_1$. მაშინ $c_1 < y < d_1$ თვისების ყოველი y-თვის სასრულია $F'_{[x]}(x_0,y)$ და ადგილი აქვს

$$F'_{[x]}(x_0,y) = \int\limits_{c_1}^{y} f(x_0,\tau)\,d\tau, \quad c_1 < y < d_1, \tag{8}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. (8) ტოლობის ინტეგრალი სასრულია (2) ინტეგრალის სასრულობის გამო. (8) ტოლობა კი გამომდინარეობს

$$\frac{F(x_0+h,y+k)-F(x_0,y+k)}{h} - \int\limits_{c_1}^{y} f(x_0,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\int\limits_{c_1}^{y+k}\big[f(t,\tau)-f(x_0,\tau)\big]\,dt\,d\tau + \int\limits_{y}^{y+k} f(x_0,\tau)\,d\tau$$

ტოლობიდან, (6) ინტეგრალის შესახებ ზემოთქმულის გამო.

ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 6.1.2 ([99], [107])**.** ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ ფუნქცია ზომადია x-ით $[a,b]$-ზე ყოველი $y \in [c,d]$ მნიშვნელობისთვის და არის y-ით კერძო უწყვეტი y_0-ზე თანაბრად x-ის მიმართ $[a_1,b_1]$-ზე,

სადაც $a \le a_1 < b_1 \le b$. მაშინ $a_1 < x < b_1$ თვისების ყოველი x-თვის სასრულია $F'_{[y]}(x, y_0)$ და სრულდება

$$F'_{[y]}(x, y_0) = \int\limits_{a_1}^{x} f(t, y_0)\, dt, \ \ a_1 < y < b_1, \tag{9}$$

ტოლობა.

ორი უკანასაკნელი თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 6.1.3 ([99], [107]). ვთქვათ, თითოეული ცვლადით Q-ზე ზომადი $f(x, y) \in L(Q)$ ფუნქცია არის x-ით კერძო უწყვეტი x_0-ზე თანაბრად y-ის მიმართ $[c, d]$-ზე და y-ით კერძო უწყვეტი y_0-ზე თანაბრად x-ის მიმართ $[a, b]$-ზე. მაშინ სასრულებია:

1) $F'_{[x]}(x_0, y) = \int\limits_{c}^{y} f(x_0, \tau)\, d\tau$, $c < y < d$;

2) $F'_{[y]}(x, y_0) = \int\limits_{a}^{x} f(t, y_0)\, dt$, $a < y < b$;

3) $\operatorname{strgrad} F(x_0, y_0)$, როცა $(x_0, y_0) \in Q^0$. კერძოდ*, არსებობს $dF(x_0, y_0)$ დიფერენციალი.

6.2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძლიერი კერძო წარმოებულების უწყვეტობის წერტილები

თეორემა 6.2.1 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x, y) \in L(Q)$ ფუნქცია უწყვეტია $r_1 = [a_1, b_1] \times [c, d]$ მართკუთხედზე, სადაც $a \le a_1 < b_1 \le b$.

---

*E^0 სიმბოლოთი აღნიშნულია E სიმრავლის **შიგნედი** (E-ს შიგა წერტილების სიმრავლე).

მაშინ $F'_{[x]}(x,y)$ უწყვეტია r_1^0-ში და

$$F'_{[x]}(x,y) = \int\limits_c^y f(x,\tau)\,d\tau, \quad (x,y) \in r_1^0. \tag{1}$$

დამტკიცება. თავი I-ის 9.1 თეორემაში, Q-ს როლში ავიღოთ r_1. ახლა 6.1.1 თეორემაში შეგვიძლია x_0-ის როლში ავიღოთ $a_1 < x < b_1$ თვისების ნებისმიერი x. ამიტომ (1) ტოლობა გამომდინარეობს 6.1.(8)-დან. $F'_{[x]}(x,y)$-ის უწყვეტობა r_1^0-ში კი გამომდინარეობს 6.1.1 ლემის 2) მტკიცებიდან, თუ იქ x_0-ს შევცვლით $x \in (a_1,b_1)$ მნიშვნელობით და y_0-ს კი $y \in (c,d)$-ით. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 6.2.2 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ ფუნქცია უწყვეტია $r_2 = [a,b] \times [c_1,d_1]$ მართკუთხედზე, სადაც $c \le c_1 < d_1 \le d$. მაშინ $F'_{[y]}(x,y)$ უწყვეტია r_2^0-ში და

$$F'_{[y]}(x,y) = \int\limits_a^x f(t,y)\,d\tau, \quad (x,y) \in r_2^0. \tag{2}$$

ორი უკანასაკნელი თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 6.2.3 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a_1,b_1] \times [c,d] \cup [a,b] \times [c_1,d_1]$ გაერთიანებაზე, სადაც $a \le a_1 < b_1 \le b$ და $c \le c_1 < d_1 \le d$. მაშინ $r = [a_1,b_1] \times [c_1,d_1]$ მართკუთხედის შიგა $(x,y) \in r^0$ წერტილებზე უწყვეტია $F'_{[x]}(x,y)$, $F'_{[y]}(x,y)$ ფუნქციები და ადგილი აქვს

$$F'_{[x]}(x,y) = \int\limits_{c_1}^y f(x,\tau)\,d\tau, \quad F'_{[y]}(x,y) = \int\limits_{a_1}^x f(t,y)\,dt, \quad (x,y) \in r^0, \tag{3}$$

ტოლობებს.

კერძოდ, განუსაზღვრელი $F(x,y)$ ინტეგრალი უწყვეტად დიფერენცირებადია r^0-ში.

§ 7. განუსაზღვრელი ინტეგრალის სხვადასხვა განმეორებითი და შერეული კერძო წარმოებულები

თეორემა 7.1 ([99]). ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ ფუნქცია უწყვეტია $r(x_0,\delta) = [x_0-\delta, x_0+\delta] \times [c,d] \subset Q$ მართკუთხედზე, სადაც $\delta = \delta(x_0) > 0$. დავუშვათ, რომ $f'_x(x,y)$ კერძო წარმოებული არსებობს და ჯამებადია $r(x_0,\delta)$-ზე, რომელიც იგულისხმება x-ით კერძო უწყვეტი x_0-ზე თანაბრად y-ის მიმართ $[c,d]$-ზე და y-ით ზომადი $[c,d]$-ზე ყოველი $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ მნიშვნელობისთვის. მაშინ ყველა (x_0,y) წერტილზე, როცა $c<y<d$, სასრულია $(F'_{[x]})'_x(x_0,y)$ და

$$(F'_{[x]})'_x(x_0,y) = \int\limits_c^y f'_x(x_0,\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

დამტკიცება. $f'_x(x,y)$, $(x,y) \in r(x_0,\delta)$, ფუნქციისთვის გამოვიყენოთ 1) მტკიცება ლემა 6.1.1-დან. ამიტომ $f'_x(x_0,\tau) \in L([c,d])$. 6.2.1 თეორემის ძალით, $F'_{[x]}(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია $r^0(x_0,\delta)$-ში და

$$\int\limits_c^y f(x,\tau)\,d\tau = F'_{[x]}(x,y), \quad (x,y) \in r^0(x_0,\delta). \tag{2}$$

(2) ტოლობის მარცხენა მხარე აღვნიშნოთ $\mu(x,y)$-ით და უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$\mu'_x(x_0,y) = \int\limits_c^y f'_x(x_0,\tau)\,d\tau, \quad c<y<d. \tag{3}$$

გვაქვს

$$\frac{\mu(x_0+h,y)-\mu(x_0,y)}{h}-\int\limits_c^y f'_x(x_0,\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_c^y\Big[\frac{f(x_0+h,\tau)-f(x_0,\tau)}{h}-f'_x(x_0,\tau)\Big]\,d\tau=$$

$$=\int\limits_c^y\Big[f'_x(x_0+\theta h,\tau)-f'_x(x_0,\tau)\Big]\,d\tau,$$

სადაც $0<\theta=\theta(x_0,h,\tau)<1$. ახლა საკმარისია იმის გათვალისწინება, რომ $f'_x(x,\tau)$ ფუნქცია არის x-ით კერძო უწყვეტი x_0-ზე თანაბრად τ-ს მიმართ $[c,d]$-ზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 7.1 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x,y)\in L(Q)$ ფუნქცია უწყვეტია $r(x_0,\delta)=[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[c,d]\subset Q$, $\delta>0$, მართკუთხედზე და $r(x_0,\delta)$-ზე არსებობს შემოსაზღვრული კერძო $f'_x(x,y)$ წარმოებული, რომელიც ვიგულისხმოთ x-ით კერძო უწყვეტი x_0-ზე თანაბრად y-ის მიმართ $[c,d]$-ზე და y-ით ზომადი $[c,d]$-ზე ყოველი $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ მნიშვნელობისთვის. მაშინ ყველა (x_0,y) წერტილზე, როცა $c<y<d$, ადგილი აქვს სასრულწევრებიან (1) ტოლობას.

თავი I-დან 9.1 თეორემის, ახლა ჩამოყალიბებული 7.1 შედეგის და 6.1.1 ლემიდან 2) მტკიცების ძალით მიიღება

თეორემა 7.2 ([99], [107]). ვთქვათ $f(x,y)\in L(Q)$ ფუნქცია და მისი კერძო $f'_x(x,y)$ წარმოებული უწყვეტია Q^0-ში. მაშინ $(F'_{[x]})'_x(x,y)$ უწყვეტია Q^0-ში და მართებულია

$$(F'_{[x]})'_x(x,y)=\int\limits_c^y f'_x(x,\tau)\,d\tau,\ \ (x,y)\in Q^0 \tag{4}$$

ტოლობა.

$(F'_{[x]})'_y$-თვის კი მართებულია

თეორემა 7.3 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ ფუნქცია უწყვეტია $r_1 = [a_1, b_1] \times [c,d]$ მართკუთხედზე, სადაც $a \leq a_1 < b_1 \leq b$. მაშინ $(F'_{[x]})'_y$ უწყვეტია r_1^0-ში და

$$(F'_{[x]})'_y(x,y) = f(x,y), \ \ (x,y) \in r_1^0. \tag{5}$$

დამტკიცება. 6.2.(1) ტოლობა მართებულია r_1^0-ში და საჭიროა დამტკიცდეს, რომ (2) ტოლობით მოცემული $\mu(x,y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $\mu'_y(x,y) = f(x,y)$ ტოლობას, როცა $(x,y) \in r_1^0$.

მართლაც, ყოველი ფიქსირებული $x \in [a_1, b_1]$ მნიშვნელობისთვის $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია $[c,d]$-ზე. ამიტომ:

$$\mu'_y(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \int\limits_{y}^{y+k} f(x,\tau)\, d\tau = f(x,y).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა 7.2 და 7.3 თეორემებიდან გამომდინარეობს

თეორემა 7.4 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ და $f'_x(x,y)$ ფუნქციები უწყვეტია Q^0-ში. მაშინ $(F'_{[x]})'_x$ და $(F'_{[x]})'_y$ უწყვეტია Q^0-ში და, მაშასადამე, $F'_{[x]}(x,y)$ უწყვეტად დიფერენცირებადია Q^0-ში.

ცხადია, რომ ადგილი აქვს 7.1–7.3 თეორემების ანალოგებს $(F'_{[y]})'_y$ და $(F'_{[y]})'_x$ ფუნქციებისთვის, ხოლო თეორემა 7.4-ის ანალოგი ასე ყალიბდება.

თეორემა 7.5 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ და $f'_y(x,y)$ ფუნქციები უწყვეტია Q^0-ში. მაშინ $(F'_{[y]})'_x$ და $(F'_{[y]})'_y$ ფუნქციები უწყვეტია Q^0-ში და, მაშასადამე, $F'_{[y]}(x,y)$ უწყვეტად დიფერენცირებადია Q^0-ში.

ორი უკანასკნელი თეორემიდან მიიღება

თეორემა 7.6 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ ფუნქციას აქვს Q^0-ში უწყვეტი კერძო $f'_x(x,y)$ და $f'_y(x,y)$ წარმოებულები. მაშინ $F'_{[x]}(x,y)$ და $F'_{[y]}(x,y)$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია Q^0-ში. მაშასადამე, განუსაზღვრელი $F(x,y)$ ინტეგრალი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია Q^0-ში (იხ. თეორემა 2.1.5 თავი III-დან).

§ 8. განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალის ორჯერ დიფერენცირებადობა

8.1. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ორჯერ დიფერენცირებადობა Q^0-ში

თეორემა 8.1.1 ([99], [107]). ვთქვათ, Q-ზე უწყვეტი $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია Q^0-ში და ვთქვათ,

$$\int\limits_c^d f'_x(x,\tau)\,d\tau, \quad \int\limits_a^b f'_y(t,y)\,dt \tag{1}$$

ინტეგრალები სასრულია ყველა $x \in (a,b)$ და $y \in (c,d)$ მნიშვნელობისთვის, შესაბამისად. მაშინ $F'_{[x]}(x,y)$ და $F'_{[y]}(x,y)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია Q^0-ში. მაშასადამე, განუსაზღვრელი $F(x,y)$ ინტეგრალი ორჯერ დიფერენცირებადია Q^0-ში.

დამტკიცება. 6.2.3 თეორემის ძალით

$$F'_{[x]}(x,y) = \int\limits_c^y f(x,\tau)\,d\tau \equiv \phi(x,y)$$

და

$$F'_{[y]}(x,y) = \int\limits_a^x f(t,y)\,dt \equiv \psi(x,y)$$

ფუნქციები უწყვეტია Q^0-ში. ცხადია, რომ

$$\frac{\phi(x+h,y+k)-\phi(x,y+k)}{h}=\int\limits_c^{y+k}\frac{f(x+h,\tau)-f(x,\tau)}{h}\,d\tau.$$

რადგანაც $f(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია ყველა $(x,y)\in Q^0$ წერტილზე, ამიტომ (იხ. თავი II, 2.4.(1) და 2.4.(8))

$$\begin{aligned}&f(x+p,y+q)-f(x,y)=\\&=pf'_x(x,y)+qf'_y(x,y)+\big(|p|+|q|\big)\cdot\alpha,\end{aligned}$$

სადაც (x,y) წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ α ფუნქციას ნულოვანი ზღვარი აქვს (x,y)-ზე და მიღებულია ნულის ტოლად ამ წერტილზე. მაშასადამე,

$$\frac{\phi(x+h,y+k)-\phi(x,y+k)}{h}=\int\limits_c^{y+k}f'_x(x,\tau)\,d\tau+\frac{|h|}{h}\int\limits_c^{y+k}\alpha\,d\tau.$$

ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს $(x,y)\in Q^0$ წერტილის შემცველი მართკუთხედი, რომელზეც $|\alpha|<\varepsilon$. ამრიგად, არსებობს სასრული

$$\phi'_{[x]}(x,y)=\int\limits_c^{y}f'_x(x,\tau)\,d\tau\ \ \big(=\phi'_{\widehat{x}}(x,y)\big).\tag{2}$$

შემდეგ,

$$\frac{\phi(x+h,y+k)-\phi(x+h,y)}{k}=\frac{1}{k}\int\limits_y^{y+k}f(x+h,\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{h}{k}\int\limits_y^{y+k}\frac{f(x+h,\tau)-f(x,\tau)}{h}\,d\tau+\frac{1}{k}\int\limits_y^{y+k}f(x,\tau)\,d\tau=$$

$$= \frac{h}{k} \int\limits_{y}^{y+k} f'_x(x,\tau)\,d\tau + \frac{|h|}{k} \int\limits_{y}^{y+k} \alpha\,d\tau + \frac{1}{k} \int\limits_{y}^{y+k} f(x,\tau)\,d\tau.$$

აქედან,

$$\phi'_{\widehat{y}}(x,y) = f(x,y), \;\; (x,y) \in Q^0. \tag{3}$$

მაშასადამე, $\phi'_{\widehat{y}}(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია Q^0-ში.

ამრიგად, $\phi(x,y) = F'_{[x]}(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია Q^0-ში 3.5.1 თეორემის ძალით თავი II-დან.

ანალოგიურად მტკიცდება $\psi(x,y) = F'_{[y]}(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა Q^0-ში, რომლისთვისაც $\psi'_{\widehat{x}}(x,y) = f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია, ხოლო

$$\psi'_{[y]}(x,y) = \int\limits_{a}^{x} f'_y(t,y)\,dt \tag{4}$$

ფუნქცია სასრულია Q^0-ში. ამიტომ, $F'_{[y]}(x,y)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია Q^0-ში (იხ. II, თეორემები 4.6.1, 4.6.4).

მაშასადამე, განუსაზღვრელი ორმაგი $F(x,y)$ ინტეგრალი ორჯერ დიფერენცირებადია Q^0-ში. თეორემა დამტკიცებულია.

8.2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ორჯერ დიფერენცირებადობა თითქმის ყველგან

თეორემა 8.2.1 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x,y) \in L(Q)$ ფუნქცია x-ით აბსოლუტურად უწყვეტია $[a,b]$-ზე თითოეული $y \in [c,d]$ მნიშვნელობისთვის და ვთქვათ, $f'_x(x,y) \in L(Q)$. მაშინ $F'_{[x]}(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია Q^0-ში, ადგილი აქვს

$$F'_{[x]}(x,y) = \int\limits_{c}^{y} f(x,\tau)\,d\tau, \;\; (x,y) \in Q^0, \tag{1}$$

ტოლობას და მართებულია შემდეგი მტკიცებანი:

1) თითქმის ყველა $x_0 \in (a, b)$ და ყველა $y_0 \in (c, d)$ მნიშვნელობებისთვის სრულდება სასრულწევრებიანი

$$(F'_{[x]})'_{[x]}(x_0, y_0) = \int_c^{y_0} f'_x(x_0, \tau)\, d\tau \tag{2}$$

ტოლობა;

2) თითქმის ყველა $(x_0, y_0) \in Q^0$ წერტილზე მართებულია სასრულწევრებიანი

$$(F'_{[x]})'_{[y]}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \tag{3}$$

ტოლობა;

3) $\operatorname{strgrad} F'_{[x]}(x, y)$ სასრულია თითქმის ყველა $(x, y) \in Q^0$ წერტილზე, კერძოდ, არსებობს $dF(x, y)$ დიფერენციალი;

4) $F'_{[x]}(x, y)$, კერძოდ, $F'_x(x, y)$, დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან Q^0-ში.

დამტკიცება. თავდაპირველად დავადგინოთ $F'_{[x]}(x, y)$ ფუნქციის უწყვეტობა Q^0-ში და (1) ტოლობა. ამ მიზნით $F(x, y)$ ფუნქცია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$F(x, y) = \int_a^x \phi(t, y)\, dt,$$

სადაც

$$\phi(t, y) = \int_c^y f(t, \tau)\, d\tau = \int_c^y \int_{t_0}^t f'_t(t, \tau)\, dt\, d\tau + \int_c^y f(t_0, \tau)\, d\tau$$

და $t_0 \in (a, b)$ წერტილი ისეთია, რომ $f(t_0, \tau) \in L([c, d])$. აქედან ცხადია, რომ ϕ ფუნქცია უწყვეტია Q^0-ში და

$$F'_x(x, y) = \phi(x, y), \ \ (x, y) \in Q^0.$$

F'_x ფუნქციის უწყვეტობა Q^0-ში იწვევს $F'_{[x]}$ ფუნქციის უწყვეტობას Q^0-ში (იხ. თავი II, წინადადება 4.1.1) და

$$F'_{[x]}(x,y) = F'_x(x,y) = \phi(x,y) = \int\limits_c^y f(x,\tau)\,d\tau$$

ტოლობებს.

(1) ტოლობის საერთო მნიშვნელობა აღვნიშნოთ $\psi(x,y)$-ით, რომლისთვისაც გვაქვს:

1) $$\psi'_{[x]}(x_0,y_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ y\to y_0}} \frac{\psi(x_0+h,y)-\psi(x_0,y)}{h} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ y\to y_0}} \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \int\limits_c^y f'_x(x,\tau)\,d\tau\,dx.$$

მაგრამ ეს ზღვარი, 3.2.(1) ტოლობის ძალით, თითქმის ყველა $x_0 \in (a,b)$ და ყველა $y_0 \in (c,d)$ მნიშვნელობებისთვის ინტეგრალის ტოლია (2) ტოლობიდან.

2) $$\psi'_{[y]}(x_0,y_0) = \lim_{\substack{k\to 0\\ x\to x_0}} \frac{\psi(x,y_0+k)-\psi(x,y_0)}{k} =$$

$$= \lim_{\substack{k\to 0\\ x\to x_0}} \frac{1}{k} \int\limits_{y_0}^{y_0+k} f(x,\tau)\,d\tau.$$

ვთქვათ, $x_0 \in (a,b)$ წერტილი ისეთია, რომ $f(x_0,\tau) \in L([c,d])$ (თითქმის ყველა წერტილი ასეთია) და დავწეროთ:

$$\frac{1}{k}\int\limits_{y_0}^{y_0+k} f(x,\tau)\,d\tau = \frac{1}{k}\int\limits_{y_0}^{y_0+k} f(x_0,\tau)\,d\tau + \frac{1}{k}\int\limits_{y_0}^{y_0+k}\int\limits_{x_0}^{x} f'_t(t,\tau)\,dt\,d\tau.$$

აქედან, ლებეგის თეორემის (1903 წ.) და 3.2.(7) ტოლობის საფუძველზე, მიიღება 2) მტკიცება.

3) $\operatorname{strgrad} F'_{[x]}(x,y)$ ფუნქციის სასრულობა თითქმის ყველა $(x,y)\in Q^0$ წერტილზე გამომდინარეობს 1) და 2) მტკიცებებიდან.

4) $F'_{[x]}(x,y)$ ფუნქციის დიფერენცირებადობა თითქმის ყველგან Q^0-ში გამომდინარეობს 3) მტკიცებიდან, თუ გავითვალისწინებთ 4.4.1 თეორემას თავი II-დან. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 8.2.2 ([99], [107])**.** ვთქვათ, $f(x,y)\in L(Q)$ ფუნქცია y-ით აბსოლუტურად უწყვეტია $[c,d]$-ზე თითოეული $x\in[a,b]$ მნიშვნელობისთვის და ვთქვათ, $f'_y(x,y)\in L(Q)$. მაშინ $F'_{[y]}(x,y)$ უწყვეტია Q^0-ში, ადგილი აქვს

$$F'_{[y]}(x,y)=\int\limits_a^x f(t,y)\,dt,\quad (x,y)\in Q^0, \tag{4}$$

ტოლობას და მართებულია შემდეგი მტკიცებანი:

1) ყველა $x_0\in(a,b)$ და თითქმის ყველა $y_0\in(c,d)$ მნიშვნელობებისთვის სასრულია

$$(F'_{[y]})'_{[y]}(x_0,y_0)=\int\limits_a^{x_0} f'_y(t,y_0)\,dt; \tag{5}$$

2) თითქმის ყველა $(x_0,y_0)\in Q^0$ წერტილზე სასრულია

$$(F'_{[y]})'_{[x]}(x_0,y_0)=f(x_0,y_0); \tag{6}$$

3) $\operatorname{strgrad} F'_{[y]}(x,y)$ სასრულია თითქმის ყველა $(x,y)\in Q^0$ წერტილზე, კერძოდ, არსებობს $dF(x,y)$ დიფერენციალი;

4) $F'_{[y]}(x,y)$, კერძოდ $F'_y(x,y)$, დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან Q^0-ში.

8.2.1 და 8.2.2 თეორემებიდან გამომდინარეობს (იხ. თავი I, განსაზღვრა 2.5.1)

თეორემა 8.2.3 ([99], [107]). ვთქვათ, $f(x, y) \in L(Q)$ ფუნქცია განცალებით აბსოლუტურად უწყვეტია Q-ზე და ვთქვათ $f'_x(x, y) \in L(Q)$, $f'_y(x, y) \in L(Q)$. მაშინ $f(x, y)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი $F(x, y)$ ინტეგრალისთვის Q^0-ში მართებულია უწყვეტწევრებიანი (1), (4) ტოლობები და, ამასთან ერთად, ადგილი აქვს შემდეგ მტკიცებებს:

1) $\operatorname{strgrad} F'_{[x]}(x, y)$ და $\operatorname{strgrad} F'_{[y]}(x, y)$ სასრულია თითქმის ყველგან Q^0-ში;

2) $F'_{[x]}(x, y)$ და $F'_{[y]}(x, y)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან Q^0-ში;

3) $F(x, y)$ ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია თითქმის ყველგან Q^0-ში;

4) თითქმის ყველა $(x_0, y_0) \in Q^0$ წერტილზე გვაქვს:

$$(F'_{[x]})'_{[y]}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) = (F'_{[y]})'_{[x]}(x_0, y_0). \tag{7}$$

შენიშვნა 8.2.1. აქ მოთხოვნილ პირობებში, (7) ტოლობები წარმოადგენენ 1.1.(7) დამოკიდებულების გაძლიერებას.

თეორემა 8.2.2-ის (ასევე თეორემა 8.2.1-ის) ყველა მტკიცება, შეიძლება მიღებულ იქნას ოდნავ განსხვავებულ პირობებშიც. სახელდობრ, მართებულია შემდეგი

თეორემა 8.2.4 ([99], [107]). თუ $f(x, y) \in L(Q)$ ფუნქცია y-ით აბსოლუტურად უწყვეტია $[c, d]$-ზე თითოეული $x \in [a, b]$ მნიშვნელობისთვის და თუ რაიმე $c = c(f) > 0$ მუდმივისთვის სრულდება

$$\iint\limits_Q \big|f(t, \tau + k) - f(t, \tau)\big|\, dt\, d\tau < c \cdot |k| \tag{8}$$

უტოლობა, მაშინ ადგილი აქვს 8.2.2 თეორემის ყველა მტკიცებას.

დამტკიცება. საკმარისია, დავამტკიცოთ თითქმის ყველგან Q-ში არსებული კერძო $f'_y(x,y)$ წარმოებულის ჯამებადობა Q-ზე. ამ მიზნით, (8)-ში ავიღოთ $k=1/n$ და გვექნება:

$$\iint\limits_Q n\Big|f\Big(t,\tau+\frac{1}{n}\Big)-f(t,\tau)\Big|\,dt\,d\tau<c. \tag{9}$$

აქედან, ფატუს ლემის ძალით (იხ. [3], გვ. 466), მივიღებთ

$$\iint\limits_Q \big|f'_\tau(t,\tau)\big|\,dt\,d\tau=$$

$$=\iint\limits_Q \lim_{n\to\infty} n\Big|f\Big(t,\tau+\frac{1}{n}\Big)-f(t,\tau)\Big|\,dt\,d\tau\le$$

$$\le\varliminf_{n\to\infty}\iint\limits_Q n\Big|f\Big(t,\tau+\frac{1}{n}\Big)-f(t,\tau)\Big|\,dt\,d\tau\le c.$$

მაშასადამე, $f'_y(x,y)\in L(Q)$. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 8.2.2. თითოეული ცვლადით აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია, შეიძლება წყვეტილი იყოს თითქმის ყველგან (იხ. I, თეორემა 2.5.2).

§ 9. ლებეგის ინტენსური წერტილის საკმარისი პირობები

1. თეორემა 9.1 ([107]). 6.2.1 თეორემის პირობებში ყოველი $(x_0,y_0)\in r_1^0$ წერტილი ეკუთვნის $\operatorname{int} L_x^p(f)$ სიმრავლეს, $f\in L^p(Q)$, $p\ge1$.

დამტკიცება. x ავიღოთ x_0-ის მიდამოში და მცირე k ისეთი, რომ $(x,y_0+k)\in r_1^0$. მაშინ

$$F'_x(x,y_0+k)-F'_x(x_0,y_0)=\int\limits_c^{y_0+k} f(x,\tau)\,d\tau-\int\limits_c^{y_0} f(x_0,\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

აქედან,

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\bigg|\int\limits_{c}^{y_0+k}f(x,\tau)\,d\tau-\int\limits_{c}^{y_0}f(x_0,\tau)\,d\tau\bigg|^p\,dt=$$

$$=\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\big|F'_x(x,y_0+k)-F'_x(x_0,y_0)\big|^p\,dt. \quad (2)$$

$F'_x(x,y)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო (x_0,y_0) წერტილზე, (2) ტოლობის მარჯვენა მხარე შეგვიძლია გავხადოთ ნებისმიერად მცირე. ეს კი ნიშნავს 4.1.(1) ტოლობის შესრულებას. ამრიგად, (x_0,y_0) წერტილი ეკუთვნის $\operatorname{int}L^p_x(f)$ სიმრავლეს.

ასევე მტკიცდება

თეორემა 9.2 ([107])**.** თეორემა 6.2.2-ის პირობებში ყოველი $(x_0,y_0)\in r^0_2$ წერტილი ეკუთვნის $\operatorname{int}L^p_y(f)$ სიმრავლეს, $f\in L^p(Q)$, $p\geq 1$.

ახალ დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 9.3 ([107])**.** თუ შესრულებულია 6.2.3 თეორემის პირობები, მაშინ ყოველი $(x_0,y_0)\in r^0$ წერტილი ეკუთვნის $\operatorname{int}L^p_{x,y}(f)$ სიმრავლეს, $f\in L^p(Q)$, $p\geq 1$.

დამტკიცება. 9.1. და 9.2 თეორემების ძალით, ყოველი $(x,y)\in r^0$ წერტილი ეკუთვნის $\operatorname{int}L^p_x(f)$ და $\operatorname{int}L^p_y(f)$ სიმრავლეებს. მაშასადამე, (x_0,y_0) წერტილი ეკუთვნის $\operatorname{int}L^p_{x,y}(f)$ სიმრავლეს.

უკანასკნელი თეორემიდან მიიღება

თეორემა 9.4 ([107])**.** ვთქვათ, f ფუნქცია უწყვეტია Q-ზე. მაშინ თითოეული $(x_0,y_0)\in Q^0$ წერტილი ეკუთვნის $\operatorname{int}L^p_{x,y}(f)$ სიმრავლეს, ნებისმიერი $p\geq 1$ რიცხვისთვის.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს

თეორემა 9.5 ([107]). ვთქვათ, f ფუნქცია ეკუთვნის $L^p(Q)$ სივრცეს რომელიმე $p \geq 1$ რიცხვისთვის და უწყვეტია რაიმე $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subset Q$ მართკუთხედზე. განვიხილოთ f ფუნქციის $f|R$ შეზღუდვა R მართკუთხედზე. მაშინ $a = \alpha$ და $c = \gamma$ მნიშვნელობებისთვის სრულდება 4.1.(1) და 4.1.(2) ტოლობები თითოეულ $(x_0, y_0) \in R^0$ წერტილზე. ამრიგად, ყოველი $(x_0, y_0) \in R^0$ წერტილი ეკუთვნის $\operatorname{int} L^p_{x,y}(f|R)$ სიმრავლეს.

შედეგი 9.1 ([107]). ვთქვათ, $f \in L^p(Q)$, $p \geq 1$, ფუნქციის შესაბამის განუსაზღვრელ F ინტეგრალს $(x_0, y_0) \in Q^0$ წერტილზე აქვს უწყვეტი კერძო $F'_x(x, y)$ წარმოებული, რომლისთვისაც

$$F'_x(x, y) = \int\limits_c^y f(x, \tau)\, d\tau$$

ტოლობა სრულდება ყოველ (x, y) წერტილზე (x_0, y_0)-ის რაიმე მიდამოდან. მაშინ (x_0, y_0) წერტილი ეკუთვნის $\operatorname{int} L^p_x(f)$ სიმრავლეს.

დამტკიცება. აქ აღნიშნულ პირობებში ადგილი აქვს (1), (2) და 4.1.(1) ტოლობებს.

შედეგი 9.1-დან მიიღება

შედეგი 9.2 ([107]). ვთქვათ, $f \in L^p(Q)$, $p \geq 1$, ფუნქცია y-ით ზომადია $[c, d]$-ზე ყოველი $x \in [a, b]$ მნიშვნელობისთვის და x-ით კერძო უწყვეტი x_0-ზე, თანაბრად y-ის მიმართ $[c, d]$-ზე.

(x_0, y_0) წერტილზე უწყვეტი

$$\int\limits_c^y f(x, \tau)\, d\tau, \quad |x - x_0| < \delta, \quad c < y_0 < d, \tag{3}$$

ინტეგრალი 6.1.(3) ტოლობიდან თუკი დაემთხვევა $F'_x(x, y)$-ს (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში, მაშინ $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} L^p_x(f)$.

2. ცხადია, რომ რაიმე ფუნქციის უწყვეტობა მოცემულ წერტილზე წარმოადგენს ამ ფუნქციის ლოკალურ თვისებას მხოლოდ ამ წერტილზე. ამიტომ, გარკვეულ ინტერესს იწვევს თეორემა 9.4-ის ანალოგი წერტილზე უწყვეტი ფუნქციისთვის – ერთცვლადიანი ფუნქციისთვის, ეს შემთხვევა ტრივიალურია (იხ. [45], გვ. 238). ამ მიზნით შემოვიღოთ ლებეგის ლოკალური ინტენსური წერტილის ცნება.

განსაზღვრა 9.1. $f(x,y)\in L^p(Q)$, $p\geq 1$, ფუნქციისთვის **ლებეგის ლოკალური ინტენსური წერტილი** (p ხარისხის) ვუწოდოთ $(x_0,y_0)\in Q^0$ წერტილს, სიმბოლურად $(x_0,y_0)\in \operatorname{locint} L^p_{x,y}(f)$, თუ ფიქსირებული რაიმე $\eta>0$ და $\delta>0$ რიცხვებისთვის სრულდება

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}\left|\int\limits_{y_0-\eta}^{y_0+k}f(x,y)\,dy-\int\limits_{y_0-\eta}^{y_0}f(x_0,y)\,dy\right|^p dx=0, \tag{4}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{k}\int\limits_{y_0}^{y_0+k}\left|\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+h}f(x,y)\,dx-\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}f(x,y_0)\,dx\right|^p dy=0 \tag{5}$$

ტოლობები.

თეორემა 9.6. ვთქვათ, $f(x,y)\in L^p(Q)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე $(x_0,y_0)\in Q^0$ წერტილზე. მაშინ (x_0,y_0) წარმოადგენს ლებეგის ლოკალურ ინტენსურ (p ხარისხის) წერტილს $f(x,y)$ ფუნქციისთვის, $p\geq 1$.

დამტკიცება. $f(x,y)$ ფუნქციის უწყვეტობა (x_0,y_0) წერტილზე ეკვივალენტურია მისი განცალებით ძლიერი კერძო უწყვეტობის (იხ. I, თეორემა 6.1.1), რაც ნიშნავს შემდეგ ორ ტოლობას

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\bigl[f(x,y)-f(x_0,y)\bigr]=0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\bigl[f(x,y)-f(x,y_0)\bigr]=0.$$

ამიტომ, ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ და $0<\eta<\varepsilon$ რიცხვები, რომ $\bigl|f(x,y)-f(x_0,y)\bigr|<\varepsilon$, $\bigl|f(x,y)-$

$f(x,y_0)\big| < \varepsilon$, $|f(x,y)| < 1+|f(x_0,y_0)|$, როცა $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $y \in (y_0-\eta, y_0+\eta)$.

ავიღოთ (h,k) წყვილი $0 < |h| < \frac{\varepsilon}{(1+|f(x_0,y_0)|)}$ და $0 < |k| < \frac{\varepsilon}{(1+|f(x_0,y_0)|)}$ პირობებით. მაშინ

$$\Big| \int\limits_{y_0-\eta}^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int\limits_{y_0-\eta}^{y_0} f(x_0,y)\,dy \Big|^p =$$

$$= \Big| \int\limits_{y_0-\eta}^{y_0} \big[f(x,y)-f(x_0,y)\big]\,dy + \int\limits_{y_0}^{y_0+k} f(x,y)\,dy \Big|^p$$

გამოსახულების აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია, ვიდრე

$$\bigg(\int\limits_{y_0-\eta}^{y_0} \big|f(x,y)-f(x_0,y)\big|\,dy + \int\limits_{y_0}^{y_0+k} |f(x,y)|\,dy \bigg)^p.$$

ახლა გამოვიყენოთ 4.1.(7) უტოლობა და მივიღებთ

$$\Big| \int\limits_{y_0-\eta}^{y_0+k} f(x,y)\,dy - \int\limits_{y_0-\eta}^{y_0} f(x_0,y)\,dy \Big|^p \le$$

$$\le 2^{p-1}\Bigg[\bigg(\int\limits_{y_0-\eta}^{y_0}\big|f(x,y)-f(x_0,y)\big|\,dy\bigg)^p + \bigg(\int\limits_{y_0}^{y_0+k}|f(x,y)|\,dy\bigg)^p\Bigg] \le$$

$$\le 2^p\cdot\Big\{\eta^p\cdot\varepsilon^p+\big[k(1+|f(x_0,y_0)|\big]^p\Big\} < 2^p(\eta^p\cdot\varepsilon^p+\varepsilon^p) \le 2^p(1+\varepsilon)\cdot\varepsilon,$$

რაც ნიშნავს (4) ტოლობის შესრულებას ε-ის სიმცირის გამო. ანალოგიურად მოწმდება (5) ტოლობის მართებულობაც. თეორემა დამტკიცებულია.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. მუსხელიშვილი ნ., ნიკოლაძე გ., ხარაძე ა., მათემატიკური ტერმინების ლექსიკონი. ტფილისი, სახელმწიფო გამომცემლობა, 1925.

2. ნუცუბიძე შ., ბოლცანო და მეცნიერების თეორია. შრომები, ტ. I, თბილისი, 1973, 51–192.

3. ჭელიძე ვლ., ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია. თბილისი, 1964.

4. ჭელიძე ვლ., წითლანაძე ე., მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. II. თბილისი, 1975.

5. ხარაძე ა., ორთოგონალურ პოლინომთა თეორიის ელემენტები. თბილისი, 1996.

6. ხარაძე ა., ჭელიძე ვლ., ხვედელიძე ბ., ქარცივაძე ი., მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I. თბილისი, 1952.

7. ხარაძე ა., ჭელიძე ვლ., ხვედელიძე ბ., ქარცივაძე ი., მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. II. თბილისი, 1961.

8. კინწურაშვილი ი., სიმეტრიული ძლიერი წარმოებულის შესახებ. თბილისის უნივერსიტეტის შრომები: მათემატიკა–მექანიკა–ასტრონომია, **36**(2006).

9. ქათამაძე ი., უწყვეტობა და $(n-1)$-განცალებით კერძო უწყვეტობა. თბილისის უნივერსიტეტის შრომები: მათემატიკა–მექანიკა–ასტრონომია, **36**(2006).

10. Александров П. С., Колмогоров А. Н., Введение в теорию функций действительного переменного. *М.–Л.*, 1938.

11. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, часть I. *М.–Л.*, 1948.

12. Александрова Н. В., Математические термины. *М.*, 1978.

13. Араманович И. Г., Гутер Р. С., Люстерник Л. А., Раухваргер И. Л., Сканави М. И., Янпольский А. Р., Математический анализ – Дифференцирование и интегрирование. *Справочная математическая библиотека, М.*, 1961.

14. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. *М.*, 1961.

15. Безикович А. С., Исследование непрерывных функций в связи с вопросом об их дифференцируемости. *Матем. сб.* **XXXI**(1924), № 3–4, 529–556.

16. Бляшке В., Круг и шар. *М.*, 1967 (*перевод с немецкого*).

17. Боголюбов А. Н., Математики-Механики. *Биографический справочник, Киев*, 1983.

18. Бржечка В. Ф., О функции Больцано. *УМН* **IV**(1949), вып. 2(30), 15–21.

19. Брудно А. Л., Теория функций действительного переменного. *М.*, 1971.

20. Бэр Р., Теория разрывных функций. *М.–Л.*, 1932 (*перевод с французского*).

21. Валле Пуссен Шарль Жан де ла, Курс анализа бесконечного малых, Т. I. *Л.–М.*, 1933 (*перевод с французского*).

22. Валле Пуссен Шарль Жан де ла, Курс анализа бесконечно малых, Т. II, *Л.–М.*, 1933 (*перевод с французского*).

23. Гельбаум Б., Олмстед Дж., Контрпримеры в анализе. *М.*, 1967 (*перевод с английского*).

24. Гермейер Ю. Б., О симметрических производных числах. *Матем. сб.* **12(54):1**(1943), 121–145.

25. Гребенча М. К., Новоселов С. Н., Курс мамематического анализа, Т. I, *М.*, 1951.

26. Гусман М., Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. *М.*, 1978 (*перевод с английского*).

27. Джангвеладзе Н. Г., Достаточные условия полунепрерывности функций нескольких переменных. თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 354: მათემატიკა–მექანიკა–ასტრონომია, **34–35** (2005), 209–217.

28. Жижиашвили Л. В., Некоторые вопросы теории рядов Фурье и сопряженных к ним тригонометрических рядов. *Тбилиси*, 1965.

29. Жижиашвили Л. В., Сопряженные функции и тригонометрические ряды. *Тбилиси*, 1969.

30. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, Т. I. *М.*, 1965 (*перевод с английского*).

31. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, Т. II. *М.*, 1965 (*перевод с английского*).

32. Зерекидзе Т. Ш., О дифференцировании интегралов относительно разных базисов и сходимости рядов Фурье. *Докторская диссертация, Тбилиси*, 2003.

33. Каладзе М. Ш., О регулярной и смешанных частных производных для функций двух переменных. თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, ტ. 354: მათემატიკა–მექანიკა–ასტრონომია, **34–35** (2005), 218–224.

34. Картан А., Дифференциальное исчисление и дифференциальные формы. *М.*, 1971 (*перевод с французского*).

35. Картан А., Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. *М.*, 1963 (*перевод с французского*).

36. Коллингвуд Э. и Ловатер А., Теория предельных множеств. *М.*, 1971 (*перевод с английского*).

37. Кольман Э., Бернард Больцано. *М.*, 1955.

38. Куратовский К., Топология, Т. 1. *М.*, 1966 (*перевод с английского*).

39. Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций. *М.–Л.*, 1934 (*перевод с французского*).

40. Лопиталь Г. Ф. А., Анализ бесконечно малых. *М.–Л.*, 1935 (*перевод с французского 4-го издания 1768 года*).

41. Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд. *М.–Л.*, 1951.

42. Лузин Н. Н., Собрание сочинений. Т. III, *М.*, 1959.

43. Маркушевич А. И., Избранные главы теории аналитических функций. *М.*, 1976.

44. Медведев Ф. А., Развитие понятия интеграла. *М.*, 1974.

45. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. *М.*, 1974.

46. Ониани Г. Г., Дифференцорование интегралов Лебега. *Тбилиси*, 1998.

47. Остроградский М. В., Полное собрание трудов, Т. 3. *Киев*, 1961.

48. Очан Ю. С., Сборник задач по математическому анализу, М., 1981.

49. Пизо Ш. и Заманский М., Курс математики–алгебра и анализ. *М.*, 1971 (*перевод с французского*).

50. Пхакадзе Ш. С., О повторных интегралах. *Труды матем. ин-та АН ГССР* **20**(1954), 167–209.

51. Рисс Ф. и Сёкефальви–Надь Б., Лекции по функциональному анализу. *М.*, 1979 (*перевод с французского*).

52. Рудин у., Основы математического анализа. *М.*, 1976 (*перевод с англиского*).

53. Рыхлик (Rychlik) K., Uber eine Function aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse. *Вестник Чешской Академии Наук*, 1921–1922.

54. Сакс С., Теория интеграла. *М.*, 1949 (*перевод с английского*).

55. Сборник задач по математике – линейная алгебра и основы математического анализа (*под редакцией А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича*), *М.*, 1981.

56. Синдаловский Г. Х., Некоторые вопросы непрерывности и дифференцируемости измеримых функций. *ИАН СССР, серия матем.* **22**(1958), № 3, 395–432.

57. Смирнов В. И., Курс высшей математики, Т. V, *М.*, 1959.

58. Стейн И., Сингулярые интегралы и дифференциальные свойства функций. *М.*, 1973 (*перевод с англиского*).

59. Стейн И. и Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. *М.*, 1974 (*перевод с английского*).

60. Титчмарш Е., Теория функций. *М.*, 1980 (*перевод с англиского*).

61. Толстов Г. П., О криволинейном и повторном интеграле. *Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова* **XXXV**(1950), 1–104.

62. Толстов Г. П., О частных производных. *ИАН СССР, серия матем.* **13**(1949), № 5, 425–446.

63. Толстов Г. П., О второй смешанной производной. *Матем. сб.* **24(66)**(1949), № 1, 27–51.

64. Ульянов П. Л., О работах Н. Н. Лузина по метрической теорий функций. *УМН* **40**(1985), вып. 3(243), 15–70.

65. Фихтенгольц Г. М., Об абсолютно непрерывных функциях. *Матем. сб.* **XXXI:2**(1924), 286–295.

66. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. I. *М.*, 1962.

67. Франклин Ф., Математический анализ. Т. I, *М.*, 1950 (*перевод с английского*).

68. Франклин Ф., Математический анализ. Т. II, *М.*, 1950 (*перевод с английского*).

69. Харадзе А. К., Теоремы о среднем значении в применении к полиномам. *Тбилиси*, 1947.

70. Хинчин А. Я., Исследования о строении измеримых функций, *Матем. сб.* **XXXI:2**(1923), 265–285.

71. Хинчин А. Я., Исследования о строении измеримых функций. Глава вторая – Опыт сравнительной характеристики обобщений понятия производной. *Матем. сб.* **XXXI:3–4** (1924), 377–433.

72. Хинчин А. Я., Восемь лекции по математическому анализу. *М.-Л.*, 1948.

73. Хрестоматия по истории математики: математический анализ и теория вероятностей (*под редакцией А. П. Юшкевича), М.*, 1977.

74. Челидзе В. Г., Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов. *Тбилиси*, 1977.

75. Челидзе В. Г. Джваршейшвили А. Г., Теория интеграла Данжуа и некоторые её приложения. *Тбилиси*, 1978.

76. Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ. *М.*, 1969.

77. Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, часть II. *М.*, 1976.

78. Alexandroff P., L'integration au sens de Denjoy considérée comme recherche des fonctions primitives. *Матем. сб.* **XXXI: 3–4**(1924), 465–476.

79. Ampére A. M., Recherches sur quelques points de la théorie de fonctions dérivées. *Ecole Polytechnique* **6**(1806), fasc. 13.

80. Aronszajn N., Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces. *Stud. Math.* **57**(1976), No. 2, 147–190.

81. Aull C. E., The first symmetric derivative. *Amer. Math. Month.* **74**(1967), No. 6, 708–711.

82. Bantsuri L., On the relation between the differentiability condition and the condition of the existence of generalized gradient. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე **171**(2005), No. 2, 241–242.

83. Bantsuri L., Oniani G., On the differential properties of functions of bounded variation in Hardy sense. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **139**(2005), 93–95.

84. Belna C. L., Evans M. J., Humke P. D., Symmetric and ordinary differentiation. *Proc. Amer. Math. Soc.* **72**(1978), No. 2, 261–267.

85. Bettazzi R., Sui concetti di derivazione e d'integrazione delle funzioni di più variabili reali. *Batt. G.* **XXII**(1884), 133–167.

86. Blumberg, H. A theorem on arbitrary functions of two variables with applications. *Fund. Math.* **16**(1930), 17–24.

87. Bögel K., Über die mehrdimensionale Differentiation. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **65**(1962), Abt. 1, 45–71.

88. Bruckner A., Differentiation of real functions. *2nd ed. CRM Monograph Series, vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence*, 1994.

89. Burkill J. C., The Cesàro–Perron integral. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)* **34**(1932), 314-322.

90. Burkill J. C., The Cesàro–Perron scale of integration. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)* **39**(1935), 541–552.

91. Burkill J. C., Fractional orders of integrability. *J. Lond. Math. Soc.* **11**(1936), 220–226.

92. Burkill J. C., On the differentiability of multiple integrals. *J. London Math. Soc.* **26**(1951), 244–249.

93. Burkill J. C. and Haslam-Jones U. S., Note on the differentiability of functions of two variables. *J. Lond. Math. Soc.* **7**(1932), 297–305.

94. Busemann H., Feller W., Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale. *Fundam. Math.* **22**(1934), 226–256.

95. Carrol F. W., Separately continuous functions are Baire functions. *Amer. Math. Month.* **78**(1971), No. 2, p. 175.

96. Corbacho E., Plichko A., Tarieladze V., On one-sided version of Alexiewicz–Orlicz's differentiability theorem. *Rev. R. Acad. Cien. Serie **A**, Math.* **99**(2005), No. 2, 167–181.

97. Du Bois-Reymond P., Versuch einer Classification der willkürlichen Funktionen reller Argumente. *J. reine und angew. Math.* **79**(1875), 21–37.

98. Du Bois-Reymond P., Einleitung in die Theorie der bestimmen Integrale. *Z. Math. und Phys., Hist.–lit. Abt.* **20**(1875), 121–129.

99. Dzagnidze O. P., On the differentiability of functions of two variables and of indefinite double integrals. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **106**(1993), 7–48.

100. Dzagnidze O., Total differential of the indefinite Lebesgue integral. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **114**(1997), 27–34.

101. Dzagnidze Omar P., Separately continuous functions in a new sense are continuous. *Real Anal. Exchange* **24**(1998/99), No. 2, 695–702.

102. Dzagnidze O., A necessary and sufficient condition for differentiability functions of several variables. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **123**(2000), 23–29.

103. Dzagnidze O., On the limit and continuity of functions of several variables. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **124**(2000), 23–29.

104. Dzagnidze O., The continuity and the limit in the wide. Their connection with the continuity and limit. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **128**(2002), 37–46.

105. Dzagnidze O., Unilateral in various senses: the limit, continuity, partial derivative and the differential for functions of two variables. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **129**(2002), 1–15.

106. Dzagnidze O., Oniani G., On one analogue of Lebesgue theorem on the differentiation of indefinite integral for functions of several variables. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **133**(2003), 1–5.

107. Dzagnidze O., Some new results on the continuity and differentiability of functions of several real variables. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **134**(2004), 1–138.

108. Dzagnidze O., Relation between the continuity of a gradient of a function and the finiteness of its strong gradient. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **135**(2004), 57–59.

109. Dzagnidze O., A criterion of joint $\mathbb{C}$-differentiability and a new proof of Hartog's main theorem. *J. Appl. Anal.* **13**(2007), No. 1, 13–17.

110. Dzagnidze O., A note to the Lebesgue and de la Vallée Poussin's theorems on derivation of an integral. *Tatra Mount. Math. Publ.* 12/RF05, *Real Functions* **35**(2007), 107–113.

110′. Dzagnidze O., The smoothness of functions of two variables and double trigonometric series. *Real. Anal. Exchange* **34** (2008/2009), No. 2, 451–470.

111. Evans M. J., Humke P. D., The equality of unilateral derivates. *Proc. Amer. Math. Soc.* **79**(1980), No. 4, 609–613.

112. Ezzell C. C., Nymann J. E., An analogue of the Denjoy theorem for the symmetric derivative. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **17**(1972), 237–241.

113. Fichtenholz G., Sur une fonction de deux variables sans intégrale double. *Fund. Math.* **6**(1924), 30–36.

114. Filipczak L., Exemple d'une fonction continue de dérivee symetrique partout. *Colloq. Math.* **20**(1969), 249–253.

115. Flett T. M., A mean value theorem. *Math. Gaz.* **42** (1958), 38–39.

116. Fréchet M., Sur la notion de différentielle totale. *Nouv. Ann. (4)* **12**(1912), 385–403.

117. Freshman, A limit which is not the derivative. *Amer. Math. Month.* **74**(1967), No. 6, p. 721.

118. Goodner D. B., An extended mean value theorem. *Math. Mag.* **36**(1963), 15–16.

119. Goffman C., On the approximate limits of a real function. *Acta Sci. Math.* (*Szeged*) **23**(1962), 76–78.

120. Hartogs, Fritz. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. *Math. Ann.* **62**(1906), No. 1, 1–88.

121. Haslam-Jones U. S., Derivate planes and tangent planes of a measurable function. *Q. J. Math., Oxf.*, 1932, Ser. 3, 120–132.

122. Hobson E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, vol. I. 3. ed. *Cambridge, University Press.*, 1927.

123. Hobson, E. W. The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, vol. II. *Cambridge, University Press*, 1926.

124. James A. La Vita, A necessary and sufficient condition for Riemann integration. *Amer. Math. Month.* **71**(1964), No. 2, 193–196.

125. Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A., Note on the differentiability of multiple integrals. *Fund. Math.* **25** (1935), 217–234.

126. Katznelson Y., Stromberg K., Everywhere differentiable, nowhere monotone functions. *Amer. Math. Month.* **81** (1974), 349–354.

127. Kharazishvili A. B., Strange functions in real analysis. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 229, Marcel Dekker, Inc., New York*, 2000.

128. Khintchine A., Recherches sur la structured des fonctions mesurables. *Fund. Math.* **9**(1927), 212–279.

129. Kundu N. K., On some conditions of symmetric derivatives implying monotonicity of functions. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **15**(1970), 561–568.

130. Kundu N. K., On some properties of symmetric derivatives. *Ann. Polon. Math.* **30**(1974), 9–18.

131. Lakshminarasimhan T. V., A mean value theorem—an extension. *Amer. Math. Month.* **73**(1966) 862–863.

132. Lebesgue H., Sur l'existence des dérivées. *C. R.* **136** (1903), 659–661.

133. Lebesgue H., Sur les fonctions représentables analytiquement. *C. R.* **139**(1905), 29–31; *Journ. de Math. (6)* **1**(1905), 139–216.

134. Lebesgue H., Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives. *Gauthier–Villars, Paris*, 1904.

135. Lebesgue H., Sur l'intégration des fonctions discontinues. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)* **27**(1910), 361–450.

136. Lepsveridze G., On strong differentiability of integrals along different directions. *Georgian Math. J.* **2**(1995), No. 6, 613–630.

137. Liu Wen, A nowhere differentiable continuous function. *Amer. Math. Month.* **107**(2000), No. 5, 450–453.

138. Maliszewski A., Products of derivatives of interval functions with continuous functions. *Real Anal. Exchange* **18** (1992/93), no. 2, 590–598.

139. Marstrand J. M., A counter-example in the theory of strong differentiation. *Bull. London Math. Soc.* **9**(1977), No. 2, 209–211.

140. Melero B. L., A negative result in differentiation theory. *Stud. Math.* **72**(1982), 173–182.

141. Movahedi-Lankarani H., On the theorem of Rademacher. *Real Anal. Exch.* **17**(1992), No. 2, 802–808.

142. Nekvinda A., Zajiček L., A simple proof of the Rademacher theorem. *Časopis Pěst. Mat.* **113**(1988), No. 4, 337–341.

143. Neugebauer C. J., A theorem on derivates. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **23**(1962), 79–81.

144. Nikodym O., Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accessibles. *Fund. Math.* **10**(1927), 116–168.

145. Oniani G., On the relation between conditions of the differentiability and existence of the strong gradient. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **132**(2003), 151–152; О взаимоотношении между условиями дифференцируемости и существования сильного градиента. *Матем. заметки.* **77**(2005), вып. 1, 93–98.

146. Okropiridze M., Symmetrically continuous functions of two variables. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **118**(1998), 127–134.

147. Okropiridze M. Symmetric differentiability of functions of two variables. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **123**(2000), 105–115.

148. Papoulis A., On the strong differentiation of the indefinite integral. *Trans. Amer. Math. Soc.* **69**(1950), 130–141.

149. Pawlikowska I., A characterization of polynomials through Flett's MVT. *Publ. Math. Debrecen* **60**(2002), No. 1–2, 1–14.

150. Peetre J., Remark on eigenfunction expansions for elliptic operators with constant coefficients. *Math. Scand.* **15**(1964), 83–92.

151. Perlman S. J., On Stepanoff's theorem and α-approximate derivatives. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **18**(1973), 1081–1086.

152. Pierpont J., Lectures on the theory of functions of real variables, vol. I. *Boston, New York, Chicago, London*, 1905.

153. Piotrowski Z., The genesis of separate versus joint continuity. *Tatra Mount. Math. Publ.* **8**(1996), 113–126.

154. Pu H. W., Pu H. H., Dini's type theorem for symmetric derivatives. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **18**(1973), 1087–1090.

155. Rademacher H., Über partielle und totale differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale, I. *Math. Ann.* **79**(1919), No. 4, 340–359; II. *Math. Ann.* **81**(1920), No. 1, 52–63.

156. Reich S., On Mean Value Theorems. *Amer. Math. Month.* **76**(1969), No. 1, 70–73.

157. Rickert N. W., A Calculus Counterexamples. *Amer. Math. Month.* **75**(1968), No. 2, p. 166.

158. Robertson J. M., A local mean value theorem for the complex plane. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)* **16**(1968/1969), 329–331.

159. Rosenthal A., On the continuity of functions of several variables. *Math. Z.* **63**(1955), 31–38.

160. Saks S., Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral. *Fund. Math.* **22**(1934), 257–261.

161. Sargent W. L. C., On the Cesàro derivates of a function. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)* **40**(1935), 235–254.

162. Sargent W. L. C., Some properties of C_λ-continuous functions. *J. London Math. Soc.* **26**(1951), 116–121.

163. Stein E. M., Zygmund A., On the differentiability of functions. *Studia Math.* **23**(1964), 247–283.

164. Stepanov V., Uber totale Differenzierbarkeit. *Math. Ann.* **90**(1923), 318–320.

165. Stepanov V., Sur une propriété caractéristique des fonctions mesurables. *Матем. сб.* **30**(1924), 487–489.

166. Stepanov V. V., Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale. *Матем. сб.* **32**(1925), 511–527.

167. Stokolos A. M., An inequality for equimeasurable rearrangements and its application in the theory of differentiation of integrals. *Anal. Math.* **9**(1983), No. 2, 133–146.

168. Stolz O. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. *Leipzig*, 1893.

169. Światak H., A construction of continuous functions without the usual, the approximative and the distributional derivatives. *Ann. Polon. Math.* **17**(1965), 13–23.

170. Tchelidze W., Généralisation du théoreme concernant le changement dé l'ordre de différentiation. ტფილისის მათემატიკური ინსტიტუტის შრომები **1**(1937), 109–112.

171. Thomae J., Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. *Halle, a.d. Saale*, 1875.

172. Thomson B. S., Some symmetric covering lemmas. *Real Anal. Exch.* **15**(1989/1990), No. 1, 346–383.

173. Tolstov G., Sur les fonctions bornées vérifiant les conditions de Cauchy–Riemann. *Матем. сб.* **10(52)**(1942), No. 1–2, 79–85.

174. Tsivtsivadze I., Extreme differentials in a wide sense. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე **168**(2003), No. 3, 434–436; თბილისის უნივერსიტეტის შრომები: მათემატიკა–მექანიკა–ასტრონომია, **36**(2006).

175. Van der Waerden, B. L. Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion. *Math. Z.* **32**(1930), 474–475.

176. Vitali G., Sulle funzioni integrali. *Torino Atti* **40**(1905), 753–766.

177. Ward A. J., On the differential structure of real functions. *Proc. Lond. Math. Soc. (2)* **39**(1935), 339–362.

178. Weiss M., On symmetric derivatives in L^p. *Stud. Math.* **24**(1964), 89–100.

179. Young W. H., The fundamental theorems of the differential calculus. *Cambridge University Press*, 1910.

180. Young W. H., On the distribution of right and left at points of discontinuity. *Quart J. Pure Appl. Math.* **39**(1908), 67–83.

181. Young W. H., La symétrie de structure des fonctions de variables réelles. *Bulletin Sci. Math. (2)* **52**(1928), 265–280.

182. Zygmund A., Smooth functions. *Duke Math. J.* **12**(1945), No. 1, 47–76.

პირთა საძიებელი

საგნობრივი საძიებელი

დ

ე

ი

კ

ლ

მ

ნ

პ

რ

ს

უ

ფ

ქ

შ

ჩ

წ

ჯ

ჰ

სპეციალურ სიმბოლოთა ნუსხა

შ ი ნ ა ა რ ს ი

თავი II. განცალებით კერძო დიფერენცირებადობის სახეობანი და დიფერენცირებადობა

თავი IV. განუსაზღვრელი ორმაგი ინტეგრალის და აბსოლუტურად უწყვეტი ორცვლადიანი ფუნქციის შესახებ

გამომცემლობის რედაქტორი **მაია ეჯიბია**
გარეკანი **თინათინ ჩირინაშვილი**

0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14

0128, Tbilisi, 14, I. Chavchavadze Ave.

www.press.tsu.ge 995(32) 25 14 32

კომპიუტერული უზრუნველყოფა **მაია ჯაფოშვილი**