

მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი
№11

2025



ივანე ჯავახიშვილის
სახელობის თბილისის
სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა
ფაკულტეტი



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი
მასწავლებლებისა და მოსწავლეებისთვის
დაარსდა 2013 წელს;
მიეძღვნა ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
95 წლის იუბილეს.

ჩვენი მიზანია მასწავლებლებსა და
მოსწავლეებში მათემატიკური ცოდნის
პოპულარიზაცია, მათემატიკის
მასწავლებელთა პროფესიული ზრდის
ხელშეწყობა, მოსწავლეთა ჩართვა
მათემატიკის ლამაზ სამყაროში
მოგზაურობისა და საინტერესო
ამოცანების ამოხსნის პროცესში;
მოგაწვდით ინფორმაციას ჩვენი
წარმატებული კურსდამთავრებულების
საქმიანობისა და მომავალი სტუდენტების
პერსპექტივების შესახებ.

სარედაქციო საბჭო:

თეიმურაზ ვეფხვაძე
(მთავარი რედაქტორი),
ომარ ფურთუხია
(მთავარი რედაქტორის მოადგილე),
პეტრე ბაბილუა,
რამაზ ბოჭორიშვილი,
გია გიორგაძე,
თინათინ დავითაშვილი,
ილია თავხელიძე,
თენგიზ კოპალიანი,
როლანდ ომანაძე,
ბეჟან ღვაბერიძე,
ქეთევან შავგულიძე.



უნივერსიტეტის
გამომცემლობა

მათემატიკა

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი
№11

2025



სარჩევი

პეტრე ბაბილუა, ომარ ფურთუხია
ელჩიზბარ ნადარაია - 90 4

თამაზ თადუმაძე
რეზაზ გამყრელიძე 9

ალექსანდრე გამყრელიძე, რატი დევიძე
ნადარაია- ვაბსტონიდან ხელშეწყობის
ინტელექტუალური: არაპარამეტრული
რეგრესია და მისი თანამედროვე
გამოყენება 13

ილია თავხელიძე
გამონათქვამები მათემატიკის
სხვადასხვა დარგის ცნებებისა
და ამოცანების შესახებ 18

დავით ნუცუბიძე, ილია თავხელიძე
სითბობაგამტარებლობის ერთი ამოცანის
ამონახსნის ყოფაქცევა
უსასრულობაში
(ავტორები: დავით ნუცუბიძე და
ნატალია ტრუბი) 27

თეიმურაზ ვეფხვაძე
გოგინათი მათემატიკური ცნების
სხვადასხვა განსაზღვრების
შესახებ 31

სარჩევი

რუსუდან მესხია		თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან ღვაბერიძე	
ამოცანები ექსტრემუმზე	36	წინა ნომრის ამოცანების	
		ამოხსნები	61
გიორგი ჭელიძე, გივი ნადიბაიძე		თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან ღვაბერიძე	
ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები		ახალი ამოცანები	64
საერთაშორისო ოლიმპიადაში	49		

ჟურნალი „მათემატიკა“

სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“ დაარსდა 2013 წელს, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 95 წლის იუბილესთან დაკავშირებით, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის საბჭოს გადაწყვეტილებით. ჟურნალის შექმნის იდეა რამაზ ბოჭორიშვილს ეკუთვნოდა.

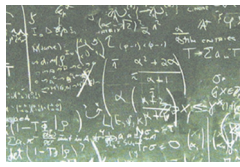
ჟურნალის მთავარი რედაქტორია თეიმურაზ ვეფხვაძე; მთავარი რედაქტორის მოადგილე – ომარ ფურთუხია.

ჟურნალში რამდენიმე განყოფილებაა, რომლებსაც სარედაქციო საბჭოს წევრები ხელმძღვანელობენ. მიმდინარე ნომერში შემდეგი განყოფილებებია წარმოდგენილი: „მათემატიკური სკოლები“ (ომარ ფურთუხია) – წარმოაჩენს იმ ქართველ მეცნიერებს, რომლებმაც დიდი წვლილი შეიტანეს ქართული მათემატიკური სკოლების ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში; „ქართველი ავტორები“ (გია გიორგაძე) – გადმოგვცემს მასალას მათემატიკური ცნებებისა და პრობლემების წარმოშობისა და განვითარების შესახებ; „თარგმანი“ (ილია თავხელიძე) – უცხოელი ავტორების სამეცნიერო-პოპულარული სტატიები; „მეთოდიკა“ (თეიმურაზ ვეფხვაძე, ქეთევან შავგულიძე) – მასალა, რომელიც ხელს შეუწყობს მასწავლებელთა პროფესიულ ზრდას; „მოსწავლეები“ (თენგიზ კოპალიანი, ბეჟან ღვაბერიძე) – მასალა, რომელიც განკუთვნილია მოსწავლეებში მათემატიკის პოპულარიზაციისთვის, მათემატიკური ოლიმპიადების მიმოხილვა, საინტერესო ამოცანები მოსწავლეებისთვის.

ჟურნალი იღებს სტატიებს განყოფილებების მიხედვით და, დადებითი რეცენზიის შემთხვევაში, იბეჭდება. სტატიის წარმოდგენისას ავტორებმა უნდა დაიცვან მათთვის განკუთვნილი ინსტრუქციის მოთხოვნები.



ელიზბარ ნადარაია –90



მ
ე
ც
ნ
ი
ე
რ
ე
ბ
ა
თ
ა
ე
რო
ვნ
უ
ლი
ა
კ
ა
დ
ე
მ
ი
ის
ნ
ა
მ
დ
ვი
ლ
წ
ე
ვ
რ
ს
ი
ვ
ან
ე
ჯ
ა
ვ
ა
ხ
ი
შ
ვი
ლი
ს
ს
ა
ხ
ე
ლ
ობ
ის
თ
ბ
ი
ლი
ს
ის
ს
ა
ხ
ე
ლ
მ
წ
ი
ფ
ო
უ
ნი
ვე
რ
ს
ი
ტ
ე
ტი
ს
ა
ლ
ბ
ათ
ობ
ის
თ
ე
ო
რი
ის
ა
და
მა
თ
ე
მა
ტი
კ
ურ
ი
ს
ტ
ა
ტი
ს
ტი
კ
ის
კ
ა
თ
ე
დ
რ
ის
გ
ა
მ
გ
ე
ს
თ
ან
ა
მ
ე
დ
რო
ვ
ე
ობ
ის
ე
რ
თ
ერთ
უ
დი
დ
ეს
მა
თ
ე
მა
ტი
კ
ოს
-
ს
ტ
ა
ტი
ს
ტი
კ
ოს
ს
პ
რო
ფ
ე
ს
ორ
ე
ლი
ზ
ბ
არ
ნ
ა
დ
არ
ა
ი
ას
90
წ
ელი
შ
ე
უ
ს
რ
ულ
და



პეტრე ბაბილუა

ასოცირებული პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის დეკანი.



ომარ ფურთუხია

პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი.

საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის ნამდვილ წევრს, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის კათედრის გამგეს, თანამედროვეობის ერთერთ უდიდეს მათემატიკოს-სტატისტიკოსს, პროფესორ ელიზბარ ნადარაიას 90 წელი შეუსრულდა.

საქართველოში ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის სწავლების ფუძემდებლად ითვლება ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ერთ-ერთი დამაარსებელი, საქართველოში მათემატიკური კვლევის პიონერი, პროფ. ანდრია რაზმაძე (1889-1929), ხოლო მათემატიკის ამ დარგის განვითარებას საფუძველი ჩაუყარა გამოჩენილმა ქართველმა მათემატიკოსმა და პედაგოგმა გვანჯი მანიაშვილმა (1918-1985). 1968 წელს პროფ. გ. მანიას თაოსნობით თსუ-ში დაფუძნდა ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის კათედრა, რომელსაც იგი წარმატებით და ნაყოფიერად ხელმძღვანელობდა სიცოცხლის ბოლომდე. მან თავის ირგვლივ შემოიკრიბა ამ მიმართულებით დაინტერესებული ახალგაზრდების დიდი ჯგუფი (რომელთა შორის ერთერთი პირველი იყო ელიზბარ ნადარაია) და უდიდესი წვლილი შეიტანა ამ დარგის შემსწავლელი მეცნიერებების პოპულარიზაციისა და სამეცნიერო კვლევების განვი-



აკადემიკოსი ელიზბარ ნადარაია თავის სამუშაო კაბინეტში

თარების საქმეში. გ. მანიამ საფუძველი ჩაუყარა ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში მომუშავე მეცნიერთა ფართო წრეების შეხვედრებს როგორც ადგილობრივ, ისე საერთაშორისო დონეზე და ხელი შეუწყო ახალგაზრდა მკვლევრების სხვადასხვა სამეცნიერო ცენტრში გაგზავნას. მანვე გააგზავნა ე. ნადარაია მსოფლიოში აღიარებულ სამეცნიერო ცენტრში – სტეკლოვის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტში. ბატონმა ელიზბარმა არა მარტო ღირსეულად გააგრძელა პროფ. გ. მანიას მიერ დაწყებული საშვილიშვილო საქმე, არამედ დაიპყრო ახალი, არნახული მეცნიერული მწვერვალები.

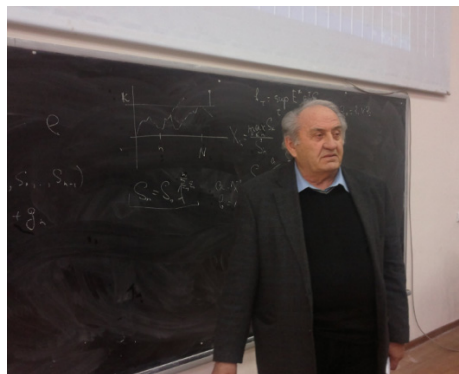


პროფ. გ. მანია (1918-1985)

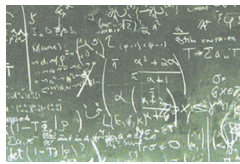
შთამბეჭდავი და სამაგალითოა ე. ნადარაიას მიერ გავლილი შემოქმედებით გზა: თსუ მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი (1959) და ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის ასპირანტურა (1963); ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი (1981), პროფესორი (1982); საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი (2001) და ნამდვილი წევრი (აკადემიკოსი, 2023); საერთაშორისო სტატისტიკური ასოციაციის წევრი (1996). მას მიღებული აქვს საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის ი. ვეკუას სახელობის პრემია მათემატიკაში (1990). დაჯილდოებულია (ორჯერ) ღირსების ორდენით (2003, 2013) და თსუ-ს ოქროს მედლით (2023). არჩეულია ხობის მუნიციპალიტეტის საპატიო მოქალაქედ (2002). 1966-1971 წლებში მუშაობდა თსუ გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური

სტატისტიკის განყოფილების გამგის მოადგილედ, ხოლო 1971-1973 წლებში – განყოფილების გამგედ. 1973-1978 წლებში მუშაობდა საქართველოს მეცნ. აკად. ეკონომიკისა და სამართლის ინსტიტუტის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის განყოფილების გამგედ; 2006 წლიდან დღემდე მუშაობს თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის კათედრის გამგედ, ხოლო 2017 წლიდან თსუ ვეკუას სახ. გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის განყოფილების გამგედ.

პროფესორი ელიზბარ ნადარაია თანამედროვეობის ერთ-ერთი გამოჩენილი მკვლევარია. კოლეგები მას დამსახურებულად მოიხსენებენ „ცოცხალ კლასიკოსად“, მის მიერ მიღებული კლასიკური და ფუნდამენტური შედეგების გამო. ელიზბარ ნადარაიას სამეცნიერო შრომებმა არსებითი წვლილი შეიტანა თანამედროვე მათემატიკური სტატისტიკის განვითარებაში და, პირველ რიგში, განაწილების სიმკვრივის და რეგრესიის ფუნქციის არაპარამეტრულ შეფასებათა თეორიის ჩამოყალიბებასა და განვითარებაში. ის გახლავთ 200-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომის ავტორი, მათ შორისაა უცხოეთში გამოქვეყნებული ოთხი მონოგრაფია, რომელთაგან ერთ-ერთს აკადემიკოს ილია ვეკუას სახელობის პრემია მიენიჭა.



ელიზბარ ნადარაია (თსუ ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის XXXVIII საერთაშორისო გაფართოებული სხდომები, 2024 წელი)



ელიზბარ ნადარაია არჩეულია საერთაშორისო სტატისტიკის ინსტიტუტის (ჰოლანდია) წევრად. მის შესახებ დაწერილია უამრავი წერილი თუ საგაზეთო პუბლიკაცია. აწ გარდაცვლილი, აშშ-ში მოღვაწე ქართველი პროფესორი შოთა ვაშაკიძე გაზეთ „რეზონანსში“ წერდა: „ნადარაია-ვატსონის რეგრესიული მეთოდი, რომელსაც ამერიკა ეკონომიკასა და ფინანსებში იყენებს ...“ და ამ წერილის მსგავსი უამრავია, რომლებშიც აღწერილია ბატონი ელიზბარის მიერ მიღებული შედეგების პრაქტიკაში გამოყენების ფართო არეალი.

რეგრესიის ფუნქციის არაპარამეტრულ შეფასებათა თეორიას საფუძველი ჩაეყარა 1964 წელს, საქართველოსა და ამერიკის შეერთებულ შტატებში ერთდროულად, ე. ნადარაიასა და გ. ვატსონის მიერ და ლიტერატურაში ცნობილია ნადარაია-ვატსონის (Nadaraya-Watson) გულოვანი შეფასების სახელით (მას ნადარაია-ვატსონის პირობით ემპირიულ შემთხვევით პროცესსაც უწოდებენ). ე. ნადარაიას სამეცნიერო ნაშრომების უმეტესობა გამოქვეყნებულია საერთაშორისო მაღალრეიტინგულ ჟურნალებში. იგი კვლავ აგრძელებს აქტიურ მონაწილეობას საერთაშორისო თუ ადგილობრივ კონფერენციებში; არის სხვადასხვა სამეცნიერო ჟურნალის რედკოლეგიის წევრი, საერთაშორისო სტატისტიკური ინსტიტუტის წევრი.

ე. ნადარაიამ პირველმა: გადაწყვიტა სმირნოვის პრობლემა – მოძებნა საკმარისი პირობა სიმკვრივის განაწილების გულოვანი შეფასების თანაბარი გადახრის თითქმის აუცილებლად კრებადობის შესახებ; ამოხსნა უაღრესად მნიშვნელოვანი პრობლემა სიმკვრივის შეფასების L_1 კრებადობის შესახებ; გადაწყვიტა სიმკვრივის შეფასების თანაბარი გადახრის ზღვართი განაწილების საკითხი; ამოხსნა ბერნშტეინის ცნობილი პრობლემა ორი განაწილების სიმკვრივეთა ნახვევის (composition) კომპონენტის სტატისტიკური შეფასების შესახებ; შემოიღო განაწილების ფუნქციის ახალი ტიპის შეფასება და დაამტკიცა მათემა-

ტიკური სტატისტიკის ცენტრალური თეორემის (გლივენკო-კანტელის) ანალოგი; შეისწავლა რეგრესიის ფუნქციის არაპარამეტრული გულოვანი შეფასების ძალდებულობისა და ასიმპტოტური ნორმალურობის პრობლემები; შეისწავლა მისი ინტეგრალური კვადრატული გადახრის ასიმპტოტიკა და გამოიკვლია კრებადობის რიგი; მოძებნა თითქმის აუცილებლად კრებადობის საკმარისი პირობა; შეისწავლა რეგრესიის ფუნქციის არაპარამეტრული გულოვანი შეფასების მაქსიმალური გადახრის ზღვართი განაწილების კანონი; შეისწავლა რეგრესიის ფუნქციის არაპარამეტრული გულოვანი შეფასების ინტეგრალური კვადრატული გადახრის ზღვართი განაწილების კანონი, რომელიც რეგრესიის ფუნქციის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმების კრიტერიუმის აგების საშუალებას იძლევა; შემოიღო არაპარამეტრულ შეფასებათა ზოგადი კლასი სტატისტიკური მრუდებისათვის, რომელიც მოიცავს ბევრ ცნობილ შეფასებას. მარტინგალთა თეორიის გამოყენებით, მოძებნა ზოგადი სახის მრუდების შეფასების ინტეგრალური კვადრატული გადახრის ზღვართი განაწილების კანონი; ააგო ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის შემოწმების უაღრესად საინტერესო ტესტი და აჩვენა, რომ გარკვეული ტიპის ალტერნატივათა მიმდევრობისათვის აგებული კრიტერიუმი უფრო მძლავრია, ვიდრე კოლმოგოროვ-სმირნოვის ერთგვაროვნების ცნობილი კრიტერიუმი; განაწილების სიმკვრივის ვოლვერტონ-ვაგნერის შეფასების საფუძველზე ააგო ინტეგრალური ტიპის კრიტერიუმი თანხმობის ჰიპოთეზის შემოწმებისთვის და აჩვენა, რომ პიტმანის ტიპისა და სინგულარული ალტერნატივებისათვის აგებული ტესტი უფრო მძლავრია, ვიდრე როზენბლატ-ბიკელისა და კოლმოგოროვ-სმირნოვის თანხმობის ცნობილი კრიტერიუმები.

პროფ. ე. ნადარაიას მიერ უკანასკნელ წლებში გადაწყვეტილ ფუნდამენტურ პრობლემებს შორისაა: განაწილების სიმკვრივის დეველსის რეკურენტული შეფასების ინტეგრალური გადახრის ზღვართი განაწილების დადგენა და აგებული თანხმობის

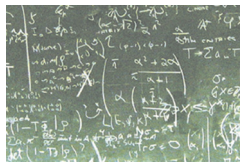


ე. ნადარაია (საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია, 2025 წელი)

კრიტერიუმის შედარება კოლმოგოროვ-სმირნოვის ცნობილ კრიტერიუმთან; განაწილების სიმკვრივის ჩენცოვის პროექციულ შეფასებათა ურთიერთინტეგრალურ კვადრატულ გადახრათა ზღვართი განაწილების კანონის დადგენა მრავალ დამოუკიდებელ შერჩევათა სერიის შემთხვევაში და ერთგვაროვნების ჰიპოთეზის შემოწმების სრულიად ახალი კრიტერიუმის აგება; პუასონის რეგრესიის ფუნქციის არაპარამეტრული გულოვანი შეფასების აგება და თანაბრად კრებადობისა და ნორმალურობის დამტკიცება; პუასონის რეგრესიის ფუნქციის არაპარამეტრული შეფასების ინტეგრალური კვადრატული გადახრის ზღვართი განაწილების კანონის დადგენა; ორი შერჩევისათვის აგებული პუასონის რეგრესიის ფუნქციათა შეფასების ინტეგრალური გადახრის ზღვართი განაწილების დადგენა; ბერნულის რეგრესიის ფუნქციის შეფასების აგება ბერნშტეინის პოლინომების საშუალებით და ძალდებულობისა და ასიმპტოტურად გადაუადგილებადობის საკითხის შესწავლა; ბერნულის რეგრესიის ფუნქციის სახის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმების კრიტერიუმების აგება; ბერნულის რეგრესიის ფუნქციათა ტოლობის ჰიპოთეზის შემოწმების კრიტერიუმების აგება და მათი თვისებების გამოკვლევა.

პროფ. ე. ნადარაიას მიერ მეცნიერებაში შეტანილი წვლილის არასრული აღწერისა და დახასიათებისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ შემდეგი გზამკვლევით:

- ე. ნადარაიას სამეცნიერო შედეგების ნაწილი შესულია 100-მდე (მათემატიკის მიმართულების) მონოგრაფიასა და სახელმძღვანელოში (იხ.: <http://www.books.google.com/books?q=nadaraya-watson>);
- ნადარაია-ვატსონის ფორმულის გამოყენება ხდება სხვადასხვა სამეცნიერო სტატიასა და მონოგრაფიაში, განსაკუთრებით ეკონომიკასა და ფინანსებში (მაგალითად, იხ.: Google-ში: Nadaraya-Watson Estimator in Economics and Finance);
- ე. ნადარაიას შედეგები შეტანილია სალექციო კურსებშიც (მაგალითად, იხ.: Google-ში: Mini-course “Nonparametric Curve Estimation”, Lecture 3, September 18, 2014; CSE 6740 Lecture 7 – Georgia Institute of Technology და სხვა).
- ე. ნადარაიას ორი შრომა მითითებულია SIAM-ის ჟურნალ “Theory of Probability and Its Applications”-ის ვებგვერდზე, ამ ჟურნალში გამოქვეყნებული ყველა დროის პოპულარულ 10 სტატიას შორის (მაღალი ქულებით): <http://www.mathnet.ru/php/tvp>.
- მისი ციტირების ინდექსია 5963 Harzing’s Publish or Perish -ის მიხედვით. პროფესორი ელიზბარ ნადარაია დიდ ყურადღებას უთმობს ახალგაზრდა სამეცნიერო კადრების მომზადებას. მას მომზადებული ჰყავს მრავალი მეცნიერებათა კანდიდატი და დოქტორი. ის დღესაც ჩვეული შემართებით და ენერგიით აგრძელებს საყვარელ საქმიანობას; კითხულობს ლექციებს მშობლიურ უნივერსიტეტში და აგრძელებს კვლევით მუშაობას. არის თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის მუდმივმოქმედი სამეცნიერო სემინარის ხელმძღვანელი; თსუ აკადემიური საბჭოს წევრი. პროფესორ ე. ნადარაიას საიუბილეო თარიღს მიეძღვნა ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის XXXVIII საერთაშორისო

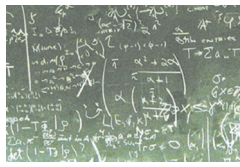


გაფართოებული სხდომების (23-25 აპრილი, 2025, თბილისი, <http://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2025>), ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის სექციისა და საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის XV საერთაშორისო კონფერენციის (1-6 სექტემბერი, 2025, ბათუმი. <http://gmu.gtu.ge/Batumi2025/index.html>) ალბათობის თეორიის, სტატისტიკისა და ფინანსური მათემატიკის სექციის მუშაობა.



პ. ბაბილუა, ე. ნადარაია, ო. ფურთუხია
(მეოთხე საერთაშორისო კონფერენცია
„გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე
პრობლემები“, 2023 წელი)

პროფესორ ელიზბარ ნადარაიას სამეცნიერო საქმიანობა შეიძლება ჩაითვალოს როგორც დიდი შრომისა და გამორჩეული აზროვნების მაგალითი. მისი შედეგები და აღმოჩენები არ არის მხოლოდ წარსულის ნაწილი – ისინი დღესაც მნიშვნელოვნად განსაზღვრავს მეცნიერების მიმართულებებს და მომავალ თაობებს ფუნდამენტური განათლებისა და აქტიური კვლევებისთვის განაწყობს. ამიტომაც, ელიზბარ ნადარაიას მემკვიდრეობა უნდა შევაფასოთ არა მხოლოდ როგორც ერთი მეცნიერის დამსახურება, არამედ როგორც მთელი მსოფლიოსთვის მნიშვნელოვანი მონაპოვარი, რომელიც მომავალ თაობებსაც გამოადგება. მისი საქმიანობა გვახსენებს, რომ მეცნიერება ყოველთვის სცდება დროისა და ადგილის საზღვრებს და რჩება საერთო ფასეულობად.



ერო ლიტერატურაში ცნობილია პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის სახელით. ამავე პერიოდს განეკუთვნება რევამ გამყრელიძის ფუნდამენტური გამოკვლევები ოპტიმალური ამოცანებისათვის შემოსაზღვრული ფაზური კოორდინატებით. ლევ პონტრიაგინის სკოლის მიღწევები 1961 წელს გამოქვეყნდა მონოგრაფიის სახით: L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, *Mathematical Theory of Optimal Processes*. (Russian), "Nauka", Moscow, 1961. მონოგრაფიის ავტორთა კოლექტივს 1962 წელს მიენიჭა ლენინური პრემია. ეს წიგნი თარგმნილია მრავალ ენაზე. მან სათავე დაუდო მსოფლიოში ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარებას.

მომდევნო წლებში რევამ გამყრელიძემ აღმოაჩინა და შეისწავლა მცოცავი ოპტიმალური რეჟიმები. ამ ობიექტების გამოკვლევამ იგი მიიყვანა კვაბი-ამოზნეცილი სიმრავლისა და კვაბი-ამოზნეცილი ფილტრის ცნებებამდე წრფივ ტოპოლოგიურ სივრცეებში, რაც საფუძვლად დაედო ექსტრემალური ამოცანების ზოგადი თეორიის შექმნას თავის მოწაფესთან, გურამ ხარატიშვილთან ერთად. ამ თეორიის ფარგლებში პირველად დამტკიცდა მაქსიმუმის პრინციპი ინტეგრალური ფორმით. მოგვიანებით კი მან, თავის მოწაფესთან, ა. აგრახევთან ერთად, აავსო ნაკადთა ექსპონენციალური წარმოდგენა და ქრონოლოგიური აღრიცხვა, მიიღო ფუნდამენტური შედეგები მართვის გეომეტრიულ თეორიაში. რევამ გამყრელიძის მეცნიერული ინტერესები იყო მრავალფეროვანი და ორიგინალური. იგი ეწეოდა ნაყოფიერ სამეცნიერო-კვლევით და პედაგოგიურ მოღვაწეობას მსოფლიოს სხვადასხვა სამეცნიერო ცენტრში. რევამ გამყრელიძე მონაწილეა მრავალი საერთაშორისო სამეცნიერო კონგრესისა და კონფერენციის; იყო მრავალი სამეცნიერო ჟურნალის სარედაქციო კოლეგიის წევრი. მის მრავალრიცხოვან მოწაფეებს შორის მრავალადა მსოფლიოში ცნობილი მეცნიერი.

რევამ გამყრელიძემ ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში (თსუ) დააარსა მართვის თეორიის კათედრა. იგი რიგი წლების მანძილზე ხელმძღვანელობდა ამ კათედრას და, ამავე დროს, იყო სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დიფერენციალური განტოლებების განყოფილების ხელმძღვანელი. რევამ გამყრელიძე, გურამ ხარატიშვილთან ერთად, ითვლება საქართველოში ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარების ორგანიზატორად და პირველი ქართველი მათემატიკოს-მეცნიერის, ა. რაზმაძის მეცნიერული მემკვიდრეობის გამგრძელებლად. რევამ გამყრელიძის მიერ თსუ-ში წაკითხული ლექციების კურსი საფუძვლად დაედო მის მონოგრაფიას "Principles of Optimal Control Theory. Plenum-Press-New York and London, 1978". ამ წიგნისათვის რევამ გამყრელიძეს მიენიჭა საქართველოს ეროვნული აკადემიის ანდრია რაზმაძის სახელობის პრემია. თსუ-ში ხანგრძლივი და ნაყოფიერი სამეცნიერო-პედაგოგიური და ორგანიზაციული მოღვაწეობისათვის, დარგის განვითარებაში შეტანილი განსაკუთრებული წვლილისათვის რევამ გამყრელიძე დაჯილდოებული იყო თსუ ივანე ჯავახიშვილის მედლით. ნაყოფიერ სამეცნიერო-პედაგოგიურ მოღვაწეობასთან ერთად, რევამ გამყრელიძე ეწეოდა აქტიურ სარედაქტორო საქმიანობას. იგი იყო მთავარი რედაქტორი მრავალი სამეცნიერო გამოცემის, მათ შორის რეფერატული ჟურნალის "Matematika", სერიული გამოცემების: "Contemporary Mathematics and Its Applications", "Contemporary Mathematics. Fundamental Directions", "Fundamental and Applied Mathematics".

რევამ გამყრელიძე გარდაიცვალა 2025 წლის 5 მაისს. მისი მეცნიერული შედეგები შესულია მათემატიკის ოქროს ფონდში. რევამ გამყრელიძის ნათელი ხსოვნა, მის მიერ დათესილი სიკეთე და სიყვარული სამუდამოდ დარჩება მისი მოწაფეებისა და კოლეგების მეხსიერებაში.

რევამ გამყრელიძის მონოგრაფიები

1. The mathematical theory of optimal processes (with L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, E. F. Mishchenko). (Russian), *Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow*, 1961 .
2. Principles of Optimal Control Theory. *Plenum-Press-New York and London*, 1978 (ოპტიმალური მართვის თეორიის საფუძვლები. ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტი, თბილისი, 2017).

გამოსათხოვარი სიტყვა

რევამ გამყრელიძის

თბილისი, 10 მაისი, 2025 წელი

ბატონო რევამ, მოგმართავთ თქვენი გარდაცვალებით დამწუხრებული, თქვენი მოწაფეების, მოწაფეთა მოწაფეებისა და კოლეგების სახელით. რევამ გამყრელიძის მიერ განვლილი გზა, სამეცნიერო-პედაგოგიური-ორგანიზაციული მოღვაწეობის ასპარეზზე, ნათელი დადასტურებაა პატრიოტიზმისა და საკუთარი ერის დიდი სიყვარულის. იგი სხვანაირი ვერ იქნებოდა, რამეთუ დაბადებული იყო გამრჯე შრომით და სათნოებით გამორჩეულ ბატონ ვალერიან გამყრელიძისა და ქალბატონ ოლიმპიადა ასათიანის ოჯახში. ამ ოჯახში აღიზარდნენ ძმები, ბატონები რევამი და თამაზი – მსოფლიოში სახელგანთქმული მეცნიერები. სკოლის დამთავრების შემდეგ რევამ გამყრელიძემ სწავლა გააგრძელა თსუ-ის ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე, სადაც მან თავიდანვე მიიქცია ყურადღება, როგორც ნიჭიერმა და წარმატებულმა სტუდენტმა.

რევამ გამყრელიძემ მე-2 კურსიდან სწავლა განაგრძო მიხეილ ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. იგი აქ პირველად შეხვდა მათემატიკური აზრის ერთ-ერთ კორიფეს, გენიალურ რუს მათემატიკოსს, აკადემიკოს ლევ პონტრიაგინს, რომელმაც წარუშლელი კვალი დატოვა ახალგაზრდა რევამ გამყრელიძის მეცნიერული ინტერესების ჩა-

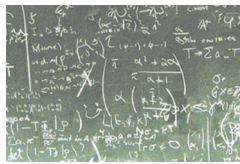
მოყალიბებასა და მისი უნიკალური ნიჭის გამოვლენაში.

ლ. პონტრიაგინთან, ვ. ბოლტიანსკისთან და ე. მიშჩენკოსთან ერთად, რევამ გამყრელიძემ საფუძველი ჩაუყარა ოპტიმალური მართვის თეორიას. მან, პირველმა, წრფივი ოპტიმალური ამოცანისთვის დაამტკიცა მაქსიმუმის პრინციპი, რომელიც, როგორც ჰიპოთეზა, თავდაპირველად გამოთქული იყო ლ. პონტრიაგინის მიერ.

რევამ გამყრელიძის მეცნიერული ინტერესები იყო მრავალფეროვანი და ორიგინალური. მის მიერ მიღებული ფუნდამენტური შედეგები შესულია მათემატიკის ოქროს ფონდში. ლ. პონტრიაგინის სკოლის, რომლის წარმომადგენლები იყვნენ ბოლტიანსკი, გამყრელიძე და მიშჩენკო, მიღწევები 1961 წელს გამოქვეყნდა მონოგრაფიის სახით: L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, *Mathematical Theory of Optimal Processes*. (Russian), *“Nauka”, Moscow*, 1961. მონოგრაფიის ავტორთა კოლექტივს მიენიჭა მაშინ არსებული უმაღლესი პრემია. ეს წიგნი თარგმნილია მრავალ ენაზე. მან სათავე დაუდო მსოფლიოს მრავალ ქვეყანაში, მათ შორის საქართველოში, ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარებას.

რევამ გამყრელიძე ნაყოფიერ სამეცნიერო-კვლევით და პედაგოგიურ მოღვაწეობას ეწეოდა მსოფლიოს სხვადასხვა სამეცნიერო ცენტრში. მონაწილეობდა მრავალი საერთაშორისო სამეცნიერო კონგრესებისა და კონფერენციების მუშაობაში; იყო მრავალი სამეცნიერო ჟურნალის რედაქტორი, სარედაქციო კოლეგიის წევრი, სამეცნიერო გამოცემების მთავარი რედაქტორი. მის მრავალრიცხოვან მოწაფეებს შორის მრავლადაა მსოფლიოში ცნობილი მეცნიერი.

რევამ გამყრელიძე თსუ-ში ხელმძღვანელობდა მის მიერ დაარსებულ მართვის თეორიის კათედრას, რომელიც გადაიქცა ახალგაზრდა კადრების მომზადების კერად. გარდა ამისა, იგი, როგორც ლ. პონ-



ტრიაგინის მემკვიდრე, სტეკლოვის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტში (მოსკოვი) ხელმძღვანელობდა დიფერენციალური განტოლებების განყოფილებას.

რევამ გამყრელიძე, თავის მოწაფე გურამ ხარატიშვილთან ერთად, ითვლება საქართველოში ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარების ორგანიზატორად და პირველი ქართველი მათემატიკოს-მეცნიერის, ანდრია რაზმაძის მეცნიერული მემკვიდრეობის გამგრძელებლად.

1975 წელს გამოცემულ მის მონოგრაფიას მიენიჭა საქართველოს ეროვნული აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის პრემია.

მეცნიერებაში შეტანილი დიდი წვლილისათვის რევამ გამყრელიძე არჩეული იყო საქართველოს და რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიების წევრად. იგი დაჯილდოებული იყო ი. ჯავახიშვილის მედლით.

ბატონი რევამი დღეს მიდის თავის მშობლებთან და ძმასთან და გვიტოვებს განშორებით გამოწვეულ სევდას. იგი არის პონტრიგინის სკოლის უკანასკნელი მოჰიკანი.

ბატონო რევამ, თქვენს მოღვაწეობას არ უწერია დავიწყება, იგი მემკვიდრეობით გადაეცემა თაობებს. თქვენი ნათელი, სანდომიანი სახე და თქვენ მიერ დათესილი სიკეთე და სიყვარული მარად დარჩება თქვენი მოწაფეებისა და კოლეგების მეხსიერებაში.

ნადარაია-ვატსონიდან ხელოვნურ ინტელექტამდე: არაპარამეტრული რეგრესია და მისი თანამედროვე გამოყენება



ს ა ბ რ ე ჯ ა
ს ა ბ რ ე ჯ ა
ს ა ბ რ ე ჯ ა



ალექსანდრე გამყრელიძე

პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი



რატი დევიძე

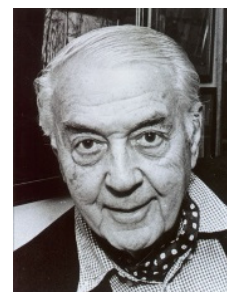
კომპიუტერულ მეცნიერებათა დოქტორი,
მკვლევარი, კომპანია minds.ai, Inc.
101 Cooper St, Santa Cruz, CA95060, USA.



1964 წელს გამოჩენილმა ქართველმა მათემატიკოსმა ელიზბარ ნადარაიამ და ავსტრალია-ამერიკელმა მათემატიკოსმა ჯეფრი ვატსონმა ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად გამოაქვეყნეს სტატია, რომელმაც არა მხოლოდ რეგრესიის ფუნქციის არაპარამეტრულ შეფასებათა თეორიას დაუდო საფუძველი და ფუნდამენტურად შეცვალა სტატისტიკური მეთოდები მომავალი ათწლეულების მანძილზე, არამედ დღესაც — ნახევარ საუკუნეზე მეტი დროის გასვლის შემდეგ — მნიშვნელოვან როლს თამაშობს თანამედროვე ხელოვნური ინტელექტის განვითარებაში. საქმე ეხება მონაცემების (ჩვენ დროს ძალიან დი-

დი რაოდენობის მონაცემების) დამუშავების ეფექტურ მეთოდს, რომელიც დღევანდელ მანქანურ სწავლებაში „ყურადღების მექანიზმის“ (attention mechanism) სახელითაა ცნობილი: ნებისმიერი ამოცანისთვის შეგვიძლია გამოვყოთ მონაცემთა ერთი ნაწილი, რომელიც, ჩვენს შემთხვევაში, სხვა მონაცემებზე უფრო მნიშვნელოვანია, ანუ შეგვიძლია განვასორციელოთ მონაცემთა კლასიფიკაცია მნიშვნელობის მიხედვით და მხოლოდ იმ მონაცემების დამუშავება, რომელიც დასმულ ამოცანაზე, სხვებთან შედარებით, უფრო დიდ გავლენას ახდენს.

ნადარაია-ვატსონის შედეგი სხვადასხვა და-





რგის სპეციალისტებისთვის დიდი ხანია გადაიქცა კვლევისა თუ პრაქტიკული რეალიზაციის მძლავრ აპარატად; შეფასებულია მისი ძლიერი და სუსტი მხარეები, ხშირ შემთხვევაში ნაპოვნია ეფექტური რეალიზაციის გზები. ამას გარდა, ნადარაია-ვატსონის იდეების ახალ ამოცანებზე მორგების თვალსაზრისით კვლევა დღესაც გრძელდება. ასევე რთული საკითხია დაინტერესებული არასპეციალისტებისთვის, განსაკუთრებით კი სკოლის მოსწავლეებისა და სტუდენტებისთვის ამ შედეგის მნიშვნელობის, გამოყენების პერსპექტივებისა და ნახევარი საუკუნის შემდეგ განვითარებულ დარგებზე მისი გავლენის ახსნა. ეს ე.წ. „ღია წარმოდგენითი პრობლემის“ (open exposition problem) ნაწილია, რომელიც მათემატიკოსმა ტიმოთე ჩოუმ თავის ცნობილ სტატიაში „ფორსინგის გამკვლევი დაწყებთათვის“ (A beginners Guide to Forcing) ჩამოაყალიბა, როგორც მნიშვნელოვანი შედეგის ასპექტების ისე გადმოცემა, რომ დაინტერესებულ მკითხველს გაუჩნდეს შთაბეჭდილება, თითქოს ამის გაკეთებას თავადაც შეძლებდა. მკითხველის შესაფასებელია, თუ რამდენად კარგად იქნა ეს რთული მიზანი ამ სტატიით მიღწეული.

ნაწილი 1. ნადარაია-ვატსონის გულოვანი შეფასება

საკითხის განხილვა დავიწყოთ მარტივი მაგალითით. წარმოვიდგინოთ, რომ გვინდა უნივერსიტეტის პირველი კორპუსის გარშემო არსებული სახლების სავარაუდო ფასის განსაზღვრა. ცხადია, რომ პირველი იდეა, რომელმაც ადამიანს შეიძლება თავში გაუელვოს, წარსულში ფასების დაკვირვება და მათი საშუალოების მიმდევრობის აღებაა. ეს მეთოდი ფასების დინამიკის შესახებ გარკვეულ სურათს შეგვიქმნის, თუმცა საკმაოდ დიდი პრობლემის წინაშე დავაყენებ: საძიებო ცენტრიდან (ჩვენს შემთხვევაში, თსუ პირველი კორპუსიდან) შორს მყოფი სახლების ფასი არ უნდა თამაშობდეს დიდ როლს საშუალოს გამოთვლაში. მაგალითად, სოლო-

ლაკში ან საბურთალოზე არსებული შენობის ფასი უფრო ნაკლებად მნიშვნელოვანია, ვიდრე ვერაზე ან ვაკეში არსებული ფასები. დილოში ან ისანში არსებული სახლები კიდევ უფრო ნაკლებად მოქმედებს ჩვენს საკითხზე, ვიდრე საბურთალოს ან სოლოლაკის და ა.შ. ამ პრობლემიდან გამოსავალი ე.წ. „შეწონილი საშუალოს“ გამოთვლაა: ჩვენ ფასების საშუალოს კი არ უნდა ვიღებდეთ, არამედ ფასისა და „მანძილის პარამეტრის“ საშუალოს: რაც უფრო დიდია მანძილი კონკრეტულ შენობასა და თსუ პირველ კორპუსს შორის, მით უფრო ახლოსაა „მანძილის პარამეტრი“ ნულთან; ცენტრთან უშუალოდ მყოფი შენობების პარამეტრი კი ერთის ტოლია. იმ ფუნქციას, რომელიც „მანძილის პარამეტრს“ გამოითვლის (ჩვენი ამოცანისთვის თსუ პირველი კორპუსიდან მანძილს $[0;1]$ მონაკვეთის რიცხვში გადაიყვანს), გულოვან ფუნქციას უწოდებენ. ხშირად გამოიყენება გაუსის გულოვანი ფუნქცია, რომელიც საწყის წერტილში მაქსიმალურია, დაშორებულ წერტილებში მანძილის მიმართ ექსპონენციურად იკლებს:

$$K(x - x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\|x - x_i\|^2}{2}\right)$$

ზოგადად ვგულისხმობთ, რომ თვითონ მონაცემები d -განზომილებიანია, ანუ $K: \mathbb{R}^d \rightarrow [0; 1]$.

აქ შეიძლება წამოვჭრათ შემდეგი საკითხი: საერთოდ, რამდენად გვინტერესებს სოლოლაკის სახლების ფასი, თუ თსუ პირველ კორპუსთან გვინდა შეფასება? აქედან გამომდინარე, შესაძლებელია გარკვეული უბნით შემოვიფარგლოთ, ცენტრით თსუ პირველ კორპუსთან, და უკვე ამ უბნის საზღვრებზე გავხადოთ გულოვანი ფუნქცია თითქმის ნული. ეს, გარკვეულწილად, სურათის გადიდებას ჰგავს: შემოგვაქვს „გადიდების“ ფაქტორი h და ამის მიხედვით ვცვლით ფუნქციის მნიშვნელობებს: $K_h(u) = h^{-d}K(u/h)$, გაუსის შემთხვევაში:

$$K_h(x - x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} h^d} \exp\left(-\frac{\|x - x_i\|^2}{2h}\right)$$

ამ სტრატეგიას თავისი დადებითი და უარყოფითი მხარეებიც ახლავს თან: რაც უფრო ვადიდებთ სურათს, მით უფრო დეტალურია ინფორმაცია, მაგრამ „ხმაურიც“ იზრდება ზედმეტი არასაჭირო ინფორმაციის გაჩენით. აქედან გამომდინარე, ოპტიმალური h პარამეტრის შერჩევა ცალკე ამოცანად შეიძლება განვიხილოთ.

ყოველივე ნათქვამიდან ჩანს, რომ ნადარაია-ვატსონის ფორმულა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(x - x_i)y_i}{\sum_{i=1}^n K_h(x - x_i)}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ვითვლით შეწონილ საშუალოს: გარკვეულ მონაცემს მეთ ყურადღებას ვაქცევთ, გარკვეულს – ნაკლებს, რითაც „უფრო მნიშვნელოვან“ მონაცემებზე გადაგვაქვს ყურადღება.

ნაწილი 2. ნადარაია-ვატსონის ფორმულის გამოყენება

გამოქვეყნებისთანავე ნადარაია-ვატსონის ფორმულამ დიდი გამოხმაურება პოვა სხვადასხვა დარგის სპეციალისტებს შორის. მოულოდნელი არ იყო, რომ მისი ეფექტური გამოყენება მეცნიერებისა და ტექნიკის ერთმანეთისგან სრულიად დამოუკიდებელ დარგებში აღმოჩნდა შესაძლებელი:

- ეკონომიკა და ფინანსები
 - o ფასიანი ქაღალდების ფასის პროგნოზირება
 - o რისკის მენეჯმენტი
- სიგნალების დამუშავება
 - o ხმაურის შემცირება სიგნალებში
 - o ლაპარაკის ამოცნობა
- სამედიცინო და ბიოლოგიური მონაცემების დამუშავება
 - o დოზისა და მოქმედების ურთიერთქმედება
 - o კარდიოგრამისა და გულის ფუნქციის წირების დაგლუვება
- გარემოს მეცნიერებები
 - o გარემოს მონაცემების დაგლუვება

- o პოლუციის დონეების პროგნოზირება
- მართვის სისტემები და ინჟინერია
 - o სისტემების იდენტიფიკაცია
 - o სენსორული მონაცემების შერწყმა
- აგრონომია და ეკოლოგია
 - o მოსავლიანობის პროგნოზირება
 - o გარეული ცხოველების მონიტორინგი

აღსანიშნავია, რომ ნადარაიასა და ვატსონის სტატიები იმ პერიოდში გამოქვეყნდა, როდესაც, ნეირონულ ქსელებზე დაყრდნობით, ხელოვნური ინტელექტის, კერძოდ კი მანქანური სწავლების ერა იწყებოდა და ძალიან სწრაფადაც ვითარდებოდა – იმდენად სწრაფად, რომ გამოთვლითი სისტემების განვითარებასაც კი გადაასწრო და 1970-იან წლებში, გამოთვლითი სიმძლავრის ნაკლებობის გამო, შენელება დაიწყო და დაახლოებით 30 წლით, ფაქტობრივად, შეჩერდა კიდეც. მხოლოდ გასული საუკუნის ბოლო წლებიდან მოყოლებული, როდესაც კომპიუტერული სისტემების სიმძლავრემ მკვეთრად იმატა, ეს თემა ისევ წინა პლანზე გამოვიდა და საკმაოდ ეფექტური სისტემები შეიქმნა, რაც დიდწილად ერთი აღმოჩენის მიერ იყო განპირობებული – იმ აღმოჩენის, რაც, როგორც გაირკვა, ნადარაიასა და ვატსონის იდეის თანამედროვე პრობლემებზე მორგება იყო.

2017 წელს გამოქვეყნდა სტატია, რომელშიც განხილულია ბოლო დროის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი, ე.წ. „ყურადღების“ პრინციპის მნიშვნელობა და მისი გამოყენება მანქანურ სწავლებაში.

A. Vaswani, N. Shazeer, N. Parmar, J. Uszkoreit, L. Jones, A. Gomez, Ł. Kaiser, I. Polosukhin, “Attention Is All You Need”, 2017, arXiv:1706.03762

მართალია, ყურადღების იდეა რამდენიმე წლით ადრე იყო გამოქვეყნებული, მაგრამ სწორედ ამ სტატიამ წამოსწია წინა პლანზე მისი ეფექტური გამოყენების შესაძლებლობები.

ხელოვნურ ინტელექტში (და, ზოგადად, გამოთვლით სისტემებში) მონაცემთა მიმდევრობების დამუშავება ცენტრალური ამოცანაა: ერთი ენიდან მეორეზე თარგმანი,



ტექსტში სიტყვების ძებნა, მელოდიის გამოცნობა, ტექსტის შინაარსის ინტერპრეტაცია – ყველაფერი მიმდევრობის ანალიზზე დაიყვანება. თავის მხრივ, ბუნებრივი ენის წინადადებებში გარკვეული სემანტიკური ბმები გვაქვს. მაგალითად, „ავთანდილ იყო სპასპეტი, ძე ამირ-სპასალარისა“ – ამ წინადადებაში „იყო“ დაკავშირებულია ავთანდილთან, არა ამირ-სპასალართან. ზემოთ მოყვანილი სტატიის გამოქვეყნებამდე, მიმდევრობებს ე.წ. რეკურენტული ნეიროქსელებით (RNN) და მათი მესხიერებით გაფართოებული სისტემებით (LSTM/GRU), კონვოლუციური ქსელებით და ანალოგიური სისტემებით ამუშავებდნენ, რაც მეტნაკლებად ეფექტურად მუშაობდა, თუმცა მნიშვნელოვანი ნაკლიც ჰქონდა: გადამუშავების ხანგრძლივი დრო და გრძელი წინადადებების გადამუშავების პრობლემა – ერთმანეთისგან დაშორებული სიტყვების სისტემას „ავიწყდებოდა“.

„ყურადღების“ ახალი იდეა საკმაოდ ბუნებრივია: ადამიანი წინადადებას სიტყვასიტყვით, მარცხნიდან მარჯვნივ კი არ აანალიზებს, არამედ ყურადღებას მხოლოდ მნიშვნელოვან ნაწილებს აქცევს. მაგალითად, წინადადებაში „იყო არაბეთს როსტევან, მეფე ღმრთისაგან სვიანი“, სიტყვა მეფიდან ყურადღება უკან გადახტება, როსტევანზე და ამ ორ სიტყვას შორის უფრო ძლიერი კავშირი დამყარდება, ვიდრე დანარჩენთან (თუმცა დანარჩენთანაც გარკვეული კავშირი იარსებებს). სწორედ ეს „მნიშვნელოვან სიტყვებზე უკან გადახტომა“ არის ის, რასაც „ყურადღების პრინციპი“ ეწოდება.

აღნიშნული ყურადღების პრინციპი შეიძლება ასევე განვიხილოთ, როგორც „საჭირო ინფორმაციის მოძიება“. მაგალითად, თუ ომონიმების გარჩევის ამოცანაში საჭიროა სიტყვა „ბარი“-ს კლასიფიკაცია, აუცილებელია ახლოს მდგომი სიტყვების ანალიზიც: ამოთხრა -> მიწათმოქმედების იარაღი, დაღვევა, ჭამა -> კაფე-ბარი, ჩამოსვლა -> დაბლობი. აქედან გამომდინარე, სისტემა სვამს შემდეგ შეკითხვას: „რა სხვა

სიტყვები უკავშირდება სიტყვას ‘ბარი’ მოცემულ წინადადებაში?“. კავშირის ხარისხი შეიძლება რიცხვებში გადავიყვანოთ: ძლიერი კავშირი = მაღალი რიცხვი, სუსტი კავშირი = დაბალი რიცხვი.

ეს პრინციპი პრაქტიკაშიც ძალიან ეფექტური გამოდგა იმის გამო, რომ ინტენსიური სამუშაოები მხოლოდ საჭირო ელემენტებზე ტარდება, რის ხარჯზეც მიმდევრობაში დაშორებულ ელემენტებს შორის კავშირიც უპრობლემოდ ხდება. სწორედ მან განაპირობა დიდი ენობრივი სისტემების (როგორცაა: ChatGPT, Grok, Gemini, Claude და სხვა) ფანტასტიკური წარმატება. ამას გარდა, მისი პარალელური იმპლემენტაციაც ადვილად შესაძლებელი. ბოლო დროს ასევე განვითარდა მრავალკვლიანი ყურადღების პრინციპი, რაც, პარალელურად, სხვადასხვა თვალსაზრისით დაკავშირებულ ელემენტებს აერთიანებს. მაგალითად, ბუნებრივი ენის გადამუშავებისას კავშირი შეიძლება შემდეგნაირი იყოს:

- გრამატიკული კავშირი;
- სემანტიკური (შინაარსობრივი) კავშირი;
- დაშორებულ სიტყვებს შორის კავშირი;
- ადგილობრივი შაბლონები.

ყოველ კვალში სიტყვებს შორის ბმების სიძლიერე თითო თვალსაზრისით დგინდება, რის შემდეგაც, ამ ლოკალური ბმების საფუძველზე, საერთო ბმის სიძლიერის გამომანგარიშება შეიძლება.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზემოთ ნახსენებ სტატიაში წარმოდგენილმა სისტემამ, ე.წ. „ტრანსფორმერმა“, გაცილებით უკეთესი შედეგი აჩვენა რთული ტექსტების თარგმანში. თუ მანამდე უძლიერეს სისტემებს დღეები ან კვირები სჭირდებოდა, ტრანსფორმერმა იგივე ამოცანა რამდენიმე საათში გადაჭრა; ამას გარდა, ისეთი ტექსტებიც დაამუშავა, რასაც სხვა სისტემები ვერ ერეოდნენ.

სწორედ ტრანსფორმერის არქიტექტურამ დაუდო საფუძველი თანამედროვე ხელოვნური ინტელექტის სისტემებს.

2015 წლიდან მოყოლებული, ამ თემატიკაზე მრავალი სტატია გამოქვეყნდა, რო-

მელთა შორის რამდენიმეს გამოყოფა შეიძლება:

D. Bahdanau, K. Cho, Y. Bengio, "Neural Machine Translation by Jointly Learning to Align and Translate", arXiv:1409.0473, 2015

წარმოადგენს ყურადღების ფუნქციას, როგორც მაკოდირებელი მდგომარეობების შეწონილ საშუალოს – რაც ნადარაია-ვატსონის ძირითადი იდეაა;

J.-B. Cordonnier, A. Loukas, M. Jaggi, "On the relationship between self-attention and convolutional layers", arXiv:1911.03584, 2019

ადარებს ყურადღების პრინციპს კლასიკურ ოპერატორებს;

A.Katharopoulos, A. Vias, N. Pappas, F. Fleuret, "Transformers are RNNs: Fast Autoregressive Transformers with Linear Attention", arXiv:2006.16236, 2020

აღწერს ყურადღების ფუნქციას გულოვანი შეფასებებით, რითაც პირდაპირ ავლებს პარალელს თანამედროვე სისტემებსა და ნადარაია-ვატსონის იდეას შორის;

K. Choromanski et al., "Rethinking Attention with Performers", arXiv:2009.14794, 2020

ნადარაია-ვატსონის ფორმულის პირდაპირი ანალოგი ყურადღების ფორმულის გულოვანი ფუნქციის აღწერის გზით.

ამ სტატიების პირდაპირი შედეგია ყურადღების ფუნქციის შეწონილი საშუალოს

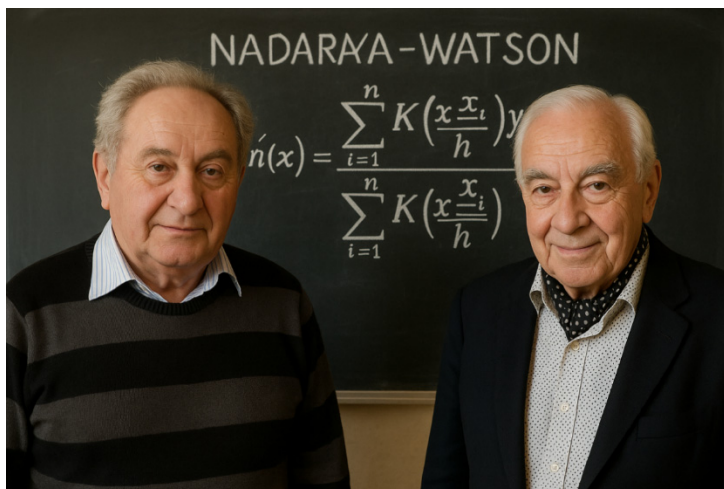
სახით აღწერა, რითაც ნადარაია-ვატსონის ფორმულასთან იდენტურობა აშკარაა:

$$\text{Attention}(q) = \frac{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{q^T k_i}{\tau}\right) v_i}{\sum_{j=1}^n \exp\left(\frac{q^T k_j}{\tau}\right)}$$

რა თქმა უნდა, 60 წლის წინანდელი იდეის ისეთ სისტემებში ინტეგრირება, რომლის არსებობა მისი წარმოშობის დროს წარმოუდგენელი იყო, პირდაპირ ვერ მოხდება. ცხადია, რომ ძველი იდეების თანამედროვე სისტემებზე მორგებაა საჭირო, რა მიმართულებითაც კვლევა მიმდინარეობს.

დასკვნის სახით შეიძლება ითქვას, რომ ნადარაია-ვატსონის იდეა, რომელიც ავტორებს ნახევარ საუკუნეზე მეტი ხნის წინ გაუჩნდათ, იმდენად ზოგადი და ღრმა იყო, რომ დღესაც ცენტრალურ როლს თამაშობს მეცნიერებისა და ტექნიკის განვითარებაში. მათი მოდერნიზაცია და თანამედროვე სისტემებში ინტეგრაცია აქტუალური საკითხია. ასე რომ, თუ ამ სტატიის მკითხველი თემით დაინტერესდება, ავტორების მისიაც შესრულებულად შეიძლება ჩაითვალოს.

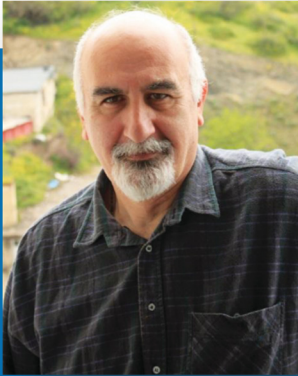
მთავარი მაინც ისაა, რომ, ყოველ ჯერზე, როდესაც ადამიანი თანამედროვე ხელოვნური ინტელექტის სისტემას იყენებს, ეს ქართველი მათემატიკოსის ნახევარსაუკუნოვანი იდეისა და სტატიის წყალობით ხდება.



ნახატი გენერირებულია ხელოვნური ინტელექტის მიერ ნადარაია-ვატსონის იდეის გამოყენებით



გამონათქვამები მათემატიკის სხვადასხვა დარგის ცნებებისა და ამოცანების შესახებ

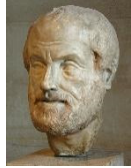



შეაგროვა და თარგმნა ილია თავხელიძემ

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი;
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი.







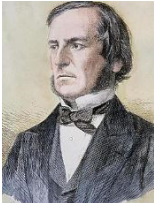
40 წელზე მეტია ვასწავლი თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. ყოველთვის მაინტერესებდა სხვადასხვა ადამიანის აზრი მათემატიკის შესახებ. ახლა შემოგთავაზებთ ჩემ მიერ სხვადასხვა დროს და გარემოებაში შეგროვებულ, ქართულად გადათარგმნილ და ჩაწერილ გამონათქვამებს მათემატიკის კონკრეტული (ალგებრა, ლოგიკა, მათემატიკური ანალიზი) დარგების სპეციფიკური ცნებებისა და ამოცანების შესახებ. აქაა ზოგიერთი გამონათქვამი, რომელსაც მე შეიძლება არც კი ვეთანხმებოდე, მაგრამ მკითხველმა უნდა იცოდეს ამ ულამაზესი მეცნიერების შესახებ გამოთქმული სხვადასხვა მოსაზრება. ამ მხრივ, განსაკუთრებით საინტერესოა არაპროფესიონალების მოსაზრებები. წინა ნომრებში შემოგთავაზებთ გამონათქვამები მათემატიკის, გეომეტრიის, რიცხვის და დამტკიცების, მათემატიკის შესწავლის, მათემატიკის გამოყენების მნიშვნელობისა და მეთოდების შესახებ (შესაბამისად, ჟურნალის N6, N7, N8, N9, N10 ნომრები). შემდგომ ვაპირებ წარმოგიდგინოთ ასეთივე კოლექციები: მათემატიკური კანონზომიერებებისა და სხვა მათემატიკური დარგების შესახებ. აგრეთვე მოხარული ვიქნები, თუ ვინმე ჩვენს ჟურნალს გაამდიდრებს სხვა ციტატებით.








ალგებრა მათ. ანალიზი ლოგიკა (ცნებები)

<p>მთლიანობა მისი ნაწილების ჯამზე მეტია.</p>	<p>არისტოტელე 384 – 322 ძვ.წ.ა</p>	
<p>... რადგან ამქვეყნიური საგნების შეცნობა მათემატიკის ცოდნის გარეშე შეუძლებელია.</p>	<p>როჯერ ბეკონი 1212 – 1292 <i>Doctor Mirabilis</i></p>	

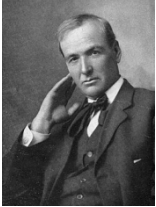




<p>მიუხედავად იმისა, რომ ეს სიგიჟეა, მაინც არსებობს მეთოდი.</p>	<p>უილიამ შექსპირი 1564-1616 დრამატურგი</p>	
<p>შესაძლოა კამათი, თუ რისთვისაა საჭირო ეს გაუგებარი ამონახსნები (კომპლექსური ფესვები). მე გეტყვით სამ მიზეზს: 1. ზოგადი წესების ურყეობა, 2. ალბათ ამონახსნების არარსებობა და 3. მათი სარგებლიანობა.</p>	<p>ალბერ ჟირარი 1595 – 1632</p>	
<p>კარგი გონების და ლოგიკის ქონა საკმარისი არ არის. მთავარია მისი კარგად გამოყენება.</p>	<p>რენე დეკარტი კარტეზი 1596 – 1650</p>	
<p>მათემატიკური ჭეშმარიტება არაა დამოკიდებული იმაზე, სადაა ის, პარიზსა თუ ტულუზაში. ის ერთი და იგივეა.. შეუძლებელია იმის თქმა, რომ ყველაფერი გაუგებარია.</p>	<p>ბლეზ პასკალი 1623 – 1662</p>	
<p>ალგებრა არითმეტიკის მეტაფიზიკაა</p>	<p>ჯონ რეი 1627 – 1705 ნატურალისტი</p>	
<p>ალგებრა – ეს არის ანალიზი მათემატიკაში მოუხერხებელთათვის.</p>	<p>ისაკ ნიუტონი 1642 – 1725</p>	
<p>ამოხსნის მეთოდი კარგია, თუ თავიდან ჩვენ განვჭვრეტთ და შემდგომ დავადასტურებთ მას, – რომ ეს მეთოდი მიგვიყვანს მიზნამდე.</p>	<p>გოტფრიდ ლაიბნიცი 1646 – 1716</p>	
<p>რადგან ჩვენი სამყარო მოწყობილია სრულყოფილად და არის ყოვლისმცოდნის ქმნილება, მთელ სამყაროში არაფერი ხდება ისეთი, რაშიც არ აისახება მაქსიმუმის ან მინიმუმის რომელიღაც წესი.</p>	<p>ლეონარდ ეილერი 1707 – 1783</p>	



<p>ალგებრა გულუხვია, ის ხშირად იძლევა უფრო მეტს, ვიდრე მისგან მოვლიან.</p>	<p>ჟან ლეონ დ'ალამბერი 1717 – 1783</p>	
<p>სანამ ალგებრა და გეომეტრია ერთმანეთისგან განცალკევებული იყო, თითოეულის პროგრესი იყო ნელი, ხოლო გამოყენება შეზღუდული, მაგრამ, როდესაც ეს ორი მეცნიერება გაერთიანდა, ისინი ერთმანეთს აძლიერებენ და ერთად მიიწევენ წინ სრულყოფილებისკენ.</p>	<p>ჯოზეფ ლუი ლაგრანჟი 1736 – 1813</p>	
<p>უსასრულობა — ესაა უფსკრული, რომელშიც იძირება ჩვენი აზრები.</p>	<p>სიმონ ანტუან ჟან ლ'იულიე 1750 – 1840</p>	
<p>მათემატიკური მიდგომის განსხვავებული თავისებურება არის მისი სიცხადე; მასში არ არის სიმბოლოები, რომლებიც ბუნდოვან იდეებს გამოსახავენ. ის თავს უყრის განსხვავებულ მოვლენებს და აღმოაჩენს მათში დამალულ გამაერთიანებელ ანალოგიებს.</p> <p>მათემატიკური ანალიზი ისეთივე ვრცელია, როგორც თავად ბუნება; ის განსაზღვრავს ყველა აღქმად ურთიერთობას, ზომავს დროს, სივრცეებს, ძალებს, ტემპერატურას; ეს რთული მეცნიერება ნელ-ნელა ყალიბდება, მაგრამ ინარჩუნებს ყველა პრინციპს, რომელიც ერთხელ შეიძინა; ის განუწყვეტლივ იზრდება და ძლიერდება ადამიანის გონების მრავალი ვარიაციისა და შეცდომის შუაგულში. მისი მთავარი ატრიბუტი სიცხადეა; მას არ აქვს ნიშნები, რომლებიც გამოხატავს არეულ აღნიშვნებს. ის აერთიანებს ყველაზე მრავალფეროვან მოვლენებს და აღმოაჩენს ფარულ ანალოგიებს, რომლებიც მათ აერთიანებს.</p>	<p>ჟან ბატისტ ჟოზეფ ფურიე 1768 – 1830</p>	
<p>ალგებრა სხვა არაფერია, თუ არა გეომეტრია, სიტყვებით გამოთქმული; გეომეტრია სხვა არაფერია, თუ არა ალგებრა, სურათებით.</p>	<p>სოფი ჟერმენი 1776 – 1831</p>	
<p>მხოლოდ ალგებრით იწყება მკაცრი მათემატიკური სწავლება.</p>	<p>ნიკოლოზ ლობაჩევსკი 1792 – 1856</p>	
<p>მათემატიკური თეორია ფასდება არამხოლოდ მისი სისწორით. ის დამოკიდებულია აგრეთვე ამოცანების მნიშვნელობასა და გამოყენების არეალზე. ამას გარდა, უნდა რჩებოდეს ადგილი ადამიანის თავისუფალი მსჯელობისათვის.</p> <p>ვვარაუდობ, რომ მათემატიკური ანალიზის ისტორიისადმი ყურადღების მიქცევისას ცოტას თუ ეპარება ეჭვი, რომ</p>	<p>ჯორჯ ბული 1815 – 1864</p>	

<p>ის გარკვეული თანამიმდევრობით განვითარდა, ან რომ ეს თანამიმდევრობა, დიდწილად, აუცილებელი იყო – განისაზღვრებოდა ან ლოგიკური დედუქციის ეტაპებით, ან ახალი იდეებისა და კონცეფციების თანამიმდევრული დანერგვით, როცა მათი ევოლუციის დრო დადგა.</p>		
<p>უსასრულობის ცნება ჩვენი უდიდესი მეგობარია; ის აგრეთვე უდიდესი მტერია ჩვენი აზროვნების მოსვენებისა. . . ვაიერშტრასმა დაგვარწმუნა, რომ ჩვენ, ბოლოს და ბოლოს, სრულად მოვათვინიერეთ ეს მოუთვინიერებელი სტიქია. მაგრამ ეს ასე არაა: ის ისევ გამოვიდა გარეთ. ჰილბერტი და ბრაუერი ისევ დაკავდნენ მისი მოთვინიერებით. გვინდა ვიცოდეთ – დიდი ხნით?</p>	<p>ჯიმს ლორდ პირპონტი 1822 – 1893 კომპოზიტორი</p>	
<p>მე მჯერა, რიცხვები და ანალიზური ფუნქციები ჩვენი გონების თვითნებური შედეგი არ არის; მე ვფიქრობ, რომ ისინი ჩვენ გარეთ არსებობენ, იმავე აუცილებლობის ხასიათით, როგორც ობიექტური რეალობის საგნები, და ჩვენ მათ ვხვდებით ან აღმოვაჩენთ და ვსწავლობთ, ისევე როგორც ფიზიკოსები, ქიმიკოსები და ბოლოლოგები.</p>	<p>შარლ ერმიტი 1822 – 1901</p>	
<p>მე ვერ შევძელი გამეგო თქვენი სტატიის შინაარსი, რადგანაც ის არ იყო გაცოცხლებული იქსებიტა და იგრეკებით.</p>	<p>ლორდი კელვინი უილიამ ტომსონი 1824 – 1907 ფიზიკოსი</p>	
<p>პირიქით, თუ ასე იყო, შეიძლება ასეც ყოფილიყო; და თუ ისე იყო, ისეც იქნებოდა; მაგრამ რადგან ასე არ არის, ესე იგი ასე არ არის. ეს ლოგიკაა.</p>	<p>ლუის კეროლი (ჩარლზ დოგსტონი) 1832 – 1898 მწერალი</p>	
<p>მათემატიკური ჭეშმარიტება თავისთავად არც მარტივია და არც რთული, ის უბრალოდ არსებობს.</p>	<p>ემილ ლემუანი 1840 – 1912 ინჟინერი</p>	
<p>ყველამ თითქოს იცის რა არის წირი, სანამ იმდენად არ ისწავლის მათემატიკას, რომ საბოლოოდ აირევა უსასრულო გამონაკლისებში.</p>	<p>ფელიქს კლაინი 1849 – 1925</p>	
<p>1. ლოგიკისათვის არ არის ძნელი იყოს მომთმენი, ის ხომ მარადიულია; 2. ლოგიკა დაუმარცხებელია, იმიტომ რომ მისი ძლევა შესაძლებელია მხოლოდ ლოგიკით. 3. ახლა, ბუნების მოქმედების შესახებ ჩვენი ცოდნის განვითარებაში, რომელიც მეცნიერ-მკვლევრის წინაშე წარმოდგენილი ფენომენების უაღრესად რთული ერთობლიობიდან მოდის, მათემატიკა ზოგიერთი ასპექტით ძალიან შეზღუდულ, ზოგ შემთხვევაში კი ძალიან მნიშვნელოვან როლს ასრულებს. რაც შეეხება შეზღუდვებს, უბრალოდ</p>	<p>ოლივერ ჰევისაიდი 1850 – 1926 ინჟინერი</p>	








<p>აუცილებელია მივმართოთ ცოცხალ მატერიასთან დაკავშირებულ მეცნიერებებს და, ზოგადად, თეორიებს, რათა დავინახოთ, რომ ფაქტები და მათი კავშირები იმდენად ბუნდოვნად არის ცნობილი, რომ მათი მათემატიკური ანალიზი პრაქტიკულად შეუძლებელია, რომ აღარაფერი ვთქვათ მათ სირთულეზე.</p>		
<p>ძნელია საშუალო სკოლის მოსწავლის დარწმუნება, რომ ის ალგებრისა და გეომეტრიის პრობლემებზე ბევრად უფრო რთულ ამოცანებს წააწყდება.</p>	<p>ედგარ ვატსონ ჰოუ 1853 – 1937</p>	
<p>1. მეცნიერება იგება ფაქტებისაგან, როგორც სახლი აგურებისაგან, მაგრამ უბრალო ფაქტების ნაკრები ისევე არ არის მეცნიერება, როგორც აგურების გროვა – სახლი. თუ ვინმეს უნდა მოკლედ და ხატოვნად განსაზღვროს მათემატიკის არსი, მან უნდა თქვას, რომ ესაა მეცნიერება უსასრულობის შესახებ;</p> <p>2. არ არსებობს გადაწყვეტილი პრობლემა, არსებობს მხოლოდ ასე თუ ისე ამოხსნილი ამოცანა;</p> <p>3. მაშ, განა მათემატიკური ანალიზი არ არის მხოლოდ გონების ამაღლამაში? ფიზიკოსისთვის მას მხოლოდ მოსახერხებელი ენის მიცემა შეუძლია; მაგრამ, განა ეს არ არის უდიდესი სამსახური, რომლის გარეშეც, ბოლოს და ბოლოს, შეგვეძლოს ცხოვრება; და არც კი უნდა გვეშინოდეს, რომ ეს ხელოვნური ენა ფარდა იყოს, რომელიც რეალობასა და ფიზიკოსის თვალს შორისაა ჩადებული? ამისგან სრულიად განსხვავებული, ამ ენის გარეშე, საგანთა პირველი ანალოგიების უმეტესობა სამუდამოდ ჩვენთვის უცნობი დარჩებოდა; და ჩვენ ვერასდროს შევიცნობდით სამყაროს შინაგან ჰარმონიას, რომელიც, როგორც ვნახავთ, ერთადერთი ჭეშმარიტი ობიექტური რეალობაა.</p>	<p>ანრი პუანკარე 1854 – 1912</p>	
<p>ალგებრა არის ინტელექტუალური ინსტრუმენტი, რომელიც შეიქმნა სამყაროს რაოდენობრივი ასპექტების გასაგებად.</p>	<p>ალფრედ ნორტ უაიტჰედი 1861 – 1913</p>	
<p>მათემატიკა არის თამაში, რომელიც წარიმართება გარკვეული მარტივი წესების მიხედვით, ქაღალდზე და თანაც უაზრო ნიშნებით.</p>	<p>დავიდ ჰილბერტი 1862 – 1943</p>	
<p>ლოგიკის საშუალებით არავინ არაფერს არ აღმოაჩინეს; სილოგიზმს შეუძლია მიიყვანოს სხვები ამა თუ იმ, უკვე საწყისში ცნობილ ჭეშმარიტებამდე, მაგრამ, როგორც აღმოჩენის იარაღი, ის უძლურია. მათემატიკოსი ხანდახან თავიდან გამოთქვამს საკმაოდ ძნელ და საერთოდ დაუჯერებელ დებულებას და შემდეგ იწყებს მის დამტკიცებას.</p>	<p>ვლადიმერ ანდრეის ძე სტეკლოვი 1863 – 1926</p>	

<p>დამტკიცების „გამოგონების“ თითქმის ყოველ ნაბიჯზე მთავარ როლს ასრულებს არა ლოგიკა, არამედ ინტუიცია, რომელიც ყოველივეს განმსზღვრელია.</p>		
<p>ის ფაქტი, რომ მთელი მათემატიკა სხვა არაფერია, თუ არა სიმბოლური ლოგიკა – ჩვენი საუკუნის უდიდესი აღმოჩენაა.</p> <p>პოსტულირების იმ მეთოდს, რომელიც ჩვენ გვჭირდება, აქვს მრავალი უპირატესობა, მაგრამ იგივე უპირატესობა აქვს პატიოსანი შრომის შედეგს ნაქურდალზე;</p> <p>მათემატიკა შეიძლება განისაზღვროს, როგორც საგანი, რომელშიც არასდროს ვიცით რაზე ვსაუბრობთ და არც ის ვიცით, სიმართლეა თუ არა ის, რასაც ვამბობთ.</p>	<p>ბერტრან რასელი 1872 – 1970 ფილოსოფოსი</p>	
<p>ლოგიკით მხოლოდ მაშინ შეგიძლია იპოვო სიმართლე, თუ უკვე იპოვე სიმართლე მის გარეშე.</p>	<p>გილბერტ კით ჩესტერტონი 1874 – 1936 მწერალი</p>	
<p>უფლის წყალობაა, რომ რიცხვთა თეორია არაა დამძიმებული არავითარი გამოყენებებით.</p>	<p>ლენარდ იუჯინ დიკსონი 1874 – 1954</p>	
<p>ლოგიკა, ვისკის მსგავსად, კარგავს თავის სასარგებლო ფეფქტს ძალიან დიდი რაოდენობით მიღებისას.</p>	<p>ედვარდ ჯონ მორტონ დრაქს პლაკეტ, მე-18 ბარონი დანსინი 1878 – 1957 დრამატურგი</p>	
<p>რამდენადაც მათემატიკის კანონები რეალობას ეხება, ისინი არ არიან დანამდვილებით ცნობილი და რამდენადაც ეს კანონები დანამდვილებითაა ცნობილი, ისინი რეალობას არ ეხება.</p>	<p>ალბერტ აინშტაინი 1879 – 1955</p>	
<p>ადრე გვეგონა, რომ, თუ ერთი ვიცოდით, ორი ვიცოდით, რადგან ერთი და ერთი ორია. ახლა ვხვდებით, რომ ბევრად მეტი უნდა ვისწავლოთ „და“-ს შესახებ.</p>	<p>სერ არტურ სტენლი ედინქტონი 1882 – 1944 ასტროფიზიკოსი</p>	
<p>მეოცე საუკუნეში დამკვიდრებული მათემატიკის განსაზღვრება, როგორც მეცნიერება უსასრულობის შესახებ, უნდა შეიცვალოს მეორეთი, რომელიც უფრო ჭეშმარიტად გამოხატავს მის არსს, როგორც სასრულისა და უსასრულოს მიმართებების მეცნიერება.</p>	<p>ერიკ ტემპლ ბელი 1883 – 1960 ფანტასტი</p>	
<p>1. სილამაზე მჭიდროდაა დაკავშირებული სიმეტრიასთან. 2. ლოგიკა – ეს მხოლოდ თავისებური ჰიგიენაა, რომელიც საშუალებას აძლევს მათემატიკას შეინარჩუნოს თავისი იდეების სიძლიერე და სიჯანსაღე.</p>	<p>ჰერმან ვეილი 1885 – 1955</p>	



<p>1. როდესაც კარგი ლოგიკა არასწორ დროს ან ადგილას არის წარმოდგენილი, ის შეიძლება კარგი სწავლების ყველაზე დიდი მტერი იყოს.</p> <p>2. სიძნელე რაღაცნაირად თავად ამოცანის ცნებაში შედის: იქ სადაც არაა სიძნელე, არ არსებობს ამოცანა.</p> <p>3. ამოცანის ამოხსნის პროცესი წარმოდგენს დაბრკოლების გადალახვის ან გარშემოვლის გზების ძიების პროცესს; ესაა მიზნის, რომელიც თავიდან მიუღწეველი გეგვენება, მიღწევის პროცესი.</p> <p>4. ამოცანების ამოხსნის ცოდნა ისეთივე პრაქტიკული ხელოვნებაა, როგორც ცურვა ან თხილამურებით სრიალი. მას შეისწავლი მხოლოდ მიბაძვითა და ვარჯიშით.</p>	<p>ჯორჯ (დიერდ)პოია 1887 – 1985</p>	
<p>ალგებრის ერთი უნცია უამრავი ვერბალური არგუმენტის ტოლია.</p>	<p>ჯონ ბერდონ სარდენსონ ჰოლდენი 1892 – 1964 ბიოლოგი</p>	
<p>ლოგიკა თავდაჯერებულად შეცდომების დაშვების ხელოვნებაა.</p>	<p>ჟოზეფ ვუდ კრატჩი 1893 – 1970 ნატურალისტი ფანტასტი</p>	
<p>მათემატიკური მასალის ყოველ აქსიომატურ გადამუშავებას წინ უნდა უსწრებდეს კონკრეტული, მე ვიტყვოდი, მასალის მიამიტი დაუფლება.</p>	<p>პავლე ს. ალექსანდროვი 1896 – 1982</p>	
<p>შესაძლოა, მათემატიკაში ყველაზე გასაკვირი ის იყოს, რომ ის ასეთი გასაკვირია.</p>	<p>ედუარდ ჩარლზ ტედტიტჩმარში 1899 – 1963</p>	
<p>კალკულუსი თანამედროვე მათემატიკის პირველი მიღწევა იყო და მისი მნიშვნელობის გადაჭარბება ძნელია. ვფიქრობ, რომ ის ყველაზე ცალსახად განსაზღვრავს თანამედროვე მათემატიკის დასაბამს; ხოლო მათემატიკური ანალიზის სისტემა, რომელიც მისი ლოგიკური განვითარებაა, დღემდე წარმოდგენს უდიდეს ტექნიკურ წინსვლას ზუსტი აზროვნების სფეროში.</p> <p>ახალგაზრდავ, მათემატიკაში რაღაცებს ვერ გაიგებ, უბრალოდ ეჩვევი.</p>	<p>ჯონ ფონ ნეიმანი 1903 – 1957</p>	
<p>მათემატიკური ინტუიცია ხშირად ხელმძღვანელობს სილამაზის წარმოდგენით. კარგად დასმული, ბუნებრივი ამოცანის ამონახსნიც ჩვეულებრივ ლამაზი აღმოჩნდება. რა თქმა უნდა, ყოველი ჰიპოთეზა, რომელიც ლამაზად გამოიყურება, არ მართლდება. მაგრამ ხშირად გონივრულია ძიება პრობლემის ამოხსნისა იმ დებულებებს შორის, რომლებიც გამოირჩევიან სილამაზით.</p>	<p>ანდრეი კოლმოგოროვი 1903 – 1987</p>	

<p>მიუხედავად იმისა, რომ მეოცე საუკუნის დასაწყისიდან მათემატიკის შესახებ ჩვენს წარმოდგენასა და შეხედულებებში რამდენიმე მნიშვნელოვანი ცვლილება მოხდა, მხოლოდ ერთმა მათგანმა მოიტანა ნამდვილი რევოლუცია მათემატიკის შესახებ ჩვენს წარმოდგენებში – მათემატიკის ფიზიკური სამყაროსგან სრული დამოუკიდებლობის აღმოჩენამ...</p> <p>მათემატიკას, როგორც ახლა გვესმის, ფიზიკურ სამყაროსთან არანაირი აუცილებელი კავშირი არ აქვს, გარდა ბუნდოვანი და გარკვეულწილად იდუმალი კავშირისა, რომელიც იმპლიციტურია იმ მტკიცებაში, რომ აზროვნების პროცესი ტვინში მიმდინარეობს.</p> <p>გაზვიადება არ იქნება, თუ ვიტყვით, რომ მათემატიკის გარე სამყაროსგან დამოუკიდებლობის აღმოჩენა მათემატიკის ისტორიაში ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ინტელექტუალურ მიღწევას აღნიშნავს...</p> <p>თანამედროვე მათემატიკა უპირატესობას ანიჭებს თავისი საგნის დახასიათებას, როგორც ზოგადი აბსტრაქტული სისტემების შესწავლას, რომელთაგან თითოეული აგებულია კონკრეტული აბსტრაქტული ელემენტებისგან და სტრუქტურირებულია მათ შორის თვითნებური, მაგრამ ცალსახა სპეციალიზებული კავშირების არსებობით.</p>	<p>მარშალ ჰარვეი სტოუნი 1903 – 1989</p>	
<p>ოპტიმიზმის ნამრავლი ცოდნაზე – მუდმივი სიდიდეა</p>	<p>ლევ ლანდაუ 1908 – 1968 ფიზიკოსი</p>	
<p>„ზუსტ“ მეცნიერებათა ისტორია – ეს თითქმის მათემატიკის ისტორიაა, იმდენად მჭიდროდ არიან ისინი ერთმანეთთან დაკავშირებული.</p>	<p>სერგეი სობოლევ 1908 – 1989</p>	
<p>1. საქმეში ჩაუხედავთათვის მათემატიკური სიმბოლოები, ვითარცა მტრის შტანდარტები, ფრიალებენ მიუდგომელი ციტადელის თავზე.</p> <p>2. მათემატიკა მყარად უნდა იდგეს მიწაზე და თავით უნდა ადიოდეს ცაში. ნამდვილ, ცოცხალ, შინაარსიან მათემატიკას ბადებს კონკრეტული პრობლემების აბსტრაქციასთან შეერთება. მათემატიკოსები შესაძლოა აბსტრაქტული აზროვნების ცაში აიჭრან, ვითარცა ფრინველები, მაგრამ საკვებისათვის უნდა დაუბრუნდნენ მიწას. წმინდა მათემატიკა შესაძლოა ვადართო დესერტად მორთმეულ ტორტს. ის გემრიელია და შესაძლოა რალაცნაირად დაგვანაყროს, მაგრამ ორგანიზმს არ ძალუძს არსებობა ტორტით – რეალური ამოცანების, „ხორცისა“ და „კარტოფილის“ გარეშე, რომლებიც ადგენენ კვების საფუძველს.</p>	<p>მორის კლაინი 1908 – 1992</p>	
<p>რეალური საფრთხე იმაში კი არაა, რომ კომპიუტერები ადამიანების მსგავსად აზროვნებას დაიწყებენ, არამედ იმაში, რომ ადამიანები კომპიუტერების მსგავსად აზროვნებას დაიწყებენ.</p>	<p>სიდნეი ჯო ჰარისი 1917 – 1986 ჟურნალისტი</p>	



<p>ზოგიერთი რამ, რაც აკმაყოფილებს ალგებრის წესებს, შეიძლება საინტერესო იყოს მათემატიკოსებისთვის, მიუხედავად იმისა, რომ ეს ყოველთვის არ წარმოადგენს რეალურ სიტუაციას.</p>	<p>რიჩარდ ფეინმანი 1918 – 1988 ფიზიკოსი</p>	
<p>მათემატიკა თავის სიცოცხლისუნარიანობას დიდწილად მის მრავალფეროვნებას უმაღლის.</p>	<p>პეტერ ჰენრიჩი 1923 – 1987</p>	
<p>მათემატიკური მეცნიერების პროგრესი – ეს კოლექტიური წარმოებაა.</p>	<p>ივ მეიერი 1939</p>	
<p>ევკლიდე ახერხებს ზუსტი მტკიცებულების ჩატარებას უსასრულობის ცნებასთან შეხების გარეშე – პრობლემის [მარტივი რიცხვების, უსასრულობის] სასრული რიცხვების შესწავლამდე დაყვანით. სწორედ ეს არის ის, რასაც თანამედროვე მათემატიკური ანალიზი აკეთებს.</p>	<p>ლუციო რუსო 1944 – 2025 ფიზიკოსი</p>	
<p>რეალურ ცხოვრებაში, გარწმუნებთ, ალგებრა არ არსებობს.</p>	<p>ფრანსის ან ფრანი ლუბოვიცი 1950 ორატორი, მსახიობი</p>	

სითბოგამტარების ერთი ამოცანის ამონახსნის ყოფაქცევა უსასრულობაში



თ
ბ
გ
მ
ა
ნ
ი

ავტორები: დავით ნუცუბიძე და ნატალია ტრუბი



დავით ნუცუბიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი.
მოსკოვის სახელმწიფო ჰუმანიტარულ-ეკონომიკური უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის დოცენტი.

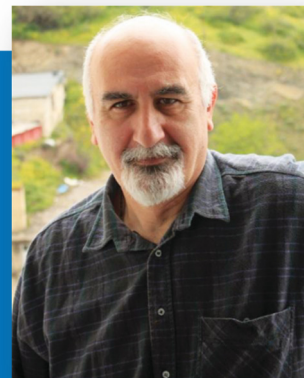
ნატალია ტრუბი – მოსკოვის სახელმწიფო ჰუმანიტარულ-ეკონომიკური უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის უფროსი მასწავლებელი (ntrub73@mail.ru).

ანოტაცია: ნაშრომში ამოხსნილია ვლადიმერ არნოლდის ამოცანა და გამოკვლეულია სითბოგამტარებლობის განტოლების ამოხსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა უსასრულობაში, როდესაც საწყისი და სასაზღვრო პირობები საკმაოდ სპეციფიკური ფუნქციებია.

საკვანძო სიტყვები: სითბოგამტარებლობა, საწყისი და სასაზღვრო პირობები, ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა, მეორე რიგის პარაბოლური ტიპის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება.

რუსულიდან თარგმნა ილია თავხელიძემ

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი;
ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი.



ქვემოთ მოტანილი ამოცანა საინტერესოა უსასრულობაში სითბოგამტარებლობის განტოლების ამოხსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევის გამო. კერძოდ, სითბოგამტარებლობის წრფივი განტოლების ამონახსნი $U(x, t)$, რომელიც საწყის მომენტში მოცემულია პარაბო-



ლის საშუალებით $U(x, 0) = x^2, x \in [0, 1]$, დროის ზრდასთან ერთად, ანუ როდესაც $t \rightarrow \infty$ თანაბრად კრებადია წრფივი $U(x, t) = x$ ფუნქციისაკენ.

ცნობილია, რომ სითბოგამტარებლობის წრფივი განტოლების

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1)$$

ზოგადი ამონახსნი, ქვემოთ მოტანილი საწყისი და სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$U(x, 0) = \varphi(x), x \in [0, l] \quad (2)$$

$$\begin{cases} U(0, t) = 0 \\ U(l, t) = 0 \end{cases}, \text{ როდესაც } t > 0, \quad (3)$$

მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{-\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (4)$$

სადაც

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx. \quad (5)$$

განვიხილოთ ამოცანა (1)-(3), როდესაც საწყისი და სასაზღვრო პირობები კონკრეტული ფუნქციებია, კერძოდ:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (6)$$

საწყისი პირობაა:

$$U(x; 0) = x^2, x \in [0, 1], \quad (7)$$

ხოლო სასაზღვრო პირობებია:

$$\begin{cases} U(0, t) = 0 \\ U(1, t) = 1 \end{cases} \text{ როდესაც } t > 0. \quad (8)$$

დასმული ამოცანის შესწავლისათვის განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია:

$$\tilde{U}(x; t) = U(x; t) - x. \quad (9)$$

ამ შემთხვევაში ფუნქცია $\tilde{U}(x, t)$ არის შემდეგი ამოცანის ამონახსნი:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (10)$$

საწყისი პირობით:

$$\tilde{U}(x; 0) = x^2 - x, \quad x \in 0; 1, \quad (11)$$

და სასაზღვრო პირობებით:

$$\begin{cases} \tilde{U}(0, t) = 0 \\ \tilde{U}(1, t) = 0 \end{cases}, \text{ როდესაც } t > 0. \quad (12)$$

ამგვარად, ამოცანა (9)-(11)-ს, ფორმულა (4) -ის თანახმად, აქვს შემდეგი სახე:

$$\tilde{U}(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x, \quad (13)$$

სადაც მე-(5) ფორმულის გათვალისწინებით, კონკრეტული ინტეგრალების გამოთვლის შედეგად მივიღებთ, რომ:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 (x^2 - x) \sin \frac{\pi n}{1} x dx = 2 \int_0^1 (x^2 - x) \sin \pi n x dx = \\
 &= -\frac{2}{\pi n} (x^2 - x) \cos \pi n x \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi n} \int_0^1 (2x - 1) \cos \pi n x dx = \\
 &= \frac{2}{\pi^2 n^2} (2x - 1) \sin \pi n x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi^2 n^2} \int_0^1 2 \sin \pi n x dx = \\
 &= \frac{4}{\pi^3 n^3} \cos \pi n x \Big|_0^1 = \begin{cases} -\frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3}, & \text{სადაც } n = (2k-1) \\ 0, & \text{სადაც } n = 2k \end{cases}
 \end{aligned} \tag{14}$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, რადგან $l = 1$.

შესაბამისად, დამხმარე (10)-(12) ამოცანის (9) ამონახსნის მე-(14) გამოსახულების გათვალისწინებით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\tilde{U}(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi^3 (2k-1)^3} e^{-\pi^2 (2k-1)^2 t} \sin \pi (2k-1)x. \tag{15}$$

დამხმარე (9) ფუნქციის სახის გათვალისწინებით, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$U(x; t) = \tilde{U}(x; t) + x \tag{16}$$

(15)-(16) ტოლობებიდან გამომდინარე, ადვილი სანახავია, რომ დასმული კონკრეტული (6)-(8) ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$U(x; t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3} e^{-\pi^2 (2k-1)^2 t} \sin \pi (2k-1)x + x. \tag{17}$$

ხოლო (17)-ის თანახმად გვეძლევა შესაძლებლობა შევადგასოთ (9) ფუნქციის მოდული:

$$\begin{aligned}
 |U(x; t) - x| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3} e^{-\pi^2 (2k-1)^2 t} \sin \pi (2k-1)x \right| \leq \\
 &\leq e^{-\pi^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3} = C e^{-\pi^2 t},
 \end{aligned} \tag{18}$$

სადაც

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3}$$

არის კრებადი რიცხვითი მწკრივის ჯამი.

ანუ დროის ყოველ t მომენტში სამართლიანია უტოლობა:

$$|U(x; t) - x| \leq C e^{-\pi^2 t}. \tag{19}$$

ეს შეფასება საშუალებას იძლევა, რომ გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(x; t) = x$$

ანუ დასმული (6)-(8) ამოცანის ამონახსნი $U(x; t)$ თანაბრად კრებადია $U(x) = x$ ფუნქციისაკენ, როდესაც $t \rightarrow \infty$.



ლიტერატურა:

1. *Олейник Ольга Арсеньевна*. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Издательство МГУ, 2020. 260 с.
2. *Ландис Евгений Михайлович*. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М., 1971.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. 724 с.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. 512 с.
5. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. Изд. 4-е. — М.: ГИТТЛ, 1966. 444 с.
6. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ГИТТЛ, 1953.
7. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Гос. изд. ф. — м. литературы, 1962. 767 с.
8. *Нуцубидзе Д.В., Каленова А.А.* Уравнения в частных производных: учебно-методическое пособие — М., МГГЭИ, 2011, — 48 с.



ნამდვილი რიცხვიდან n -ური ხარისხის ფესვისა და წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის ცნებები ერთმანეთთან დაკავშირებული ცნებებია. მოქმედ სახელმძღვანელოებში (იხ., მაგ., [1] და [2]) შენარჩუნებულია იმ წიგნებში განვითარებული თვალსაზრისი (იხ. მაგ., [3]), რომლებიც მათ შემოღებამდე ჩვენთან მოქმედებდა. მაგალითად, დღეს მოქმედ გრიფირებულ სახელმძღვანელოში ([1], გვ. 54) ფესვი ასეა წარმოდგენილი: „ვთქვათ, n არის 1-ზე მეტი ნატურალური რიცხვი. n -ური ხარისხის ფესვი a რიცხვიდან ეწოდება რიცხვს, რომლის n ხარისხი არის a ... თუ a არაუარყოფითი რიცხვია, მაშინ ყოველი $n > 1$ -სთვის არსებობს ერთადერთი არაუარყოფითი ნამდვილი x რიცხვი, რომლისთვისაც $x^n = a$. ამ რიცხვს ასე ჩავწერთ: $x = \sqrt[n]{a}$. მას არითმეტიკული n -ური ხარისხის ფესვი ვუწოდოთ. კენტი n -სთვის n -ური ხარისხის ფესვი a რიცხვიდან ერთადერთია, მას ასე ჩავწერთ: $\sqrt[n]{a}$ “. რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი მხოლოდ არაუარყოფითი ფუძის შემთხვევაში შემოდის (იხ. მაგ., [1], გვ. 56): „თუ $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$, მაშინ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ “. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც გამოირიცხა შემთხვევა, როცა $n=1$ — n -ური ხარისხის ფესვი განვსაზღვრეთ $\frac{m}{n}$ სახის წილადმაჩვენებლიანი ხარისხით, როცა $n > 1$. ზოგიერთი მეთოდისტი თვლის, რომ $n=1$ შემთხვევაც შეიძლება განვიხილოთ და შევთანხმდეთ: $\sqrt[1]{a} = a$ და $a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m$. კოლმოგოროვის რედაქციით გამოცემულ მომდევნო გამოცემებში (ეს სახელმძღვანელო დღეს რუსეთში მოქმედებს) აღნიშნული შესაბამისობა დარღვეულია (იხ., მაგ., [4], გვ. 207);

„ a რიცხვიდან n -ური ხარისხის ფესვი, სადაც n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ასე განისაზღვრება: n -ური ხარისხის ფესვი a რიცხვიდან ეწოდება რიცხვს, რომლის n ხარისხი ტოლია a რიცხვის“. $\frac{m}{n}$ წილად ხარისხში აყვანისას გვაქვს შეზღუდვა: n ნატურალურია, $n > 1$ (იხ., [4], გვ. 218).

უმაღლესი სკოლებისთვის განკუთვნილ სახელმძღვანელოებში კომპლექსური რიცხვებისათვის წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის განსაზღვრება $\frac{m}{n}$ წილადი მაჩვენებლის შემთხვევაში დაკავშირებულია n -ური ხარისხის ფესვის განსაზღვრებასთან და ასეა შემოღებული:

$$\sqrt[n]{Z^m} = (\sqrt[n]{Z})^m,$$

სადაც m მთელია, n -ნატურალური, Z კომპლექსური რიცხვია, m და n ურთიერთმარტივი რიცხვებია (იხ., მაგ., [5], გვ. 140). ამ შემთხვევაში, თუ $\frac{m}{n}$ წილადში $n=1$, შეიძლება დამატებითი შეთანხმებით განვსაზღვროთ:

$$a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m.$$

ზოგიერთ სკოლაში გამოიყენება უცხოური (ძირითადად, ინგლისურენოვანი) სახელმძღვანელოები. ამ წიგნებში ფესვისა და წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის შემოღება ჩვენთან მოქმედ სახელმძღვანელოებში მიღებული წესისგან განსხვავებულია. მაგალითად, წილადმაჩვენებლიანი ხარისხის შემოღებისას მოითხოვება: m და n ნატურალური რიცხვია, ისეთი, რომ $\sqrt[n]{a}$ არსებობს და ამ შემთხვევაში $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ და $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ (იხ. მაგალითად, [6], გვ. 36; [7], გვ. 21). აღნიშნულია, რომ $\sqrt[n]{a}$ -ს არსებობის მოთხოვნა დაკავშირებულია ზოგიერთი მოულოდნელი შედეგის თავიდან ასაცილებლად. მაგალითად, $(-8)^{\frac{2}{6}}$ არ არის განსაზღვრული, მაგრამ $(-8)^{\frac{1}{3}}$ არსებობს და (-2) -ის ტოლია. ჩვენთან მოქმედ სახელმძღვანელოებში კი მოითხოვება, რომ $a^{\frac{m}{n}}$ -ს განსაზღვრისას, a დადებითი რიცხვი იყოს.

აღნიშნული წიგნების გავლენა იგრძნობა ქართული ავტორების ზოგიერთ სახელმძღვანელოში.

მაგალითად, ერთ-ერთ წიგნში ვკითხულობთ: „თუ $n \geq 2$ ნატურალური რიცხვია, მაშინ n -ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი $n \geq 0$ ნამდვილი რიცხვიდან ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომლის n ხარისხი a -ს ტო-

ლია“. წილადმაჩვენებლიანი ხარისხი კი ასე შემოდის: „ნებისმიერი $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადისთვის, სადაც $m \in Z$ და $n \in N$ (m მთელი რიცხვია და n ნატურალური რიცხვი), $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, ანუ იგივეა, რაც $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$. თუ n ლუწი რიცხვია, მაშინ აუცილებელია შესრულდეს პირობა $a \geq 0$ “.

მასწავლებლის კომპეტენციის დადასტურების 2019 წლის მათემატიკის ტესტი მოითხოვდა გადანაცვლების, ჯუფებისა და წყობის განსაზღვრებებს (ტესტი განსაზღვრების ნაცვლად განმარტებების მოყვანა მოითხოვებოდა). შესაბამისი შეფასების საქმეში კი ასე იყო ჩამოყალიბებული პირველი ცნების განსაზღვრება: „გადაწვლა არის $1, 2, \dots, n$ ნატურალური რიცხვების დალაგება რიცხვების გამეორების გარეშე“. გადანაცვლებათა რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით: $P_n = n!$ ([8], გვ. 2).

n-ელემენტიანი სიმრავლის შეცვლა პირველი n ნატურალური რიცხვით „ზოგადობის დარღვევას“ არ იწვევს, მაგრამ უკეთესი იყო, ისევე, როგორც წყობისა და ჯუფების შემთხვევაშიც, აქაც გამოგვეყენებინა ჩვენთან მოქმედ გემოთ ნახსენებ გრიფირებულ სახელმძღვანელოებში გამოყენებული განსაზღვრება, რომელიც ეყრდნობა კოლმოგოროვის რედაქციით გამოცემულ სახელმძღვანელოში მოცემულ განსაზღვრებებს: „სასრულ სიმრავლეში დადგენილ რიგს მისი ელემენტების გადანაცვლება ეწოდება ([9], გვ. 15)“. შეიძლება ასეც ჩამოვყალიბოთ: „*n-ელემენტიანი* სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერ დალაგებას *n-ელემენტიანი* გადანაცვლება ეწოდება ([10], გვ. 287)“. ასეთი განსაზღვრებაც გვხვდება: „*n* რაოდენობის განსხვავებულ ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების ნებისმიერ დალაგებას *n-ელემენტიანი* გადანაცვლება ეწოდება ([11] გვ. 75)“. აქ შეიძლება შემდეგი ფორმულირების გავლენა აღმოვაჩინოთ: „*n* განსხვავებული ელემენტის გადანაცვლება არის ამ ელემენტების დალაგება ისე, რომ ერთი ელემენტი არის პირველი, სხვა ელემენტი მეორე და ა.შ., $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ ([7], გვ. 648)“.

კომბინატორული კონფიგურაციების დახასიათება უმაღლეს სკოლაში შეიძლება შემდეგი მოდელებითაც:

1. მოცემულია n საგანი. საჭიროა მათი მოთავსება m ყუთში (კერძოდ, n ყუთში) ისე, რომ შესრულდეს გარკვეული შეზღუდვები. რამდენი ხერხით შეიძლება ამის გაკეთება?

2. ვიხილავთ ფუნქციათა სიმრავლეს:

$F: X \rightarrow Y$, სადაც $|X| = n, |Y| = m$.

ზოგადობის შეუზღუდავად, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $Y = \{1, 2, \dots, m\}$, $F = \{F(1), \dots, F(n)\}$, $1 \leq F(i) \leq m$. რამდენი F ფუნქცია არსებობს, რომელიც მოცემულ შეზღუდვებს აკმაყოფილებს?

თუ $|X| = |Y| = m$, მაშინ არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვები $F: X \rightarrow Y$. ასეთი ასახვების რაოდენობა, ანუ n საგნის გადანაცვლებათა რაოდენობა აღვნიშნოთ $P(n)$ -ით. $P_n = n!$ ([12], გვ. 180). აღნიშნული მოდელების გამოყენებით შეიძლება განვსაზღვროთ წყობა და ჯუფთება.

XX საუკუნის 70-იან წლებში განხორციელებული რეფორმა მათემატიკის სასკოლო კურსის გარდაქმნისას ეყრდნობოდა კოლმოგოროვის თეზისს, რომ მთელი მათემატიკის საფუძველი სიმრავლეთა თეორია და კურსის თეორიულ-სიმრავლურ საწყისებზე აგება სწავლების გაუმჯობესებას ემსახურებოდა. ამიტომ ამ ენის გამოყენება დღესაც შემორჩენილია ჩვენს სახელმძღვანელოებში. ამ მიმართულებით ზომიერების დაცვა კი აუცილებელია. ცნებების უმრავლესობა საშუალო სკოლაში აღწერილი სახით, ფორმალური განსაზღვრებების გამოყენებლად ყალიბდება. ზუსტი განსაზღვრებები კი ხშირად მოითხოვს აქსიომურ მეთოდს, რაც მოსწავლეთათვის ძნელი აღსაქმელია. თუმცა, სიმრავლეთა თეორიაზე დაყრდნობით, ცნებების „გენეტიკური“ განსაზღვრებები აადვილებს მათი შინაარსის უკეთ გაგებას. მთავარია დავიც-



ვით ძირითადი მოთხოვნები: ცნებების განსაზღვრებების ჩამოყალიბებისას თავიდან უნდა ავიცილოთ ე.წ. ლოგიკური წრის გამოყენება; მიზანშეწონილია უახლოესი გვარის გამოყენება, განსაზღვრება უნდა იყოს ნათელი და მკაფიო; სხვადასხვა განსაზღვრება (ერთი და იმავე ცნების) უნდა იყოს ეკვივალენტური; გვართ ცნებაზე გადასვლისას, შეიძლება თვით გვართი ცნება საწყისად იყოს მიჩნეული; ასეთი საწყისი (განსაზღვრების გარეშე მოცემული) ცნებებია სასკოლო კურსის მათემატიკური ცნებების უძრავლესობა და განსაზღვრებად არ უნდა „გავასაღოთ“ მათი ინტუიციური აღწერა და გამოყენების შემთხვევები.

ზემოთ აღწერილი იყო ის შემთხვევები, როცა ცნებები ერთნაირად არის წარმოდგენილი სკოლაში მოქმედ გრიფირებულ სახელმძღვანელოებში. თუმცა შეიძლება მოვიყვანოთ ისეთი ცნების შემოღების მაგალითი, რომელიც გრიფირებულ სახელმძღვანელოებშიც კი სხვადასხვა სახით არის ჩამოყალიბებული და ზოგიერთი თვალსაზრისით არ შეესაბამება გარკვეული ცნების შესახებ თანამედროვე თვალსაზრისს. ერთ-ერთ გრიფირებულ სახელ-

მძღვანელოში ([13], გვ. 38) ვკითხულობთ: „აქსიომა არის წინადადება, რომლის სამართლიანობა დამტკიცების გარეშე მიიღება მისი თვალსაჩინოების გათვალისწინებით“. ცხადია, არ არის კორექტული განსაზღვრება. აქსიომის თანამედროვე გაგებას არაფერი აქვს საერთო თვალსაჩინოებასთან. მეორე გრიფირებულ სახელმძღვანელოში ([14], გვ. 92) ვკითხულობთ: „მათემატიკაში ყოველი გამოთქმული დებულების ჭეშმარიტება ან უნდა დასაბუთდეს ან დებულება ჭეშმარიტად უნდა იყოს მიჩნეული (გამოცხადებული). ... მეორე შემთხვევაში გამოთქმულ დებულებას აქსიომა ეწოდება“. ორივე სახელმძღვანელო 2012 წელს არის გრიფირებული. შუა საუკუნეებში დამკვიდრებული იყო აზრი აქსიომაზე, როგორც თავისთავად ცხად წინადადებაზე, რომელიც არ მოითხოვს დამტკიცებას. არა-ევკლიდური გეომეტრიის აღმოჩენამ დასაბამი მისცა აქსიომებზე თანამედროვე შეხედულებას – აქსიომის ჭეშმარიტებაზე საუბარი უაზროა. თუ ერთ თეორიაში გარკვეული აქსიომა მიიღება საწყისიდან, სხვა თეორიაში შეიძლება იყოს მისი საპირისპირო წინადადება მიჩნეული ჭეშმარიტად.

ლიტერატურა

1. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მეზონია, ლამარა ქურჩიშვილი, მათემატიკა, X კლასი, I სემესტრი, გრიფინიჭებულია საქართველოს განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროს მიერ 2022 წელს, თბილისი, „ინტელექტი“, 2022.
2. ნანა ჯაფარიძე, მაია წილოსანი, ნანი წულაია, მათემატიკა 10, მოსწავლის წიგნი, გრიფი მიენიჭა სსიპ განათლების ხარისხის განვითარების ეროვნული ცენტრის მიერ 2012 წელს, ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა. 2012.
3. ალგებრა და ანალიზის საწყისები, 9–10 კლასები; ა. კოლმოგოროვის რედაქციით, რუსულიდან თარგმნილია რ. ქათამაძისა და ი. მაჩაბლის მიერ, განათლება, 1967.
4. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы: учебник для общеобразовательной школы, под редакцией А.Н. Колмогорова, 19-е из. М., просвещение, 2016.
5. Моркушевич А.И. Теория аналитическая функций, ГИИТ 1. 1950.
6. Judith A. Beecher, Judith A. Penna, Marvin L. Bittinger, Algebra and Trigonometry. Boston, San Francisco, New York.
7. Precalculus, second edition, Roland E. Larson, Robert P. Hostetler, D.C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts, Toronto, Copyright, 1985.
8. მასწავლებლის კომპეტენციის დასადასტურებელი ტესტი მათემატიკაში, შეფასების სქემა. 2019 წელი.

9. ალგებრა და ანალიზის საწყისები, მე-9 კლასის სახელმძღვანელო ა. კოლმოგოროვის რედაქციით. თბილისი, 1980.
10. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი, მათემატიკა, მე-11 კლასის სახელმძღვანელო, გრიფი მიენიჭა 2012 წელს სსიპ განათლების ხარისხის განვითარების ეროვნული ცენტრის მიერ, „ინტელექტი“, თბილისი, 2012.
11. ქეთევან ცერცვაძე, ევგენი გუგულიშვილი, მათემატიკური წიგნიერება, სტატისტიკა და ალბათობა, საქართველო, თბილისი, 2022.
12. Ф.А. Новыков. Дискретная математика для програмыстов. «Питер», 2009.
13. ნანა ჯაფარიძე, მაია წილოსანი, ნანა წულაია. მათემატიკა, მოსწავლის წიგნი, მე-8 კლასი, ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა, 2012.
14. გურამ გოგიშვილი, თეიმურაზ ვეფხვაძე, ია მებონია, ლამარა ქურჩიშვილი, მათემატიკა, მე-8 კლასი, „ინტელექტი“, 2012.



ამოცანები ექსტრემუმზე



რუსუდან მესხია

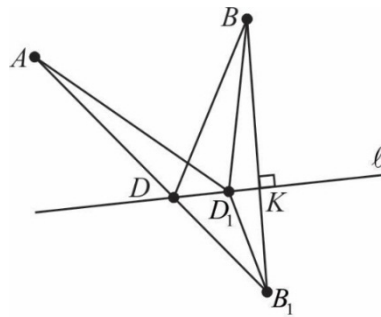
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ-პროფესორი; ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

განვიხილავთ ექტრემუმის (მაქსიმუმის ან მინიმუმის) შესახებ ამოცანების ამოხსნებს ფუნქციის წარმოებულის გამოყენების გარეშე, სასკოლო კურსით გათვალისწინებული პროგრამის ფარგლებში. შევეხებით როგორც გეომეტრიული შინაარსის ამოცანებს, ისე სხვადასხვა ხერხით ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების პოვნის საკითხს.

თემა აქტუალურია მისი პრაქტიკული გამოყენებიდან გამომდინარე და აგრეთვე იმ თვალსაზრისითაც, რომ ექსტრემუმის შესახებ ამოცანები გვხვდება ეროვნულ გამოცდებზე.

უძველესი ამოცანა ექსტრემუმის პოვნის შესახებ ეკუთვნის ანტიკური ხანის გამოჩენილმათემატიკოს ჰერონ ალექსანდრიელს, რომელიც ჩვენს ერამდე I საუკუნეში მოღვაწეობდა.

ჰერონის ამოცანა. მოცემულია A და B წერტილები, რომლებიც ℓ წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ. ვიპოვოთ ℓ წრფეზე ისეთი D წერტილი, რომ AD და DB მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი იყოს უმცირესი. ამოცანა შეიძლება ამოხსნას გეომეტრიული ხერხით.



ნახ. 1

ამოხსნა: ავავოთ ℓ წრფის მიმართ B წერტილის სიმეტრიული B_1 წერტილი (იხ. ნახ. 1). შევაერთოთ A წერტილი B_1 წერტილთან, მაშინ AB_1 წრფის ℓ წრფესთან გადაკვეთის D წერტილი იქნება საძიებელი წერტილი.

მართლაც, ვთქვათ, D_1 არის D -სგან განსხვავებული ნებისმიერი წერტილი ℓ წრფეზე. ცხადია:

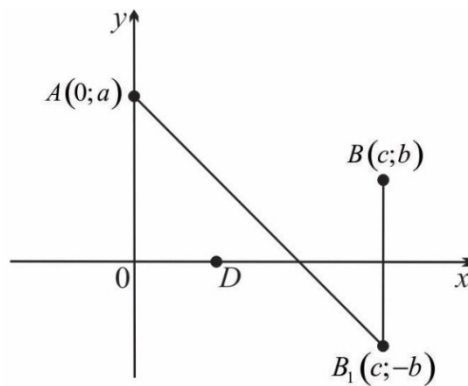
$$AD_1 + D_1B = AD_1 + D_1B_1 > AB_1 = AD + DB_1 = AD + DB \\ (D_1B = D_1B_1, \quad DB = DB_1).$$

ექსტრემალური ამოცანების ამოხსნა დიდწილად დაკავშირებული იყო პრაქტიკულ საჭიროებასთან. ჰერონის ამოცანას თანამედროვეობაში შეიძლება მივცეთ შემდეგი პრაქტიკული ინტერპრეტაცია. ვთქვათ, ℓ წარმოადგენს რკინიგზის წრფივ უბანს. სად უნდა განვათავსოთ რკინიგზის D პლატფორმა, რომ ℓ -ის მიმართ ერთ მხარეს მდებარე A და B ქალაქებამდე საავტომობილო გზების სიგრძეთა ჯამი იყოს მინიმალური.

საკოორდინაციო სისტემის სათანადო შერჩევის შედეგად ჰერონის ამოცანა შეიძლება ჩამოვყალიბოთ შემდეგი სახით:

მოცემულია $A(0;a)$ და $B(c;b)$ წერტილები, რომლებიც ox ღერძის მიმართ ზედა ნახევარსიბრტყეშია. ox ღერძზე ვიპოვოთ D წერტილი ისე, რომ $AD + DB$ იყოს მინიმალური.

ამოხსნა: ამოცანის გეომეტრიული გადაწყვეტიდან გამომდინარეობს, რომ უნდა შევადგინოთ AB_1 წრფის განტოლება, სადაც $B_1(c;-b)$ სიმეტრიულია $B(c;b)$ წერტილისა ox ღერძის (ℓ წრფის) მიმართ (იხ. ნახ. 2)



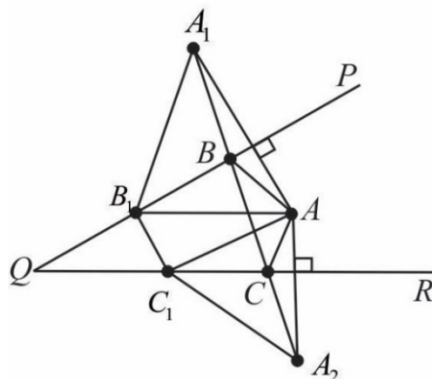
ნახ. 2

AB_1 წრფის განტოლებაა: $y = -\frac{b+a}{c}x + a$. AB_1 წრფის ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილია $D\left(\frac{ac}{a+b}; 0\right)$.

$$AD + DB = AB_1 = \sqrt{c^2 + (a+b)^2}.$$

ჰერონის ამოცანის ამოხსნის იდეის გამოყენებით შეიძლება ამოვხსნათ შემდეგი.

ამოცანა 1. მოცემულ მახვილ კუთხეში ჩავხაზოთ უმცირესი პერიმეტრის მქონე სამკუთხედი ისე, რომ სამკუთხედის ერთი წვერო მდებარეობდეს მოცემული კუთხის შიგნით, ხოლო დანარჩენი ორი კუთხის გვერდებზე (იხ. ნახ. 3).



ნახ. 3



ამოხსნა: ვთქვათ, $\angle PQR$ -ის შიგნით მოცემულია A წერტილი. A_1 და A_2 წერტილები არის A წერტილის სიმეტრიული წერტილები, შესაბამისად, PQ და QR წრფეების მიმართ. B და C წერტილებით აღვნიშნოთ A_1A_2 მონაკვეთის გადაკვეთის წერტილები, შესაბამისად, PQ და QR გვერდებთან. ვაჩვენოთ, რომ $\triangle ABC$ არის საძიებელი სამკუთხედი.

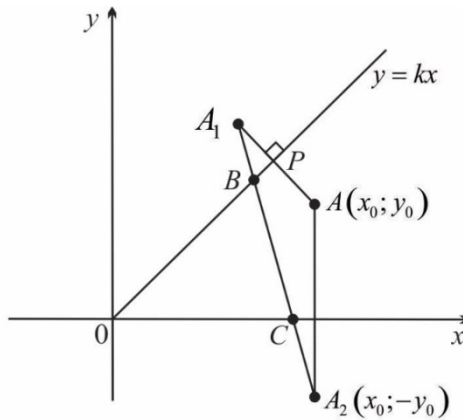
PQ და QR გვერდებზე ავიღოთ, შესაბამისად, ნებისმიერი B_1 და C_1 წერტილები. შევნიშნოთ, რომ $B_1A_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1A_2$, $AB = A_1B$, $AC = CA_2$.

განვიხილოთ

$$\begin{aligned} P_{B_1A_1C_1} &= B_1A + AC_1 + B_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_2 > A_1A_2 \\ &= A_1B + BC + CA_2 = AB + BC + CA = P_{ABC} \end{aligned}$$

აგების მეთოდიდან გამომდინარე, ამონახსნი ერთადერთია.

ამოცანა 1 შეიძლება ამოვხსნათ საკოორდინატო სისტემის გამოყენებით. OX ღერძად ავიღოთ QR გვერდი, სისტემის სათავე იყოს Q წერტილი, $\angle PQR$ მახვილია. ვთქვათ, QP გვერდის განტოლებაა $y = kx$, სადაც $k = \operatorname{tg} \angle PQR$ ($k > 0$) (იხ. ნახ. 4).



ნახ. 4

ამოხსნა: ვთქვათ, A წერტილის კოორდინატებია $(x_0; y_0)$. გეომეტრიული ამოხსნიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ A წერტილის სიმეტრიული წერტილი $y = kx$ წრფის მიმართ. შევადგინოთ $A(x_0; y_0)$ წერტილზე $y = kx$ წრფის მართობულად გავლებული წრფის განტოლება:

$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$; $y = kx$ წრფესთან ამ წრფის გადაკვეთის P წერტილის კოორ-

დინატებია: $P\left(\frac{ky_0 + x_0}{1 + k^2}; \frac{k(ky_0 + x_0)}{1 + k^2}\right)$, ხოლო $A(x_0; y_0)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი

$y = kx$ წრფის მიმართ იქნება $A_1\left(\frac{2ky_0 + x_0 - k^2x_0}{1 + k^2}; \frac{k^2y_0 + 2kx_0 - y_0}{1 + k^2}\right)$ წერტილი (P არის

AA_1 მონაკვეთის შუა წერტილი). Ox ღერძის მიმართ A წერტილის სიმეტრიულია $A_2(x_0; -y_0)$ წერტილი. მარტივი გარდაქმნებით ვაჩვენებთ, რომ A_1A_2 წრფის განტოლებაა:

$$\frac{y + y_0}{ky_0 + x_0} = \frac{x - x_0}{y_0 - kx_0},$$

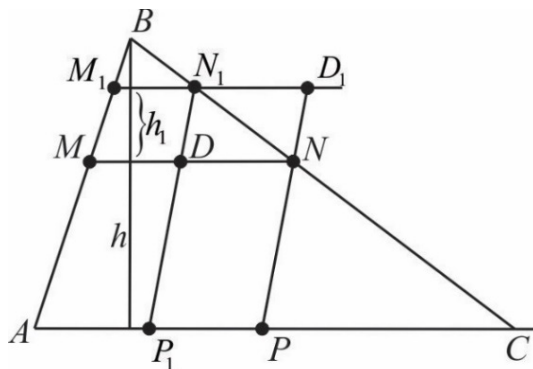
A_1A_2 წრფის $y = kx$ წრფესთან გადაკვეთის წერტილია: $B \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0(1+k^2)}; \frac{k(x_0^2 + y_0^2)}{x_0(1+k^2)} \right)$,

ხოლო Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი არის $C \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{ky_0 + x_0}; 0 \right)$.

$\triangle ABC$ -ს პერიმეტრი უმცირესია, $P_{ABC} = A_1A_2 = 2k \sqrt{\frac{x_0^2 + y_0^2}{1+k^2}}$.

ევკლიდეს „საწყისებში“ გვხვდება გეომეტრიული ამოცანა მაქსიმუმზე, რომელიც შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

ევკლიდეს ამოცანა. მოცემულ ABC სამკუთხედში ჩავხაზოთ $AMNP$ პარალელოგრამი ($MN \parallel AC$, $PN \parallel AB$), რომელსაც ექნება უდიდესი ფართობი (იხ. ნახ. 5).



ნახ. 5

ამოხსნა: ვთქვათ, M , N და P , შესაბამისად, AB , BC და AC გვერდების შუა წერტილებია. ვაჩვენოთ, რომ $AMNP$ საძიებელი პარალელოგრამია. ავიღოთ მისგან განსხვავებული ნებისმიერი $AM_1N_1P_1$ პარალელოგრამი. ვაჩვენოთ, რომ

$$S_{AM_1N_1P_1} < S_{AMNP}.$$

N_1P_1 და MN მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ D -თი, ხოლო M_1N_1 და PN წრფეების გადაკვეთის წერტილი კი არის D_1 . ვთქვათ, $AC = b$, h არის B -დან AC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე, ხოლო h_1 არის $\triangle DN_1N$ -ის სიმაღლე.

$\triangle ABC$ მსგავსია $\triangle DN_1N$ ($DN \parallel AC$), ამიტომ

$$\frac{h_1}{DN} = \frac{h}{b}, \quad bh_1 = h \cdot DN;$$

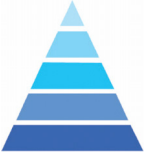
$$S_{MM_1D_1N} = MN \cdot h_1 = \frac{b}{2} \cdot h_1, \quad S_{P_1DNP} = \frac{h}{2} \cdot DN = S_{MM_1D_1N};$$

$$S_{AMNP} = S_{AMDP_1} + S_{P_1DNP} = S_{AMDP_1} + S_{MM_1D_1N} = S_{AMDP_1} + S_{MM_1N_1D} + S_{DN_1D_1N} = S_{AM_1N_1P_1} + S_{DN_1D_1N}.$$

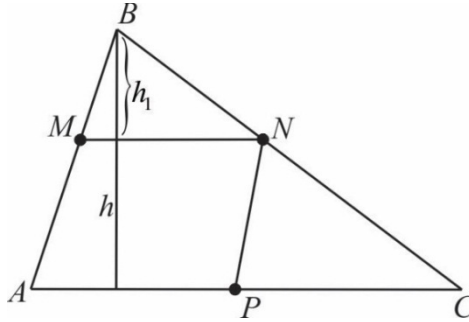
ამრიგად,

$$S_{AMNP} - S_{AM_1N_1P_1} = S_{DN_1D_1N}.$$

$AMNP$ საძიებელი პარალელოგრამია.



ევკლიდეს ამოცანა შეიძლება ამოვხსნათ შემდეგი ხერხითაც:
 ვთქვათ, $\triangle ABC$ -ში $AC = b$ და B -დან დაშვებული სიმაღლე AC -ზე h -ის ტოლია.
 $AMNP$ არის $\triangle ABC$ -ში ჩახაზული პარალელოგრამი, $MN \parallel AC$, $PN \parallel AB$ და $MN = x$; x
 შევარჩიოთ ისე, რომ S_{AMNP} იყოს უდიდესი (იხ. ნახ. 6).



ნახ. 6

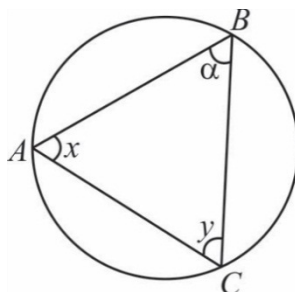
$$\triangle MBN \sim \triangle ABC, \frac{AC}{MN} = \frac{h}{h_1}, bh_1 = hx, h_1 = \frac{hx}{b}$$

$$S_{AMNP} = x(h - h_1) = x\left(h - \frac{hx}{b}\right) = -\frac{h}{b}x^2 + hx$$

$f(x) = -\frac{h}{b}x^2 + hx$ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას მიიღებს კვადრატული სამწევრის

წვეროს აბსცისზე $x = \frac{b}{2}$; ე.ი. MN შუა მონაკვეთია, $NP \parallel AB$, P არის AC -ს შუა წერტილი. ამრიგად, S_{AMNP} უდიდესია, როცა M , N და P , შესაბამისად, AB , BC და AC გვერდების შუა წერტილებია.

ამოცანა 2. R -რადიუსიან წრეში ჩახაზულია α კუთხე. როგორი უნდა იყოს ქორდები, რომლებიც ამ კუთხეს შეადგენენ, რომ მათი სიგრძეთა ჯამი იყოს უდიდესი.



ნახ. 7

ამოხსნა: ვთქვათ, $\angle BAC = x$, $\angle BCA = y$ (იხ. ნახ. 7). სინუსების თეორემის თანახმად:

$$\frac{AB}{\sin y} = \frac{BC}{\sin x} = 2R,$$

$$AB + BC = 2R(\sin x + \sin y) =$$

$$= 4R \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 4R \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 4R \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2};$$

$$AB + BC \text{ უდიდესი იქნება, როცა } \cos \frac{x-y}{2} = 1, x = y = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

ამრიგად, ქორდათა ჯამი უდიდესია, როცა ქორდები ტოლია:

$$AB = BC = 2R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

ბევრი საინტერესო ამოცანა მაქსიმუმისა და მინიმუმის შესახებ შეიძლება ამოიხსნას უტოლობების გამოყენებით. ერთ-ერთი ასეთია კოშის ცნობილი უტოლობა:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ როცა } a \geq 0, b \geq 0;$$

ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a = b$.

კოშის უტოლობა სამართლიანია, როცა მოცემული გვაქვს n არაუარყოფითი x_1, x_2, \dots, x_n რიცხვები. მაშინ მათი საშუალო გეომეტრიული არ აღემატება საშუალო არითმეტიკულს. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad (1)$$

ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

კოშის (1) უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულებები:

1) თუ დადებითი x_1, x_2, \dots, x_n რიცხვების ჯამი S -ის ტოლია, მაშინ მათი ნამრავლი

$$P = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \text{ უდიდეს მნიშვნელობას აღწევს, როცა } x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{S}{n} \text{ და } P_{\max} = \left(\frac{S}{n}\right)^n.$$

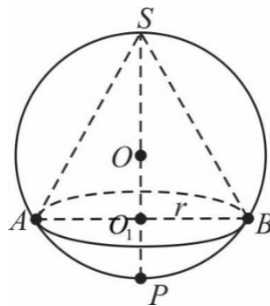
2) თუ დადებითი x_1, x_2, \dots, x_n რიცხვების ნამრავლი P -ს ტოლია, მაშინ მათი ჯამი:

$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt[n]{P} \text{ და } S_{\min} = n\sqrt[n]{P}.$$

განვიხილოთ შემდეგი:

ამოცანა 3. R -რადიუსიან სფეროში ჩახაზოთ უდიდესი მოცულობის მქონე კონუსი და ვიპოვოთ ასეთი კონუსის მოცულობა.



ნახ. 8

ამოხსნა: ვთქვათ, მოცემულ სფეროში ჩახაზული კონუსის რადიუსი r -ის ტოლია, სიმაღლე კი h -ის (იხ. ნახ. 8).

$$V_{\text{კონუსი}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \text{ როგორც ცნობილია: } AO_1 \cdot O_1B = SO_1 \cdot O_1P, r^2 = h(2R - h).$$

ამრიგად, $V_{\text{კონუსი}} = \frac{1}{3} \pi h^2 (2R - h)$. ჩავწეროთ $V_{\text{კონუსი}}$ სამი თანამამრავლის ნამრავლის

სახით:



$$V_{\text{კონ}} = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} (2R - h).$$

გამოვიყენოთ (1) უტოლობა, როცა $n = 3$; გვექნება:

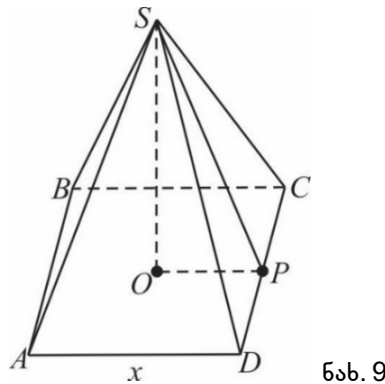
$$\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} (2R - h) \leq \left(\frac{\frac{h}{2} + \frac{h}{2} + 2R - h}{3} \right)^3 = \left(\frac{2R}{3} \right)^3.$$

დებულება 1-ის თანახმად, $V_{\text{კონ}}$ უდიდეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა:

$$\frac{h}{2} = 2R - h, \quad h = \frac{4}{3} R,$$

$$V_{\text{max კონ}} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2R}{3} \right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

ამოცანა 4. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი a^2 -ის ტოლია. ვიპოვოთ პირამიდის ფუძის გვერდი, რომლისთვისაც პირამიდის მოცულობას ექნება უდიდესი მნიშვნელობა.



ამოხსნა: ვთქვათ, $CD = x$, $SP \perp CD$, SO პირამიდის სიმაღლეა (იხ. ნახ. 9).

$$S_{\text{გვერდი}} = 4 \cdot \frac{SP \cdot x}{2} = 2 \cdot SP \cdot x,$$

$$SP = \frac{a^2}{2x}, \quad SO^2 = \sqrt{SP^2 - OP^2} = \sqrt{\frac{a^4}{4x^2} - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^4 - x^4}}{2x},$$

$$V_{\text{პირ}} = \frac{1}{3} x^2 \cdot \frac{\sqrt{a^4 - x^4}}{2x} = \frac{1}{6} x \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)}.$$

პირამიდის მოცულობა იქნება უდიდესი, როცა

$$f(x) = x^2 (a^2 - x^2)(a^2 + x^2)$$

ფუნქციას ექნება უდიდესი მნიშვნელობა.

$f(x)$ წარმოადგენს სამი დადებითი თანამამრავლის ნამრავლს. იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ უტოლობა (1), განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოდგენა შემდეგი სახით:

$$f(x) = \frac{x^2 (ma^2 + mx^2)(na^2 - nx^2)}{mn},$$

სადაც m და n დადებით მუდმივებს შევარჩევთ ისე, რომ თანამამრავლთა ჯამი:

$$x^2 + ma^2 + mx^2 + na^2 - nx^2 = (1+m-n)x^2 + ma^2 + na^2$$

იყოს მუდმივი, ანუ უნდა შესრულდეს პირობა:

$$1+m-n=0.$$

ამრიგად, როცა $n = m+1$, მაშინ (1) უტოლობის თანახმად, $f(x)$ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა:

$$x^2 = ma^2 + mx^2 = (m+1)a^2 - (m+1)x^2 = \frac{(2m+1)a^2}{3}.$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\begin{cases} (1-m)x^2 = ma^2 \\ (2+m)x^2 = (m+1)a^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-m}{2+m} = \frac{m}{m+1},$$

$$1-m^2 = 2m+m^2, \quad 2m^2+2m-1=0, \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

რადგან $m > 0$, ამიტომ $m = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

$$x^2 = \frac{(2m+1)a^2}{3} = \frac{\sqrt{3}a^2}{3}, \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

$$V_{\max} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{a^4 - \frac{a^4}{3}} = \frac{1}{18} \cdot a^3 \cdot \sqrt[4]{12}.$$

ამრიგად, პირამიდის უდიდესი მოცულობა ექნება, როცა ფუძის გვერდია:

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \quad V_{\max} = \frac{1}{18} \cdot a^3 \cdot \sqrt[4]{12}.$$

ამოცანა 5. ვიპოვოთ $f(x) = x^7 + \frac{a}{x}$ ფუნქციის მინიმუმი, თუ $x > 0$, $a > 0$.

ამოხსნა: $\frac{a}{x}$ წარმოვადგინოთ 7 ტოლი შესაკრების ჯამის სახით და გამოვიყენოთ (1)

უტოლობა:

$$f(x) = x^7 + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} + \frac{a}{7x} \geq 8 \sqrt[8]{x^7 \cdot \frac{a^7}{7^7 \cdot x^7}} = 8 \cdot \sqrt[8]{\frac{a^7}{7^7}}.$$

მაშასადამე, $f_{\min} = 8 \cdot \sqrt[8]{\frac{a^7}{7^7}}$ და მიიღწევა, როცა:

$$x^7 = \frac{a}{7x}, \quad x = \sqrt[8]{\frac{a}{7}}.$$



განვიხილოთ ამოცანა მე-10 კლასის სახელმძღვანელოდან [3, გვ. 424].

ამოცანა 6. გემის მოძრაობისას დახარჯული საწვავის ღირებულების ერთი ნაწილი ყოველ საათში 288 ლარია, მეორე ნაწილი სინქარის კვადრატის პროპორციულია. ამასთან, 15 კმ/სთ სინქარით მოძრაობისას 1 საათში საწვავის ხარჯი 18 ლარია. რა სინქარით მოძრაობისას იქნება 1 კმ მანძილზე გაწეული ხარჯი უმცირესი?

ამოხსნა: ვთქვათ, გემის სინქარეა x კმ/სთ, მაშინ 1 კმ-ს გემი გაივლის $\frac{1}{x}$ სთ-ში; 1 კმ-ის

გავლისას p ხარჯის პირველი ნაწილი $p_1 = \frac{1}{x} \cdot 288$, ხარჯის მეორე ნაწილი $p_2 = k \frac{1}{x} \cdot x^2$,

სადაც $k = \frac{18}{15^2} = \frac{2}{25}$.

ამრიგად:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{x} \cdot 288 + \frac{2}{25} \cdot x.$$

კოშის უტოლობის თანახმად:

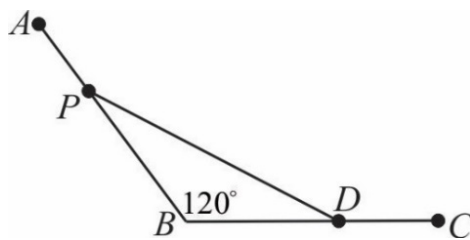
$$P(x) = \frac{288}{x} + \frac{2}{25} \cdot x \geq 2\sqrt{\frac{288}{x} \cdot \frac{2}{25} x} = \frac{48}{5},$$

$P(x)$ უმცირესი იქნება, როცა $\frac{288}{x} = \frac{2}{25} x$, $x^2 = 144 \cdot 25$, $x = 60$ კმ/სთ, $P_{\min} = \frac{48}{5} = 9.6$ ლ.

შენიშვნა: $P(x)$ -ის უმცირესი მნიშვნელობის პოვნისთვის შეიძლება $P(x)$ ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$P(x) = \left(\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{x} \right)^2 + \frac{4 \cdot 12}{5} \geq \frac{48}{5}.$$

ამოცანა 7. B პუნქტიდან გადის ორი წრფივი საავტომობილო გზა A და C პუნქტებისკენ ისე, რომ $\angle ABC = 120^\circ$ (იხ. ნახ. 10). A -დან B -სკენ და B -დან C -სკენ ერთდროულად გამოდის ორი ავტომობილი. ვიპოვოთ მათი სინქარეების შეფარდება, თუ ცნობილია, რომ უმცირესი მანძილი ავტომობილებს შორის იყო მაშინ, როცა A -დან გამოსულმა ავტომობილმა გაიარა თავისი გზის $\frac{1}{7}$ ნაწილი.



ნახ. 10

ამოხსნა: ვთქვათ, მანძილი B პუნქტიდან A -მდე S კმ-ია, ხოლო A და B პუნქტებიდან გამოსული ავტომობილების სინქარე, შესაბამისად, V_A კმ/სთ და V_B კმ/სთ-ია, ხოლო უმცირესი მანძილი მათ შორის იყო მოძრაობის დაწყებიდან t სთ-ის შემდეგ. მაშინ $AP = V_A t$, $PB = S - V_A t$, $BD = V_B t$.

გამოვიყენოთ $\triangle PBD$ -ში კოსინუსების თეორემა:

$$PD^2 = (S - V_A t)^2 + V_B^2 t^2 + (S - V_A t)V_B t = (V_A^2 + V_B^2 - V_A V_B)t^2 + (SV_B - 2SV_A)t + S^2$$

PD^2 უმცირესი იქნება, როცა:

$$t = \frac{S(2V_A - V_B)}{2(V_A^2 + V_B^2 - V_A V_B)} \quad (V_A^2 + V_B^2 - V_A V_B > 0).$$

პირობის თანახმად,

$$AP = \frac{S}{7}, \quad V_A t = \frac{S}{7}, \quad t = \frac{S}{7V_A}.$$

მაშასადამე:

$$\frac{S(2V_A - V_B)}{2(V_A^2 + V_B^2 - V_A V_B)} = \frac{S}{V_A},$$

$$\frac{2 - \frac{V_B}{V_A}}{1 + \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^2 - \frac{V_B}{V_A}} = \frac{2}{7},$$

აღვნიშნოთ $\frac{V_B}{V_A} = a$, გვექნება: $\frac{2-a}{1+a^2-a} = \frac{2}{7}$, $2a^2 + 5a - 12 = 0$, $a = \frac{-5 \pm 11}{4}$, $a = \frac{3}{2}$,

რადგან $a > 0$.

ამრიგად, როცა მანძილი ავტომობილებს შორის უმცირესია, მაშინ $\frac{V_B}{V_A} = \frac{3}{2}$.

ამოცანები ექსტრემუმის შესახებ შეიძლება ამოვხსნათ ვექტორული ალგებრის გამოყენებით.

ამოცანა 8. ვიპოვოთ $4x^2 + y^2 + 3z^2$ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა, თუ x , y , z ცვლადები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$2mx + ny + 3pz = A,$$

სადაც A , m , n , p მოცემული რიცხვებია, ამასთან, $m^2 + n^2 + p^2 \neq 0$.

ამოხსნა: შემოვიღოთ ვექტორები: $\vec{a} = (2x; y; \sqrt{3}z)$ და $\vec{b} = (m; n; \sqrt{3}p)$. განვიხილოთ \vec{a} და \vec{b} ვექტორების სკალარული ნამრავლი:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2mx + ny + 3pz = A,$$

მეორე მხრივ,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad |\vec{a}| = \sqrt{4x^2 + y^2 + 3z^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{m^2 + n^2 + 3p^2}.$$

ამრიგად:

$$|\vec{a}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}| \cdot \cos \varphi} = \frac{A}{\sqrt{m^2 + n^2 + 3p^2} \cdot \cos \varphi}.$$



თუ $A \geq 0$, მაშინ $|\vec{a}|$ უმცირესი იქნება, როცა $\cos \varphi$ იქნება უდიდესი, ანუ $\varphi = 0$. თუ $A < 0$, მაშინ $|\vec{a}|$ უმცირესი იქნება, როცა $\cos \varphi = -1$. ორივე შემთხვევაში ცხადია, რომ:

$$\min(4x^2 + y^2 + 3z^2) = \frac{A^2}{m^2 + n^2 + 3p^2}.$$

ამოცანა 9. ვიპოვოთ $f(x) = \sqrt{2x+1} + 3\sqrt{4-x}$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა.

ამოხსნა: $f(x)$ ფუნქცია ჩავწეროთ სამი შესაკრების ჯამის სახით:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{3}{2}\sqrt{4-x} + \frac{3}{2}\sqrt{4-x}.$$

შემოვიღოთ ვექტორები:

$$\vec{a} = \left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ და } \vec{b} = (\sqrt{2x+1}; \sqrt{4-x}; \sqrt{4-x});$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{11}{2}}, |\vec{b}| = 3.$$

$f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, $f(x)$ ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა $\cos \varphi = 1$, ანუ, როცა \vec{a} და \vec{b} ვექტორები თანამიმართულია.

$$\text{ამრიგად, } f_{\max} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 3\sqrt{\frac{11}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{22}.$$

ვიპოვოთ x -ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $f(x)$ ღებულობს უდიდეს მნიშვნელობას. რადგან \vec{a} და \vec{b} თანამიმართული ვექტორებია, ამიტომ:

$$\sqrt{2x+1} = \frac{2\sqrt{4-x}}{3}, \quad 3\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{4-x},$$

$$9(2x+1) = 4\sqrt{4-x}, \quad 22x = 7, \quad x = \frac{7}{22};$$

$$x = \frac{7}{22} \in D(f).$$

განვიხილავთ ექსტრემუმთან დაკავშირებული პრაქტიკული შინაარსის ამოცანის ამოხსნას წრფივი პროგრამირების მეთოდით. XI კლასის [3] სახელმძღვანელოში განხილულია ასეთი ტიპის ამოცანები. საკითხი ეხება x და y ცვლადების მიმართ წრფივი გამოსახულების ექსტრემუმის პოვნას გარკვეული პირობებით (შეზღუდვებით), რომელნიც მოცემულია წრფივ უტოლობათა სისტემის სახით.

ამოცანა 10 [3, გვ. 360]. ფაბრიკა ორი სახის საფარდე ქსოვილს უშვებს. ვთქვათ, I და II სახის ქსოვილისთვის საჭიროა სამი ფერის ძაფი – წითელი, მწვანე, ყვითელი. I სახის ერთი მეტრი ქსოვილის დასამზადებლად 0.4 კგ წითელი, 0.6 კგ მწვანე და 0.2 კგ ყვითელი ძაფია საჭირო, ხოლო II სახის ქსოვილისთვის – 0.4 კგ წითელი, 0.3 კგ მწვანე და 0.6 კგ ყვითელი. ცნობილია, რომ საწყობში 140 კგ წითელი, 180 კგ მწვანე და 180 კგ ყვითელი

დაფია. ფაბრიკის მოგება ერთი მეტრი I სახის ქსოვილის გაყიდვით 1.2 ლარია, ხოლო მეორე სახის ქსოვილით კი 0.8 ლარი. როგორ უნდა დაგეგმოს ფაბრიკამ ქსოვილების წარმოება, რომ მაქსიმალური მოგება მიიღოს.

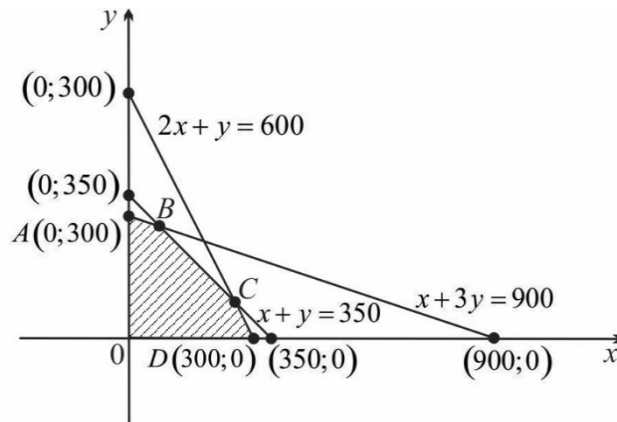
ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული ამოცანის მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, ფაბრიკამ მაქსიმალური მოგებისთვის უნდა გაყიდოს I სახის ქსოვილის x მეტრი, ხოლო II სახის ქსოვილის – y მეტრი, მაშინ მოგება იქნება:

$$z = 1.2x + 0.8y.$$

ამოცანის პირობის თანახმად, x და y ცვლადები აკმაყოფილებენ უტოლობათა სისტემას:

$$\begin{cases} 0.4x + 0.4y \leq 140 \\ 0.6x + 0.3y \leq 180 \\ 0.2x + 0.6y \leq 180 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 350 \\ 2x + y \leq 600 \\ x + 3y \leq 900 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

უნდა ვიპოვოთ (2) უტოლობათა სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომლისთვისაც $z = 1.2x + 0.8y$ ფუნქციას ექნება მაქსიმალური მნიშვნელობა. საკოორდინატო სიბრტყეზე ავავოთ (2) უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე (იხ. ნახ. 11); $OABCD$ ხუთკუთხედის წერტილთა სიმრავლე (2) უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა, ხუთკუთხედის წვეროებია: $O(0;0)$, $A(0;300)$, $B(75;275)$, $C(250;100)$, $D(300;0)$.



ნახ. 11

$B(75;275)$ წერტილი $x + y = 350$ და $x + 3y = 900$ წრფეების გადაკვეთის წერტილია, ხოლო $C(250;100)$ წერტილი კი – $x + y = 350$ და $2x + y = 600$ წრფეებისა. მტკიცდება, რომ $z = 1.2x + 0.8y$ ფუნქცია ექსტრემალურ მნიშვნელობებს მიიღებს $OABCD$ ხუთკუთხედის წვეროებში და მათ შორის უდიდესი იქნება z ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა.

$$z(0;0) = 0; \quad z(300;0) = 1.2 \cdot 300 = 360; \quad z(0;300) = 0.8 \cdot 300 = 240;$$

$$z(75;275) = 1.2 \cdot 75 + 0.8 \cdot 275 = 310;$$

$$z(250;100) = 1.2 \cdot 250 + 0.8 \cdot 100 = 380.$$

ამრიგად, ფაბრიკა მაქსიმალურ მოგებას მიიღებს, როცა გაყიდოს I სახის ქსოვილის 250 მეტრს და II სახის ქსოვილის 100 მეტრს. ამ შემთხვევაში მოგება 380 ლარია.



ლიტერატურა

- [1] Тихомиров В. М., *Рассказы о максимумах и минимумах*. Наука, Москва, 1986.
- [2] გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ., მათემატიკა – X კლასი, II სემესტრი, გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2022.
- [3] გოგიშვილი გ., ვეფხვაძე თ., მებონია ი., ქურჩიშვილი ლ., მათემატიკა – XI კლასი, გამომცემლობა „ინტელექტი“, 2007.
- [4] ღვაბერიძე ბ., ფურთუხია ო., ამოცანები ექსტრემუმზე მათემატიკის სასკოლო კურსში, სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი მათემატიკა, # 4, 2017, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი.
- [5] Ваховский Е. Б., Рывкин А. А., *Задачи по элементарной математике*. Наука, Москва, 1969.

ავტორის ელექტრონული მისამართი: rusudan.meskhia@tsu.ge

ნორჩი ქართველი მათემატიკოსები საერთაშორისო ოლიმპიადაში



ს ა რ თ ა შ ო რ ი ს ო ო ლ ი მ პ ი ა დ ა შ ი



გიორგი გვახარია

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების ლიდერი,
ასოცირებული პროფესორი,
ქუთაისის საერთაშორისო უნივერსიტეტი

გივი ნადიბაიძე

ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების თანალიდერი,
ასისტენტ-პროფესორი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი



66-ე საერთაშორისო ოლიმპიადა მათემატიკაში ჩატარდა ავსტრალიის ქალაქ სანშაინ კოსტში, 10-20 ივლისის პერიოდში. ასპარეზობაში მონაწილეობა მიიღო 110-მა ქვეყანამ და გუნდები, ტრადიციულად, 6-6 მოსწავლისაგან შედგებოდა. საქართველოს ნაკრებს წარმოადგენდნენ: ივანე კობაიძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი), ირაკლი შეროზია (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), თევდორე ონაშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-9 კლასი), ვანო ელიზბარაშვილი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი), სანდრო ჟღენტი (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი) და მირზა შანიძე (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი).

საქართველოს მოსწავლეთა ნაკრები გუნდი მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადებში მონაწილეობს 1993 წლიდან. 2025 წლის ოლიმპიადაზე საქართველო ოცდამეცამეტედ მონაწილეობდა. გუნდის ხუთმა წევრმა დაიმსახურა ჯილდო. ბრინჯაოს მედლები დაიმსახურეს: ივანე კობაიძემ (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-12 კლასი) და ირაკლი შეროზიამ (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-11 კლასი), ხოლო საპატიო სიგელები დაიმსახურეს: თევდორე ონაშვილმა (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-9 კლასი), ვანო ელიზბარაშვილმა (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი) და სანდრო ჟღენტმა (თბილისის კომაროვის სახ. ფიზიკა-მათემატიკის სკოლა, მე-10 კლასი).



ქვემოთ დიაგრამაზე ნაჩვენებია 2024 წლის მონაწილეთა შედეგები:

◀ 65TH IMO 2024

Contestant [♀♂]	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Total	Rank		Award
								Abs.	Rel.	
Team results	30	3	0	40	21	0	94	63	43.12%	B, B, HM, HM, HM
Ivane Kobaidze	7	1	0	7	7	0	22	243	61.53%	Bronze medal
Irakli Sherozia	7	1	0	7	4	0	19	303	51.99%	Bronze medal
Tevdore Onashvili	5	0	0	7	3	0	15	366	41.97%	Honourable mention
Vano Elizbarashvili	7	0	0	7	0	0	14	388	38.47%	Honourable mention
Sandro Zhgenti	0	0	0	6	7	0	13	410	34.98%	Honourable mention
Mirza Shanidze	4	1	0	6	0	0	11	436	30.84%	

Leader: **George Chelidze**

Deputy leader: **Givi Nadibaidze**

საქართველოს ოლიმპიური ნაკრების ფორმირება მოხდა ორი შესარჩევი ტურის შედეგის საფუძველზე. შესარჩევ წერებს ადმინისტრირებას უწევდა შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი. მკაცრად რეგლამენტირებულ 2-ტურიან წერით გამოცდებში მონაწილეობის უფლება კი მოიპოვეს რესპუბლიკური სასკოლო მათემატიკური ოლიმპიადის ტურების შედეგებზე დაყრდნობით გამოვლენილმა საუკეთესო მოსწავლეებმა. შესარჩევი წერების საფუძველზე დაკომპლექტდა ნ-მოსწავლიანი ნაკრები.

შოთა რუსთაველის სახელობის ეროვნული სამეცნიერო ფონდიდან ამ პროცესს ადმინისტრირებას უწევდა ქალბატონი მაკა ქაჯაია, ხოლო განათლებისა და მეცნიერების სამინისტროდან პროცესს კურირებდა ქალბატონი ნინო ცანდიშვილი. ეროვნული ოლიმპიური ნაკრების დაკომპლექტების შემდეგ სამკვირიანი საწვრთნელი მეცადინეობები ჩატარდა კომაროვის სკოლის ბაზაზე, ყოველდღიური 6-საათიანი მეცადინეობებით. მოსწავლეთა მომზადება დასრულდა ერთკვირიანი წვრთნებით ბაკურიანში. მოსწავლეებს უტარდებოდათ სატრენინგო წერები საერთაშორისო ოლიმპიადების პირობების გათვალისწინებით.

გუნდის მომზადებაში მონაწილეობდა მწვრთნელი გიორგი სვანაძე, რომელიც ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის წარმატებული დოქტორანტია. ასევე მოსწავლეთა მომზადებაში მონაწილეობდნენ გამოცდილი ყოფილი ოლიმპიელები: გიორგი არაბიძე, ივანე გოქაძე, კოტე კუპატაძე, დემეტრე გელაშვილი, მარიამ ივარდავა.

ქვემოთ მოვიყვანთ იმ ამოცანებს, რომლებიც მიეცათ მოსწავლეებს წერებზე.

ამოცანა 1.

სიბრტყეზე მოცემულ წრფეს ეწოდება განსაკუთრებული, თუ ის არ არის პარალელური არც x -ღერძის, არც y -ღერძის და არც $x + y = 0$ წრფის.

ვთქვათ, $n \geq 3$ ფიქსირებული მთელი რიცხვია. იპოვეთ ყველა ისეთი მთელი არაუარყოფითი რიცხვი k , რომ სიბრტყეზე არსებობდეს n ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული წრფე; რომ სრულდებოდეს შემდეგი ორი პირობა:

- ყოველი მთელი დადებითი a და b რიცხვებისთვის, სადაც $a+b \leq n+1$, წერტილი (a, b) ძევს ერთ წრფეზე მაინც ამ n ცალი წრფიდან;
- ზუსტად k ცალი წრფე ამ n ცალი წრფიდან არის განსაკუთრებული წრფე.

ამოხსნა:

დავასაბუთოთ, რომ $k = 0, 1, 3$ ყოველი $n \geq 3$ -ისთვის. ფაქტობრივად, თუ $n = 1, 2$, მაშინ $k = 0, 1$. დავამტკიცოთ ინდუქციის გამოყენებით. დავუშვათ, $n-1$ შემთხვევაში სამართლიანია. ვაჩვენოთ, რომ k -ს შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლე იგივეა n -ისთვისაც. ამისათვის ჯერ დავასაბუთოთ შემდეგი.

ლემა.

თუ $n > 3$, მაშინ $x=1, y=1, x+y=n+1$ წრფეებიდან ერთი უნდა იყოს წერტილების დამფარავ n წრფეს შორის.

მართლაც, თუ საწინააღმდეგოს დავუშვებთ, მაშინ $x=1, y=1, x+y=n+1$ წრფეებით შედგენილი მართკუთხა სამკუთხედის სამივე გვერდს უნდა კვეთდეს დამფარავი n წრფიდან თითოეული (რადგან ამ სამკუთხედის თითოეულ გვერდზე n წერტილია), ეს კი შესაძლებელია, თუ n წრფიდან თითოეული გადის სამკუთხედის წვეროზე და კვეთს მოპირდაპირე გვერდს, ე. ი. $n=3$.

ამრიგად $x=1, y=1, x+y=n+1$ წრფეებიდან ერთი უნდა იყოს წერტილების დამფარავ n წრფეს შორის. თუ ამ წრფეს ამოვშლით, მაშინ დარჩენილ წერტილთა სიმრავლე დაიფარება $n-1$ წრფით (შევნიშნოთ, რომ დარჩენილ წერტილთა $(x; y)$ სიმრავლე შეგვიძლია ისე განვათავსოთ სიბრტყეზე, რომ შესრულდეს $x+y \leq n-1$). რადგან ამოშლილი წრფე არ არის განსაკუთრებული, ამიტომ დამფარავ წრფეთა სიმრავლეში განსაკუთრებულ წრფეთა რაოდენობა არ შეიცვლება.

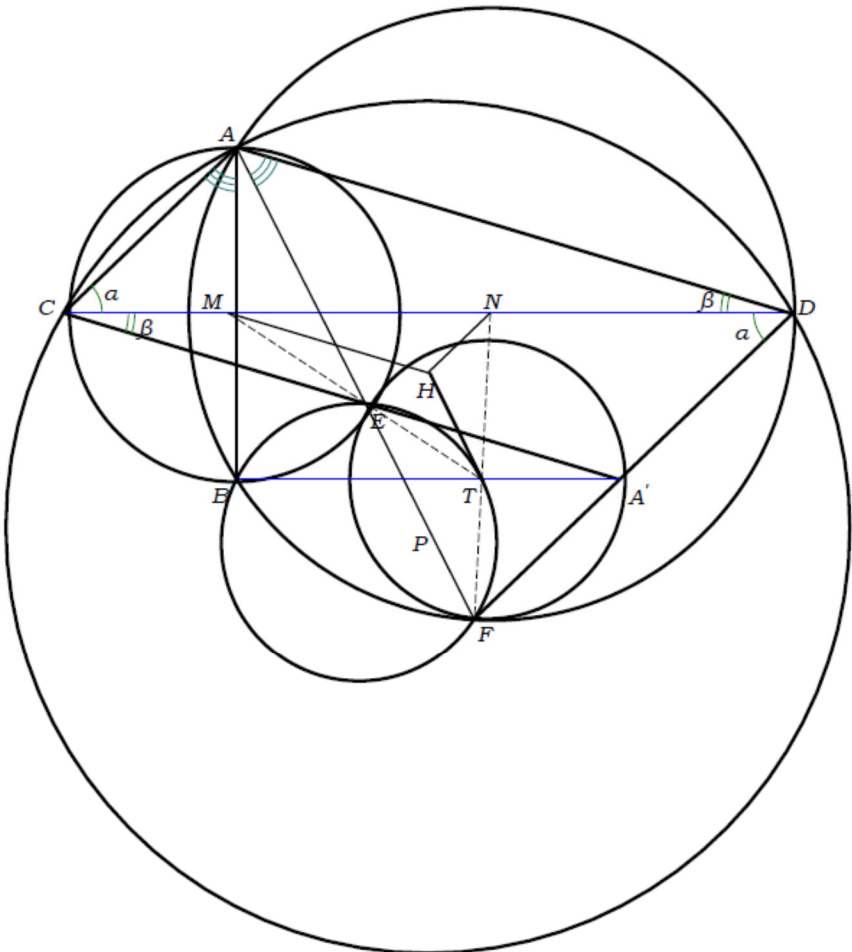
$n=3$ შემთხვევაში $k=3$ -ის რეალიზება შეიძლება ასე. დავფაროთ წერტილები შემდეგნაირად: $(1;1)$ და $(2;2)$ წერტილებზე გამავალი წრფით, $(1;3)$ და $(2;1)$ წერტილებზე გამავალი წრფით და $(3;1)$ და $(1;2)$ წერტილებზე გამავალი წრფით.



ამოცანა 2.

ვთქვათ, Ω და Γ ისეთი წრეწირებია, რომელთა ცენტრები, შესაბამისად, არის M და N , და, ამასთან, Ω -ს რადიუსის სიგრძე ნაკლებია Γ -ს რადიუსის სიგრძეზე. ვთქვათ, Ω და Γ წრეწირები იკვეთება ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ A და B წერტილში. MN წრფე Ω -ს კვეთს C წერტილში და Γ -ს კვეთს D წერტილში ისე, რომ C, M, N და D წერტილები ჩამოთვლილი თანმიმდევრობით მდებარეობენ წრფეზე. ვთქვათ, P არის ACD სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. AP წრფე Ω -ს მეორედ კვეთს $E \neq A$ წერტილში. AP წრფე Γ -ს მეორედ კვეთს $F \neq A$ წერტილში. ვთქვათ, H არის PMN სამკუთხედის ორთოცენტრი. დაამტკიცეთ, რომ H წერტილზე გამავალი AP -ს პარალელური წრფე არის BEF სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხები (სამკუთხედის ორთოცენტრი არის მისი სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი).

ამოხსნა:



ვთქვათ, $\angle DCA = \angle BCD = \alpha$, $\angle ADC = \angle CDB = \beta$ და $A' = CE \cap DF$.

გვაქვს: $\angle FAD = \angle PAD = \angle CAB = 90^\circ - \alpha$, $\angle CAF = \angle CAP = \angle BAD = 90^\circ - \beta$, $\angle AEC = \angle ABC = \angle CAB = 90^\circ - \alpha$ და $\angle AFD = \angle ABD = \angle BAD = 90^\circ - \beta$, ამიტომ $ACA'D$ პარალელოგრამია. შევნიშნოთ ასევე, რომ, ვინაიდან CD წრფე გაივლის BAA' სამკუთხედის BA და AA' გვერდების შუა წერტილებზე, ამიტომ $BA' \parallel CD$.

T იყოს EFA' სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი. გვაქვს:
 $\angle FEA' = 90^\circ - \alpha$, $\angle A'FE = 90^\circ - \beta$, $\angle EA'F = \alpha + \beta$. ამიტომ
 $\angle EA'T = 90^\circ - \angle A'FE = \beta = \angle A'CD = \angle CA'B$, ე. ი. T მდებარეობს BA' წრფეზე.

ამასთან, $\angle ETF = 2\angle EA'F = 2(\alpha + \beta)$ და

$\angle EBF = \angle ABF - \angle EBA = 180^\circ - \angle ADF - \angle ECA = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$, ე. ი. T მდებარეობს EFB სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირზე.

ასევე: $\angle EBT = 90^\circ - \angle ABE = 90^\circ - \angle ACE = 90^\circ - \alpha - \beta = \frac{1}{2}\angle EBF$, ე.ი. T არის ETF

რკალის შუა წერტილი.

შევნიშნოთ, რომ T არის ME და NF წრფეების გადაკვეთის წერტილი. მართლაც, E ცენტრის მიმართ ჰომოთეტიით EAC სამკუთხედი აისახება EFA' სამკუთხედზე, ამიტომ M , E და T ერთ წრფეზეა. ასევე F ცენტრის მიმართ ჰომოთეტიით EFA' სამკუთხედი აისახება AFD სამკუთხედზე, ამიტომ F , T და N ერთ წრფეზეა. ასევე $MH \parallel AD$, რადგან ორივე PN წრფის მართობულია. ანალოგიურად, $NH \parallel AC$.

შევნიშნოთ, რომ H არის TMN სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრი. მართლაც, $\angle HMN = \angle A'CD = \beta$, ამიტომ

$\angle TMN = 180^\circ - \angle CME = 180^\circ - 2\angle CAE = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta$, ე.ი. $\angle TMN = 2\angle HMN$.

ანალოგიურად, $\angle MNT = 2\angle MNH = 2\alpha$. შესაბამისად,

$\angle HTE = \angle HTM = \frac{1}{2}\angle NTM = \frac{1}{2}(180^\circ - 2(\alpha + \beta)) = 90^\circ - \alpha - \beta$.

ამრიგად, $\angle NFA = 90^\circ - \angle ADF = 90^\circ - \alpha - \beta = \angle NTH$, ე. ი. $HT \parallel AP$. ამავე დროს $\angle HTE = 90^\circ - \alpha - \beta = \angle EBT$, ე.ი. HT არის BEF სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხევი.

ამოცანა 3.

ვთქვათ, N არის ყველა მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლე. $f: N \rightarrow N$ ფუნქციას ვუწოდოთ კარგი, თუ $f(a)$ ყოფს $b^a - f(b)^{f(a)}$ ყოველი მთელი დადებითი a და b რიცხვებისთვის. განსაზღვრეთ უმცირესი ნამდვილი კონსტანტა c ისეთი, რომ $f(n) \leq cn$ ყოველი კარგი f ფუნქციისთვის და ყოველი მთელი დადებითი n -თვის.

ამოხსნა:

ცხადია, რომ $f(n) | n^n$ ყველა კარგი f ფუნქციისა და ყველა მთელი დადებითი n -ისთვის. ახლა ვაჩვენოთ, რომ, თუ კარგი f არ არის იგივერი ასახვა, მაშინ $f(p) = 1$ ყველა კენტი მარტივი p რიცხვისთვის. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი მარტივი q , რომლისთვისაც $f(q) > 1$. მაშინ $f(q)$ წარმოდგინდება q -ს რაღაც ნატურალური ხარისხით და ნებისმიერი მთელი დადებითი n -ისთვის $q | f(q) | n^q - f(n)^{f(q)}$. ფერმას მცირე თეორემის ძალით გვაქვს: $n^q \equiv n \pmod{q}$ და $f(n)^{f(q)} \equiv f(n) \pmod{q}$, ამიტომ $q | n - f(n)$. რადგან f არ არის იგივერი ასახვა, ამიტომ მხოლოდ სასრული რაოდენობით q რიცხვისთვის შეიძლება გვექონდეს $f(q) > 1$. ახლა ვთქვათ, p არის ნებისმიერი კენტი მარტივი რიცხვი. ვთქვათ, q არის საკმარისად დიდი მარტივი რიცხვი, რომლისთვისაც q არ არის სადარი 1-ის \pmod{p} , ამიტომ $f(p) | q^p - 1^{f(p)}$, საიდანაც ჩანს, რომ $f(p) = 1$.

ვაჩვენოთ, რომ $f(n)$ ყოფს 2-ის ნატურალურ ხარისხს ყველა მთელი დადებითი n -ისთვის. მართლაც, თუ $\frac{f(n)}{p}$ არის კენტი, მაშინ $p | f(n) | p^n - 1^n$, რაც წინააღმდეგობაა. აქედან კერძოდ ჩანს, რომ $f(n) = 1$ ყველა კენტი n -ისთვის.



ახლა ვაჩვენოთ, რომ $f(n) \leq 2^{v_2(n)+2}$ ყველა მთელი დადებითი n -ისთვის. მართლაც, $f(n) | 5^n - 1^n$, ამასთან, ცნობილია, რომ $v_2(5^n - 1) = v_2(n) + 2$ ყველა მთელი დადებითი n -ისთვის.

ამრიგად, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $f(n) \leq 4n$ ყველა მთელი დადებითი n -ისთვის. შეფასების სიზუსტეს ადასტურებს შემდეგი კარგი ფუნქცია:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 2k - 1, k \in N; \\ 16, & n = 4; \\ 2, & n = 2k, k \in N \setminus \{2\}. \end{cases}$$

ამოცანა 4.

ვთქვათ, N მთელი დადებითი რიცხვია. მისი საკუთრივი გამყოფი არის N -ის ისეთი დადებითი გამყოფი, რომელიც N -სგან განსხვავებულია. უსასრულო მიმდევრობა a_1, a_2, \dots შედგება მთელი დადებითი რიცხვებისგან, რომელთაგან თითოეულს აქვს, სულ მცირე, სამი საკუთრივი გამყოფი. თითოეული $n \geq 1$ -სთვის, a_{n+1} არის a_n -ის სამი უდიდესი საკუთრივი გამყოფის ჯამი.

განსაზღვრეთ a_1 -ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა.

ამოხსნა:

S -ით აღვნიშნოთ სიმრავლე ყველა იმ მთელი დადებითი რიცხვისა, რომლებსაც, სულ მცირე, სამი საკუთრივი გამყოფი აქვს, ხოლო $\psi(x)$ იყოს უდიდესი სამი საკუთრივი გამყოფის ჯამი. ამოცანის პირობის თანახმად: $\psi(a_n) = a_{n+1}$.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ, თუ $x = 12^e \cdot 6 \cdot \ell \in S$, სადაც $e, \ell \geq 0$ და $gcd(\ell, 10) = 1$, მაშინ ამოცანის პირობა სრულდება. თუ $e = 0$, მაშინ $\psi(x) = 2l + 3l + l = 6l = x$. თუ $e > 0$, მაშინ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$ ტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ $\psi(x) = \frac{13}{12}x$.

ამრიგად, თუ $x \in S$, მაშინ $\psi(x) \in S$, საიდანაც ინდუქციის გამოყენებით e -ს მიმართ ვღებულობთ, რომ a_1 -ად გამოდგება ნებისმიერი $12^e \cdot 6 \cdot \ell$ ტიპის რიცხვი, სადაც $e, \ell \geq 0$ და $gcd(\ell, 10) = 1$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ a_1 აუცილებლად ასეთი ტიპის რიცხვი უნდა იყოს.

შემდგომ x -ის ქვეშ ვიგულისხმებთ S სიმრავლის ელემენტს, რომელიც შეიძლება მიმდევრობის წევრი არ იყოს.

ლემა 1. ვთქვათ, $x \in S$. თუ $2 | \psi(x)$, მაშინ $2 | x$.

დამტკიცება: თუ რიცხვი კენტია, მაშინ მისი ყველა გამყოფი კენტია. ამიტომ ψ ფუნქციის მნიშვნელობა, როგორც სამი კენტი რიცხვის ჯამი, კენტია.

ლემა 2. ვთქვათ, $x \in S$. თუ $6 | \psi(x)$, მაშინ $6 | x$.

დამტკიცება: ლემა 1-ის გამო, საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა x ლუწია. საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ, თუ $3 \nmid x$, მაშინ $6 \nmid \psi(x)$.

განვიხილოთ შემთხვევები:

- თუ $4 | x$ და d მისი სიდიდით მესამე უდიდესი გამყოფია, მაშინ:

$$\psi(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + d = \frac{3}{4}x + d \equiv d \not\equiv 0 \pmod{3}$$

- ვთქვათ, $4 \nmid x$. p იყოს x -ის უმცირესი მარტივი გამყოფი, რომელიც მეტია 3-ზე. თუ x -ის სიდიდით მესამე უმცირესი გამყოფი არის $2p$, მაშინ:

$$\psi(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{p} + \frac{x}{2p} = \frac{3}{p}x + \frac{x}{2} \equiv \frac{x}{2} \not\equiv 0 \pmod{3}$$

- თუ სიდიდით მესამე უმცირესი გამყოფი არის კენტი მარტივი, მაშინ:

$$\psi(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{p} + \frac{x}{q} \equiv 1 + 0 + 0 \equiv 1 \pmod{2}.$$

ლემა 2 დამტკიცებულია.

ლემა 3. მიმდევრობის ყოველი წევრი n -ზე იყოფა.

დამტკიცება: განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

- თუ $x \in S$ კენტია, მაშინ:

$$\psi(x) < \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)x < x$$

და ლემა 1-ის გამო, $\psi(x)$ კვლავ კენტია.

- თუ $x \in S$ ლუწია და $3 \nmid x$, მაშინ:

$$\psi(x) < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)x < x$$

და ლემა 2-ის გამო, $\psi(x)$ კვლავ 3-ზე არ იყოფა.

აქედან გამომდინარე, თუ მიმდევრობის რომელიმე წევრი კენტია ან ლუწია და 3-ზე არ იყოფა, მაშინ მთელ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა მკაცრად კლებადი იქნება, რაც, ცხადია, შეუძლებელია. ამრიგად, ყველა წევრი იყოფა 2-ზეც და 3-ზეც, ანუ n -ზე. ლემა 3 დამტკიცებულია.

ვთქვათ, ახლა $x \in S$ და x არის n -ის ჯერადი, გვაქვს შემთხვევები:

$$\text{თუ } 4 \mid x \Rightarrow \psi(x) = \frac{13}{12}x,$$

$$\text{თუ } 4 \nmid x \text{ და } 5 \mid x \Rightarrow \psi(x) = \frac{31}{30}x,$$

$$\text{და თუ } 4 \nmid x \text{ და } 5 \nmid x \Rightarrow \psi(x) = x.$$

ჩვენს მიმდევრობაში (სადაც ყველა წევრი n -ის ჯერადია), მეორე შემთხვევა ვერ განხორციელდება, რადგან ამ შემთხვევაში x -ის მომდევნო წევრი $\psi(x) = \frac{31}{30}x$ კენტი იქნება და, ცხადია, n -ის ჯერადი ვერ იქნება. ამრიგად, ყოველი n -თვის გვაქვს:

$$a_{n+1} = \frac{13}{12}a_n \text{ ან } a_{n+1} = a_n.$$

ავიღოთ ის უმცირესი ინდექსი T , რომლის შემდეგაც მიმდევრობა მუდმივია, ანუ

$$a_T = a_{T+1} = a_{T+2} = \dots$$

(ცხადია ასეთი ინდექსი არსებობს, რადგან მიმდევრობის წევრები მთელი დადებითი რიცხვებია და, მაშასადამე, $\frac{13}{12}$ -ზე გამრავლება უსასრულოდ ვერ გაგრძელდება). მივიღეთ, რომ:

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{13}{12}\right)^{\min(n,T)-1}$$

საიდანაც გვაქვს:

$$a_1 = \left(\frac{12}{13}\right)^{T-1} \cdot a_T.$$



როგორც უკვე ვნახეთ, a_T არის n -ის ჯერადი, რომელიც არ იყოფა 4-ზე და 5-ზე. ე.ი. პირველი წევრი შემდეგი სახისაა: $12^e \cdot 6 \cdot \ell$, სადაც $e, \ell \geq 0$ და $\gcd(\ell, 10) = 1$. ამოცანის ამოხსნა დასრულებულია.

პასუხი: $a_1 = 12^e \cdot 6 \cdot \ell \in S$, სადაც $e, \ell \geq 0$ და $\gcd(\ell, 10) = 1$.

ამოცანა 5.

ანო და ვანო თამაშობენ ავსტრალიურ თამაშს — ორი მოთამაშის თამაშს, რომლის წესები დამოკიდებულია დადებით ნამდვილ რიცხვ λ -ზე, რომელიც ორივე მოთამაშისთვის ცნობილია. თამაშის n სვლაზე (დაწყებული $n = 1$ -დან) ხდება შემდეგი:

- თუ n კენთია, ანო ირჩევს არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვ x_n -ს ისე, რომ

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- თუ n ლუწია, ვანო ირჩევს არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვ x_n -ს ისე, რომ

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n$$

თუ მოთამაშეს არ შეუძლია შესაბამისი x_n რიცხვის არჩევა, თამაში სრულდება და მისი მოწინააღმდეგე იგებს. თუ თამაში გრძელდება უსასრულოდ, არცერთი მოთამაშე არაა გამარჯვებული. ყველა არჩეული რიცხვი ცნობილია ორივე მოთამაშისთვის.

განსაზღვრეთ λ -ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ანოს აქვს მოგების სტრატეგია. ასევე, განსაზღვრეთ λ -ს ყველა მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ვანოს აქვს მოგების სტრატეგია.

ამოხსნა:

ვაჩვენოთ, რომ ანოს აქვს მოგების სტრატეგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda > 1/\sqrt{2}$. ამისათვის ჯერ ვაჩვენოთ, რომ, თუ $\lambda \geq 1/\sqrt{2}$, მაშინ ანოს შეუძლია ისე ითამაშოს, რომ არ წააგოს. თუ ანო აირჩევს 0-ებს თავის $2i + 1$ -ე სვლაზე, სადაც $i = 0, 1, \dots, k - 1$, ანუ, თუ $x_{2i+1} = 0, i = 0, 1, \dots, k - 1$, მაშინ $n = 2k + 1$ -სვლისთვის გვექნება:

$$x_1 + \dots + x_{2k} = 0 + x_2 + 0 + x_4 + \dots + x_{2k}.$$

კოში-შვარცის უტოლობის ძალით, ვღებულობთ:

$$x_1 + \dots + x_{2k} \leq k \cdot \sqrt{\frac{x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{2k}^2}{k}}.$$

რადგან ვანოს „ლუწ“ სვლებზე სრულდება

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2k}^2 \leq 2k,$$

ამიტომ:

$$x_1 + \dots + x_{2k} \leq \sqrt{2} \cdot k < \lambda \cdot (2k + 1).$$

ამგვარად, $(2k + 1)$ -ე სვლაზე ანოს შეუძლია აირჩიოს რიცხვი $[0, \lambda \cdot (2k + 1) - \sqrt{2} \cdot k]$ არაცარიელი ინტერვალიდან, ანუ ანო არასდროს წააგებს ასეთი სტრატეგიით თუ ითამაშებს. თუმცა, თუ $\lambda > 1/\sqrt{2}$ ანოს შეუძლია მოგება. მართლაც, ამ შემთხვევაში საკმარისად დიდი k -თვის შესრულება უტოლობა: $\sqrt{2k+2} < \lambda \cdot (2k + 1) - \sqrt{2} \cdot k$, ე.ი. $\sqrt{2k+2} \in [0, \lambda \cdot (2k + 1) - \sqrt{2} \cdot k]$ და ამიტომ $(2k + 1)$ -ე სვლაზე ანოს შეუძლია აირჩიოს $\sqrt{2k+2}$ -ზე დიდი რიცხვი. რადგან $x_{2k+1}^2 > 2k + 2$ -ზე, ამიტომ, ცხადია, ვანოს $2k + 2$ -ე სვლაზე არ შეუძლია ისეთი რიცხვის არჩევა, რომ:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2k+1}^2 + x_{2k+2}^2 \leq 2k + 2.$$

მაშასადამე, ვანო ვერ აკეთებს $2k + 2$ -ე სვლას და ამიტომ ანო იგებს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ, თუ $\lambda \leq 1/\sqrt{2}$, მაშინ ვანოს აქვს არწაგების სტრატეგია.

ვანო თითოეულ ლუწ სვლაზე იღებს მაქსიმალურ შესაძლო რიცხვს, კერძოდ:

$$x_{2k+2} = \sqrt{2 - x_{2k+1}^2}, i = 0, 1, \dots, k - 1.$$

ვინაიდან $x_{2k+1}^2 + x_{2k+2}^2 = 2$, ამიტომ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2k}^2 = 2k$. ამის გამო, ვანოს ყოველთვის აქვს სვლა (თუ ანომაც შეძლო მანამდე სვლების გაკეთება). პირობის თანახმად, ანოს $(2k + 1)$ -ე სვლისთვის სჭირდება ისეთი რიცხვი x_{2k+1} , რომ:

$$x_1 + \dots + x_{2k+1} \leq \lambda(2k + 1).$$

ვინაიდან $t + \sqrt{2 - t^2} \geq \sqrt{2}$, ყოველი $t \geq 0$, ამიტომ, ვანოს სტრატეგიის გამო, $x_{2k+1} + x_{2k+2} \geq \sqrt{2}$, $i = 0, 1, \dots, k - 1$ და ვღებულობთ:

$$\lambda \cdot (2k + 1) \geq x_1 + \dots + x_{2k+1} + x_{2k+1} \geq \sqrt{2} \cdot k + x_{2k+1}$$

შესაბამისად:

$$x_{2k+1} \leq \lambda(2k + 1) - \sqrt{2} \cdot k < \sqrt{2}.$$

ამის გამო, ვანოს შემდეგ ლუწ სვლაზე შეუძლია აირჩიოს

$x_{2k+2} = \sqrt{2 - x_{2k+1}^2}$ და ამრიგად არასდროს წააგებს. თუ დამატებით $\lambda < 1/\sqrt{2}$, მაშინ საკმარისად დიდი k -თვის გვექნება:

$$\lambda \cdot (2k + 1) - \sqrt{2} \cdot k < 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ ანო ვერ შეძლებს $2k + 1$ -ე სვლის გაკეთებას და ვანო მოიგებს.

პასუხი: ანოს აქვს მოგების სტრატეგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda > 1/\sqrt{2}$.

ვანოს აქვს მოგების სტრატეგია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lambda < 1/\sqrt{2}$.

როცა $\lambda = 1/\sqrt{2}$, არცერთ მოთამაშეს არ შეუძლია გამარჯვების გარანტირება.

ამოცანა 6.

მოცემულია 2025×2025 ზომის ცხრილი, რომელიც შედგება ერთეულოვანი კვადრატებისგან. თედოს სურს განათავსოს ცხრილზე მართკუთხედის ფორმის ფილები, შესაძლოა სხვადასხვა ზომის, ისე, რომ თითოეული ფილის ყველა გვერდი ემთხვეოდეს ცხრილის ხაზებს და ყოველი ერთეულოვანი კვადრატი დაფარული იყოს არა უმეტეს ერთი ფილით.

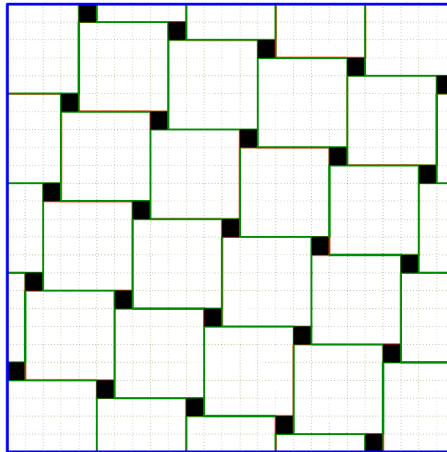
განსაზღვრეთ ფილების მინიმალური რაოდენობა, რომელიც თედომ უნდა განათავსოს ისე, რომ ცხრილის თითოეულ სტრიქონში და თითოეულ სვეტში ზუსტად ერთი ერთეულოვანი კვადრატი იყოს დაუფარავი, ანუ არ იყოს დაფარული არცერთი ფილით.

ამოხსნა:

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $n \times n$ ზომის კვადრატი, სადაც $n = k^2$. ვაჩვენოთ, რომ ამოცანის პასუხია $k^2 + 2k - 3$.

ჯერ მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ თედოს სურვილის დასაკმაყოფილებლად საკმარისია $k^2 + 2k - 3$ ცალი ფილა.

ამისათვის ავაგოთ $(k - 1)^2$ ცალი $k \times k$ კვადრატული ფილა $n \times n$ კვადრატის „შიგნით“ და დამატებით $4(k - 1)$ ფილა საზღვარზე ისე, რომ თითოეულ რიგსა და სვეტში ზუსტად ერთი უჯრა დარჩეს დაუფარავი. სურათზე მოცემულია მაგალითი $k = 5$ -ის შემთხვევაში.



სულ გვექნება $(k - 1)^2 + 4(k - 1) = k^2 + 2k - 3$ ფილა და ამიტომ ფილების მინიმალური რაოდენობა ნაკლებია ან ტოლი $k^2 + 2k - 3$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ყოველი სასურველი დაფარვისთვის თედოს დასჭირდება, სულ მცირე, $k^2 + 2k - 3$ ფილა.

ვუწოდოთ დაფარვის გარეშე დარჩენილ ერთეულოვან კვადრატს „შავი“ უჯრა. პირობის თანახმად, ყოველ სტრიქონში და ყოველ სვეტში ზუსტად ერთი შავი უჯრაა. ამიტომ, თუ სვეტებს გადავნიშნავთ რიცხვებით $1, 2, \dots, n$ -ით მარცხნიდან მარჯვნივ, ხოლო სტრიქონებს ქვემოდან ზემოთ, მაშინ არსებობს $1, 2, \dots, n$ -ის ისეთი გადანაცვლება π , რომ i სვეტის შავი კვადრეტი იქნება $\pi(i)$ სტრიქონში. ამრიგად, შავი კვადრატების კოორდინატებია: $(i, \pi(i)), i = 1, 2, \dots, n$.

ლემა. ვთქვათ, p_1, p_2, \dots, p_n არის $1, 2, \dots, n$ მიმდევრობის რაიმე გადანაცვლება, რომელშიც ყველაზე გრძელი ზრდადი ქვემიმდევრობის სიგრძეა a , ხოლო ყველაზე გრძელი კლებადი ქვემიმდევრობის სიგრძეა b . მაშინ $ab \geq n$.

დამტკიცება: ყოველი $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ -სთვის განვსაზღვროთ ორი რიცხვი:

- $I(i)$ იყოს მაქსიმალური სიგრძე ზრდადი ქვემიმდევრობისა, რომელიც მთავრდება p_i -ზე;
 - $D(i)$ იყოს მაქსიმალური სიგრძე კლებადი ქვემიმდევრობისა, რომელიც მთავრდება p_i -ზე.
- რადგან

$$1 \leq I(i) \leq a, \quad 1 \leq D(i) \leq b,$$

ამიტომ შემდეგი n -ცალი წყვილი

$$(I(i), D(i)), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ეკუთვნის სიმრავლეს:

$$\{1, 2, \dots, a\} \times \{1, 2, \dots, b\}.$$

ამ სიმრავლეში ab ერთმანეთისაგან განსხვავებული წყვილია. ცხადია, რომ, თუ $i \neq j$, მაშინ $(I(i), D(i)) \neq (I(j), D(j))$. ამრიგად $\{1, 2, \dots, a\} \times \{1, 2, \dots, b\}$ წყვილთა სიმრავლეში გვაქვს n ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული წყვილი, საიდანაც ვიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

ამ ლემის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ:

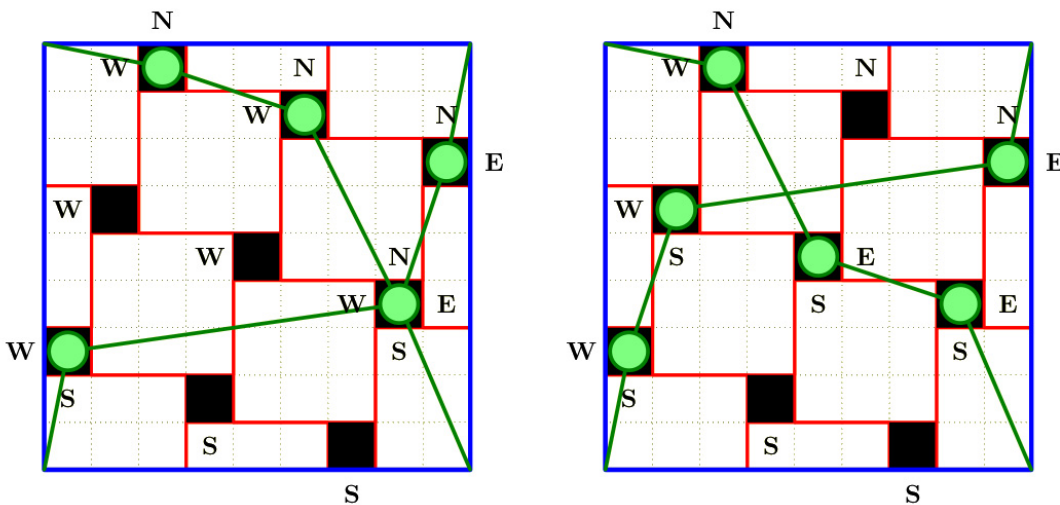
$$a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b} \geq 2k.$$

აღვნიშნოთ მაქსიმალური სიგრძის ზრდადი და კლებადი ქვემიმდევრობები, შესაბამისად, I და D ასოებით. ამრიგად, არსებობს ისეთი ინდექსები $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_a \leq n$, რომ $\pi(i_1) < \pi(i_2) < \dots < \pi(i_a)$. ასევე, არსებობს ინდექსები $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_b \leq n$ ისეთი, რომ $\pi(j_1) > \pi(j_2) > \dots > \pi(j_b)$.

ვთქვათ, $SW = (1, 1), SE = (n, 1), NW = (1, n), NE = (n, n)$. შავი $(i, \pi(i))$ უჯრის ცენტრი აღვნიშნოთ P_i წერტილით და განვიხილოთ ტეხილი $SW, P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_a}, NE$. ასევე განვიხილოთ ტეხილი $NW, P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_b}, SE$.

- აგებიდან გამომდინარე, ცხადია, ამ ორ ტეხილს დაფის შიგნით აქვს არა უმეტეს ერთი გადაკვეთის წერტილი და ისინი დაფას ოთხ ნაწილად ყოფენ; დავარქვათ ამ ნაწილებს ჩრდილოეთ (N), აღმოსავლეთ (E), სამხრეთ (S) და დასავლეთ (W) ნაწილები.
- ჩრდილოეთ ნაწილში მყოფ თითოეულ შავ უჯრას ზემოდან დავაწეროთ ასო N (თუ შავი უჯრა ბოლო სტრიქონშია, ეს ასო დაფის გარეთ აღმოჩნდება). ანალოგიურად, აღმოსავლეთ ნაწილის ყველა შავ უჯრას მარჯვნივ მივუწეროთ ასო E , სამხრეთ ნაწილისას ქვემოთ – S და დასავლეთ ნაწილისას მარცხნივ – W .

ის შავი უჯრა, რომელიც ტეხილის წვეროა, ანუ რომელიც დაფის ორი ნაწილის საზღვარზე მდებარეობს, მივაკუთვნოთ ორივე ნაწილს. ამრიგად, თუ უჯრა ორივე ტეხილს ეკუთვნის, მის ყველა გვერდს შესაბამისი ასო მიეწერება.



აღვნიშნოთ f -ით ყველა ასოს რაოდენობა. ადვილი საჩვენებელია, რომ, თუ ორი ტეხილი არ შეიცავს საერთო შავ უჯრას, მაშინ $f = n + a + b$, ხოლო, თუ ისინი შეიცავენ საერთო შავ უჯრას, მაშინ $f = n + a + b + 1$. მართლაც, სულ გვაქვს n ცალი შავი უჯრა და თითოეულ შავ უჯრას ერთი ასო აქვს მიწერილი. ამასთან, თუ შავი უჯრა ორი ნაწილის საზღვარზეა, მას დამატებით კიდევ ერთი ასო აქვს მიწერილი. ამრიგად, თუ ტეხილები არ შეიცავენ საერთო შავ უჯრას, მაშინ ასოების საერთო რაოდენობა იქნება $n + a + b$, ხოლო, თუ შეიცავენ – $n + a + b + 1$.

ახლა შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერ დამფარავ ფილაში (ანუ მართკუთხედში, რომელიც შავ უჯრას არ შეიცავს), შეიძლება ეწეროს არა უმეტეს ერთი ასო. მართლაც, თუ ეს ორი ასო ერთნაირია, მაგალითად, თუ ორივე არის N , მაშინ გამოვსა, რომ ფილის ქვემოთა სტრიქონი ორ შავ უჯრას შეიცავს, რაც პირობის გამო დაუშვებელია.

თუ ერთ ფილაზე წერია, მაგალითად, N და E , მაშინ არსებობს შავი უჯრა B_N , რომელიც დგას N -ასოიანი უჯრის უშუალოდ ქვემოთ, და შავი უჯრა B_E , რომელიც დგას E -ასოიანი უჯრის უშუალოდ მარცხნივ (ამიტომ B_N მდებარეობს ფილის ქვედა გვერდის ქვემოთ, ხოლო B_E – ფილის მარცხენა გვერდის მარცხნივ). ცხადია, რომ, თუ შავი უჯრა B_N ეკუთვნის



ჩრდილოეთ ნაწილს, მაშინ B_N -ის ზემოთ მდებარე ყველა უჯრა (ამ სვეტში) ჩრდილოეთ ნაწილში იქნება; ასევე, თუ B_E ეკუთვნის აღმოსავლეთ ნაწილს, მაშინ B_E -ის მარჯვნივ მდებარე ყველა უჯრა (ამ სტრიქონში) აღმოსავლეთ ნაწილში იქნება. ამიტომ, ფილის შესაბამისი სვეტისა და სტრიქონის გადაკვეთაზე მდებარე ერთეულოვანი უჯრა ერთდროულად ჩრდილოეთ და აღმოსავლეთ ნაწილში აღმოჩნდება, რაც შეუძლებელია. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ ერთ ფილაზე არ შეიძლება ეწეროს განსხვავებულ ასოთა კომბინაცია. ამრიგად ვაჩვენეთ, რომ ნებისმიერ დამფარავ ფილაზე არა უმეტეს ერთი ასოა.

რადგან ნებისმიერ დამფარავ ფილაზე შეიძლება ეწეროს არა უმეტეს ერთი ასო, ამიტომ ფილების რაოდენობა, მინიმუმ, ტოლია იმ ასოების რაოდენობის, რომლებიც დაფის შიგნით იქნება. ცხადია, რომ დაფის გარეთ შეიძლება აღმოჩნდეს მაქსიმუმ 4 ასო (თითო მიმართულებით ერთი). ამიტომ, თუ ზემოთ აგებულ ტეხილებს საერთო შავი უჯრა აქვთ, მაშინ ფილების რაოდენობა მეტი ან ტოლი იქნება, ვიდრე $f - 4$ ანუ, ვიდრე $n + a + b - 3$.

თუ ტეხილებს საერთო შავი უჯრა არ გააჩნიათ, მაშინ ფილების რაოდენობა არანაკლებ $f - 4 = n + a + b - 4$ -ია. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში არსებობს ფილა, რომელზეც არცერთი ასო არ წერია (მაგალითად, იმ შემთხვევაში, როცა ორი ტეხილი დაფის შიგა წერტილში იკვეთება, გადაკვეთის წერტილის შემცველ ფილაზე არცერთი ასო არ წერია, რადგან ეს ფილა ოთხივე ნაწილს ეკუთვნის და მისი მოსაზღვრე შავი უჯრები ასოების დაწერას გამოიწვევს ამ ფილის გარეთ). ე.ი. ამ შემთხვევაშიც საჭიროა არანაკლებ $1 + f - 4 = n + a + b - 3$ ცალი ფილა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $a + b \geq 2k$ და ამრიგად ვღებულობთ ფილების რაოდენობის ქვემოდან შეფასებას $k^2 + 2k - 3$. ჩვენს ამოცანაში $k = 45$ და ამიტომ პასუხია 2112.

პასუხი: ფილების მინიმალური რაოდენობაა 2112.

ავტორების ელექტრონული მისამართები:
giorgi.chelidze@kiu.edu.ge
givi.nadibaidze@tsu.ge

წინა ნომრის ამოცანების ამოხსნები



ამოცანა 1

იპოვეთ ყველა კვადრატული სამწევრი $f(x) = x^2 + ax + b$, რომელთათვისაც $f(f(-1)) = f(f(0)) = f(f(1))$.

ამოხსნა: რადგანაც კვადრატული სამწევრი კონკრეტულ მნიშვნელობას ვერ მიიღებს ორზე მეტ წერტილში, ამიტომ $f(-1)$, $f(0)$ და $f(1)$ რიცხვებს შორის არსებობს ერთმანეთის ტოლი რიცხვები.

ვთქვათ, $f(-1) = f(0)$, მაშინ $1 - a + b = b$, $a = 1$ და

$$b^2 + 2b = f(b) = f(f(0)) = f(f(1)) = f(b+2) = b^2 + 6b + 6,$$

საიდანაც $b = -3/2$.

თუ $f(1) = f(0)$, მაშინ $1 + a + b = b$, $a = -1$ და $b^2 = f(b) = f(f(0)) = f(f(-1)) = f(b+2) = b^2 + 4b + 2$, საიდანაც $b = -1/2$.

თუ $f(-1) = f(1)$, მაშინ $1 - a + b = 1 + a + b$, $a = 0$ და $b^2 + b = f(b) = f(f(0)) = f(f(1)) = f(b+1) = b^2 + 3b + 1$, საიდანაც $b = -1/2$.

პასუხი: $x^2 - x - \frac{1}{2}$; $x^2 + x - \frac{3}{2}$; $x^2 - \frac{1}{2}$.

ამოცანა 2

ამოხსნა: ნატურალური რიცხვი ვერ იქნება სრული კვადრატის, თუ ის ბოლოვდება 3-ით. ადვილი შესამჩნევია, რომ S_n , როცა $n \geq 4$ ბოლოვდება 3-ით. მართლაც, $S_4 = 33$, ხოლო $n!$ ბოლოვდება ნულით, როცა $n \geq 5$. შევნიშნოთ, რომ S_1 და S_3 წარმოადგენენ სრულ კვადრატებს.

პასუხი: $n = 1$, $n = 3$.

იპოვეთ ყველა ნატურალური n , რომელთათვისაც ჯამი $S_n = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$ არის რაიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატი.

ამოცანა 3

$f(x)$ კვადრატული სამწევრისათვის ცნობილია, რომ აქვს ორი განსხვავებული ფესვი და ნებისმიერი x და y რიცხვებისათვის აკმაყოფილებს $f(x^2 + y^2) \geq f(2xy)$ უტოლობას. შესაძლებელია თუ არა $f(x)$ კვადრატულ სამწევრს ჰქონდეს უარყოფითი ფესვი?

ამოხსნა: დავუშვათ საწინააღმდეგო. $f(x)$ -ის ორივე ფესვი არაუარყოფითია. როცა $y = 0$ გვექნება, რომ ნებისმიერი x -ისთვის სამართლიანია უტოლობა $f(x^2) \geq f(0)$. მაშასადამე, ნებისმიერი $t \geq 0$ რიცხვისათვის $f(t) \geq 0$ და პარაბოლის შტოები ზემოთაა მიმართული. რადგან წვეროს t_0 აბსცისა



დადებითია, ერთი მხრივ, შესრულდება $f(t_0) \geq f(0)$ უტოლობა, მეორე მხრივ, $f(t_0) < f(0)$ უტოლობა. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ამოცანა 4

ამოხსნა: ვაჩვენოთ, რომ n -ნიშნა რიცხვები, რომელთა წარმოდგენაში მონაწილეობენ მხოლოდ 1 და 2 ციფრები, 2^n -ზე გაყოფისას სხვადასხვა ნაშთს იძლევიან. მართლაც, ორი ასეთი რიცხვის სხვაობა d შეიძლება ასე ჩაიწეროს: $a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \dots + a_2 10 + a_1$, სადაც ყოველი a_i არის 0 ან ± 1 . ვთქვათ, k უმცირესი ნომერია, რომლისთვისაც $a_k \neq 0$. ცხადია, რომ d იყოფა 2^{k-1} -ზე, მაგრამ არ იყოფა 2^k -ზე. d იყოფა 2^n -ზე მხოლოდ მაშინ, როცა $d = 0$. მაშასადამე, ზემოთ აღწერილი რიცხვებიდან ერთ-ერთი გაიყოფა უნაშთოდ 2^n -ზე.

დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს მხოლოდ 1 და 2 ციფრებისაგან შედგენილი რიცხვი, რომელიც იყოფა 2^n -ზე.

ამოცანა 5

ვთქვათ, a, b და c წარმოადგენენ ABC სამკუთხედის გვერდებს, ხოლო \vec{n}_a, \vec{n}_b და \vec{n}_c ერთეულოვანი სიგრძის ვექტორებია, რომლებიც, შესაბამისად, a, b და c გვერდების პერპენდიკულარულნი არიან მიმართულებით სამკუთხედის გარე მხარეს. დაამტკიცეთ, რომ

$$a^3 \vec{n}_a + b^3 \vec{n}_b + c^3 \vec{n}_c = 12S \cdot \vec{MO},$$

სადაც S სამკუთხედის ფართობია, M სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია, ხოლო O ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია

ამოხსნა: მოცემული ვექტორული ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამტკიცოთ ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეში მოცემული ვექტორების პროექციების ტოლობა BC, CA და AC წრფეებზე (ნიშნის გათვალისწინებით). დავამტკიცოთ BC წრფისათვის. დადებით მიმართულებად ავირჩიოთ BC სხივის მიმართულება. ვთქვათ, P წარმოადგენს A წერტილის პროექციას BC წრფეზე. N წერტილი იყოს BC მონაკვეთის შუა წერტილი. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $AB^2 - BP^2 = AC^2 - CP^2$ და $\vec{PN} = \vec{PC} + \vec{CN}$ ტოლობებს, დავასკვნით, რომ \vec{PN} ვექტორის პროექცია BC წრფეზე ტოლია $(b^2 + a^2 - c^2) / 2a - (a/2) = (b^2 - c^2) / 2a$.

ვინაიდან $NM : NA = 1 : 3$ დავასკვნით, რომ \vec{MO} ვექტორის პროექცია BC წრფეზე ტოლია $\vec{PN} / 3 = (b^2 - c^2) / 6a$.

შევნიშნოთ, რომ $a^3 \vec{n}_a + b^3 \vec{n}_b + c^3 \vec{n}_c$ ვექტორის გეგმილი BC წრფეზე ტოლია:

$$b^3 \sin \gamma - c^3 \sin \beta = \frac{b^3 c - c^3 b}{2R} = \frac{abc}{2R} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a} = 2S \frac{b^2 - c^2}{a},$$

სადაც γ და β შესაბამისად, სამკუთხედის C და B კუთხეა.

ამოცანა 6

ამოხსნა: გავავლოთ წრეწირის ცენტრებზე საკოორდინატო ღერძი და აღვნიშნოთ ამ წრფის პირველ წრეწირთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები a_1 და a_2 -ით, ხოლო მეორე წრეწირთან b_1 და b_2 -ით. ვთქვათ, x აგებულ წრფეზე მდებარე O წერტილის (რომელსაც ქვემოთ შევარჩევთ) კოორდინატია. თუ განვიხლავთ ინვერსიას ცენტრით O წერტილში და k -ს ტოლი ხარისხით, მაშინ მოცემული წრეწირები აისახებიან წრეწირებში, რომელთა დიამეტრები აგებულ ღერძზე მდებარეობს და ამ დიამეტრების ბოლოების კოორდინატები, შესაბამისად, ტოლია:

$$a'_1 = x + \frac{k}{a_1 - x}, \quad a'_2 = x + \frac{k}{a_2 - x} \quad \text{და} \quad b'_1 = x + \frac{k}{b_1 - x}, \quad b'_2 = x + \frac{k}{b_2 - x}.$$

მიღებული წრეწირები იქნება კონცენტრული, თუ $(a'_1 + a'_2) / 2 = (b'_1 + b'_2) / 2$. O წერტილის შესარჩევად მივიღებთ:

$$\frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} = \frac{1}{b_1 - x} + \frac{1}{b_2 - x}$$

განტოლებას. გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$(b_1 + b_2 - a_1 - a_2)x^2 + 2(a_1a_2 - b_1b_2)x + b_1b_2(a_1 + a_2) - a_1a_2(b_1 + b_2) = 0$$

კვადრატულ განტოლებას, რომლის დისკრიმინანტი ტოლია

$$4(b_1 - a_1)(b_1 - a_2)(b_2 - a_1)(b_2 - a_2).$$

შევნიშნოთ, რომ, ვინაიდან მოცემული წრეწირები არ იკვეთება, მიღებული კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი დადებითია, მაშასადამე, O წერტილის შერჩევა საჭირო თვისებით შესაძლებელია.

დაამტკიცეთ, რომ სიბრტყეზე მოცემული ორი არაგადამკვეთი წრეწირი ინვერსიის საშუალებით შეგვიძლია გადავიყვანოთ ორ კონცენტრულ წრეწირში.

ამოცანა 7

დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ $2n$ -კუთხა ამოზნექილ მრავალკუთხედში მოიძებნება დიაგონალი, რომელიც მრავალკუთხედის არცერთი გვერდის პარალელური არ არის.

ამოხსნა: $2n$ -კუთხა ამოზნექილი მრავალკუთხედის დიაგონალების რაოდენობა ტოლია $2n(2n-3)/2 = n(2n-3)$. მოცემული გვერდის პარალელური დიაგონალების რაოდენობა არ აღემატება $n-2$. ამიტომ ყველა იმ დიაგონალების საერთო რაოდენობა, რომლებიც, შესაბამისად, რომელიღაც გვერდის პარალელურია, არ აღემატება $2n(n-2)$. ვინაიდან $2n(n-2) < n(2n-3)$, ამიტომ მოიძებნება დიაგონალი, რომელიც არ არის არცერთი გვერდის პარალელური.

მასალა მოამზადეს: თენგიზ კოპალიანმა და ბეჟან ღვაბერძემ

ახალი ამოცანები

ამოცანა 1. მოცემულია მიმდევრობა $a_n = n!(n^2 - 2025n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$. იპოვეთ ამ მიმდევრობის პირველი 2025 წევრის ჯამი.

ამოცანა 2. არსებობს თუ არა საკოორდინატო სისტემაში წერტილი, რომლის მიმართაც $f(x) = \frac{1}{2^x + 1}$ ფუნქციის გრაფიკი იქნება სიმეტრიული?

ამოცანა 3. მოცემულია მთელკოეფიციენტებიანი $p(x)$ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი n მეტია 5-ზე და, ამავე დროს, მას გააჩნია n განსხვავებული მთელი ფესვი. აჩვენეთ, რომ $p(x) + 3$ მრავალწევრს გააჩნია n განსხვავებული ნამდვილი ფესვი.

ამოცანა 4. $ax^2 + bx + c$ კვადრატული სამწევრის მნიშვნელობები $[0; 1]$ სეგმენტზე მოდულით არ აღემატება 1-ს. რა უდიდესი მნიშვნელობის მიღება შეუძლია ამ პირობებში $|a| + |b| + |c|$ გამოსახულებას?

ამოცანა 5. დაამტკიცეთ, რომ ამოზნექილი ცხრაკუთხედის წვეროებს შორის მოიძებნება სამი, რომლებიც ქმნიან ისეთ ბლაგვკუთხა სამკუთხედს, რომლის არცერთი გვერდი არ ემთხვევა ცხრაკუთხედის გვერდს.

ამოცანა 6. 1-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირში გავლებულია რამდენიმე ქორდა. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ნებისმიერი დიამეტრი კვეთს არა უმეტეს k ქორდას, მაშინ ყველა გავლებული ქორდის სიგრძეთა ჯამი ნაკლებია πk -ზე.

ამოცანა 7. დაამტკიცეთ, რომ ამოზნექილი მრავალკუთხედისათვის შემდეგი ორი წინადადება ტოლფასია:

1) მრავალკუთხედს გააჩნია სიმეტრიის ცენტრი; 2) ფიგურა შესაძლებელია დაიჭრას პარალელოგრამებად.

მასალა მოამზადეს: თენგიზ კოპალიანი და ბეჟან ლვაბერძემ

ინსტრუქცია ავტორებისთვის

1. სტატია აკრეფილი უნდა იყოს Sylfaen-ში, შრიფტის ზომა 11, სტრიქონებს შორის ინტერვალი 1,5, სიტყვებს შორის 1 ინტერვალი, გვერდის მინდვრები – Normal.
2. სტატია ფორმდება შემდეგნაირად: სტატიის სათაური (შრიფტის ზომა 14 Bold), სახელი და გვარი (შრიფტის ზომა 12 Bold), წოდება, თანამდებობა, სამუშაო ადგილი (შრიფტის ზომა 11). ავტორ(ებ)ის/მთარგმნელ(ებ)ის ფოტოსურათი თავსდება სათაურის გვერდით, მარჯვენა მხარეს.
3. ფორმულები და სიმბოლოები იკრიფება Microsoft Eq-ით. თუ ფორმულა ორ სტრიქონს იკავებს, უნდა გაიყოს (რედაქტირების გადავილების მიზნით).
4. ქვესათაური გამოიყოფა იმავე ზომის Bold შრიფტით. ტექსტი გრძელდება იმავე სტრიქონზე.
5. აბზაცისათვის გამოიყენება Tab.
6. ნახატები, ნახაზები, ცხრილები და სხვა არატექსტური გამოსახულებები უნდა წარმოადგენდეს მაღალი გარჩევადობის ნახატის ტიპის ჩანართებს. ისინი უნდა იყოს გადანომრილი, შესაბამისი მითითება გაკეთდება ტექსტში (შინაარსობრივი და ვიზუალური მხარის კორექტირებისათვის). გრაფიკულ გამოსახულებაზე, მაგ. ნახ. 1, წარწერა კეთდება 10 ზომის შრიფტით.
7. ლიტერატურის ციტირება ხდება ქრონოლოგიურად (და არა ავტორის გვარების ალფაბეტის შესაბამისად): სტატიის ბოლოს, შუაში, იწერება – ლიტერატურა, [] სიმბოლოში იწერება ნომერი (ასეთივე აღნიშვნა იხმარება ტექსტში), გვარი და ინიციალები, წიგნის, სტატიის (ან ინტერნეტრესურსის მისამართი) სრული ბიბლიოგრაფიული მონაცემები: გამომცემლობა (წიგნის შემთხვევაში), ტომი, ნომერი, გვერდები, წელი. ლიტერატურის მითითება ხდება იმ ენაზე, რომელი წყაროთიც ავტორი სარგებლობდა.
8. ტექსტური ჩანართები გაკეთდეს Tex Box-ის საშუალებით, რომელშიც, ისევე როგორც მთელ ტექსტში, კიდევები სწორდება მარჯვნივ და მარცხნივ ფორმატირების საშუალებით.
9. Word ფაილთან ერთად ავტორმა უნდა წარმოადგინოს pdf ფაილიც, რითაც მიაწვდის რედაქტორს სტატიის ვიზუალურ მხარეზე (აქ იგულისხმება ის, რომ ჩანართებმა არ უნდა დაიკავოს გვერდის მნიშვნელოვანი ნაწილი, ე.ი. ნახატის ტიპის ჩანართები არ უნდა იყოს დიდი ან ბევრი, ან არ დარჩეს გვერდზე ტექსტის გარეშე ბევრი თავისუფალი ადგილი).
10. გვერდები არ ინომრება.
11. ტექსტში თეორემა, დებულება, განმარტება ან სხვა მნიშვნელოვანი ცნება (ავტორის შეხედულებისამებრ) გამოიყოფა Italic-ით. შრიფტის განსხვავებული ფერი ტექსტში არ იხმარება.
12. თეორემის, დებულების დამტკიცების დაწყება ან დამთავრება რაიმე ნიშნით არ გამოიყოფა.
13. სტატიის ბოლოს, მარჯვენა კუთხეში, 10 ზომის შრიფტით მიუთითეთ ავტორის ელექტრონული მისამართი. კორპორაციული ელექტრონული ფოსტის გამოყენება სავალდებულოა თსუ-ს თანამშრომლებისთვის.

გამომცემლობის რედაქტორი
დამკაბადონებელი
გარეკანის დიზაინერი
გამოცემის მენეჯერი

მარინე ვარამაშვილი
ლალი კურდღელაშვილი
მარიამ ებრალიძე
მარია ერქომაიშვილი

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 1
1, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179
Tel 995(32) 225 04 84, 6284/6279
<https://www.tsu.ge/ka/publishing-house>

