

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

დოქტორანტურის საგანმანათლებლო პროგრამა მათემატიკა

ირაკლი სიხარულიძე

ფსევდონალიზური ფუნქციებისა და დიფერენციალური ფორმების
სივრცეთა და მათ კონათა ზოგიერთი თვისების შესახებ

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: გრიგორი გიორგაძე
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი

თბილისი
2026 წელი

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University
Faculty of Exact and Natural Sciences

Doctoral Program: Mathematics

Irakli Sikharulidze

**On Some Properties of Spaces of Pseudoanalytic Functions and Differential
Forms and Their Sheaves**

The thesis work is performed to obtain a PhD academic degree in Mathematics

Scientific Supervisor: Grigori Giorgadze
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Associated professor

Tbilisi
2026 Year

აბსტრაქტი

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლისაგან, სამი ძირითადი თავისა და დასკვნისაგან. შესავალში მოყვანილია ზოგიერთი ცნება და დამხმარე დებულება ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა თეორიიდან, ასევე, განმარტებულია რამდენიმე მნიშვნელოვანი ცნება დასტათა თეორიიდან. პირველი ნაწილი ეძღვნება 2-წინარეკონებისა და წინარედასტების თეორიის გამოყენებას ფსევდოანალიზური ფუნქციების შესწავლაში, რის მთავარ მიზანსაც წარმოადგენს ყველა ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა სიმრავლის მათ შორის ფსევდოგაწარმოებებთან ერთად გამაერთიანებელი სტრუქტურით აღჭურვა; კერძოდ, კომპლექსური სიბრტყის ყოველი ღია ქვესიმრავლისათვის განისაზღვრება კატეგორია, რომლის ობიექტებიც ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეებია, ხოლო ორ ობიექტს შორის მორფიზმი კი განისაზღვრება ფსევდოგაწარმოების ცნებაზე დაყრდნობით; ნაჩვენები არის რომ მოყვანილი შესაბამება ბუნებრივად გავრცელებადია 2-წინარეკონამდე, ე.ი., ბუნებრივად განისაზღვრება ღია ქვესიმრავლეთა ჩართვებისათვის სათანადო შეზღუდვის ფუნქტორები და ნაჩვენებია, რომ ამგვარად მიღებული 2-წინარეკონის შესაბამისი ფიბრირებული კატეგორია წინარედასტაა; განიხილება ამ წინარედასტაში დაწვევის მონაცემის ეფექტურობის საკითხი, რომელიც დაკავშირებულია დაწვევის მონაცემთან დაკავშირებული კარლემანბერს-ვეკუას განტოლების კოეფიციენტების დაშვებადობასთან; კონათა კოჰომოლოგიის გამოყენებით ნაჩვენებია ფსევდოგაწარმოების ოპერატორის სურექციულობის დამოკიდებულება შესაბამისი ფსევდოანალიზური ფუნქციების განსაზღვრის არის ტოპოლოგიაზე. მეორე ნაწილი ეძღვნება გარკვეული ტიპის განზოგადებული ანალიზური ფუნქციის ცნების განზოგადობას კომპლექსურ მრავალსახეობებზე განსაზღვრული დიფერენციალური ფორმებისათვის სათანადო კონათა ჰომომორფიზმის მეშვეობით, განისაზღვრება ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონა და განისაზღვრება დოლბოს კოჰომოლოგიის განზოგადობა; ნაჩვენებია, რომ ამ კონისთვის სამართლიანია კლასიკური დოლბოს თეორემის ანალოგი. მესამე ნაწილი ეძღვნება რიმანის ზედაპირებზე ფსევდოანალიზური ფუნქციების ყლორტების ფსევდოანალიზურ გაგრძელებას წირის გასწვრივ, კერძოდ განისაზღვრება სათანადო კონა და წირის გასწვრივ გაგრძელების საკითხი დაკავშირებულია ამ წირის მოცემული კონის ეტალურ სივრცეში აწევასთან, ისევე, როგორც ეს ხდება კლასიკური ჰოლომორფული ფუნქციების ყლორტთა ანალიზური გაგრძელების შემთხვევაში.

Abstract

The thesis consists of an introduction, three main parts and a conclusion. In the introduction, some notions and auxiliary propositions are considered from the theory of pseudoanalytic functions and also from the theory of stacks. The first part of the thesis is dedicated to the application of the theory of 2-presheaves and prestacks to the theory of pseudoanalytic functions with the purpose of equipping the set of all spaces of pseudoanalytic functions together with pseudodifferentiations between them with a unifying structure; in particular, for each open subset of the complex plane a category is defined, whose objects are the spaces of pseudoanalytic functions defined on the subset and whose morphisms are defined using pseudodifferentiations; it is shown that this assignment can be extended to a 2-presheaf, i.e., for each inclusion of open subsets the appropriate restriction functor can be naturally defined; it is shown that the associated fibered category of this 2-presheaf is a prestack; the descent data in this prestack are considered and their effectiveness is related to the admissibility of the coefficients of a suitable Carleman-Bers-Vekua equation; using the sheaf cohomology it is shown how the surjectivity of a pseudodifferentiation operator is related to the topology of the domain of the functions the operator acts on. The second part is dedicated to the generalization of a certain kind of pseudoanalyticity to differential forms defined on a complex manifold using an appropriate sheaf homomorphism, sheaves of pseudoanalytic differential forms are defined and also a generalization of the classical Dolbeault cohomology; it is shown that for such sheaves an analogue of the classical Dolbeault's theorem holds. The third part is dedicated to the question of pseudoanalytic continuation of germs of pseudoanalytic functions defined on a Riemann surface along a curve, which is brought into relation with the lifting of the curve into the étale space of the appropriately defined sheaf of pseudoanalytic functions, as is the case for germs of holomorphic functions and analytic continuation along a curve.

სარჩევი

1 შესავალი	1
1.1 აღნიშვნები	1
1.2 განზოგადებული ანალიზური და ფსევდოანალიზური ფუნქციების ცნე- ბების შესახებ	2
1.3 ზოგიერთი ცნება დასტათა თეორიიდან. სიტუსი, 2-წინარეკონა და დასტა	5
2 ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა წინარედასტა	11
2.1 წარმომქმნელი წყვილების კონა	11
2.2 ღია ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივ- რცეთა კატეგორია	19
2.3 ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა წინარედასტა	29
2.4 ფსევდოგაწარმოების ოპერატორის სურექციულობის დამოკიდებულება არის ტოპოლოგიაზე	38
3 დოლბოს თეორემა ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმების კონე- ბისათვის	43
3.1 $\bar{\partial}_\alpha$ -ჰუანკარეს ლემა	44
3.2 ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმების კონა	49
3.3 ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმები მნიშვნელობებით $\mathbb{C}^0$ - ლომორფულ ვექტორულ ფიბრაციაში	58
4 ფსევდოანალიზური გაგრძელება	63
4.1 ფსევდოანალიზური ფუნქციების კონა რიმანის ზედაპირზე	63
4.2 წირის გასწვრივ გაგრძელება	69
5 დასკვნა	74
ბიბლიოგრაფია	76

1 შესავალი

1.1 აღნიშვნები

ქვემოთ მოყვანილია შემდგომში გამოყენებული ძირითადი აღნიშვნები, დანარჩენი აღნიშვნები კი განიმარტება სათანადო თავებში, სადაც შემოტანილია შესაბამისი ცნებები.

$\mathcal{C}$ კატეგორიის ობიექტების ერთობლიობას აღვნიშნავთ $\text{Ob}(\mathcal{C})$ -ით, $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ობიექტთა წყვილისთვის კი მათ შორის მორფიზმების ერთობლიობას $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ -ით.

Set სიმრავლეთა კატეგორიას აღვნიშნავს, Cat - მცირე კატეგორიათა კატეგორიას.

$\text{Open}(X)$ -ით აღვნიშნავთ X ტოპოლოგიური სივრცის ღია ქვესიმრავლეების კატეგორიას, ანუ, კატეგორიას, რომლის ობიექტები სივრცის ღია ქვესიმრავლეებია, ხოლო U და V ორ ობიექტს შორის მხოლოდ მაშინ არის $\text{Mor}_{\text{Open}(X)}(U, V)$ მორფიზმების სიმრავლე არაცარიელი, როდესაც $U \subseteq V$ და ამ შემთხვევაში ის ერთელემენტიანია:

$$\text{Mor}_{\text{Open}(X)}(U, V) = \begin{cases} \{*\}_{U,V}, & U \subseteq V, \\ \emptyset, & U \not\subseteq V. \end{cases}$$

$\bigwedge^{p,q} X := \bigwedge^p (T^{1,0} X)^* \otimes \bigwedge^q (T^{0,1} X)^*$, სადაც $T^{1,0} X$ -ით აღნიშნულია X კომპლექსური მრავალსახეობის ჰოლომორფული მხები ფიბრაცია, ხოლო $T^{0,1} X$ -ით კი - ანტიჰოლომორფული.

X კომპლექსური მრავალსახეობისათვის მასზე $\bigwedge^{p,q} X \rightarrow X$ ფიბრაციის გლუვი კვეთების, ანუ, (p, q) -ტიპის გლუვი ფორმების კონას აღვნიშნავთ $\mathcal{A}_X^{p,q}$ -თი. ჰოლომორფული p -დიფერენციალური ფორმების კონას აღვნიშნავთ Ω_X^p -ით.

X ტოპოლოგიურ სივრცეზე $\mathcal{F}$ წინარეკონის ღეროს $x \in X$ წერტილში აღვნიშნავთ $\mathcal{F}_x$ -ით.

$\sigma \in \mathcal{F}_x$ ღეროს ელემენტს ($\mathcal{F}$ კონის ყლორტს/მარცვალს $x \in X$ წერტილში) წარმოვადგენთ წყვილით $\sigma = [(U, s)]$, სადაც $x \in U$ ღია მიდამოა, ხოლო s კი $\mathcal{F}$ -ის კვეთა ამ ღია ქვესიმრავლეზე, $s \in \mathcal{F}(U)$, ისეთი, რომ $s_x = \sigma$.

$\mathcal{F}$ კონის ეტალურ სივრცეს აღვნიშნავთ $\mathcal{F}^{\text{ét}}$ -ით.

1.2 განზოგადებული ანალიზური და ფსევდოანალიზური ფუნქციების ცნებების შესახებ

განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა და ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა თეორიები, რომლებიც მე-20 საუკუნის 50-იან წლებში შექმნეს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ი. ვეკუამ და ლ. ბერსმა, გარკვეული აზრით ექვივალენტური თეორიებია, მაგრამ მიდგომები სრულიად განსხვავებულია. ი.ვეკუასა და ლ.ბერსის შედეგები აისახა მონოგრაფიებში [3] და [28].

ფსევდოანალიზური ფუნქციის ცნება შემოღებულ იქნა ბერსის მიერ (იხ. [3], [4]) როგორც კლასიკური ჰოლომორფული ფუნქციის ცნების განზოგადოება; ის გამოიყენება ელიფსური განტოლებებისა და სისტემების ამონახსნების თვისებების შესწავლისას და ასევე წარმოადგენს დამოუკიდებელი კვლევისა და ინტერესის საგანს. ისევე როგორც კლასიკურ თეორიაში არსებობს მჭიდრო კავშირი ჰოლომორფულ ასახვებსა და ლაპლასის განტოლების ამონახსნებს, ე.ი., ჰარმონიულ ფუნქციებს, შორის, მყარდება კავშირი უფრო ზოგადი სახის ელიფსური განტოლებების ამონახსნებსა და ფსევდოანალიზურ ფუნქციებს შორის; ეს კავშირი იმდენად მჭიდროა, რომ ლ. ბერსმა მისი შესწავლა შეაჯამა წინადადებით: „(წრფივი ერთგვაროვანი) ელიფსური განტოლებების

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0; \quad ac - b^2 > 0$$

თეორია (არეებზე, რომლებშიც არსებობს არატრივიალური ამონახსნი) და ასევე ელიფსური სისტემების

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + cu + dv, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = e \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + gu + hv, \end{cases} \quad 4be + (a - f)^2 < 0, \quad a > 0$$

თეორია იდენტურია ფსევდოანალიზური ფუნქციების თეორიისა.“ (იხ. [3]); ასევე, ლ. ბერსმა დაახასიათა სიბრტყის ღია ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცე, როგორც ამ ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციების სიმრავლე, რომელსაც გააჩნია ღია ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ჰოლომორფული ფუნქციების სიმრავლის არსებითი თვისებების განზოგადოებით მიღებული თვისებები (იხ. [4]); პარალელურად ამისა, ი. ვეკუამ შემოიღო და შეისწავლა განზოგადებული ანალიზური ფუნქციის ცნება (იხ. [28]), ანუ ფუნქციისა, რომელიც აკმაყოფილებს დოლბოკოში-რიმანის განტოლების გარკვეულ განზოგადოებას, რომელ განტოლებასაც (განტოლების ტიპს) კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლება ეწოდება; აღმოჩნდა, რომ წარმომქმნელი წყვილის მიერ გარკვეული რეგულარულობის მოთხოვნების დაკმაყოფილების შემთხვევაში, ფუნქცია ამ წყვილის მიმართ ფსევდოანალიზურია (ბერსის აზრით) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის აკმაყოფილებს ამ წარმომქმნელი წყვილით განსაზღვრული კოეფიციენტების მქონე კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლებას, ე.ი., განზოგადებული ანალიზური ფუნქციაა (ვეკუას აზრით); ასევე აღმოჩნდა, რომ თუ კარლემან-

ბერს-ვეკუას განტოლების კოეფიციენტები გარკვეულ პირობას აკმაყოფილებს (დაშვებადობის ან რეგულარობის პირობა), მაშინ მოიძებნება წარმომქმნელი წყვილი, რომლის მიერაც განსაზღვრული კოეფიციენტების წყვილი მოცემულ წყვილს წარმოადგენს, ე.ი., ფუნქცია ამ კოეფიციენტების წყვილის მიმართ განზოგადებული ანალიზური ფუნქციაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის სათანადო წარმომქმნელი წყვილის მიმართ ფსევდოანალიზურია (იხ. [3], [4], [28]).

წარმომქმნელი წყვილის (ამ ცნებისათვის იხ. [3], [4], ასევე, წინამდებარე ნაშრომის მეორე თავი) კლასიკურ მაგალითს წარმოადგენს წყვილი შემდგარი მუდმივი ფუნქციები-საგან $(1, i)$ (განსაზღვრული სიბრტყის ნებისმიერ ქვესიმრავლეზე), რომლის შესაბამისი კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლების კოეფიციენტები იგივურად 0-ის ტოლი ფუნქციებია, ანუ, კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლება ამ შემთხვევასი კომპი-რიმანის/დოლბოს განტოლებაა და სათანადო ფუნქციების სივრცე წარმოადგენს ჰოლომორფული ფუნქციების სივრცეს, რომელიც ბუნებრივად აღჭურვილია $\mathbb{C}$ -ალგებრის სტრუქტურით; საზოგადოდ კი ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცე ბუნებრივად აღჭურვადია მხოლოდ $\mathbb{R}$ -წრფივი სივრცის სტრუქტურით. ფსევდოანალიზური ფუნქციებსა და მათ სივრცეებსა და ჰოლომორფულ ფუნქციებსა და მათ სივრცეებს შორის არაერთი მსგავსება არსებობს, მაგალითად, კარლემანის თეორემა ნულისაგან განსხვავებული ფსევდოანალიზური ფუნქციის ნულთა სიმრავლის დისკრეტულობის შესახებ, ასევე მსგავსების პრინციპი, რომელზეც დაყრდნობით მნიშვნელოვანი კავშირი მყარდება ფსევდოანალიზურ და ჰოლომორფულ ფუნქციებს შორის. ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა თეორიის კვლევის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან სფეროს წარმოადგენს იმის შესწავლა, თუ კლასიკური ჰოლომორფულ ფუნქციათა თეორიის რომელი შედეგები გავრცელებადია და რა სახით ფსევდოანალიზურ ფუნქციებზე (იხ., მაგალითად, [8], [18]); კვლევის ამ ხაზს მიჰყვება ნაშრომის მესამე და მეოთხე თავები (იხ. [25], [26]). იხილეთ, ასევე, [23], [24], [27].

როგორც ცნობილია, კონათა თეორია ფუნდამენტური მნიშვნელობის არის კომპლექსური ანალიზისა და გეომეტრიისათვის, მაგალითად, (რგოლთა) კონა წარმოადგენს ისეთი მნიშვნელოვანი ცნების განუყოფელ ნაწილს, როგორიც არის კომპლექსურად-ანალიზური სივრცე (იხ. [11]). ეს თეორია [22]-ში ი. როდინმა გამოიყენა განზოგადებული ანალიზური ფუნქციების შესწავლაში; მან შემოიყვანა კონა, რომელიც ყოველ ღია ქვესიმრავლეს უსაბამებს მასზე განსაზღვრულ განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა სივრცეს, ხოლო ღია სიმრავლეების ჩართვას კი სათანადო სივრცეებს შორის შეზღუდვის ასახვას. ჩვენ მეორე თავში გამოვიყენებთ 2-წინარეკონების თეორიას ფსევდოანალიზური ფუნქციების თეორიის მიმართებაში, სადაც ყოველ ღია ქვესიმრავლეს შეესაბამება არა ფსევდოანალიზური ფუნქციების კონკრეტული სივრცე, არამედ კატეგორია, რომლის ობიექტების სიმრავლეც ამ ღია ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა ერთობლიობაა, ხოლო მორფიზმი კი ორ ასეთ სივრცეს შორის მოიცემა ფსევდოგაწარმოებების მეშვეობით განსაზღვრული გარკვეული ასახვით; გარდა ამისა, ყოველ ჩართვის მიმართებას ღია ქვესიმრავლეებს შორის კი ესაბამება ამ 2-წინარეკონით შეზღუდვის ფუნქტორი სათანადო კატეგორიებს შორის. ნაჩვენებია, რომ მიღებული შესაბამება მართლაც (მკაცრი) 2-წინარეკონაა და რომ კმაყოფი-

ფილდება შეწებების აქსიომა მორფიზმებისათვის ანუ ის, ან, უფრო ზუსტად, მისი შესაბამისი ფიბრირებული კატეგორია, წინარედასტაა. ასევე განხილული არის დაწვეის მონაცემთა (descent data) ეფექტურობის საკითხი და მოყვანილია კავშირში წარმომქმნელი წყვილის დაშვებადობის (admissibility) ცნებასთან (იხ. [9]).

1.3 ზოგიერთი ცნება დასტათა თეორიიდან. სიტუსი, 2-წინარეკონა და დასტა

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ დასტათა თეორიის ძირითადი ცნებების განსაზღვრებებს და დებულებას, რომლებიც გამოიყენება მომდევნო ნაწილებში.

2-(წინარე)კონის ცნება წარმოადგენს კლასიკური (წინარე)კონის ცნების განზოგადოებას და ის მჭიდრო კავშირშია ფიბრირებული კატეგორიის ცნებასთან, რომლის მაგალითსაც წარმოადგენს წინარედასტა (იხ. [21], [29]). მეორე თავში ნაჩვენებია, რომ $\mathcal{C}$ -ს ყველა ღია ქვესიმრავლეზე ყველა წარმომქმნელი წყვილის მიმართ განსაზღვრულ ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა სივრცეებს მათ შორის ფსევდოგაწარმოებებით მოცემულ კავშირებთან ერთად შესაძლებელია თავი მოეყაროს წინარედასტაში $\mathcal{C}$ -ზე.

ჩვენ 2-(წინარე)კონების განხილვისას მათ განსაზღვრის არედ გვექნება ტოპოლოგიური სივრცის ღია ქვესიმრავლეთა დუალური (მოპირდაპირე) კატეგორია. ეს კატეგორია წარმოადგენს ე.წ. სიტუსის პროტოტიპულ მაგალითს და სასარგებლოა აქ მოყვანილ იქნას ამ უფრო ზოგადი ცნების განსაზღვრება იმისთვის, რომ უკეთ გამოიყოს პირობები, რომელთა დაკმაყოფილებაც მოეთხოვებათ 2-კონებს.

სიტუსი წარმოადგენს ტოპოლოგიური სივრცის ღია ქვესიმრავლეების კატეგორიის განზოგადებას; ამ უკანასკნელში ყოველი ღია ქვესიმრავლისათვის (ობიექტისათვის) გვაქვს ღია ქვესიმრავლეების, ე.ი., ამ კატეგორიის მორფიზმების, გამორჩეული ერთობლიობები; კერძოდ, იმ ღია ქვესიმრავლეების ერთობლიობები, რომლებიც მოცემულ ღია ქვესიმრავლეს ფარავენ და, გარდა ამისა, აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს, რომლებიც აქსიომატიზირებულია სიტუსის განსაზღვრებაში. სიტუსი წარმოადგენს გარკვეული სტრუქტურით აღჭურვილ კატეგორიას, ჩვენ სიტუსისა და მისი ქვემდებარე კატეგორიის აღსანიშნავად ერთსა და იმავე სიმბოლოს გამოვიყენებთ.

სიტუსი ეწოდება ე.წ. დაფარვით აღჭურვილ $\mathcal{C}$ კატეგორიას; $\mathcal{C}$ სიტუსის დაფარვა აღინიშნება $\text{Cov}(\mathcal{C})$ -ით (იხ. [2], [17], [20]) და წარმოადგენს ქვემოთ მოყვანილი აქსიომების დამაკმაყოფილებელ საერთო კოდომეინის/სამიზნის მქონე მორფიზმების ერთობლიობათა სიმრავლეს; ე.ი., ყოველი ასეთი ერთობლიობა წარმოადგენს მორფიზმების შემდეგი სახის ოჯახს

$$f_j : U_j \longrightarrow U \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(U_j, U), \quad j \in J,$$

სადაც J ინდექსთა სიმრავლეა. ამ ერთობლიობას აღვნიშნავთ $\{f_j : U_j \rightarrow U\}_{j \in J}$ -ით, ხშირად თვით მორფიზმთათვის ცალკე დასახელება არ მოიყვანება და იწერება უბრალოდ $\{U_j \rightarrow U\}_{j \in J}$.

აქსიომები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს $\text{Cov}(\mathcal{C})$ დაფარვა შემდეგია:

- 1) თუ $V \rightarrow U \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(V, U)$ იზომორფიზმია, მაშინ $\{V \rightarrow U\} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$;
- 2) თუ $\{U_j \rightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ და ყოველი $j \in J$ -ისათვის $\{V_{jk} \rightarrow U_j\}_{k \in K_j} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$, მაშინ სათანადო მორფიზმების კომპოზიციით მიღებული ერთობლიობა ეკუთვნის დაფარვას, ე.ი., $\{V_{jk} \rightarrow U\}_{j \in J, k \in K_j} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$;
- 3) თუ $\{U_j \rightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ და $V \rightarrow U \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(V, U)$, მაშინ ყოველი $j \in J$ -ისათვის

არსებობს $U_j \times_U V$ ფიბრირებული ან ფენობრივი ნამრავლი (fibered product) და $U_j \times_U V \rightarrow V$ კანონიკური მორფიზმების ერთობლიობა ეკუთვნის დაფარვას, ე.ი., $\{U_j \times_U V \rightarrow V\}_{j \in J} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$.

როგორც უკვე ითქვა, სიტუსის პროტოტიპულ მაგალითს წარმოადგენს X ტოპოლოგიური სივრცის ღია ქვესიმრავლეების კატეგორია $\text{Open}(X)$, რომელშიც ბუნებრივი დაფარვა $\text{Cov}(\text{Open}(X))$ მოიცემა შემდეგნაირად

$$\{U_j \rightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov}(\text{Open}(X)) \quad :\Longleftrightarrow \quad U = \bigcup_{j \in J} U_j,$$

სადაც $U_j \rightarrow U$ არის $U_j \subseteq U$ ღია ჩართვასთან ასოცირებული მორფიზმი $\text{Open}(X)$ -ში. ამ კატეგორიაში $V \rightarrow U$ და $W \rightarrow U$ მორფიზმებისათვის ფენობრივი ნამრავლი $V \times_U W$ მოიცემა $V \cap W$ თანაკვეთით სათანადო ჩართვებთან ერთად.

$\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ ფსევდოფუნქტორი (იხ. [29]) $\mathcal{C}$ კატეგორიიდან Cat მცირე კატეგორიათა კატეგორიაში მოიცემა შემდეგი თანადობით: ყოველ $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ობიექტს ესაბამება $\mathcal{F}(X) \in \text{Ob}(\text{Cat})$ მცირე კატეგორია, ხოლო ყოველ $f : X \rightarrow Y \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ მორფიზმს კი ესაბამება $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y) \in \text{Mor}_{\text{Cat}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ ფუნქტორი ისე, რომ კმაყოფილდებოდეს შემდეგი პირობები:

$$\mathcal{F}(\text{id}_X) \cong \text{id}_{\mathcal{F}(X)}, \quad \mathcal{F}(g \circ f) \cong \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f),$$

სადაც $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ მორფიზმების წყვილია $\mathcal{C}$ -დან, ხოლო $\cong$ -ით აღნიშნულია ფუნქტორების იზომორფულობა, ანუ, არსებობა შებრუნებადი ბუნებრივი გარდაქმნისა ერთი ფუნქტორიდან მეორეში. დამატებით ყოველი $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ მორფიზმების სამეულისათვის $\mathcal{C}$ -დან უნდა კმაყოფილდებოდეს შემდეგი: ბუნებრივი გარდაქმნების კომპოზიციები

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ g \circ h) &\longrightarrow \mathcal{F}(f \circ g) \circ \mathcal{F}(h) \longrightarrow \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h) \\ \mathcal{F}(f \circ g \circ h) &\longrightarrow \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g \circ h) \longrightarrow \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(h) \end{aligned}$$

უნდა იყვნენ ერთმანეთის ტოლი და ასევე კომპოზიციები ყოველი $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ -ისათვის და $f : Y \rightarrow X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ მორფიზმისათვის

$$\mathcal{F}(\text{id}_X) \circ \mathcal{F}(f) \longrightarrow \mathcal{F}(\text{id}_X \circ f) = \mathcal{F}(f) \quad \text{და} \quad \mathcal{F}(\text{id}_X) \circ \mathcal{F}(f) \longrightarrow \text{id}_{\mathcal{F}(X)} \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f)$$

და ასევე მორფიზმისათვის $f : X \rightarrow Y \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

$$\mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(\text{id}_X) \longrightarrow \mathcal{F}(f \circ \text{id}_X) = \mathcal{F}(f) \quad \text{და} \quad \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(\text{id}_X) \longrightarrow \mathcal{F}(f) \circ \text{id}_{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{F}(f).$$

ყოველი ფუნქტორი $\mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ ფსევდოფუნქტორია, რომელშიც ზემომოყვანილი ბუნებრივი იზომორფიზმები ტოლობებია. 2-წინარეკონა $\mathcal{C}$ -ზე ეწოდება ფსევდოფუნქტორს $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$; თუ კი $\mathcal{F}$ მკაცრი ფუნქტორია, მაშინ მას მკაცრი 2-წინარეკონა ეწოდება.

განვიხილოთ $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ ფუნქტორი კატეგორიებს შორის და $f : X \rightarrow Y$ მორფიზმი $\mathcal{E}$ -იდან; $f : X \rightarrow Y$ -ს ეწოდება p -დეკარტული, თუ კი ყოველი $W \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ ობიექტისათვის სიმრავლეთა

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{E}}(W, X) & \xrightarrow{f \circ} & \text{Mor}_{\mathcal{E}}(W, Y) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(p(W), p(X)) & \xrightarrow{p(f) \circ} & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(p(W), p(Y)) \end{array}$$

კომუტაციური დიაგრამა წარმოადგენს $\text{Mor}_{\mathcal{E}}(W, X)$ სიმრავლეს ფიბრირებულ ნამრავლად; ეს, კერძოდ, ნიშნავს, რომ

$$\text{Mor}_{\mathcal{E}}(W, X) \cong \text{Mor}_{\mathcal{E}}(W, Y) \times_{\text{Mor}_{\mathcal{C}}(p(W), p(Y))} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(p(W), p(X)).$$

$p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ ფუნქტორს ეწოდება *ფიბრირებული კატეგორია $\mathcal{C}$ -ზე* (იხ. [13]), თუ $\mathcal{E}$ ტოტალური კატეგორიის ყოველი Y ობიექტისათვის და $\mathcal{C}$ საბაზო კატეგორიის ყოველი $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow p(Y)$ მორფიზმისათვის არსებობს $\mathcal{E}$ -ის X ობიექტი $\bar{X}$ -ზე, ანუ, ისეთი, რომ $p(X) = \bar{X}$, და p -დეკარტული $f : X \rightarrow Y$ მორფიზმი ისეთი, რომ $p(f) = \bar{f}$.

ფიბრირებულ კატეგორიებსა და ფსევდოფუნქტორებს შორის მნიშვნელობებით Cat -ში არსებობს მჭიდრო კავშირი, რომლის საფუძველზეც შესაძლებელია ერთი გვარის ობიექტიდან მეორეზე გადასვლა და პირიქით იმის მიხედვით, თუ რომელი მიდგომა არის უფრო მოსახერხებელი მოცემული ამოცანისათვის. კერძოდ, ყოველ $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ ფსევდოფუნქტორს შეგვიძლია შევუსაბამოთ ფიბრირებული კატეგორია, რომელიც მის *ელემენტთა კატეგორიად* იწოდება და რომლის ტოტალური კატეგორიაც აღინიშნება $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ -ით. ამ უკანასკნელის ობიექტები არიან (U, X) წყვილები, სადაც $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, ხოლო $X \in \text{Ob}(\mathcal{F}(U))$. მასში $(U, X), (V, Y) \in \text{Ob} \left(\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \right)$ ობიექტებს შორის მორფიზმი მოიცემა $f : U \rightarrow V$ მორფიზმით $\mathcal{C}$ -ში და $u : X \rightarrow \mathcal{F}(f)(Y)$ მორფიზმით $\mathcal{F}(U)$ კატეგორიაში. ორი

$$(f, u) : (U, X) \rightarrow (V, Y), \quad (g, v) : (V, Y) \rightarrow (W, Z)$$

მორფიზმის $(g, v) \circ (f, u)$ კომპოზიცია კი მოიცემა $(g \circ f, w)$ წყვილით, სადაც $w : X \rightarrow \mathcal{F}(g \circ f)(Z)$ მორფიზმი არის

$$X \xrightarrow{u} \mathcal{F}(f)(Y) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)(v)} (\mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g))(Z) \longrightarrow \mathcal{F}(g \circ f)(Z)$$

კომპოზიცია, სადაც უკანასკნელი მორფიზმი $\mathcal{F}(g \circ f) \cong (\mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g))$ ფუნქტორთა ბუნებრივი იზომორფიზმით მოიცემა. ფიბრირებული კატეგორიის სტრუქტურული ფუნქტორი კი წარმოადგეს პროექციას პირველ კომპონენტზე

$$p : \int_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}, \quad (U, X) \longmapsto U,$$

ბუნებრივი პროექციით მორფიზმებზე. ამ ფუნქტორის ფენა $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ობიექტზე ბუნებრივად გაიგივებადია $\mathcal{F}(U)$ კატეგორიასთან, ხოლო $\mathcal{F}$ ფსევდოფუნქტორი იზომორფიზმამდე სიზუსტით აღდგენადია $p : \int_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ -იდან. ეს ვითარება წარმოადგენს გროთენდიკის თეორემის (იხ. [13]) შინაარსს, რომელიც სქემატურად შეიძლება შემდეგნაირად იქნას წარმოდგენილი:

$$\{\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Cat} \text{ ფსევდოფუნქტორები} \} \simeq \{p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C} \text{ ფიბრირებული კატეგორიები} \}.$$

დასტა (stack) (იხ. [21], [29]) წარმოადგენს ფიბრირებულ კატეგორიას, რომელიც დამატებით პირობებს აკმაყოფილებს, რომლებიც მოყვანილია ქვემოთ. ზემოთქმულზე დაყრდნობით ეს პირობები შეიძლება როგორც უშუალოდ ფიბრირებული კატეგორიისთვის ასევე მასთან ასოცირებული ფსევდოფუნქტორისათვის იქნას ჩამოყალიბებული. ჩვენთვის მეორე თავში უფრო მოსახერხებელი იქნება ამ პირობების შესრულების შემოწმება ფსევდოფუნქტორების ენაზე.

$\mathcal{C}$ სიტუსზე განსაზღვრულ $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ წინარეკონას ეწოდება კონა, თუ ყოველი $\{U_j \rightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ დაფარვისათვის დიაგრამა

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{j \in J} \mathcal{F}(U_j) \rightrightarrows \prod_{j, k \in J} \mathcal{F}(U_j \times_U U_k),$$

წარმოადგენს პირველ ასახვას უკანასკნელი ორის ეკვილიზატორად (equaliser) (იხ. [5]). ამ დიაგრამაში უკანასკნელი ორი ასახვა მოიცემა

$$\prod_{j \in J} \mathcal{F}(U_j) \longrightarrow \prod_{j, k \in J} \mathcal{F}(U_j \times_U U_k), \quad (s_j)_{j \in J} \longmapsto (s_j|_{U_j \times_U U_k})_{j, k \in J},$$

და

$$\prod_{j \in J} \mathcal{F}(U_j) \longrightarrow \prod_{j, k \in J} \mathcal{F}(U_j \times_U U_k), \quad (s_j)_{j \in J} \longmapsto (s_k|_{U_j \times_U U_k})_{j, k \in J},$$

შეზღუდვებით. ეს შეზღუდვები ინდუცირებულია $U_j \times_U U_k \rightarrow U_j$ და $U_j \times_U U_k \rightarrow U_k$ სტრუქტურული მორფიზმებით, რომლებიც გვადლევენ $\mathcal{F}(U_j) \rightarrow \mathcal{F}(U_j \times_U U_k)$ და $\mathcal{F}(U_k) \rightarrow \mathcal{F}(U_j \times_U U_k)$ ასახვებს.

$U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ -ისათვის $\mathcal{C}/U$ -ით აღვნიშნავთ კატეგორიას, რომლის ობიექტებიც არიან $f : V \rightarrow U$ მორფიზმები, ხოლო ორ $f : V \rightarrow U$ და $g : W \rightarrow U$ ასეთ ობიექტს შორის მორფიზმი კი მოიცემა $\mathcal{C}$ -იდან ისეთი $h : W \rightarrow V$ მორფიზმით, რომ

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{h} & V \\ & \searrow g & \swarrow f \\ & U & \end{array}$$

დიაგრამა კომუტაციურია; მაგალითად, X ტოპოლოგიური სივრცისათვის და $U \subseteq X$

ღია ქვესიმრავლისათვის გვაქვს

$$\text{Open}(X)/U = \text{Open}(U),$$

სადაც U იგულისხმება აღჭურვილი X -ისგან ინდუცირებული ტოპოლოგიით, ე.ი., ქვესივრცის ტოპოლოგიით.

განვიხილოთ $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ ფსევდოფუნქტორი; ყოველი $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ -ისათვის ყოველი X, Y ორი ობიექტი $\mathcal{F}(U)$ კატეგორიიდან განსაზღვრავს $\mathcal{C}/U$ -ზე წინარეკონას შემდეგნაირად:

$$\underline{\text{Mor}}_{\mathcal{F}}(X, Y) : (\mathcal{C}/U)^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set}, \quad (f : V \longrightarrow U) \longmapsto \text{Mor}_{\mathcal{F}(V)}(\mathcal{F}(f)(X), \mathcal{F}(f)(Y)),$$

რომელიც მორფიზმს

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{h} & V \\ & \searrow g & \swarrow f \\ & U & \end{array}$$

უსაბამებს ასახვას

$$\text{Mor}_{\mathcal{F}(V)}(\mathcal{F}(f)(X), \mathcal{F}(f)(Y)) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{F}(W)}(\mathcal{F}(g)(X), \mathcal{F}(g)(Y)),$$

რომელიც მოიცემა $\mathcal{F}(h)$ -ის მოდებით და ბუნებრივი იზომორფიზმის გამოყენებით; ნაშრომში ჩვენს მიერ განხილულ შემთხვევაში ფსევდოფუნქტორი მკაცრი ფუნქტორი იქნება, ამიტომაც იკმარებს უბრალოდ $\mathcal{F}(h)$ -ის მოდება. $\mathcal{C}/U$ ბუნებრივად აღჭურვადია სიტუსის სტრუქტურით. $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ ფსევდოფუნქტორს, შესაბამისად, მასთან ასოცირებულ ფიბრირებულ კატეგორიას, ეწოდება *წინარედასტა* (prestack), თუ წინარეკონა $\underline{\text{Mor}}_{\mathcal{F}}(X, Y) : (\mathcal{C}/U)^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ კონაა ყოველი U -სა და $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{F}(U))$ -ისათვის.

განვიხილოთ $\mathcal{C}$ სიტუსზე განსაზღვრული $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ ფსევდოფუნქტორი. $\{U_j \rightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ დაფარვის მიმართ განსაზღვრული *დაწვევის მონაცემი* (descent datum) ეწოდება $((X_j)_{j \in J}, (\varphi_{jk})_{j, k \in J})$ ერთობლიობას, სადაც ყოველი $j \in J$ -ისათვის X_j j -ური ფენის ობიექტია, ე.ი., $X_j \in \text{Ob}(\mathcal{F}(U_j))$, ხოლო φ_{jk} კი არის იზომორფიზმი $\mathcal{F}(U_j \times_U U_k)$ კატეგორიიდან X_j -ისა და X_k -ს სათანადო შეზღუდვებს შორს. ეს შეზღუდვები ინდუცირებულია $U_j \times_U U_k \rightarrow U_j$ და $U_j \times_U U_k \rightarrow U_k$ სტრუქტურულ მორფიზმებზე $\mathcal{F}$ -ის მოდებით, $\mathcal{F}(U_j) \rightarrow \mathcal{F}(U_j \times_U U_k)$ და $\mathcal{F}(U_k) \rightarrow \mathcal{F}(U_j \times_U U_k)$; ამ ფუნქტორების მოქმედებას X_j და X_k -ზე აღვნიშნავთ $X_j|_{U_j \times_U U_k}$ და $X_k|_{U_j \times_U U_k}$, ე.ი., $\varphi_{jk} : X_j|_{U_j \times_U U_k} \rightarrow X_k|_{U_j \times_U U_k}$; გარდა ამისა, ყოველი $j, k, l \in J$ სამეულისათვის დიაგრამა $\mathcal{F}(U_j \times_U U_k \times_U U_l)$ -იდან:

$$\begin{array}{ccc} X_j|_{U_j \times_U U_k \times_U U_l} & \xrightarrow{\varphi_{jl}|_{U_j \times_U U_k \times_U U_l}} & X_l|_{U_j \times_U U_k \times_U U_l} \\ & \searrow \varphi_{jk}|_{U_j \times_U U_k \times_U U_l} & \swarrow \varphi_{lk}|_{U_j \times_U U_k \times_U U_l} \\ & X_k|_{U_j \times_U U_k \times_U U_l} & \end{array}$$

უნდა იყოს კომუტაციური. ამ უკანასკნელს კოციკლის პირობა ეწოდება.

მორფიზმი $((X_j)_{j \in J}, (\varphi_{jk})_{j,k \in J})$ და $((X'_j)_{j \in J}, (\varphi'_{jk})_{j,k \in J})$ ერთი და იმავე დაფარვის მიმართ განსაზღვრულ დაწვევის მონაცემებს შორის მოიცემა მორფიზმების ისეთი $(\psi_j : X_j \rightarrow X'_j)_{j \in J}$ ერთობლიობით, რომ დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccc} X_j|_{U_j \times_U U_k} & \xrightarrow{\varphi_{jk}} & X_k|_{U_j \times_U U_k} \\ \psi_j|_{U_j \times_U U_k} \downarrow & & \downarrow \psi_k|_{U_j \times_U U_k} \\ X'_j|_{U_j \times_U U_k} & \xrightarrow{\varphi'_{jk}} & X'_k|_{U_j \times_U U_k} \end{array}$$

კომუტაციურია. ამგვარად, დაწვევის მონაცემები მოცემული $\mathcal{U} = \{U_j \rightarrow U\}_{j \in J} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$ დაფარვის მიმართ განსაზღვრავენ კატეგორიას, რომელიც აღინიშნება $DD(\mathcal{U})$ -ით.

ყოველი $X \in \text{Ob}(\mathcal{F}(U))$ ობიექტი ბუნებრივად ინდუცირებს

$$((X|_{U_j})_{j \in J}, (\text{id}_{X|_{U_j \times_U U_k}})_{j,k \in J})$$

დაწვევის მონაცემს, ხოლო ობიექტებს შორის მორფიზმი კი ბუნებრივად ინდუცირებს მორფიზმს სათანადო დაწვევის მონაცემებს შორის და ამგვარად მიიღება ფუნქტორი:

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow DD(\mathcal{U}).$$

$((X_j)_{j \in J}, (\varphi_{jk})_{j,k \in J})$ დაწვევის მონაცემს ეწოდება *ეფექტური*, თუ ის ეკუთვნის ამ ფუნქტორის არსებითი ანასახის ობიექტების ერთობლიობას, ე.ი., თუ მოიძებნება X ობიექტი $\mathcal{F}(U)$ -დან, ე.ი., $X \in \text{Ob}(\mathcal{F}(U))$, ისეთი, რომ $((X_j)_{j \in J}, (\varphi_{jk})_{j,k \in J})$ ობიექტი იზომორფულია X -ით ინდუცირებული $((X|_{U_j})_{j \in J}, (\text{id}_{X|_{U_j \times_U U_k}})_{j,k \in J})$ ობიექტისა $DD(\mathcal{U})$ კატეგორიაში.

წინარედასტას ეწოდება *დასტა* თუ ყოველი დაწვევის მონაცემი (ნებისმიერი დაფარვის მიმართ განსაზღვრული) მასში ეფექტურია.

2 ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა წინარედასტა

ამ ნაწილში ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეების ერთობლიობა მათ შორის ფსევდოგაწარმოებებით მოცემულ კავშირებთან ერთად აღიჭურვება წინარედასტის სტრუქტურით კომპლექსურ სიბრტყეზე. კერძოდ, აიგება წინარედასტა რომლის ტოტალური კატეგორიის ობიექტების სიმრავლეც კანონიკურად იზომორფული არის ყველა ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა სივრცეების სიმრავლის. გარდა ამისა, განიხილება ფსევდოგაწარმოების ასახვის სურექციულობის საკითხი, უფრო ზუსტად, სურექციულობის კავშირი იმ ფუნქციების განსაზღვრის არის ტოპოლოგიასთან, რომლებზეც მოქმედებს ფსევდოგაწარმოება.

ამ თავში არც ერთი ფუნქცია არ იგულისხმება კომპლექსურად-წარმოებადი და, შესაბამისად, f' -ით აღვნიშნავთ არა f ფუნქციის წარმოებულს, არამედ, საზოგადოდ, რაიმე სხვა ფუნქციას.

2.1 წარმომქმნელი წყვილების კონა

$U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლეზე განსაზღვრულ უწყვეტი ფუნქციების

$$F : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad G : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (F, G) \in C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C})$$

დალაგებულ წყვილს ეწოდება *წარმომქმნელი წყვილი*, თუ კმაყოფილდება შემდეგი ორი პირობა, (იხ. [1], [3], [4]), (i) ასახვა

$$U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z \longmapsto \operatorname{Im}(\overline{F(z)}G(z)) = i \frac{F(z)\overline{G(z)} - \overline{F(z)}G(z)}{2}$$

ყოველ წერტილში დადებით მნიშვნელობას იღებს და (ii) ასახვები:

$$\frac{\partial F}{\partial z} : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \frac{\partial G}{\partial z} : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

არსებობენ და ლოკალურად ჰოლდერის აზრით უწყვეტნი არიან. $GP(U)$ -ით აღვნიშნავთ $U \subseteq \mathbb{C}$ -ზე განსაზღვრული წარმომქმნელი წყვილების სიმრავლეს, ანუ:

$$GP(U) := \{(F, G) \in C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \mid (F, G) \text{ წარმომქმნელი წყვილია}\}.$$

ყოველი U ღია სიმრავლისადმი $U \mapsto GP(U)$ შესაბამება ბუნებრივი შეზღუდვის ასახვებთან ერთად განსაზღვრავს წინარეკონას $\mathbb{C}$ ტოპოლოგიურ სივრცეზე (ანუ, კონტრაქტიანტულ ფუნქტორს $\operatorname{Open}(\mathbb{C})$ ღია ქვესიმრავლეების კატეგორიიდან სიმრავლეთა კატეგორიაში), მას GP -ით აღვნიშნავთ; უფრო ვრცლად: გვაქვს ფუნქტორი

$$GP : \operatorname{Open}(\mathbb{C})^{\operatorname{op}} \longrightarrow \operatorname{Set}, \quad U \longmapsto GP(U),$$

რომელიც ყოველი $U \subseteq V$ ღია ჩართვის შესაბამის მორფიზმს უსაბამებს ასახვას

$$GP(V) \longrightarrow GP(U), \quad (F, G) \longmapsto (F, G)|_U := (F|_U, G|_U).$$

დებულება 2.1.1. *GP წინარეკონა კონაა.*

დამტკიცება. განვიხილოთ $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლის ღია დაფარვა $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ და თითოეულ დაფარვის წევრზე $(F_j, G_j) \in GP(U_j)$ წარმომქმნელი წყვილი, ანუ, GP წინარეკონის კვეთა U_j -ზე, რომლებიც იყვნენ თავსებადნი, ანუ, ყოველი $j, k \in J$ წყვილისათვის

$$(F_j|_{U_j \cap U_k}, G_j|_{U_j \cap U_k}) = (F_k|_{U_j \cap U_k}, G_k|_{U_j \cap U_k}).$$

აქედან გამომდინარეობს ერთადერთი $(F, G) \in C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C})$ წყვილის არსებობა ისეთის, რომ ყოველი $j \in J$ -ისათვის

$$(F|_{U_j}, G|_{U_j}) = (F_j, G_j);$$

გამომდინარე იქიდან, რომ წარმომქმნელი წყვილის ორივე პირობა ლოკალურია, ეს წარმომქმნელი წყვილების შეწყობით მიღებული უწყვეტი ფუნქციები ადგენს წარმომქმნელ წყვილს, ე.ი., $(F, G) \in GP(U)$. $\square$

(i) პირობა კერძოდ ნიშნავს, რომ ფუნქცია $F\overline{G} - \overline{F}G$ არსად ნულის ტოლი არ ხდება, რის შესაბამისადაც შეგვიძლია ყოველი $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია სიმრავლისათვის განვსაზღვროთ ასახვა, რომელიც ყოველ წარმომქმნელ წყვილს უსაბამებს მის *მახასიათებელ კოეფიციენტებს* (იხ. [3], [4]):

$$\text{ch}_U : GP(U) \longrightarrow C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}),$$

$$(F, G) \longmapsto \frac{1}{F\overline{G} - \overline{F}G} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} \overline{G} - \overline{F} \frac{\partial G}{\partial \overline{z}}, F \frac{\partial G}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{z}} G, \frac{\partial F}{\partial z} \overline{G} - \overline{F} \frac{\partial G}{\partial z}, F \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} G \right),$$

სადაც დეკარტული ნამრავლი $C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C})$ იგულისხმება აღჭურვილი ბუნებრივი $C(U, \mathbb{C})$ -მოდულის სტრუქტურით; $\text{ch}_{U,k}, k \in \{1, \dots, 4\}$ -ით აღვნიშნავთ კომპოზიციას

$$\text{ch}_{U,k} := \text{pr}_k \circ \text{ch}_U : GP(U) \longrightarrow C(U, \mathbb{C}).$$

$U \mapsto C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C})$ შესაბამება ბუნებრივი შეზღუდვის ასახვებთან ერთად წარმოადგენს კონას $\mathbb{C}$ -ზე და სამართლიანია შემდეგი დებულება:

დებულება 2.1.2. $\{\text{ch}_U : GP(U) \longrightarrow C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C})\}_{U \in \text{Open}(\mathbb{C})}$ ასახვების ერთობლიობა განსაზღვრავს

$$\text{ch} : GP \longrightarrow C(-, \mathbb{C}) \times C(-, \mathbb{C}) \times C(-, \mathbb{C}) \times C(-, \mathbb{C})$$

კონათა მორფიზმს.

დამტკიცება. დებულება გამომდინარეობს იქიდან, რომ ch_U -ის განსაზღვრებაში გამოყენებული ოპერაციები (კერძოდ, ალგებრული ოპერაციები და ვირტინგერის გაწარმოებები) კომპუტირებს შეზღუდვებთან: $U \subseteq V$ ღია ჩართვისთვის და $(F, G) \in GP(V)$ კვეთისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\begin{aligned} (\text{ch}_V(F, G))|_U &= \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \bar{G} - \bar{F} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}}{F \bar{G} - \bar{F} G}, \frac{F \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} G}{F \bar{G} - \bar{F} G}, \frac{\frac{\partial F}{\partial z} \bar{G} - \bar{F} \frac{\partial G}{\partial z}}{F \bar{G} - \bar{F} G}, \frac{F \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} G}{F \bar{G} - \bar{F} G} \right) \Big|_U \\ &= \left(\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \bar{G} - \bar{F} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}}{F \bar{G} - \bar{F} G} \right) \Big|_U, \left(\frac{F \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} G}{F \bar{G} - \bar{F} G} \right) \Big|_U, \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z} \bar{G} - \bar{F} \frac{\partial G}{\partial z}}{F \bar{G} - \bar{F} G} \right) \Big|_U, \left(\frac{F \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} G}{F \bar{G} - \bar{F} G} \right) \Big|_U \right) \\ &= \left(\frac{\frac{\partial F|_U}{\partial \bar{z}} \bar{G}|_U - \bar{F}|_U \frac{\partial G|_U}{\partial \bar{z}}}{F|_U \bar{G}|_U - \bar{F}|_U G|_U}, \frac{F|_U \frac{\partial G|_U}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial F|_U}{\partial \bar{z}} G|_U}{F|_U \bar{G}|_U - \bar{F}|_U G|_U}, \dots \right) = \text{ch}_U(F|_U, G|_U), \end{aligned}$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$\begin{array}{ccc} GP(V) & \xrightarrow{\text{ch}_V} & C(V, \mathbb{C}) \times C(V, \mathbb{C}) \times C(V, \mathbb{C}) \times C(V, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ GP(U) & \xrightarrow{\text{ch}_U} & C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \times C(U, \mathbb{C}) \end{array}$$

დიაგრამა, რომელშიც ვერტიკალური მორფიზმები შეზღუდვებია, კომპუტაციურია. $\square$

შედეგი 2.1.1. $\{\text{ch}_{U,k} : GP(U) \longrightarrow C(U, \mathbb{C})\}_{U \in \text{Open}(\mathbb{C})}, \quad k \in \{1, \dots, 4\}$ ასახვების ერთობლიობები განსაზღვრავენ კონათა მორფიზმებს:

$$\text{ch}_k : GP \longrightarrow C(-, \mathbb{C}), \quad k \in \{1, \dots, 4\}.$$

დამტკიცება. უშუალოდ გამომდინარეობს ამ ასახვათა განსაზღვრებიდან კომპოზიციის სახით და დებულება 2.1.2-დან. $\square$

$U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლისათვის ნაცვლად ch_U და $\text{ch}_{U,k}, k \in \{1, \dots, 4\}$, გამოვიყენებთ უბრალოდ ch , შესაბამისად, ch_k -ს აღნიშვნებს, როდესაც ეს ორაზროვნებას არ იწვევს.

ყოველ $GP(U), U \subseteq \mathbb{C}$, სიმრავლეზე განსაზღვრულია $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ ჯგუფის ბუნებრივი მოქმედება:

$$\text{GL}(2, \mathbb{R}) \times GP(U) \longrightarrow GP(U), \quad \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, (F, G) \right) \longmapsto (a_{11}F + a_{12}G, a_{21}F + a_{22}G),$$

რომლის მეშვეობითაც ბუნებრივად განიმარტება მუდმივმნიშვნელობიანი წინარეკონის $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ (განსაზღვრულის $\mathbb{C}$ -ზე) მოქმედება GP კონაზე.

დებულება 2.1.3. ზემომოყვანილი მოქმედებები კვეთათა სიმრავლეებზე განსაზღვრავენ ბუნებრივ მოქმედებას

$$\underline{\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})} \times GP \longrightarrow GP.$$

დამტკიცება. ღია ქვესიმრავლეთა $U \subseteq V \subseteq \mathbb{C}$ წყვილისათვის და $(F, G) \in GP(V)$ კვეთისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$(a_{11}F + a_{12}G, a_{21}F + a_{22}G)|_U = (a_{11} F|_U + a_{12} G|_U, a_{21} F|_U + a_{22} G|_U),$$

რაც ნიშნავს

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \times GP(V) & \longrightarrow & GP(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \times GP(U) & \longrightarrow & GP(U) \end{array},$$

დიაგრამის კომუტაციურობას. □

ქვემოთ მოყვანილი კონსტრუქცია უდევს საფუძვლად პირველი გვარის ფსევდონალიზური ფუნქციისაგან მეორე გვარის ფსევდონალიზური ფუნქციის მიღებას.

ყოველი $(F, G) \in GP(U), U \subseteq \mathbb{C}$, წარმომქმნელი წყვილისთვის პირობა (i)-ის დაკმაყოფილება კერძოდ ნიშნავს, რომ ყოველი $z \in U$ წერტილისათვის $F(z), G(z) \in \mathbb{C}$ მნიშვნელობები არიან $\mathbb{R}$ -წრფივად დამოუკიდებელნი, ამიტომაც ნებისმიერი $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქციისათვის განისაზღვრება ცალსახად ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქციების წყვილი, რომლებსაც აღვნიშნავთ $\mathcal{T}_{F,G}^F(f), \mathcal{T}_{F,G}^G(f)$ -ით,

$$\mathcal{T}_{F,G}^F(f) : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{T}_{F,G}^G(f) : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

და რომლებიც განისაზღვრებიან ტოლობით:

$$f(z) = \mathcal{T}_{F,G}^F(f)(z)F(z) + \mathcal{T}_{F,G}^G(f)(z)G(z),$$

ყოველი $z \in U$ -ისათვის. ამის მეშვეობით f -ისთვის შესაძლებელია ახალი კომპლექსურმნიშვნელობიანი ფუნქციის შესაბამება:

$$(f : U \longrightarrow \mathbb{C}) \longmapsto (\mathcal{T}_{F,G}^F(f) + \mathcal{T}_{F,G}^G(f)i : U \longrightarrow \mathbb{C}).$$

ორი სიმრავლისათვის S, T ყველა ასახვათა სიმრავლეს $S \rightarrow T$ აღვნიშნავთ T^S -ით, ანუ, $T^S \equiv \mathrm{Mor}_{\mathrm{Set}}(S, T)$. მაშასადამე, მთლიანობაში გვაქვს ასახვა:

$$\mathcal{T}_{F,G} : \mathbb{C}^U \longrightarrow \mathbb{C}^U, \quad f \longmapsto \mathcal{T}_{F,G}^F(f) + \mathcal{T}_{F,G}^G(f)i.$$

წერტილოვნად განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ $\mathbb{R}^U$ ბუნებრივად ფლობს კომუტაციური რგოლის სტრუქტურას, ხოლო $\mathbb{C}^U$ კი $\mathbb{R}^U$ -მოდულის სტრუქტურას. $\mathcal{T}_{F,G}$

ასახვა $\mathbb{R}^U$ -მოდულის სტრუქტურის მიმართ ავტომორფიზმია:

დებულება 2.1.4. $\mathcal{T}_{F,G} : \mathbb{C}^U \rightarrow \mathbb{C}^U$ ასახვა ავტომორფიზმია: $\mathcal{T}_{F,G} \in \text{Aut}_{\mathbb{R}^U}(\mathbb{C}^U)$.

დამტკიცება. F, G წყვილი წარმომქმნელი წყვილის პირველი პირობის ძალით წარმოადგენს $\mathbb{C}^U$ -ს, როგორც $\mathbb{R}^U$ -მოდულის, ბაზისის ისევე, როგორც მუდმივ ფუნქციათა წყვილი $1, i$, ყოველი ბაზისის კი განსაზღვრავს $\mathbb{R}^U$ -მოდულთა იზომორფიზმს $\mathbb{C}^U \cong \mathbb{R}^U \oplus \mathbb{R}^U$. ასახვა $\mathcal{T}_{F,G} : \mathbb{C}^U \rightarrow \mathbb{C}^U$ წარმოდგენადია შემდეგი კომპოზიციის სახით:

$$\mathbb{C}^U \longrightarrow \mathbb{R}^U \oplus \mathbb{R}^U \longrightarrow \mathbb{C}^U,$$

სადაც პირველი ასახვა F, G ბაზისის შესაბამისი $\mathbb{R}^U$ -მოდულთა იზომორფიზმია, ხოლო მეორე კი $1, i$ წყვილის შესაბამისი. მაშასადამე $\mathcal{T}_{F,G} : \mathbb{C}^U \rightarrow \mathbb{C}^U$ იზომორფიზმია $\mathbb{R}^U$ -მოდულის სტრუქტურის მიმართ. $\square$

$(F, G) \in GP(U)$ წარმომქმნელი წყვილის მიმართ ფსევდოანალიზური ფუნქციების სიმრავლეს აღვნიშნავთ $\mathcal{PA}_{F,G}(U)$ -ით, ხოლო (F, G) -გაწარმოებას კი $D_{F,G}$ -ით, რომელსაც ასევე უბრალოდ ფსევდოგაწარმოებასაც ვუწოდებთ ორაზროვნების არარსებობის შემთხვევაში. ბუნებრივი ოპერაციების მიმართ $\mathcal{PA}_{F,G}(U)$ ფლობს $\mathbb{R}$ -წრფივ სტრუქტურას და შემდგომში ყოველთვის ის იქნება ნაგულისხმევი, რომ ის ამ სტრუქტურით არის აღჭურვილი. $D_{F,G}$ ასახვა $\mathbb{R}$ -წრფივია. მაშასადამე, ყოველი $f \in \mathcal{PA}_{F,G}(U)$ -ისათვის და $a \in U$ წერტილისათვის, ზემოთ შემოყვანილი ასახვების გამოყენებით, გვაქვს (იხ. [3], [4]):

$$D_{F,G}(f)(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(\mathcal{T}_{F,G}^F(f)(z) - \mathcal{T}_{F,G}^F(f)(a)) F(z) + (\mathcal{T}_{F,G}^G(f)(z) - \mathcal{T}_{F,G}^G(f)(a)) G(z)}{z - a}$$

და, მთლიანობაში, გვაქვს $\mathbb{R}$ -წრფივი ასახვა

$$D_{F,G} : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathbb{C}^U.$$

$f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქცია ფსევდოანალიზურია (F, G) -წყვილის მიმართ U -ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც U -ის ყოველ წერტილში $a \in U$ ზემომოყვანილი ზღვარი არსებობს (და სასრულია), ეს კი ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის სათანადო კოეფიციენტებიან კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლებას აკმაყოფილებს (იხ. [3], [4], [28]); ზემოთ შემოყვანილი აღნიშვნებით, ეს ვითარება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$f \in \mathcal{PA}_{F,G}(U) \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \text{ch}_1(F, G) \cdot f + \text{ch}_2(F, G) \cdot \bar{f}.$$

ამ შემთხვევაში, ფსევდოწარმოებულისათვის კმაყოფილდება ტოლობა:

$$D_{F,G}(f) = \frac{\partial f}{\partial z} - \text{ch}_3(F, G) \cdot f - \text{ch}_4(F, G) \cdot \bar{f}.$$

ასახვა, რომელიც ყოველ $(F, G) \in GP(U)$ წარმომქმნელ წყვილს უსაბამებს მის შესაბამის $\mathcal{PA}_{F,G}(U)$ ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა $\mathbb{R}$ -წრფივ სივრცეს და ამ სივრცეზე

შესაბამის $\mathbb{R}$ -წრფივ $D_{F,G} : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \rightarrow \mathbb{C}^U$ ფსევდოგაწარმოებას, ანუ:

$$GP(U) \longrightarrow \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{R}}) \times \text{Ar}(\text{Vec}_{\mathbb{R}}), \quad (F, G) \longmapsto (\mathcal{PA}_{F,G}(U), D_{F,G} : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathbb{C}^U)$$

არაინექციურია. აქ $\text{Ar}(\text{Vec}_{\mathbb{R}})$ -ით აღნიშნულია $\mathbb{R}$ -წრფივ სივრცეთა კატეგორიის მორფიზმების ერთობლიობა. სწორად ამასთან არის დაკავშირებული წარმომქმნელ წყვილებს შორის ექვივალენტურობისა და ექვიპოტენტურობის ექვივალენტობის მიმართებები (იხ. [3]).

განსაზღვრება 2.1.1. მოცემული ასახვის ფენის ელემენტებს, ანუ, ისეთ წარმომქმნელ წყვილებს, რომლებიც ერთსა და იმავე სივრცესა და მასზე ფსევდოგაწარმოებას განსაზღვრავენ, ეწოდებათ ექვივალენტური წარმომქმნელი წყვილები.

ამ უკანასკნელის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ წარმომქმნელ წყვილებს გააჩნდეთ ერთი და იგივე მახასიათებელი კოეფიციენტები, (იხ. [3]). ამგვარად, $(F_1, G_1), (F_2, G_2) \in GP(U)$ წარმომქმნელი წყვილები ექვივალენტურები არიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$\text{ch}_U(F_1, G_1) = \text{ch}_U(F_2, G_2).$$

განსაზღვრება 2.1.2. წარმომქმნელ წყვილებს ეწოდებათ ექვიპოტენტური, თუ ისინი ერთსა და იმავე ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა სივრცეს განსაზღვრავენ, მაგრამ არააუცილებლად ერთსა და იმავე ფსევდოგაწარმოების ოპერატორს მასზე.

სხვა სიტყვებით, თუ $(F_1, G_1), (F_2, G_2) \in GP(U)$ წარმომქმნელი წყვილები ექვიპოტენტურები არიან, მაშინ

$$\mathcal{PA}_{F_1, G_1}(U) = \mathcal{PA}_{F_2, G_2}(U), \quad \text{მაგრამ არ არის აუცილებელი, რომ } D_{F_1, G_1} = D_{F_2, G_2}.$$

ცხადია, ექვიპოტენტურობა ექვივალენტურობაზე უფრო სუსტი პირობაა. ზემომოყვანილ აღნიშვნებში, $(F_1, G_1), (F_2, G_2) \in GP(U)$ წყვილები ექვიპოტენტურები არიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება ტოლობები (იხ. [3]):

$$\text{ch}_1(F_1, G_1) = \text{ch}_1(F_2, G_2), \quad \text{ch}_2(F_1, G_1) = \text{ch}_2(F_2, G_2).$$

დებულება 2.1.5. ორი $(F_1, G_1), (F_2, G_2) \in GP(U)$ წარმომქმნელი წყვილი ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი ბუნებრივი მოქმედების მიმართ

$$\text{GL}(2, \mathbb{R}) \times GP(U) \rightarrow GP(U)$$

ერთსა და იმავე ორბიტას ეკუთვნის.

დამტკიცება. წარმომქმნელ წყვილების ექვივალენტურობა ტოლფასია იმისა, რომ მათ ჰქონდეთ ერთი და იგივე მახასიათებელი კოეფიციენტები, ეს კი ხდება მაშინ და მხო-

ლოდ მაშინ, როდესაც წარმომქმნელი წყვილები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან $GL(2, \mathbb{R})$ -ის მოქმედებით. $\square$

წარმომქმნელ წყვილებს შორის ექვიპოტენტურობის მიმართებას აღვნიშნავთ $\sim_{ep}$ -ით. დაწვეის მონაცემების განხილვისას მნიშვნელოვანი იქნება შემდეგი ლემა, რომელიც იყენებს ფუნქციის დაშვებადობის შემდეგ ცნებას (იხ. [4]):

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქციას ეწოდება დასაშვები (admissible), თუ ფუნქცია $|f|^p$ ლოკალურად ინტეგრებადია რაიმე $p > 1$ ნამდვილი რიცხვისათვის, ე.ი., $|f| \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbb{C})$, და თუ მოიმეზნება ისეთი ნამდვილი რიცხვები $M > 0$ და $\epsilon \in (0, 1)$, რომ სრულდება უტოლობები

$$\frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} \left| \frac{f(w)}{w - z} \right| dw \wedge d\bar{w} \leq \frac{M}{1 + |z|^{1+\epsilon}}$$

და

$$\frac{i}{2} \int_{\mathbb{C}} \left| \frac{f(w)}{(w - z_1)(w - z_2)} \right| dw \wedge d\bar{w} \leq \frac{M}{|z_1 - z_2|^{1-\epsilon}}.$$

ნებისმიერ $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლეზე განსაზღვრულ $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქციას კი ეწოდება დაშვებადი, თუ მთელს სიბრტყეზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც მიიღება f -ისგან მისი გაგრძელებით $\mathbb{C} \setminus U$ -ზე ნულით, დაშვებადია.

ლემა 2.1.1. განვიხილოთ $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლის $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ ღია დაფარვა და თითოეულ U_j -ზე $(F_j, G_j) \in GP(U_j)$ წარმომქმნელი წყვილი ისეთი, რომ ყოველი $j, k \in J$ -ისათვის სრულდებოდეს

$$(F_j, G_j)|_{U_j \cap U_k} \sim_{ep} (F_k, G_k)|_{U_j \cap U_k}.$$

თუ

$$\text{ch}_1(F_j, G_j), \quad \text{ch}_2(F_j, G_j), \quad j \in J$$

პირველ ორი მახასიათებელი კოეფიციენტების შეწყბებით მიღებული ფუნქციები (იხილეთ დამტკიცება) დაშვებადია, მაშინ არსებობს $(F, G) \in GP(U)$ წარმომქმნელი წყვილი ისეთი, რომ ყოველი $j \in J$ -ისათვის

$$(F, G)|_{U_j} \sim_{ep} (F_j, G_j).$$

დამტკიცება. პირობა

$$(F_j, G_j)|_{U_j \cap U_k} \sim_{ep} (F_k, G_k)|_{U_j \cap U_k},$$

კერძოდ, ნიშნავს, რომ ყოველი $j, k \in J$ -ისათვის

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_1 \left(F_j|_{U_j \cap U_k}, G_j|_{U_j \cap U_k} \right) &= \mathrm{ch}_1 \left(F_k|_{U_j \cap U_k}, G_k|_{U_j \cap U_k} \right), \\ \mathrm{ch}_2 \left(F_j|_{U_j \cap U_k}, G_j|_{U_j \cap U_k} \right) &= \mathrm{ch}_2 \left(F_k|_{U_j \cap U_k}, G_k|_{U_j \cap U_k} \right),\end{aligned}$$

ეს, გათვალისწინებით იმისა, რომ წარმომქმნელი წყვილისათვის მისი მახასიათებელი კოეფიციენტების შესაბამემა კონათა მორფიზმია, ანუ, კომპუტირებს შეზღუდვებთან, ნიშნავს, რომ

$$(\mathrm{ch}_1(F_j, G_j))|_{U_j \cap U_k} = (\mathrm{ch}_1(F_k, G_k))|_{U_j \cap U_k}, \quad (\mathrm{ch}_2(F_j, G_j))|_{U_j \cap U_k} = (\mathrm{ch}_2(F_k, G_k))|_{U_j \cap U_k},$$

მაშასადამე, გვაქვს უწყვეტ ფუნქციათა ორი ერთობლიობა

$$\mathrm{ch}_1(F_j, G_j) : U_j \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mathrm{ch}_2(F_j, G_j) : U_j \longrightarrow \mathbb{C}, \quad j \in J;$$

რომლებიც ერთმანეთს ემთხვევა $U_j \cap U_k, j, k \in J$ თანაკვეთებზე, რაც ნიშნავს, რომ მოიძებნება უწყვეტი ფუნქციების ერთადერთი

$$f_1 : U \longrightarrow \mathbb{C} \in C(U, \mathbb{C}), \quad f_2 : U \longrightarrow \mathbb{C} \in C(U, \mathbb{C}),$$

წყვილი ისეთი, რომ

$$f_1|_{U_j} = \mathrm{ch}_1(F_j, G_j), \quad f_2|_{U_j} = \mathrm{ch}_2(F_j, G_j), \quad j \in J.$$

ამ უწყვეტი ფუნქციებისათვის კი [4]-ის გვ. 312-ზე მითითებული დებულების თანახმად არსებობს წარმომქმნელი წყვილი $(F, G) \in GP(U)$ ისეთი, რომ

$$\mathrm{ch}_1(F, G) = f_1, \quad \mathrm{ch}_2(F, G) = f_2,$$

ამ წარმომქმნელი წყვილისთვის კი კმაყოფილდება შემდეგი:

$$\mathrm{ch}_1(F|_{U_j}, G|_{U_j}) = (\mathrm{ch}_1(F, G))|_{U_j} = f_1|_{U_j} = \mathrm{ch}_1(F_j, G_j)$$

და

$$\mathrm{ch}_2(F|_{U_j}, G|_{U_j}) = (\mathrm{ch}_2(F, G))|_{U_j} = f_2|_{U_j} = \mathrm{ch}_2(F_j, G_j),$$

ყოველი $j \in J$ -ისათვის, ეს კი ნიშნავს, რომ, ყოველი $j \in J$ -ისათვის

$$(F, G)|_{U_j} \sim_{\mathrm{ep}} (F_j, G_j).$$

□

ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა თეორიაში მნიშვნელოვანია წარმომქმნელი წყვილის

მომდევნო, ან შთამომავალი, წყვილის (successor pair) ცნება (იხ. [3], [4]): $(F_2, G_2) \in GP(U)$ წყვილს ეწოდება $(F_1, G_1) \in GP(U)$ წყვილის მომდევნო, თუ ყოველი $f \in \mathcal{PA}_{F_1, G_1}(U)$ -ისათვის, $D_{F_1, G_1}(f) \in \mathcal{PA}_{F_2, G_2}(U)$; ამ შემთხვევაში სათანადო ფსევდოგაწარმოების ოპერატორის მნიშვნელობათა არედ შეგვიძლია $\mathcal{PA}_{F_2, G_2}(U)$ განვიხილოთ, ანუ, გვაქვს ასახვა:

$$D_{F_1, G_1} : \mathcal{PA}_{F_1, G_1}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F_2, G_2}(U);$$

წარმომქმნელ წყვილებს შორის ამ მიმართების აღნიშვნისათვის გამოვიყენებთ $\preceq$ სიმბოლოს. ამგვარად,

$$(F_1, G_1) \preceq (F_2, G_2) :\iff (F_2, G_2) \text{ წყვილი } (F_1, G_1)\text{-ის მომდევნოა;}$$

ეს მიმართება საზოგადოდ არც რეფლექსური და არც ტრანზიტულია; წარმომქმნელი წყვილების სასრული მიმდევრობისათვის, რომლისთვისაც

$$(F_1, G_1) \preceq (F_2, G_2) \preceq \dots \preceq (F_{n+1}, G_{n+1})$$

შესაძლოა განვიხილოთ სათანადო ფსევდოგაწარმოების ოპერატორების კომპოზიცია

$$\mathcal{PA}_{F_1, G_1}(U) \xrightarrow{D_{F_1, G_1}} \mathcal{PA}_{F_2, G_2}(U) \xrightarrow{D_{F_2, G_2}} \dots \xrightarrow{D_{F_n, G_n}} \mathcal{PA}_{F_{n+1}, G_{n+1}}(U); ,$$

ამ კომპოზიციისთვის გამოვიყენებთ შემოკლებულ აღნიშვნას:

$$D_{(F_1, G_1) \preceq (F_2, G_2) \preceq \dots \preceq (F_n, G_n)} := D_{F_n, G_n} \circ \dots \circ D_{F_2, G_2} \circ D_{F_1, G_1};$$

განმარტების ძალით, ნებისმიერი $k \in \{2, \dots, n-2\}$ -ისთვის მართებულია ტოლობა:

$$D_{(F_1, G_1) \preceq \dots \preceq (F_n, G_n)} = D_{(F_{k+1}, G_{k+1}) \preceq \dots \preceq (F_n, G_n)} \circ D_{(F_1, G_1) \preceq \dots \preceq (F_k, G_k)}.$$

ასეთი ასახვები დაედება საფუძვლად მომდევნო ქვეთავში განსაზღვრულ კატეგორიაში მორფიზმებს.

2.2 ღია ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა კატეგორია

$U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლის მიმართ განსაზღვრავთ U -ზე განსაზღვრული ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა $\mathcal{PA}(U)$ კატეგორიას შემდეგნაირად:

მისი $\text{Ob}(\mathcal{PA}(U))$ ობიექტთა ერთობლიობა შედგება U -ზე რაიმე $F, G : U \rightarrow \mathbb{C}$ წარმომქმნელი წყვილის მიმართ განსაზღვრული $\mathcal{PA}_{F, G}(U)$ ფსევდოანალიზური ფუნქციე-

ბის სივრცეებისგან, ანუ:

$$\text{Ob}(\mathcal{PA}(U)) := \{\mathcal{PA}_{F,G}(U) \mid (F, G) \in GP(U)\}.$$

ის წარმოადგენს შემდეგი ასახვის ანასახს

$$GP(U) \longrightarrow \mathcal{P}(\text{Mor}_{\text{Set}}(U, \mathbb{C})), \quad (F, G) \longmapsto \mathcal{PA}_{F,G}(U),$$

სადაც $\mathcal{P}(\text{Mor}_{\text{Set}}(U, \mathbb{C}))$ -ით აღნიშნულია $\text{Mor}_{\text{Set}}(U, \mathbb{C})$ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე და, შესაბამისად, $\text{Ob}(\mathcal{PA}(U))$ ერთობლიობა - სიმრავლეა.

$\mathcal{PA}(U)$ -ში მორფიზმების სიმრავლეების განსასაზღვრავად დაგვჭირდება *ლოკალურად ფსევდოგაწარმოებებით მოცემული ასახვის* ცნება. ქვემოთ მოვიყვანთ ამ ცნების განსაზღვრებას.

განვიხილოთ U -ზე განსაზღვრული ფსევდოანალიზური ფუნქციების ორი $\mathcal{PA}_{F,G}(U)$ და $\mathcal{PA}_{F',G'}(U)$ სივრცე, განსაზღვრულები $(F, G), (F', G') \in GP(U)$ წარმომქმნელი წყვილების მიმართ, და მათი განსაზღვრის არის ღია დაფარვა:

$$U = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

თითოეულ U_j -ზე განვიხილოთ მასზე განსაზღვრული წარმომქმნელი წყვილების სასრული ჯაჭვი, ანუ, დალაგებული ერთობლიობა

$$((F_{j,1}, G_{j,1}), (F_{j,2}, G_{j,2}), \dots, (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})) \in GP(U_j)^{k_j}$$

ისეთი, რომ ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან (თუ კი ერთობლიობა არანაკლებ ორი წევრისაგან შედგება) იყოს მისი უშუალოდ წინამორბედი წევრის მომდევნო ბერსის აზრით, ე.ი.:

$$(F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq (F_{j,2}, G_{j,2}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j}).$$

ამ მოცემულობათა ერთობლიობას აღვნიშნავთ შემდეგნაირად

$$\{(U_j, (F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq (F_{j,2}, G_{j,2}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j}))\}_{j \in J},$$

სადაც

$$k : J \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad j \longmapsto k(j) \equiv k_j.$$

ამასთანავე ეს წარმომქმნელი წყვილები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ პირობებს:

$$(F_{j,1}, G_{j,1}) \sim_{\text{ep}} (F, G)|_{U_j} \quad \text{და} \quad (F_{j,k_j}, G_{j,k_j}) \preceq (F', G')|_{U_j}, \quad j \in J,$$

ხოლო ყოველი $j, l \in J$ წყვილისათვის და $f \in \mathcal{PA}_{F,G}(U)$ ფსევდოანალიზური ფუნქცი-

ისათვის კი უნდა სრულდებოდეს ტოლობა:

$$D_{(F_{j,1},G_{j,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j},G_{j,k_j})|_{U_j \cap U_l}} \left(f|_{U_j \cap U_l} \right) = D_{(F_{l,1},G_{l,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (F_{l,k_l},G_{l,k_l})|_{U_j \cap U_l}} \left(f|_{U_j \cap U_l} \right).$$

ეს უკანასკნელი პირობა შესაძლებელს ხდის

$$D_{(F_{j,1},G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j},G_{j,k_j})} : \mathcal{PA}_{F|_{U_j}, G|_{U_j}}(U_j) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F'|_{U_j}, G'|_{U_j}}(U_j)$$

ასახვების შეწყობას

$$\omega : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F',G'}(U), \quad f \longmapsto \omega(f)$$

ასახვად, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება პირობით

$$(\omega(f))|_{U_j} = D_{(F_{j,1},G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j},G_{j,k_j})}(f|_{U_j}), \quad j \in J.$$

ამ განსაზღვრების კორექტულობა გამომდინარეობს შემდეგიდან: ტოლობიდან

$$\begin{aligned} & \left(D_{(F_{j,1},G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j},G_{j,k_j})} \left(f|_{U_j} \right) \right) \Big|_{U_j \cap U_l} = D_{(F_{j,1},G_{j,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j},G_{j,k_j})|_{U_j \cap U_l}} \left(f|_{U_j \cap U_l} \right) \\ & = D_{(F_{l,1},G_{l,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (F_{l,k_l},G_{l,k_l})|_{U_j \cap U_l}} \left(f|_{U_j \cap U_l} \right) = \left(D_{(F_{l,1},G_{l,1}) \preceq \dots \preceq (F_{l,k_l},G_{l,k_l})} \left(f|_{U_l} \right) \right) \Big|_{U_j \cap U_l}, \end{aligned}$$

გამომდინარე ყოველი $f \in \mathcal{PA}_{F,G}(U)$ -ისათვის ასახვების ერთობლიობა

$$\left\{ D_{(F_{j,1},G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j},G_{j,k_j})}(f|_{U_j}) \in \mathcal{PA}_{F'|_{U_j}, G'|_{U_j}}(U_j) \right\}_{j \in J}$$

ცალსახად განსაზღვრავს ასახვას, რომელიც აღვნიშნოთ $\omega(f)$ -ით, $\omega(f) : U \rightarrow \mathbb{C}$, ხოლო ფსევდოანალიზურობის ლოკალურობიდან გამომდინარე კი გვაქვს $\omega(f) \in \mathcal{PA}_{F',G'}(U)$.
ვიტყვი, რომ

$$\omega : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F',G'}(U)$$

ასახვა ლოკალურად მოიცემა ფსევდოგაწარმოებებით ან არის ლ.ფ.გ., თუ ის მოიცემა ზემოაღწერილი გზით. $\mathcal{PA}(U)$ კატეგორიაში $\mathcal{PA}_{F,G}(U)$, $\mathcal{PA}_{F',G'}(U)$ ობიექტთა წყვილის შესაბამისი მორფიზმების ერთობლიობა არაექვიპოტენტური (F, G) და (F', G') წყვილების შემთხვევაში შედგება ლ.ფ.გ. ასახვებისაგან:

$$\text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F',G'}(U)) := \{ \omega : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F',G'}(U) \mid \omega \text{ არის ლ.ფ.გ.} \},$$

ხოლო თუ კი $(F, G) \sim_{\text{ep}} (F', G')$, ანუ, $\mathcal{PA}_{F,G}(U) = \mathcal{PA}_{F',G'}(U)$, მაშინ მორფიზმთა სიმ-

რავლე $\text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F',G'}(U))$ შეიცავს იგივე (სიმრავლურ) ასახვასაც, ე.ი.,

$$\text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F',G'}(U)) :=$$

$$\{\omega : \mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{A}_{F',G'}(U) \mid \omega \text{ არის ლ.ფ.გ.}\} \cup \{\text{id}_{\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U)} : \mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U)\};$$

მორფიზმთა

$$\omega \in \text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F',G'}(U)), \quad \eta \in \text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F',G'}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F'',G''}(U))$$

კომპოზიცია კი მოიცემა ასახვათა ჩვეულებრივი კომპოზიციით $\eta \circ \omega$.

შესამოწმებელია, რომ $\eta \circ \omega \in \text{Mor}_{\text{Set}}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F'',G''}(U))$ ასახვა ეკუთვნის სათანადო ქვესიმრავლეს:

$$\eta \circ \omega \in \text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F'',G''}(U)) \subseteq \text{Mor}_{\text{Set}}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F'',G''}(U)).$$

დებულება 2.2.1. განვიხილოთ

$$\omega \in \text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F',G'}(U)), \quad \eta \in \text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F',G'}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F'',G''}(U))$$

ასახვები. მათი სიმრავლურ-თეორიული $\eta \circ \omega \in \text{Mor}_{\text{Set}}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F'',G''}(U))$ კომპოზიციისათვის სამართლიანია ჩართვა

$$\eta \circ \omega \in \text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F'',G''}(U)) \subseteq \text{Mor}_{\text{Set}}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F'',G''}(U)).$$

დამტკიცება. ის, რომ კომპოზიცია სასურველი სახის არის, როდესაც ერთ-ერთი წევრი იგივე ასახვაა, ცხადია, ამიტომაც დავუშვათ, რომ ორივე მათგანი განსხვავებულია იგივე ასახვისაგან. ვთქვათ, $\omega \in \text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F,G}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F',G'}(U))$ მოიცემა $U = \bigcup_{j \in J} U_j$

ღია დაფარვით და

$$\{(U_j, (F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq (F_{j,2}, G_{j,2}) \preceq \cdots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j}))\}_{j \in J}$$

ერთობლიობით, ხოლო $\eta \in \text{Mor}_{\mathcal{P}\mathcal{A}(U)}(\mathcal{P}\mathcal{A}_{F',G'}(U), \mathcal{P}\mathcal{A}_{F'',G''}(U))$ კი - $U = \bigcup_{l \in L} V_l$ და

$$\{(V_l, (\tilde{F}_{l,1}, \tilde{G}_{l,1}) \preceq (\tilde{F}_{l,2}, \tilde{G}_{l,2}) \preceq \cdots \preceq (\tilde{F}_{l,\tilde{k}_l}, \tilde{G}_{l,\tilde{k}_l}))\}_{l \in L}$$

ერთობლიობით. მაშინ გვაქვს ასევე

$$U = \bigcup_{(j,l) \in J \times L} U_j \cap V_l$$

ღია დაფარვა და ნებისმიერი $f \in \mathcal{PA}_{F,G}(U)$ -ისათვის და

$$\eta \circ \omega \in \text{Mor}_{\text{Set}}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F'',G''}(U))$$

კომპოზიციისთვის გვაქვს:

$$\begin{aligned} ((\eta \circ \omega)(f))|_{U_j \cap V_l} &= (\eta(\omega(f)))|_{U_j \cap V_l} = ((\eta(\omega(f))|_{V_l}))|_{U_j \cap V_l} \\ &= \left(D_{(\tilde{F}_{l,1}, \tilde{G}_{l,1}) \preceq \dots \preceq (\tilde{F}_{l,k_l}, \tilde{G}_{l,k_l})} (\omega(f)|_{V_l}) \right)|_{U_j \cap V_l} = D_{(\tilde{F}_{l,1}, \tilde{G}_{l,1})|_{U_j \cap V_l} \preceq \dots \preceq (\tilde{F}_{l,k_l}, \tilde{G}_{l,k_l})|_{U_j \cap V_l}} (\omega(f)|_{U_j \cap V_l}) \\ &= D_{(\tilde{F}_{l,1}, \tilde{G}_{l,1})|_{U_j \cap V_l} \preceq \dots \preceq (\tilde{F}_{l,k_l}, \tilde{G}_{l,k_l})|_{U_j \cap V_l}} \left((\omega(f)|_{U_j})|_{U_j \cap V_l} \right) \\ &= D_{(\tilde{F}_{l,1}, \tilde{G}_{l,1})|_{U_j \cap V_l} \preceq \dots \preceq (\tilde{F}_{l,k_l}, \tilde{G}_{l,k_l})|_{U_j \cap V_l}} \left(\left(D_{(F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})} (f|_{U_j}) \right)|_{U_j \cap V_l} \right) \\ &= D_{(\tilde{F}_{l,1}, \tilde{G}_{l,1})|_{U_j \cap V_l} \preceq \dots \preceq (\tilde{F}_{l,k_l}, \tilde{G}_{l,k_l})|_{U_j \cap V_l}} \left(D_{(F_{j,1}, G_{j,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})|_{U_j \cap U_l}} (f|_{U_j \cap V_l}) \right) \\ &= D_{(\tilde{F}_{l,1}, \tilde{G}_{l,1})|_{U_j \cap V_l} \preceq \dots \preceq (\tilde{F}_{l,k_l}, \tilde{G}_{l,k_l})|_{U_j \cap V_l}} \circ D_{(F_{j,1}, G_{j,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})|_{U_j \cap U_l}} (f|_{U_j \cap V_l}) \\ &= D_{(F_{j,1}, G_{j,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})|_{U_j \cap U_l}} (\tilde{F}_{l,1}, \tilde{G}_{l,1})|_{U_j \cap V_l} \preceq \dots \preceq (\tilde{F}_{l,k_l}, \tilde{G}_{l,k_l})|_{U_j \cap V_l}} (f|_{U_j \cap V_l}), \end{aligned}$$

მაშასადამე, $\eta \circ \omega \in \text{Mor}_{\text{Set}}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F'',G''}(U))$ კომპოზიციაც ლოკალურად მოიცემა ფსევდოგაწარმოებებით, კერძოდ,

$$\left\{ \left(U_j \cap V_l, (F_{j,1}, G_{j,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (\tilde{F}_{l,k_l}, \tilde{G}_{l,k_l})|_{U_j \cap V_l} \right) \right\}_{(j,l) \in J \times L}$$

ერთობლიობით და, შესაბამისად,

$$\eta \circ \omega \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F'',G''}(U)).$$

□

ამგვარად, $\mathcal{PA}(U)$ მართლაც კატეგორიაა: კომპოზიციის ასოციაციურობა და მის მიმართ იგივეური ასახვის ნეიტრალურობა უშუალოდ გამომდინარეობს იქიდან, რომ მოცემულ კატეგორიაში მორფიზმები კერძოდ სიმრავლეებს შორის ასახვებია და მათი კომპოზიციაც ამ ასახვათა ჩვეულებრივი კომპოზიციანაა.

განსაზღვრება 2.2.1. $\mathcal{PA}(U)$ -ს კუწოდებთ ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა კატეგორიას $U \subseteq \mathbb{C}$ -ზე.

შენიშვნა. $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული წარმომქმნელი წყვილების $GP(U)$ სიმრავლეზე ექვიპოტენტურობის მიმართება $\sim_{\text{ep}, U}$, როგორც $GP(U) \times GP(U)$ -ის ქვესიმ-

რავლე, იგივე არის, რაც შემდეგი სიმრავლეების ფიზირებული ნამრავლი:

$$\begin{array}{ccc} GP(U) \times_{\text{Ob}(\mathcal{PA}(U))} GP(U) & \longrightarrow & GP(U) \\ \downarrow & & \downarrow (F,G) \mapsto \mathcal{PA}_{F,G}(U) , \\ GP(U) & \xrightarrow{(F,G) \mapsto \mathcal{PA}_{F,G}(U)} & \text{Ob}(\mathcal{PA}(U)) \end{array}$$

ე.ი.,

$$GP(U) \times_{\text{Ob}(\mathcal{PA}(U))} GP(U) = \sim_{\text{ep}, U} .$$

როგორც ითქვა, ფიქსირებული წარმომქმნელი წყვილით განსაზღვრული ფსევდო-ანალიზური ფუნქციების სიმრავლე ბუნებრივი ოპერაციების მიმართ $\mathbb{R}$ -წრფივი სივრცეა. მომდევნო ნაწილში ყოველთვის იქნება ნაგულისხმევი, რომ ეს სიმრავლეები აღჭურვილია $\mathbb{R}$ -წრფივი სივრცის სტრუქტურით. სამართლიანია შემდეგი დებულება.

დებულება 2.2.2. $\mathcal{PA}(U)$ კატეგორია $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ -ის ქვეკატეგორიაა.

დამტკიცება. ყოველი $\mathcal{PA}_{F,G}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{PA}(U))$ ობიექტი მასში შემავალი ფუნქციების წერტილოვანი შეკრებისა და მათი $\mathbb{R}$ -ის ელემენტებზე გამრავლების მიმართ ჩაკეტილი სიმრავლეა, მაშასადამე ის ამ ოპერაციების მიმართ $\mathbb{R}$ -წრფივი სივრცეა, ანუ:

$$\text{Ob}(\mathcal{PA}(U)) \subseteq \text{Ob}(\text{Vec}_{\mathbb{R}}) .$$

განვიხილოთ $\omega \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F',G'}(U))$ მორფიზმი მოცემული

$$U = \bigcup_{j \in J} U_j, \quad \{(U_j, (F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j}))\}_{j \in J} ,$$

ერთობლიობით და ორი (F, G) -ფსევდოანალიზური ფუნქცია $f, g \in \mathcal{PA}_{F,G}(U)$ და ორი ნამდვილი რიცხვი $a, b \in \mathbb{R}$; ყოველი $j \in J$ -ისათვის, ფსევდოგაწარმოების $\mathbb{R}$ -ის მიმართ წრფივობიდან გამომდინარე, სამართლიანია

$$\begin{aligned} (\omega(af + bg))|_{U_j} &= D_{(F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})} (a f|_{U_j} + b g|_{U_j}) \\ &= a D_{(F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})} (f|_{U_j}) + b D_{(F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})} (g|_{U_j}) \\ &= a (\omega(f))|_{U_j} + b (\omega(g))|_{U_j} = (a\omega(f) + b\omega(g))|_{U_j} , \end{aligned}$$

რადგან ტოლობა დაფარვის ყოველი U_j -ისათვის არის სამართლიანი, ამიტომ მართებულია შემდეგი ტოლობაც:

$$\omega(af + bg) = a\omega(f) + b\omega(g) .$$

მაშასადამე,

$$\omega : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F',G'}(U)$$

ასახვა $\mathbb{R}$ -წრფივია და, შესაბამისად, გვაქვს ჩართვა:

$$\text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F',G'}(U)) \subseteq \text{Mor}_{\text{Vec}_{\mathbb{R}}}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F',G'}(U)).$$

□

ლემა 2.2.1. $\mathcal{PA}(U)$ კატეგორიაში მხოლოდ იგივეური ასახვები

$$\text{id}_{\mathcal{PA}_{F,G}(U)} \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F,G}(U)), \quad \mathcal{PA}_{F,G}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{PA}(U))$$

არიან იზომორფიზმები.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი

$$\omega \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F',G'}(U))$$

არაიგივეური მორფიზმი და (F, G) -მუდმივი 0-ისაგან განსხვავებული $f \in \mathcal{PA}_{F,G}(U)$ ფსევდოანალიზური ფუნქცია (ასეთის მაგალითებია თავად F, G ფუნქციები) და $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ დაფარვა, რომლის წევრებზეც ω წარმოდგენადია ფსევდოგაწარმოებათა კომპოზიციის სახით. ფსევდოგაწარმოების $\mathbb{R}$ -წრფივობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობები:

$$\omega(f)|_{U_j} = D_{(F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})} (f|_{U_j}) = D_{(F_{j,2}, G_{j,2}) \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})} (D_{F|_{U_j}, G|_{U_j}} (f|_{U_j})) = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ $\omega(f) = 0 \in \mathcal{PA}_{F',G'}(U)$. მაშასადამე, ω -ის ბირთვი არატრივიალურია, შესაბამისად, ის არაინექციურია და არ გააჩნია სიმრავლურ-თეორიული შებრუნებული ასახვა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მას ვერც განხილულ კატეგორიაში ვერ ექნება შებრუნებული მორფიზმი. □

დებულება 2.2.3. ნებისმიერი $\mathcal{PA}_{F,G}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{PA}(U))$ -ისათვის მოიძებნება $V \subseteq U$ ღია ქვესიმრავლე და წარმომქნელი წყვილების ორი მიმდევრობა

$$((F_n, G_n) \in GP(V))_{n \in \mathbb{N}}, \quad ((F'_n, G'_n) \in GP(V))_{n \in \mathbb{N}}$$

ისეთი, რომ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -ისათვის

$$\text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V), \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(V)) \neq \emptyset$$

და

$$\text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F'_n, G'_n}(V), \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V)) \neq \emptyset.$$

დამტკიცება. $(F, G) \in GP(U)$ წარმომქმნელი წყვილი სათანადოდ შერჩეულ $V \subseteq U$ ღია ქვესიმრავლეზე შეზღუდვის შემდეგ ჩადგმადია წარმომქმნელ მიმდევრობაში (იხ. [4], [3]). ეს ნიშნავს წარმომქმნელი წყვილების $\mathbb{Z}$ -ით ინდექსირებული ისეთი მიმდევრობის არსებობას, რომ:

$$((F_k, G_k) \in GP(V))_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (F_0, G_0) = (F, G)|_V,$$

და, ყოველი $k \in \mathbb{Z}$ -ისათვის,

$$(F_{k-1}, G_{k-1}) \preceq (F_k, G_k) \preceq (F_{k+1}, G_{k+1}).$$

შესაბამისად, თითოეული ამ მიმდევრობის წარმომქმნელი წყვილის შესაბამისი D_{F_k, G_k} ფსევდოგაწარმოება განსაზღვრავს მორფიზმს $\mathcal{PA}(V)$ -ში და შეგვიძლია განვიხილოთ ამ მორფიზმთა მიმდევრობა:

$$\dots \xrightarrow{D_{F_{-2}, G_{-2}}} \mathcal{PA}_{F_{-1}, G_{-1}}(V) \xrightarrow{D_{F_{-1}, G_{-1}}} \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V) \xrightarrow{D_{F_0, G_0}} \mathcal{PA}_{F_1, G_1}(V) \xrightarrow{D_{F_1, G_1}} \dots,$$

მაშასადამე, გვაქვს ყოველი $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ -ისათვის $\mathcal{PA}(V)$ -ს მორფიზმები:

$$D_{(F_0, G_0) \preceq \dots \preceq (F_{n-1}, G_{n-1})} : \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(V),$$

$$D_{(F_{-n}, G_{-n}) \preceq \dots \preceq (F_{-1}, G_{-1})} : \mathcal{PA}_{F_{-n}, G_{-n}}(V) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V).$$

ასევე, $n = 1$ შემთხვევისათვის გვაქვს D_{F_0, G_0} და $D_{F_{-1}, G_{-1}}$ მორფიზმები, ხოლო $n = 0$ შემთხვევისათვის კი $\text{id}_{\mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V)}$ - იგივე ასახვა. მაშასადამე, წარმომქმნელი წყვილების მიმდევრობებისათვის

$$((F_n, G_n) \in GP(V))_{n \in \mathbb{N}}, \quad ((F'_n, G'_n) := (F_{-n}, G_{-n}) \in GP(V))_{n \in \mathbb{N}}$$

და ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -ისათვის სამართლიანია:

$$\text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V), \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(V)) \neq \emptyset, \quad \text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F'_n, G'_n}(V), \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V)) \neq \emptyset.$$

□

შენიშვნა. ბუნებრივია, ყოველი $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლისათვის, კატეგორია $\mathcal{PA}(U)$ მცირეა, რადგანაც ობიექტების ერთობლიობისათვის ბუნებრივად მყარდება ბიექცია,

$$\text{Ob}(\mathcal{PA}(U)) \cong GP(U) / \sim_{\text{ep}},$$

რომელიც წარმომქმნელი წყვილების ყოველ ექვივალენტობის კლასს უსაბამებს შესაბამის ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეს, რაც ნიშნავს, რომ $\text{Ob}(\mathcal{PA}(U))$ სიმრავ-

ლუა. დებულება 2.2.2-ის ძალით, ყოველ ობიექტს შორის

$$\text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F',G'}(U))$$

მორფიზმების ერთობლიობა და, შესაბამისად,

$$\text{Ar}(\mathcal{PA}(U)) := \bigcup_{((F,G),(F',G')) \in GP(U) \times GP(U)} \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F',G'}(U))$$

ყველა მორფიზმების ერთობლიობაც სიმრავლეა.

მომდევნო დებულებაში მყარდება კავშირი პერიოდულ წარმომქმნელ მიმდევრობებსა და ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა კატეგორიაში გარკვეული ფორმის დიაგრამებზე კონუსებისა და კოკონუსების არსებობას შორის.

$\mathcal{N}$ -ით აღვნიშნავთ $(\mathbb{N}, \leq)$ წრფივად დალაგებულ სიმრავლესთან ბუნებრივად ასოცირებულ კატეგორიას; $n \leq m$ მიმართების შესაბამისი მორფიზმი $\mathcal{N}$ -იდან აღვნიშნოთ $*_{n,m}$ -ით. განვიხილოთ $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია სიმრავლეზე $((F_k, G_k) \in GP(U))_{k \in \mathbb{Z}}$ პერიოდული წარმომქმნელი მიმდევრობა $\nu \in \mathbb{N}$ მინიმალური პერიოდით,

$$(F_{k+\nu}, G_{k+\nu}) = (F_k, G_k), k \in \mathbb{Z}, .$$

მაშინ თითოეული $\mathcal{PA}_{F_1, G_1}(U), \dots, \mathcal{PA}_{F_\nu, G_\nu}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{PA}(U))$ წარმოადგეს, სათანადო მორფიზმების ერთობლიობებთან ერთად, გარკვეულ დიაგრამაზე კონუსს და ასევე განსხვავებულ დიაგრამაზე კოკონუსს.

დებულება 2.2.4. $((F_k, G_k) \in GP(U))_{k \in \mathbb{Z}}$ პერიოდული წარმომქმნელი მიმდევრობისათვის $\nu \in \mathbb{N}$ მინიმალური პერიოდით ყოველი

$$\mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{PA}(U)), \quad j \in \{1, \dots, \nu\}$$

ობიექტი სათანადო

$$\omega_{jn} : \mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(U), \quad \eta_{jn} : \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U), \quad n \in \mathbb{N}$$

მორფიზმების ერთობლიობებთან ერთად (ამ მორფიზმების განსაზღვრება მოყვანილია დამტკიცებაში) ადგენს

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathcal{PA}(U), \quad n \longmapsto \Delta(n) := \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(U), \\ n \leq m &\longmapsto \Delta(*_{n,m}) := D_{(F_n, G_n) \leq \dots \leq (F_{m-1}, G_{m-1})} \end{aligned}$$

დიაგრამის კონუსს და

$$\begin{aligned} \Delta' : \mathcal{N}^{\text{op}} &\longrightarrow \mathcal{PA}(U), \quad n \longmapsto \Delta'(n) := \mathcal{PA}_{F_{-n}, G_{-n}}(U), \\ m \leq n &\longmapsto \Delta'(*_{m,n}) := D_{(F_{-n}, G_{-n}) \leq \dots \leq (F_{-m-1}, G_{-m-1})}. \end{aligned}$$

დიაგრამის კოკონუსს.

დამტკიცება. ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -ისათვის განვსაზღვროთ მორფიზმები:

$$\omega_{jn} := D_{(F_{j-\nu}, G_{j-\nu}) \preceq (F_{j-\nu+1}, G_{j-\nu+1}) \preceq \dots \preceq (F_{n-1}, G_{n-1})} : \mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(U),$$

და

$$\eta_{jn} := D_{(F_{-n}, G_{-n}) \preceq (F_{-n+1}, G_{-n+1}) \preceq \dots \preceq (F_{j-1}, G_{j-1})} : \mathcal{PA}_{F_{-n}, G_{-n}}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U);$$

ყოველი $n \leq m$ -ისათვის სამართლიანია ტოლობები:

$$\begin{aligned} \omega_{jm} &= D_{(F_{j-\nu}, G_{j-\nu}) \preceq (F_{j-\nu+1}, G_{j-\nu+1}) \preceq \dots \preceq (F_{n-1}, G_{n-1}) \preceq (F_n, G_n) \preceq (F_{n+1}, G_{n+1}) \preceq \dots \preceq (F_{m-1}, G_{m-1})} \\ &= D_{(F_n, G_n) \preceq (F_{n+1}, G_{n+1}) \preceq \dots \preceq (F_{m-1}, G_{m-1})} \circ D_{(F_{j-\nu}, G_{j-\nu}) \preceq (F_{j-\nu+1}, G_{j-\nu+1}) \preceq \dots \preceq (F_{n-1}, G_{n-1})} \\ &= \Delta(*_{n,m}) \circ \omega_{jn} \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} \eta_{jm} &= D_{(F_{-m}, G_{-m}) \preceq (F_{-m+1}, G_{-m+1}) \preceq \dots \preceq (F_{-n-1}, G_{-n-1}) \preceq (F_{-n}, G_{-n}) \preceq (F_{-n+1}, G_{-n+1}) \preceq \dots \preceq (F_{j-1}, G_{j-1})} \\ &= D_{(F_{-n}, G_{-n}) \preceq (F_{-n+1}, G_{-n+1}) \preceq \dots \preceq (F_{j-1}, G_{j-1})} \circ D_{(F_{-m}, G_{-m}) \preceq (F_{-m+1}, G_{-m+1}) \preceq \dots \preceq (F_{-n-1}, G_{-n-1})} \\ &= \eta_{jn} \circ \Delta'(*_{n,m}), \end{aligned}$$

მაშასადამე, გვაქვს:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U) & \\ \omega_{jn} \swarrow & & \searrow \omega_{jm} \\ \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(U) & \xrightarrow{\Delta(*_{n,m})} & \mathcal{PA}_{F_m, G_m}(U) \end{array}$$

და

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{PA}_{F_{-m}, G_{-m}}(U) & \xrightarrow{\Delta'(*_{n,m})} & \mathcal{PA}_{F_{-n}, G_{-n}}(U) \\ \eta_{jm} \searrow & & \swarrow \eta_{jn} \\ & \mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U) & \end{array}$$

კომპუტაციური დიაგრამები, რაც ნიშნავს, რომ $(\mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U), (\omega_{jn})_{n \in \mathbb{N}})$ წყვილი Δ -ზე კონუსია, ხოლო $(\mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U), (\eta_{jn})_{n \in \mathbb{N}})$ კი Δ' -ზე კოკონუსი. $\square$

შენიშვნა. ნებისმიერი $\{(F_k, G_k) \in GP(U)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ წარმომქმნელი მიმდევრობა განსაზღვრავს დიაგრამას $\mathcal{PA}(U)$ კატეგორიაში:

$$\dots \xrightarrow{D_{F_{k-2}, G_{k-2}}} \mathcal{PA}_{F_{k-1}, G_{k-1}}(U) \xrightarrow{D_{F_{k-1}, G_{k-1}}} \mathcal{PA}_{F_k, G_k}(U) \xrightarrow{D_{F_k, G_k}} \mathcal{PA}_{F_{k+1}, G_{k+1}}(U) \xrightarrow{D_{F_{k+1}, G_{k+1}}} \dots$$

ეს დიაგრამა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ფუნქტორი $(\mathbb{Z}, \leq)$ დალაგებულ სიმრავლესთან ასოცირებული კატეგორიიდან $\mathcal{PA}(U)$ კატეგორიაში. მას, საზოგადოდ, არც

ზღვარი და არც კოზღვარი არ გააჩნია $\mathcal{PA}(U)$ -ში, მაგრამ, რადგანაც $\mathcal{PA}(U)$ $\mathbb{R}$ -წრფივ სივრცეთა კატეგორიის ქვეკატეგორიაა, $\mathcal{PA}(U) \subseteq \text{Vec}_{\mathbb{R}}$, შეგვიძლია ეს დიაგრამა განვიხილოთ, როგორც დიაგრამა $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ -ში.

ამ უკანასკნელ კატეგორიაში ყოველ დიაგრამას გააჩნია როგორც ზღვარი, ასევე კოზღვარი, შესაბამისად, პროექციული და ინდუქციური ზღვრები ყოველთვის არსებობენ. მათი სტანდარტული წარმოდგენები მნიშვნელოვანი ინფორმაციის მატარებელია წარმომქმნელი მიმდევრობის შესახებ. კერძოდ, მოყვანილი დიაგრამის ზღვარი წრფივი სივრცეების კატეგორიაში შეიძლება რეალიზდეს შემდეგნაირად:

$$\lim_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{PA}_{F_k, G_k}(U) = \left\{ (f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{PA}_{F_k, G_k}(U) \mid \forall k \in \mathbb{Z} D_{F_k, G_k}(f_k) = f_{k+1} \right\};$$

იგულისხმება, რომ ეს სიმრავლე აღჭურვილია ბუნებრივი კომპონენტური ოპერაციებით, რომლების მიმართაც ის $\mathbb{R}$ -წრფივი სივრცეა. ამგვარად, ეს სიმრავლე წარმოადგენს $\mathbb{Z}$ -ით ინდექსირებულ ფსევდოანალიზური ფუნქციების მიმდევრობათა სიმრავლეს, სადაც ყოველი მიმდევრობის ყოველი წევრი წინისაგან სათანადო ფსევდოგაწარმოებით მიიღება. მაშასადამე, $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \lim_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{PA}_{F_k, G_k}(U)$ ელემენტისათვის ყოველი $m \in \mathbb{Z}$ და $n \in \mathbb{N}$ -ისათვის $f_{n+m} \in \mathcal{PA}_{F_{n+m}, G_{n+m}}(U)$ წარმოადგენს $f_n \in \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(U)$ ფუნქციის m -ური რიგის ფსევდოწარმოებულს, ხოლო $f_{n-m} \in \mathcal{PA}_{F_{n-m}, G_{n-m}}(U)$ კი ფსევდოანალიზურ ფუნქციას, რომლის m -ური რიგის ფსევდოწარმოებულიც $f_n \in \mathcal{PA}_{F_n, G_n}(U)$ ფუნქციაა.

იმავე დიაგრამის კოზღვარი კი შემდეგი სახით არის კონკრეტულად რეალიზებადი:

$$\text{colim}_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{PA}_{F_k, G_k}(U) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{PA}_{F_k, G_k}(U) / \sim,$$

სადაც ორი $f \in \mathcal{PA}_{F_k, G_k}(U)$ და $g \in \mathcal{PA}_{F_l, G_l}(U)$ ელემენტი ცხადდება ერთმანეთის ექვივალენტურად, $f \sim g$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მოიძებნება $k, l \leq n \in \mathbb{Z}$ ისეთი, რომ f -ისა და g -ს ანასახები, მიღებულები მათგან სათანადო ფსევდოგაწარმოების კომპოზიციით, $\mathcal{PA}_{F_n, G_n}(U)$ -ში ერთმანეთის ტოლია.

2.3 ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა წინარედასტა

წინა 2.2 პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლესთან ასოცირებული ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა $\mathcal{PA}(U)$ კატეგორია, ამ პარაგრაფში კი განვიხილავთ ყოველი ღია ქვესიმრავლისათვის სათანადო კატეგორიის შესაბამების თვისებებს. ქვემოთ $\text{Open}(\mathbb{C})$ -ით აღნიშნულია ბუნებრივი ევკლიდური ტოპოლოგიით აღჭურვილი $\mathbb{C}$ კომპლექსური სიბრტყის ღია ქვესიმრავლეების სიტუსი, ე.ი., ღია ქვესიმრავლეების კატეგორია აღჭურვილი ბუნებრივი $\text{Cov}(\text{Open}(\mathbb{C}))$ დაფარვების ერთობლიობით.

$$U \longmapsto \mathcal{PA}(U)$$

შესაბამება შეიძლება გავრცელებულ იქნას მკაცრ 2-წინარეკონამდე

$$\mathcal{PA} : \text{Open}(\mathbb{C})^{\text{op}} \longrightarrow \text{Cat}$$

შემდეგნაირად: ყოველი $U \subseteq V$ ღია ჩართვის შესაბამის მორფიზმს შევუსაბამოთ შემდეგი

$$\mathcal{PA}(\iota_{U,V}) \equiv \iota_{U,V}^* : \mathcal{PA}(V) \longrightarrow \mathcal{PA}(U)$$

ფუნქტორი, რომელიც ობიექტებზე მოქმედებს შემდეგი წესით:

$$\mathcal{PA}_{F,G}(V) \longmapsto \iota_{U,V}^*(\mathcal{PA}_{F,G}(V)) := \mathcal{PA}_{F|_U, G|_U}(U).$$

ეს შესაბამება კორექტულად არის განსაზღვრული, რადგანაც, თუ კი

$$\mathcal{PA}_{F,G}(V) = \mathcal{PA}_{F',G'}(V)$$

რაიმე $(F, G) \in GP(V)$ -სგან განსხვავებული მისი ექვიპოტენტური $(F', G') \in GP(V)$ წყვილისათვის, მაშინ ექვიპოტენტურები იქნება ასევე მათი შესაბამისი $(F|_U, G|_U) \in GP(U)$ და $(F'|_U, G'|_U) \in GP(U)$ შეზღუდვები U -ზე, და, ამგვარად, სამართლიანია

$$\mathcal{PA}_{F|_U, G|_U}(U) = \mathcal{PA}_{F'|_U, G'|_U}(U).$$

$\iota_{U,V}^*$ ფუნქტორის მოქმედება მორფიზმებზე კი მოიცემა შემდეგნაირად:

$\omega \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F,G}(V), \mathcal{PA}_{F',G'}(V))$ მორფიზმისათვის, რომელიც მოიცემა $V = \bigcup_{j \in J} V_j$

ღია დაფარვით და წარმომქმნელი წყვილების მიმდევრობების შემდეგი ერთობლიობით:

$$\{(F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq \cdots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})\}_{j \in J}$$

$\iota_{U,V}^*(\omega)$ მორფიზმი მოიცემა ღია $U = \bigcup_{j \in J} U_j$, სადაც $U_j := V_j \cap U$ დაფარვით და შემდეგი ერთობლიობით:

$$\left\{ (F_{j,1}, G_{j,1})|_{U_j} \preceq \cdots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})|_{U_j} \right\}_{j \in J}.$$

ეს ასახვა კორექტულად არის განსაზღვრული გამომდინარე შემდეგიდან: შეზღუდვა ინარჩუნებს $\sim_{\text{ep}}$ ექვიპოტენტურობისა და $\preceq$ ბერის აზრით მომდევნოობის მიმართულებებს, ეს კი, კერძოდ, ნიშნავს, რომ ყოველი $j \in J$ -ისათვის სამართლიანია გამომდინარეობები

$$(F_{j,k_1}, G_{j,k_1}) \sim_{\text{ep}} (F, G)|_{V_j} \implies (F_{j,k_1}, G_{j,k_1})|_{U_j} \sim_{\text{ep}} (F, G)|_{U_j}$$

და

$$(F_{j,k_j}, G_{j,k_j}) \preceq (F', G')|_{V_j} \implies (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})|_{U_j} \preceq (F', G')|_{U_j}.$$

ხოლო

$$D_{(F_{j,1}, G_{j,1})|_{V_j \cap V_l} \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})|_{V_j \cap V_l}} = D_{(F_{l,1}, G_{l,1})|_{V_j \cap V_l} \preceq \dots \preceq (F_{l,k_l}, G_{l,k_l})|_{V_j \cap V_l}}$$

ტოლობიდან კი, ფსევდოგაწარმოების ლოკალურობის ძალით, გამომდინარეობს ტოლობა

$$D_{(F_{j,1}, G_{j,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})|_{U_j \cap U_l}} = D_{(F_{l,1}, G_{l,1})|_{U_j \cap U_l} \preceq \dots \preceq (F_{l,k_l}, G_{l,k_l})|_{U_j \cap U_l}}.$$

მაშასადამე,

$$\iota_{U,V}^*(\omega) \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F|_U, G|_U}(U), \mathcal{PA}_{F'|_U, G'|_U}(U)).$$

ბუნებრივია, თუ კი ω იგივეური ასახვაა, $\iota_{U,V}^*$ მას უთანადებს შესაბამის იგივეურ ასახვას შეზღუდვით მიღებულ სივრცეებს შორის. ამგვარად, განისაზღვრა ასახვა:

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F,G}(V), \mathcal{PA}_{F',G'}(V)) &\longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F|_U, G|_U}(U), \mathcal{PA}_{F'|_U, G'|_U}(U)), \\ \omega &\longmapsto \iota_{U,V}^*(\omega). \end{aligned}$$

შემდეგი ორი დებულება ემსახურება იმის ჩვენებას, რომ $\mathcal{PA} : \text{Open}(\mathbb{C})^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$, შესაბამისად, მასთან ასოცირებული ფიბრირებული კატეგორია (იხ. შესავალი), წინარედასტაა.

დებულება 2.3.1. $\mathcal{PA} : \text{Open}(\mathbb{C})^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ მკაცრი 2-წინარეკონაა.

დამტკიცება. საჩვენებელი არის, რომ ღია ქვესიმრავლეების ყოველი $U \subseteq V \subseteq W$ სამე-
ულისათვის შესაბამისი შეზღუდვის ფუნქტორების

$$\iota_{U,V}^* \circ \iota_{V,W}^* : \mathcal{PA}(W) \longrightarrow \mathcal{PA}(U)$$

კომპოზიცია და

$$\iota_{U,W}^* : \mathcal{PA}(W) \longrightarrow \mathcal{PA}(U)$$

შეზღუდვის ფუნქტორი ერთი და იგივეა. მართლაც, ყოველი $\mathcal{PA}_{F,G}(W)$ ობიექტისათვის გვაქვს:

$$\begin{aligned} \iota_{U,V}^* \circ \iota_{V,W}^*(\mathcal{PA}_{F,G}(W)) &= \iota_{U,V}^*(\iota_{V,W}^*(\mathcal{PA}_{F,G}(W))) = \iota_{U,V}^*(\mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V)) \\ &= \mathcal{PA}_{F|_V|_U, G|_V|_U}(U) = \mathcal{PA}_{F|_U, G|_U}(U) = \iota_{U,W}^*(\mathcal{PA}_{F,G}(W)), \end{aligned}$$

ხოლო ყოველი $\omega \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(W)}(\mathcal{PA}_{F,G}(V), \mathcal{PA}_{F',G'}(W))$ მორფიზმისათვის, რომელიც მოიცემა $W = \bigcup_{j \in J} W_j$ ღია დაფარვით და $\{(F_{j,1}, G_{j,1}) \preceq \cdots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})\}_{j \in J}$ ერთობლიობით, $\iota_{U,V}^* \circ \iota_{V,W}^*(\omega)$ მორფიზმი მოიცემა ერთობლიობით

$$\left\{ (F_{j,1}, G_{j,1})|_V|_U \preceq \cdots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})|_V|_U \right\}_{j \in J} = \left\{ (F_{j,1}, G_{j,1})|_U \preceq \cdots \preceq (F_{j,k_j}, G_{j,k_j})|_U \right\}_{j \in J},$$

რაც ემთხვევა $\iota_{W,U}^*(\omega)$ მორფიზმს. მაშასადამე,

$$\iota_{U,V}^* \circ \iota_{V,W}^* = \iota_{W,U}^*.$$

ასევე, შეზღუდვის ფუნქტორების განსაზღვრებიდანვე გამომდინარე, სამართლიანია ტოლობა

$$\iota_{U,U}^* = \text{id}_{\mathcal{PA}(U)},$$

რაც ნიშნავს, რომ $\mathcal{PA} : \text{Open}(\mathbb{C})^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ მკაცრი 2-წინარეკონაა. □

თეორემა 2.3.1. $\mathcal{PA} : \text{Open}(\mathbb{C})^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ 2-წინარეკონა წინარედასტაა.

დამტკიცება. როგორც ითქვა შესავალში, დებულების დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ფენის ნებისმიერი ორი ობიექტით განსაზღვრული წინარეკონა კონაა.

განვიხილოთ ორი $\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F',G'}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{PA}(U))$ ობიექტი $U \subseteq \mathbb{C}$ -ზე და მათთან ასოცირებული წინარეკონა U -ზე:

$$\underline{\text{Mor}}_{\mathcal{PA}}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F',G'}(U)) : \text{Open}(U)^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set}.$$

ის ყოველ $V \subseteq U$ ღია ქვესიმრავლეს უსაბამებს შემდეგ სიმრავლეს:

$$V \longmapsto \text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V), \mathcal{PA}_{F'|_V, G'|_V}(V)),$$

ხოლო ყოველი $W \subseteq V \subseteq U$ ღია ქვესიმრავლეების ჩართვისთვის გვაქვს ასახვა:

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V), \mathcal{PA}_{F'|_V, G'|_V}(V)) &\longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{PA}(W)}(\mathcal{PA}_{F|_W, G|_W}(W), \mathcal{PA}_{F'|_W, G'|_W}(W)), \\ \omega &\longmapsto \iota_{W,V}^*(\omega). \end{aligned}$$

შევამოწმოთ, რომ ეს წინარეკონა კონაა.

განვიხილოთ $V = \bigcup_{j \in J} V_j \subseteq U$ ღია დაფარვა, შესაბამისად, მასთან ასოცირებული $\{V_j \rightarrow V\}_{j \in J}$ ელემენტი $\text{Cov}(\text{Open}(U))$ -იდან, და მის წევრებზე

$$\omega_j \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(V_j)}(\mathcal{PA}_{F|_{V_j}, G|_{V_j}}(V_j), \mathcal{PA}_{F'|_{V_j}, G'|_{V_j}}(V_j)), \quad \iota_{V_j \cap V_k, V_j}^*(\omega_j) = \iota_{V_j \cap V_k, V_k}^*(\omega_k)$$

თავსებადი კვეთების ერთობლიობა; ამ მონაცემების მეშვეობით შეიძლება განსაზღვრულ

იქნას

$$\omega : \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F'|_V, G'|_V}(V)$$

ასახვა. ეს ხორციელდება შემდეგნაირად: $f \in \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V)$ ელემენტისათვის მისი შე-
საბამისი $\omega(f) : V \rightarrow \mathbb{C}$ ასახვა განისაზღვრება პირობით:

$$\omega(f) : V = \bigcup_{j \in J} V_j \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \omega(f)|_{V_j} := \omega_j(f|_{V_j}), \quad j \in J;$$

ამ განსაზღვრების კორექტულობა გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობებიდან:

$$\begin{aligned} \left(\omega(f)|_{V_j} \right) \Big|_{V_j \cap V_k} &= \left(\omega_j(f|_{V_j}) \right) \Big|_{V_j \cap V_k} = \iota_{V_j \cap V_k, V_j}^* (\omega_j) \left(f|_{V_j \cap V_k} \right) = \iota_{V_j \cap V_k, V_k}^* (\omega_k) \left(f|_{V_j \cap V_k} \right) \\ &= \left(\omega_k(f|_{V_k}) \right) \Big|_{V_j \cap V_k} = \left(\omega(f)|_{V_k} \right) \Big|_{V_j \cap V_k}, \end{aligned}$$

და იქიდან, რომ ყოველი $j \in J$ -ისათვის $\omega(f)|_{V_j} = \omega_j(f|_{V_j}) \in \mathcal{PA}_{F'|_{V_j}, G'|_{V_j}}(V_j)$, რაც
ფსევდოანალიზურობის ლოკალურობიდან გამომდინარე ნიშნავს, რომ

$$\omega(f) \in \mathcal{PA}_{F'|_V, G'|_V}(V).$$

შევამოწმოთ, რომ $\omega : \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V) \rightarrow \mathcal{PA}_{F'|_V, G'|_V}(V)$ ასახვა მორფიზმია $\mathcal{PA}(V)$ -ში.
ვთქვათ, ყოველი $j \in J$ -ისათვის $\mathcal{PA}(V_j)$ კატეგორიის

$$\omega_j : \mathcal{PA}_{F|_{V_j}, G|_{V_j}}(V_j) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F'|_{V_j}, G'|_{V_j}}(V_j)$$

მორფიზმი მოიცემა $V_j = \bigcup_{k \in K_j} V_{jk}$ ღია დაფარვით და

$$\left\{ (F_{jk,1}, G_{jk,1}) \preceq F_{jk,2}, G_{jk,2} \preceq \cdots \preceq (F_{jk,l_{jk}}, G_{jk,l_{jk}}) \right\}_{k \in K_j};$$

ერთობლიობით. აღვნიშნოთ $K := \bigcup_{j \in J} \{j\} \times K_j$; გვაქვს მთელი V -ის ღია დაფარვა

$$V = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{k \in K_j} V_{jk} = \bigcup_{(j,k) \in K} V_{jk}.$$

შევამოწმოთ, რომ

$$\left\{ (F_{jk,1}, G_{jk,1}) \preceq F_{jk,2}, G_{jk,2} \preceq \cdots \preceq (F_{jk,l_{jk}}, G_{jk,l_{jk}}) \right\}_{(j,k) \in K}$$

ერთობლიობა განსაზღვრავს მორფიზმს $\mathcal{PA}(V)$ კატეგორიაში და რომ შესაბამისი ასახვა
ემთხვევა ω -ს. $j \in J$ და $k, k' \in K_j$ -ისათვის თავსებადობა თანაკვეთაზე $V_{jk} \cap V_{jk'}$ კონ-
სტრუქციიდანვე გამომდინარეობს, რადგანაც ფიქსირებული $j \in J$ -ისათვის სათანადო
ერთობლიობით ω_j განისაზღვრება. განვიხილოთ $j, j' \in J, j \neq j'$ და $k \in K_j, k' \in K_{j'}$ და

შესაბამისი $V_{jk} \cap V_{j'k'}$ თანაკვეთისათვის

$$D_{(F_{jk,1}, G_{jk,1})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} \preceq \dots \preceq (F_{jk, l_{jk}}, G_{jk, l_{jk}})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} , \quad D_{(F_{j'k',1}, G_{j'k',1})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} \preceq \dots \preceq (F_{j'k', l_{j'k'}}, G_{j'k', l_{j'k'}})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} ;$$

ასახვები; გამომდინარე იქიდან, რომ

$$(F_{jk,1}, G_{jk,1})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} \sim_{\text{ep}} (F, G)|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} \sim_{\text{ep}} (F_{j'k',1}, G_{j'k',1})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}}$$

და

$$(F_{jk, l_{jk}}, G_{jk, l_{jk}})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} \preceq (F', G')|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} , \quad (F_{j'k', l_{j'k'}}, G_{j'k', l_{j'k'}})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} \preceq (F', G')|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} ,$$

სათანადო ფსევდოგაწარმოებების კომპოზიციების განსაზღვრის და მნიშვნელობების არეები ერთმანეთს ემთხვევა; განსაზღვრის არის ნებისმიერი $f \in \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V)$ ელემენტისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned} D_{(F_{jk,1}, G_{jk,1})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} \preceq \dots \preceq (F_{jk, l_{jk}}, G_{jk, l_{jk}})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}}} (f|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}}) &= \iota_{V_{jk} \cap V_{j'k'}, V_j}^*(\omega_j) (f|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}}) \\ &= \iota_{V_{jk} \cap V_{j'k'}, V_j \cap V_{j'}}^*(\iota_{V_j \cap V_{j'}, V_j}^*(\omega_j)) (f|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}}) = \iota_{V_{jk} \cap V_{j'k'}, V_j \cap V_{j'}}^*(\iota_{V_j \cap V_{j'}, V_{j'}}^*(\omega_{j'})) (f|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}}) \\ &= \iota_{V_{jk} \cap V_{j'k'}, V_{j'}}^*(\omega_{j'}) (f|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}}) = D_{(F_{j'k',1}, G_{j'k',1})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}} \preceq \dots \preceq (F_{j'k', l_{j'k'}}, G_{j'k', l_{j'k'}})|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}}} (f|_{V_{jk} \cap V_{j'k'}}) . \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\{(F_{jk,1}, G_{jk,1}) \preceq F_{jk,2}, G_{jk,2}) \preceq \dots \preceq (F_{jk, l_{jk}}, G_{jk, l_{jk}})\}_{(j,k) \in K}$$

ერთობლიობა განსაზღვრავს მორფიზმს $\mathcal{PA}(V)$ -ში.

ვაჩვენოთ, რომ ამ მორფიზმის შესაბამისი ასახვა ემთხვევა ω -ს. ნებისმიერი ელემენტისათვის $f \in \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V)$ და $(j, k) \in K$ -ისათვის გვაქვს

$$(\omega(f))|_{V_{jk}} = (\omega(f))|_{V_j}|_{V_{jk}} = (\omega_j(f|_{V_j}))|_{V_{jk}} = D_{(F_{jk,1}, G_{jk,1}) \preceq \dots \preceq (F_{jk, l_{jk}}, G_{jk, l_{jk}})}(f|_{V_{jk}}),$$

მაშასადამე ეს მორფიზმი წარმოადგეს ω ასახვას და, შესაბამისად,

$$\omega \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)} (\mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V), \mathcal{PA}_{F'|_V, G'|_V}(V)) .$$

ნებისმიერი $j \in J, k \in K$ -ისათვის და $f \in \mathcal{PA}_{F|_{V_j}, G|_{V_j}}(V_j)$ კვეთისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$(\iota_{V_j, V}^*(\omega)(f))|_{V_{jk}} = D_{(F_{jk,1}, G_{jk,1}) \preceq \dots \preceq (F_{jk, l_{jk}}, G_{jk, l_{jk}})}(f|_{V_{jk}}) = (\omega_j(f))|_{V_{jk}},$$

მაშასადამე, $\iota_{V_j, V}^*(\omega)(f) = \omega_j(f)$ მთელს V_j -ზე და, შესაბამისად, გვაქვს

$$\iota_{V_j, V}^*(\omega) = \omega_j .$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ თვისების მქონე მორფიზმი ერთადერთია, სხვა სიტყვებით რომ ვთვაქთ, ვაჩვენოთ, რომ შეწებება ცალსახაა. ნებისმიერი ამ უკანასკნელი თვისების მქონე

$$\eta \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V), \mathcal{PA}_{F'|_V, G'|_V}(V))$$

მორფიზმისათვის, $f \in \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V)$ კვეთისათვის და $j \in J$ -ისათვის გვაქვს:

$$(\eta(f))|_{V_j} = \iota_{V_j, V}^*(\eta)(f|_{V_j}) = \omega_j(f|_{V_j}) = (\omega(f))|_{V_j},$$

ანუ, $\eta(f) = \omega(f)$, და, მაშასადამე, $\text{Mor}_{\mathcal{PA}}(\mathcal{PA}_{F, G}(U), \mathcal{PA}_{F', G'}(U))$ წინარეკონის ამ თვისების მქონე ω კვეთა ერთადერთია, რაც ნიშნავს, რომ ეს წინარეკონა კონაა და, შესაბამისად, $\mathcal{PA} : \text{Open}(\mathbb{C})^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ წინარედასტაა. $\square$

ქვემოთ ნაჩვენებია, თუ როგორ არის ზემოთ მოყვანილ წინარედასტაში დაწვევის მონაცემთან დაკავშირებული კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლების კოეფიციენტები და მოყვანილია დაწვევის მონაცემის ეფექტურობის საკმარისი პირობა.

შენიშვნა. განვიხილოთ ამ წინარედასტაში დაწვევის მონაცემი, ანუ, $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ დაფარვა, თითოეულ U_j -ზე ფენის $\mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U_j) \in \text{Ob}(\mathcal{PA}(U_j))$ ობიექტი და ყოველი $j, k \in J$ წყვილისათვის იზომორფიზმი $\mathcal{PA}(U_j \cap U_k)$ კატეგორიაში სათანადო შეზღუდვით მიღებულ

$$\begin{aligned} \iota_{V_j \cap V_k, V_j}^*(\mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U_j)) &= \mathcal{PA}_{F_j|_{U_j \cap U_k}, G_j|_{U_j \cap U_k}}(U_j \cap U_k), \\ \iota_{V_j \cap V_k, V_k}^*(\mathcal{PA}_{F_k, G_k}(U_k)) &= \mathcal{PA}_{F_k|_{U_j \cap U_k}, G_k|_{U_j \cap U_k}}(U_j \cap U_k) \end{aligned}$$

ობიექტებს შორის. ამგვარად, ამ კატეგორიაში გვაქვს შეზღუდვადი

$$\theta_{jk} : \mathcal{PA}_{F_j|_{U_j \cap U_k}, G_j|_{U_j \cap U_k}}(U_j \cap U_k) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F_k|_{U_j \cap U_k}, G_k|_{U_j \cap U_k}}(U_j \cap U_k)$$

მორფიზმი, მაგრამ, ლემა 2.2.1-ის თანახმად, ყოველი θ_{jk} იგივეური ასახვაა. ეს, კერძოდ, ნიშნავს, რომ ყოველი $j, k \in J$ -ისათვის გვაქვს ტოლობა

$$\mathcal{PA}_{F_j|_{U_j \cap U_k}, G_j|_{U_j \cap U_k}}(U_j \cap U_k) = \mathcal{PA}_{F_k|_{U_j \cap U_k}, G_k|_{U_j \cap U_k}}(U_j \cap U_k),$$

რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ ამ სივრცეების განმსაზღვრელი წარმომქმნელი წყვილები ექვიპოტენტურები არიან:

$$(F_j|_{U_j \cap U_k}, G_j|_{U_j \cap U_k}) \sim_{\text{ep}} (F_k|_{U_j \cap U_k}, G_k|_{U_j \cap U_k});$$

თუკი მათი შესაბამისი კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლების კოეფიციენტების, ანუ, პირველი ორი მახასიათებელი კოეფიციენტების $\text{ch}_1(F_j, G_j)$, $\text{ch}_2(F_j, G_j)$, $j \in J$, შეწებების შედეგად მიღებული ფუნქციები U -ზე ბერსის აზრით დაშვებადი არიან, მაშინ, შესრულებულია ლემა 2.1.1-ის პირობა; ამ ლემის თანახმად არსებობს $(F, G) \in GP(U)$ წარმომ-

ქმნელი წყვილი ისეთი, რომ

$$(F|_{U_j}, G|_{U_j}) \sim_{\text{ep}} (F_j, G_j),$$

ყოველი $j \in J$ -ისათვის. მაშასადამე, გვაქვს ამ წყვილით განსაზღვრული $\mathcal{PA}_{F,G}(U) \in \text{Ob}(\mathcal{PA}(U))$ ობიექტი მთელს U -ზე ფუნაში, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა

$$\mathcal{PA}_{F|_{U_j}, G|_{U_j}}(U_j) = \mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U_j),$$

ყოველი $j \in J$ -ისათვის. ეს კი ნიშნავს, რომ

$$\left\{ \left(\mathcal{PA}_{F_j, G_j}(U_j), \theta_{jk} = \text{id}_{\mathcal{PA}_{F_j|_{U_j \cap U_k}, G_j|_{U_j \cap U_k}}(U_j \cap U_k) \right) \right\}_{j,k \in J}$$

დაწვევის მონაცემი ეფექტურია.

მაშასადამე, $\mathcal{PA} : \text{Op}(\mathbb{C})^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ 2-წინარეკონასთან გროტენდიკის კონსტრუქციით ასოცირებული

$$p : \int_{\text{Open}(\mathbb{C})} \mathcal{PA} \longrightarrow \text{Open}(\mathbb{C})$$

ფიბრირებული კატეგორია, დებულება 2.3.1-ის ძალით, წინარედასტაა; მისი ტოტალური კატეგორიისათვის გამოვიყენებთ აღნიშვნას:

$$PA := \int_{\text{Open}(\mathbb{C})} \mathcal{PA}.$$

შესაბამისად, PA -ის ობიექტი მოიცემა $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლით და ამ ღია ქვესიმრავლეზე $\mathcal{PA}_{F,G}(U)$ რაიმე ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა სივრცით, ანუ, წარმოადგენს წყვილს

$$(U, \mathcal{PA}_{F,G}(U)) \in \text{Ob}(PA), \quad U \subseteq \mathbb{C}, (F, G) \in GP(U).$$

თუ $U \not\subseteq V$, მაშინ $(U, \mathcal{PA}_{F,G}(U))$ და $(V, \mathcal{PA}_{F',G'}(V))$ წყვილებს შორის მორფიზმების სიმრავლე ცარიელია, ხოლო თუ $U \subseteq V$ ღია ჩართვაა, მაშინ ყოველი მორფიზმი

$$(U, \mathcal{PA}_{F,G}(U)) \quad \text{და} \quad (V, \mathcal{PA}_{F',G'}(V))$$

ობიექტებს შორის მოიცემა მორფიზმით $\mathcal{PA}(U)$ -იდან

$$(\omega : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F'|_U, G'|_U}(U)) \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F'|_U, G'|_U}(U)),$$

ანუ,

$$\text{Mor}_{PA}((U, \mathcal{PA}_{F,G}(U)), (V, \mathcal{PA}_{F',G'}(V))) \cong \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F'|_U, G'|_U}(U)).$$

მოვიყვანოთ ამ კატეგორიაში მორფიზმების კომპოზიციის აღწერა. განვიხილოთ $U \subseteq V \subseteq W$ სამეული და

$$(U, \mathcal{PA}_{F,G}(U)), \quad (V, \mathcal{PA}_{F',G'}(V)) \quad \text{და} \quad (W, \mathcal{PA}_{F'',G''}(W))$$

ობიექტები. განვიხილოთ ამ ობიექტებს შორის

$$\omega \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F'|_U, G'|_U}(U)), \quad \eta \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(V)}(\mathcal{PA}_{F',G'}(V), \mathcal{PA}_{F''|_V, G''|_V}(V))$$

მორფიზმებით განსაზღვრული მორფიზმები. PA -ს შესაბამისი მორფიზმების კომპოზიცია მოიცემა:

$$(\iota_{U,V}^*(\eta) \circ \omega : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F''|_U, G''|_U}(U)) \in \text{Mor}_{\mathcal{PA}(U)}(\mathcal{PA}_{F,G}(U), \mathcal{PA}_{F''|_U, G''|_U}(U)).$$

კომპოზიციით.

განსაზღვრება 2.3.1. $p : PA \rightarrow \text{Open}(\mathbb{C})$ წინარედასტას ვუწოდებთ ფსევდოანალიზური ფუნქციების სივრცეთა წინარედასტას.

შენიშვნა. $(F, G) \in GP(\mathbb{C})$ გლობალურად განსაზღვრული წარმომქმნელი წყვილი ბუნებრივად ინდუცირებს $p : PA \rightarrow \text{Open}(\mathbb{C})$ წინარედასტის კვეთას შემდეგნაირად:

$$s_{F,G} : \text{Open}(\mathbb{C}) \longrightarrow PA, \quad U \longmapsto (U, \mathcal{PA}_{F|_U, G|_U}(U)),$$

რომელიც $U \subseteq V$ -ს შესაბამის მორფიზმს უთანადებს $\text{id}_{\mathcal{PA}_{F|_U, G|_U}(U)}$ -ის შესაბამის მორფიზმს PA -იდან. ექვიპოტენტური წარმომქმნელი წყვილები განსაზღვრავენ ერთსა და იმავე კვეთას და პირიქით, თუ ორმა წარმომქმნელმა წყვილმა ერთი და იგივე კვეთა განსაზღვრა, მაშინ ისინი ექვიპოტენტურნი არიან, ანუ, $(F, G), (F', G') \in GP(\mathbb{C})$ წარმომქმნელი წყვილებისათვის გვაქვს

$$(F, G) \sim_{\text{ep}} (F', G') \iff s_{F,G} = s_{F',G'};$$

აქედან გამომდინარე,

$$GP(\mathbb{C}) \longrightarrow \Gamma(\text{Open}(\mathbb{C}), PA), \quad (F, G) \longmapsto s_{F,G}.$$

ასახვა ფაქტორდება

$$GP(\mathbb{C}) / \sim_{\text{ep}} \longrightarrow \Gamma(\text{Open}(\mathbb{C}), PA), \quad [(F, G)] \longmapsto s_{F,G},$$

ასახვის მეშვეობით შემდეგ კომპოზიციად:

$$GP(\mathbb{C}) \longrightarrow GP(\mathbb{C}) / \sim_{\text{ep}} \longrightarrow \Gamma(\text{Open}(\mathbb{C}), PA),$$

სადაც პირველი ასახვა კანონიკური პროექციაა.

2.4 ფსევდოგაწარმოების ოპერატორის სურექტიულობის დამოკიდებულება არის ტოპოლოგიაზე

განვიხილოთ $U \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლეზე განსაზღვრული $(F', G') \in GP(U)$ წარმომქმნელი წყვილი, (F', G') -ფსევდოანალიზური $g \in \mathcal{PA}_{F', G'}(U)$ ფუნქცია და (F', G') -ის ბერსის აზრით წინამორბედი $(F, G) \in GP(U)$, $(F, G) \preceq (F', G')$ წყვილი. განტოლება

$$D_{F, G}(f) = g$$

ლოკალურად ყოველთვის არის ამოხსნადი.

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ამ განტოლების გლობალური ამონახსნის არსებობის საკითხს და ვაჩვენებთ, რომ U -ს მიერ გარკვეული ტოპოლოგიური პირობის დაკმაყოფილების შემთხვევაში, ამ განტოლებას გააჩნია გლობალური ამონახსნი. მაგალითად, იმ შემთხვევაში, როდესაც $U = \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ხოლო ორივე წარმომქმნელი წყვილი მუდმივნიშვნელობიანი ფუნქციაა მნიშვნელობებით, შესაბამისად, 1 და i , ე.ი.,

$$(F, G) = (F', G') = (1, i),$$

g კი

$$g : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad z \longmapsto \frac{1}{z},$$

წინააღმდეგობა იმისადმი, რომ g -ს გააჩნდეს გლობალური ჰოლომორფული პირველყოფილი ფუნქცია, მდგომარეობს იმაში, რომ $\mathbb{C}^\times$ არ არის ცალადბმული. ჩვენ ამ საკითხს განვიხილავთ უფრო ზოგადად, ნებისმიერი წარმომქმნელი (F, G) და (F', G') წყვილებისათვის, სადაც პირველი წყვილი მეორის ბერსის აზრით წინამორბედი, კონათა კოჰომოლოგიის მეშვეობით.

$(F, G) \in GP(U)$ წარმომქმნელი წყვილისათვის, $\text{Con}_{F, G}$ -ით აღვნიშნოთ წინარეკონა U -ზე, რომელიც ყოველ $V \subseteq U$ ღია ქვესიმრავლეს უსაბამებს მასზე განსაზღვრული $(F|_V, G|_V)$ -მუდმივი ფსევდოანალიზური ფუნქციების სიმრავლეს, აღჭურვილს ბუნებრივად $\mathbb{R}$ -წრფივი სივრცის სტრუქტურით, ხოლო ყოველ ღია ჩართვას $W \subseteq V \subseteq U$ კი სათანადო შეზღუდვის ასახვას, ანუ,

$$V \longmapsto \text{Con}_{F, G}(V) := \{f \in \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V) \mid D_{F, G}(f) = 0\},$$

და

$$(W \subseteq V) \mapsto (r_W^V : \text{Con}_{F,G}(V) \longrightarrow \text{Con}_{F,G}(W), \quad f \mapsto r_W^V(f) := f|_W).$$

$\mathcal{PA}_{F,G}$ -ით კი აღვნიშნოთ წინარეკონა U -ზე, რომელიც $V \subseteq U$ ღია ქვესიმრავლეს უთანადებს შესაბამის სივრცეს:

$$V \mapsto \mathcal{PA}_{F,G}(V) := \mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V),$$

ბუნებრივ შეზღუდვის ჰომომორფიზმებთან ერთად. გამომდინარე იქიდან, რომ ორივე ამ წინარეკონის კვეთის განმსაზღვრელი თვისება ლოკალურია და ეს კვეთები ასახვებია, ეს წინარეკონები კონებია. $(F, G) \in GP(U)$ წყვილის ბერსის აზრით მომდევნო $(F', G') \in GP(U)$, $(F, G) \preceq (F', G')$ წყვილისათვის, ფსევდოგაწარმოების ოპერატორის

$$D_{F,G} : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F',G'}(U)$$

ლოკალურად სურიექციულობიდან გამომდინარე (იხ. [3], [4]), გვაქვს კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow \text{Con}_{F,G} \longrightarrow \mathcal{PA}_{F,G} \xrightarrow{D_{F,G}} \mathcal{PA}_{F',G'} \longrightarrow 0;$$

აქ იმავე სიმბოლოთი, $D_{F,G}$, აღნიშნულია (F, G) -ფსევდოგაწარმოებით მოცემული კონათა ჰომომორფიზმი, ე.ი., რომელიც კვეთებზე მოქმედებს შემდეგნაირად:

$$\mathcal{PA}_{F|_V, G|_V}(V) \ni f \mapsto D_{F|_V, G|_V}(f) \in \mathcal{PA}_{F'|_V, G'|_V}(V).$$

შესაბამის კოჰომოლოგიის ჯგუფთა გრძელ მიმდევრობაზე გადასვლით (იხ. [10], [16])

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Con}_{F,G}(U) & \longrightarrow & \mathcal{PA}_{F,G}(U) & \xrightarrow{D_{F,G}} & \mathcal{PA}_{F',G'}(U) \\ & & & & & \swarrow & \\ & & H^1(U, \text{Con}_{F,G}) & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{PA}_{F,G}) & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{PA}_{F',G'}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

ვხედავთ, რომ წინააღმდეგობა იმისა, რომ ასახვა $D_{F,G}$ იყოს გლობალურად სურიექციული, მოიცემა კოჰომოლოგიის ჯგუფით $H^1(U, \text{Con}_{F,G})$, კონა $\text{Con}_{F,G}$ კი, როგორც ქვემოთ გამოჩნდება, ლოკალურად მუდმივი ასახვების კონის იზომორფულია და, მაშასადამე, ფსევდოგაწარმოების სურიექციულობა დამოკიდებულია U არის ტოპოლოგიაზე, უფრო ზუსტად კი, მისი პირველი სინგულარული კოჰომოლოგიის ჯგუფზე კოეფიციენტებით $\mathbb{R}^2$ -ში.

$\mathbb{R}_U^2$ -ით აღვნიშნავთ $\mathbb{R}^2$ -თან ასოცირებულ მუდმივ კონას, ანუ, ლოკალურად მუდმივი ასახვების კონას U -ზე მნიშვნელობებით $\mathbb{R}^2$ -ში.

ლემა 2.4.1. $\text{Con}_{F,G}$ და $\mathbb{R}_U^2$ კონები იზომორფულები არიან, როგორც $\mathbb{R}$ -წრფივ სივრცეთა კონები.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $z \in U$ წერტილისათვის ლემაში მითითებული კონების ღეროები იზომორფულები არიან და რომ ეს იზომორფიზმები ღეროებს შორის ინდუცირებულია ერთი და იმავე კონათა ჰომომორფიზმით $\text{Con}_{F,G}$ და $\mathbb{R}_U^2$ კონებს შორის.

ნებისმიერი $z \in V \subseteq U$ ღია ბმული მიდამოსათვის და $f \in \text{Con}_{F,G}(V)$ კვეთისათვის სამართლიანია (იხ. [3], [4]) ტოლობა

$$D_{F,G}(f) = \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{T}_{F,G}^F(f) \right) F + \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{T}_{F,G}^G(f) \right) G = 0;$$

გარდა ამისა, ნებისმიერი (F, G) -ფსევდოანალიზური ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^F(f) \right) F + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^G(f) \right) G = 0;$$

ამ ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^F(f) - \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{T}_{F,G}^F(f) \right) F + \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^G(f) - \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{T}_{F,G}^G(f) \right) G = 0.$$

რადგანაც $\mathcal{T}_{F,G}^F(f)$ და $\mathcal{T}_{F,G}^G(f)$ ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქციებია, სხვაობის წევრები ურთიერთშეუღლებულნი არიან:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{T}_{F,G}^F(f) = \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^F(f)}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{T}_{F,G}^G(f) = \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^G(f)},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\text{Im} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^F(f) \right) F + \text{Im} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^G(f) \right) G = 0,$$

სადაც Im -ით აღნიშნულია ფუნქციების წარმოსახვითი ნაწილები. ეს უკანასკნელი ტოლობა კი ნიშნავს, გამომდინარე იქიდან, რომ F და G ფუნქციების მნიშვნელობები ყოველ წერტილში $\mathbb{R}$ -წრფივად დამოუკიდებელია, ტოლობებს

$$\text{Im} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^F(f) \right) = \text{Im} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^G(f) \right) = 0.$$

ამგვარად, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^F(f)$ და $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^G(f)$ ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქციებია, რაც თავის მხრივ კვლავ F და G ფუნქციების მნიშვნელობების ყოველ წერტილში $\mathbb{R}$ -წრფივად დამოუკიდებლობიდან გამომდინარე ნიშნავს, რომ

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^F(f) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathcal{T}_{F,G}^G(f) = 0;$$

ანუ, $\mathcal{T}_{F,G}^F(f)$ და $\mathcal{T}_{F,G}^G(f)$ ჰოლომორფულები არიან, მაგრამ ამავე დროს ისინი ნამდვილმნიშვნელობიანები არიან და ბმულ ღია სიმრავლეზე განსაზღვრულები, რაც მხოლოდ მაშინ

არის შესაძლებელი, როდესაც ისინი მუდმივები არიან.

მათ შესაბამის მუდმივ მნიშვნელობებს იმავე სიმბოლოთი ავლნიშნავთ, მაშასადამე, მივიღეთ შესაბამება

$$\text{Con}_{F,G}(V) \ni f \longmapsto (\mathcal{T}_{F,G}^F(f), \mathcal{T}_{F,G}^G(f)) \in \mathbb{R}^2.$$

ნებისმიერ სხვა ფუნქციას $f_z \in (\text{Con}_{F,G})_z$ ექვივალენტობის კლასიდან იგივე წესი იმავე ნამდვილ რიცხვთა წყვილს შეუსაბამებს და, მაშასადამე, გვაქვს ასახვა

$$(\text{Con}_{F,G})_z \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

რომელიც $\mathbb{R}$ -წრფივ სივრცეთა იზომორფიზმია, ანუ, ყოველი $z \in U$ წერტილისათვის

$$(\text{Con}_{F,G})_z \cong \mathbb{R}^2 \cong (\underline{\mathbb{R}}^2_U)_z.$$

დეროებს შორის ეს იზომორფიზმები ინდუცირებულია სათანადო კონათა შორის შემდეგი ჰომომორფიზმით:

$$\underline{\mathbb{R}}^2_U \longrightarrow \text{Con}_{F,G},$$

რომელიც $V \subseteq U$ ღია ქვესიმრავლეზე მოცემულ კვეთებზე მოქმედებს შემდეგნაირად

$$\underline{\mathbb{R}}^2_U(V) \longrightarrow \text{Con}_{F,G}(V), \quad (\lambda, \mu) \longmapsto \lambda F + \mu G, \quad (\lambda, \mu) \longmapsto \lambda F|_V + \mu G|_V;$$

მაშასადამე, $\text{Con}_{F,G}$ და $\underline{\mathbb{R}}^2_U$ იზომორფული კონებია. □

შედეგი 2.4.1. $\text{Con}_{F,G}$ კონის პირველი კონათა კოჰომოლოგიის ჯგუფი იზომორფულია U -ს პირველი სინგულარული კოჰომოლოგიის ჯგუფისა კოეფიციენტებით $\mathbb{R}^2$ -ში:

$$H^1(U, \text{Con}_{F,G}) \cong H^1_{\text{sing}}(U, \mathbb{R}^2).$$

დამტკიცება. ზემომოყვანილი ლემიდან ვასკვნით, რომ

$$H^1(U, \text{Con}_{F,G}) \cong H^1(U, \underline{\mathbb{R}}^2_U),$$

ხოლო უკანასკნელი კონის კონათა კოჰომოლოგიის ჯგუფი იზომორფულია U -ს პირველი სინგულარული კოჰომოლოგიის ჯგუფისა კოეფიციენტებით $\mathbb{R}^2$ -ში (იხ. [10], [12]). □

ზემომოყვანილი იძლევა შესაძლებლობას დამყარდეს კავშირი U -ს ტოპოლოგიასა და $D_{F,G}$ ოპერატორის გლობალურ სურიექციულობას შორის, რაც შეადგენს მომდევნო თეორემის შინაარსს.

თეორემა 2.4.1. *იმისათვის, რომ ოპერატორი*

$$D_{F,G} : \mathcal{PA}_{F,G}(U) \longrightarrow \mathcal{PA}_{F',G'}(U),$$

იყოს სურექციული, საკმარისია, რომ U -ს სინგულარული კოჰომოლოგიის ჯგუფი კო-ეფიციენტებით $\mathbb{R}^2$ -ში, $H_{\text{sing}}^1(U, \mathbb{R}^2)$, იყოს ტრივიალური.

დამტკიცება. როგორც ამ პარაგრაფის დასაწყისში იქნა ნაჩვენები, გვაქვს შემდეგი ზუსტი მიმდევრობა

$$\mathcal{PA}_{F,G}(U) \xrightarrow{D_{F,G}} \mathcal{PA}_{F',G'}(U) \longrightarrow H^1(U, \text{Con}_{F,G}) ,$$

შედეგი 2.4.1-დან გამომდინარე კი გვაქვს

$$\mathcal{PA}_{F,G}(U) \xrightarrow{D_{F,G}} \mathcal{PA}_{F',G'}(U) \longrightarrow H_{\text{sing}}^1(U, \mathbb{R}^2) ;$$

მაშასადამე, თუ კი $H_{\text{sing}}^1(U, \mathbb{R}^2)$ ტრივიალურია, მაშინ გვაქვს

$$D_{F,G}(\mathcal{PA}_{F,G}(U)) = \ker(\mathcal{PA}_{F',G'}(U) \rightarrow 0) = \mathcal{PA}_{F',G'}(U),$$

ანუ, $D_{F,G}$ სურექციულია. □

3 დოლბოს თეორემა ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმების კონებისათვის

ამ თავში განვიხილავთ დოლბოს თეორემის (იხ. [6], [12], [15]) განზოგადებას კონებისათვის, რომლების კვეთებიც, გარკვეული აზრით, წარმოადგენენ $\mathbb{C}$ -წრფივი კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლების ამონახსნებს.

განვიხილოთ n -განზომილებიანი X , $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$, კომპლექსური მრავალსახეობა (იხ. [15]), $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლე და $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(U)$ გლუვი $(0, 1)$ -ტიპის 1-ფორმა და განვსაზღვროთ $\bar{\partial}_\alpha$ ოპერატორი შემდეგნაირად

$$\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U), \quad \omega \longmapsto \bar{\partial}_\alpha(\omega) \equiv \bar{\partial}_\alpha \omega := \bar{\partial} \omega - \alpha \wedge \omega.$$

$f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ ჰოლომორფული ფუნქციებისათვის და $\omega, \eta \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U)$ გლუვი (p, q) -ტიპის დიფერენციალური ფორმისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\alpha(f\omega + g\eta) &= \bar{\partial}(f\omega + g\eta) - \alpha \wedge (f\omega + g\eta) \\ &= f(\bar{\partial}\omega - \alpha \wedge \omega) + g(\bar{\partial}\eta - \alpha \wedge \eta) = f\bar{\partial}_\alpha(\omega) + g\bar{\partial}_\alpha(\eta), \end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U)$ ასახვა არის $\mathcal{O}_X(U)$ -მოდულთა ჰომომორფიზმი.

დებულება 3.0.1. $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U), \eta \in \mathcal{A}_X^{r,s}(U)$ -ისთვის სამართლიანია ლაიბნიცის წესის შემდეგი ანალოგი

$$\bar{\partial}_\alpha(\omega \wedge \eta) = \bar{\partial}_{\frac{\alpha}{2}}(\omega) \wedge \eta + (-1)^{p+q} \omega \wedge \bar{\partial}_{\frac{\alpha}{2}}(\eta).$$

დამტკიცება. გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობებიდან

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_\alpha(\omega \wedge \eta) &= \bar{\partial}(\omega \wedge \eta) - \alpha \wedge \omega \wedge \eta = \bar{\partial}(\omega) \wedge \eta + (-1)^{p+q} \omega \wedge \bar{\partial}(\eta) \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha \wedge \omega \wedge \eta - \frac{1}{2} \alpha \wedge \omega \wedge \eta = \left(\bar{\partial}(\omega) - \frac{1}{2} \alpha \wedge \omega \right) \wedge \eta \\ &\quad + (-1)^{p+q} \omega \wedge \left(\bar{\partial}(\eta) - \frac{1}{2} \alpha \wedge \eta \right) = \bar{\partial}_{\frac{\alpha}{2}}(\omega) \wedge \eta + (-1)^{p+q} \omega \wedge \bar{\partial}_{\frac{\alpha}{2}}(\eta). \end{aligned}$$

□

განვიხილოთ ლოკალური საკოორდინატო სისტემა $V \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლეზე, $U \cap V \neq \emptyset$, $z_1, \dots, z_n : V \rightarrow \mathbb{C}$ კოორდინატული ფუნქციებით, რომლის მიმართაც ω და α წარმოდგენადია $U \cap V$ -ზე შემდეგი სახით

$$\omega = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad \alpha = \sum_{j=1}^n a_j d\bar{z}_j;$$

მის მიმართ $\bar{\partial}_\alpha$ მოქმედება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\alpha(\omega) &= \sum_{|I|=p, |J|=q} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) \wedge dz_I \wedge \bar{z}_J - \sum_{\substack{|I|=p, |J|=q \\ 1 \leq j \leq n}} a_j f_{IJ} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\
&= \sum_{|I|=p, |J|=q} \left(\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \right) - f_{IJ} \left(\sum_{j=1}^n a_j d\bar{z}_j \right) \right) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\
&= \sum_{|I|=p, |J|=q} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} - a_j f_{IJ} \right) d\bar{z}_j \right) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.
\end{aligned}$$

ამგვარად, $(p, 0)$ -ტიპის $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,0}$ ფორმისთვის $\bar{\partial}_\alpha \omega = 0$ ტოლობა ტოლფასია იმისა, რომ ნებისმიერი კოორდინატული წარმოდგენით მიღებული მისი ყოველი კომპონენტ-ფუნქცია აკმაყოფილებდეს $\mathbb{C}$ -წრფივ კარლემან-ბერს-ვეკუს განტოლებას თითოეული არგუმენტის მიმართ:

$$\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} - a_j f_{IJ} = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ თითოეული f_{IJ} (მისი კოორდინატული წარმოდგენა) თითოეული თავისი არგუმენტის ფსევდოანალიზური (განზოგადებული ანალიზური) ფუნქციაა.

3.1 $\bar{\partial}_\alpha$ -პუანკარეს ლემა

$\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი α -ის მიმართ განსაზღვრული $\bar{\partial}_\alpha$ ოპერატორისათვის სამართლიანია დოლ-ბოს ლემის ანალოგი (იხ. [12], [15]).

აღვნიშნოთ $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}_+^n$ -ით დადებით ნამდვილ რიცხვთა n -ეული $B_\epsilon(0) := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C} \mid |z_1| < \epsilon_1, \dots, |z_n| < \epsilon_n\}$ -ით - პოლიდისკი ცენტრით $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ -ში, ხოლო $\overline{B_\epsilon(0)}$ -ით კი - მისი ტოპოლოგიური ჩაკეტვა. შემდეგი ლემა ამტკიცებს, რომ $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი α -ისთვის $\bar{\partial}_\alpha$ -ჩაკეტილი ფორმა ლოკალურად $\bar{\partial}_\alpha$ -ზუსტია.

ლემა 3.1.1. *განვიხილოთ $\epsilon \in \mathbb{R}_+^n$, $B_\epsilon(0)$ პოლიდისკის ტოპოლოგიური ჩაკეტვის $\overline{B_\epsilon(0)} \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ ღია მიდამო, $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,1}(U)$ $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი $(0, 1)$ -ფორმა, $\bar{\partial}\alpha = 0$, და $\omega \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{p,q}(U)$, $q \geq 1$ ისეთი, რომ $\bar{\partial}_\alpha \omega = 0$. მაშინ არსებობს $\psi \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{p,q-1}(B_\epsilon(0))$ ისეთი, რომ*

$$\bar{\partial}_\alpha \psi = \omega|_{B_\epsilon(0)}.$$

დამტკიცება.

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\alpha \omega &= \bar{\partial}_\alpha \left(\sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \right) = \sum_{|I|=p, |J|=q} \bar{\partial}_\alpha (f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J) \\
&= \sum_{|I|=p, |J|=q} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} - a_j f_{IJ} \right) d\bar{z}_j \right) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \\
&= \sum_{|I|=p} (-1)^{|I|} dz_I \wedge \left(\sum_{|J|=q} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} - a_j f_{IJ} \right) d\bar{z}_j \right) \wedge d\bar{z}_J \right) \\
&= \sum_{|I|=p} (-1)^{|I|} dz_I \wedge \bar{\partial}_\alpha \left(\sum_{|J|=q} f_{IJ} d\bar{z}_J \right) = \sum_{|I|=p} dz_I \wedge \bar{\partial}_\alpha \left(\sum_{|J|=q} (-1)^{|I|} f_{IJ} d\bar{z}_J \right)
\end{aligned}$$

ტოლობიდან ჩანს, რომ

$$\omega = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{p,q}(U)$$

$\bar{\partial}_\alpha$ -ზუსტია ან $\bar{\partial}_\alpha$ -ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ყოველი $|I| = p$ -ისთვის

$$\sum_{|J|=q} f_{IJ} d\bar{z}_J \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,q}(U)$$

ფორმა, შესაბამისად, $\bar{\partial}_\alpha$ -ზუსტია ან $\bar{\partial}_\alpha$ -ჩაკეტილი. მაშასადამე, საკმარისია მხოლოდ

$$\omega \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,q}(U)$$

შემთხვევის განხილვა.

დამტკიცებას ვაწარმოებთ ინდუქციით უმცირესი ნატურალური k რიცხვის მიმართ, რომელზე მეტი $l > k$ ინდექსის შესაბამისი $d\bar{z}_l$ არ შედის ω -ში; $k = 0$ -ისთვის და, უფრო ზოგადად, $k < q$ -ისთვის

$$\omega = 0 \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,q}(U)$$

და, შესაბამისად, ის ანასახია $0 \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,q-1}(U)$ -ის. დავუშვათ თეორემის სამართლიანობა k -ისთვის და განვიხილოთ $k+1$ -ის შესაბამისი შემთხვევა. ω -ის ყველა წევრი, რომელიც შეიცავს $d\bar{z}_{k+1}$ -ს, შეიძლება დაჯგუფდეს შემდეგნაირად:

$$\omega = \eta \wedge d\bar{z}_{k+1} + \zeta = \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} f_J d\bar{z}_J \right) \wedge d\bar{z}_{k+1} + \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |K|=q}} g_K d\bar{z}_K.$$

იმის გამო, რომ ტოლობაში

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_\alpha(\omega) &= \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_J}{\partial \bar{z}_j} - a_j f_J \right) d\bar{z}_j \right) \wedge d\bar{z}_J \wedge d\bar{z}_{k+1} \\ &+ \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |K|=q}} \left(\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial g_K}{\partial \bar{z}_l} - a_l g_K \right) d\bar{z}_l \right) \wedge d\bar{z}_K = 0.\end{aligned}$$

პირველი ჯამის წევრები, რომლებიც შეიცავენ $d\bar{z}_l$ -ს $l \geq k+2$ ინდექსით, შეიცავენ ასევე $d\bar{z}_{k+1}$ -ს, ხოლო მეორე ჯამის წევრები კი არა. ამიტომ ტოლობის სამართლიანობისთვის აუცილებელია, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$\frac{\partial f_J}{\partial \bar{z}_l} - a_l f_J = 0, \quad l = k+2, \dots, n.$$

დოლბოს ლემის თანახმად, ტოლობიდან $\bar{\partial}\alpha = 0$ გამომდინარეობს, რომ არსებობს $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$(\bar{\partial}F)|_{B_\epsilon(0)} = \alpha|_{B_\epsilon(0)}.$$

მისი მეშვეობით განვსაზღვროთ შემდეგი ფუნქცია:

$$\varphi := \exp \circ F : U \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (z_1, \dots, z_n) \mapsto \varphi(z_1, \dots, z_n) := \exp(F(z_1, \dots, z_n));$$

$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ -ის ჰოლომორფულობიდან გამომდინარეობს, რომ $B_\epsilon(0)$ -ზე ყოველი m -ისათვის $\{1, \dots, n\}$ -დან სამართლიანია:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_m} = \varphi \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_m} = a_m \varphi.$$

განვსაზღვროთ $h_J : U \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$h_J(z_1, \dots, z_n) := \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{f_J(z_1, \dots, z_k, w, z_{k+2}, \dots, z_n)}{\varphi(z_1, \dots, z_k, w, z_{k+2}, \dots, z_n)(w - z_{k+1})} dw \wedge d\bar{w},$$

სადაც $B_{\epsilon_{k+1}}(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \epsilon_{k+1}\}$ (შესაძლებელია საინტეგრაციო არისთვის შერჩეულ იქნას ნებისმიერი $0 < \epsilon'_{k+1} < \epsilon_{k+1}$ რიცხვი $\frac{f_J}{\varphi}$ ფუნქციის მასზე შემოსაზღვრულობის უზრუნველსაყოფად). ეს ფუნქცია $U \cap \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_{k+1}| < \epsilon_{k+1}\}$ ღია სიმრავლეზე აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$\frac{\partial h_J}{\partial \bar{z}_{k+1}} = \frac{f_J}{\varphi},$$

ხოლო $B_\epsilon(0)$ -ზე კი ნებისმიერი $m \in \{2, \dots, n-k\}$ -ისთვის სამართლიანია:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_J}{\partial \bar{z}_{k+m}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{1}{(w - z_{k+1})} \left(\frac{\partial f_J}{\partial \bar{z}_{k+m}} \cdot \frac{1}{\varphi} + f_J \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{k+m}} \left(\frac{1}{\varphi} \right) \right) dw \wedge d\bar{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{1}{(w - z_{k+1})} \left(\frac{\partial f_J}{\partial \bar{z}_{k+m}} \cdot \frac{1}{\varphi} - f_J \cdot a_{k+m} \cdot \frac{1}{\varphi} \right) dw \wedge d\bar{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{1}{(w - z_{k+1})\varphi} \left(\frac{\partial f_J}{\partial \bar{z}_{k+m}} - a_{k+m} \cdot f_J \right) dw \wedge d\bar{w} = 0. \end{aligned}$$

აღვნიშნოთ:

$$\tilde{\Phi}_J := \varphi \cdot h_J : U \longrightarrow \mathbb{C};$$

ეს ფუნქცია $B_\epsilon(0)$ -ზე აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_J}{\partial \bar{z}_{k+1}} - a_{k+1} \tilde{\Phi}_J &= \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_{k+1}} \cdot h_J + \varphi \cdot \frac{\partial h_J}{\partial \bar{z}_{k+1}} - a_{k+1} \varphi h_J \\ &= a_{k+1} \varphi h_J + \varphi \frac{f_J}{\varphi} - a_{k+1} \varphi h_J = f_J \end{aligned}$$

და $m \in \{2, \dots, n-k\}$ -ისთვის

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_J}{\partial \bar{z}_{k+m}} - a_{k+m} \tilde{\Phi}_J = h_J \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_{k+m}} - a_{k+m} \varphi \right) = 0.$$

განვიხილოთ ფუნქციების $\left\{ \Phi_J := (-1)^{|J|} \tilde{\Phi}_J \right\}_{J \subseteq \{1, \dots, k\}, |J|=q-1}$ ერთობლიობის მეშვეობით განსაზღვრული ფორმა

$$\psi_0 = \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} \Phi_J d\bar{z}_J \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0, q-1}(U);$$

რადგანაც $B_\epsilon(0)$ -ზე სრულდება ტოლობა

$$\sum_{j=k+2}^n \left(\frac{\partial \Phi_J}{\partial \bar{z}_j} - a_j \Phi_J \right) d\bar{z}_j = 0,$$

$B_\epsilon(0)$ პოლიდისკზე შესრულება შემდეგი:

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\alpha(\psi_0) &= \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_J}{\partial \bar{z}_j} - a_j \Phi_J \right) d\bar{z}_j \right) \wedge d\bar{z}_J \\
&= \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} \left(\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \Phi_J}{\partial \bar{z}_j} - a_j \Phi_J \right) d\bar{z}_j + \left(\frac{\partial \Phi_J}{\partial \bar{z}_{k+1}} - a_{k+1} \Phi_J \right) d\bar{z}_{k+1} \right) \wedge d\bar{z}_J \\
&= \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} \left(\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \Phi_J}{\partial \bar{z}_j} - a_j \Phi_J \right) d\bar{z}_j + (-1)^{|J|} f_J d\bar{z}_{k+1} \right) \wedge d\bar{z}_J.
\end{aligned}$$

იმავე სიმრავლეზე გვაქვს:

$$\begin{aligned}
\omega - \bar{\partial}_\alpha(\psi_0) &= \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} f_J d\bar{z}_J \right) \wedge d\bar{z}_{k+1} + \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |K|=q}} g_K d\bar{z}_K \\
&\quad - \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} \left(\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \Phi_J}{\partial \bar{z}_j} - a_j \Phi_J \right) d\bar{z}_j \right) \wedge d\bar{z}_J - \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} f_J d\bar{z}_J \right) \wedge d\bar{z}_{k+1} \\
&= \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |K|=q}} g_K d\bar{z}_K - \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} \left(\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \Phi_J}{\partial \bar{z}_j} - a_j \Phi_J \right) d\bar{z}_j \right) \wedge d\bar{z}_J,
\end{aligned}$$

და, ვინაიდან არცერთი $d\bar{z}_l$, რომლის ინდექსიც აკმაყოფილებს პირობას $l > k$, არ შედის ამ ფორმაში და α არის $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი, ამიტომ

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\alpha(\omega - \bar{\partial}_\alpha(\psi_0)) &= -\bar{\partial}_\alpha(\bar{\partial}_\alpha(\psi_0)) = -\bar{\partial}_\alpha(\bar{\partial}\psi_0 - \alpha \wedge \psi_0) \\
&= -(-\bar{\partial}(\alpha \wedge \psi_0) - \alpha \wedge \bar{\partial}\psi_0) = -\alpha \wedge \bar{\partial}\psi_0 + \alpha \wedge \bar{\partial}\psi_0 = 0.
\end{aligned}$$

ინდუქციური დაშვებით არსებობს ფორმა $\psi_1 \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,q-1}(B_\epsilon(0))$ ისეთი, რომ

$$\bar{\partial}_\alpha(\psi_1) = \sum_{\substack{K \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |K|=q}} g_K d\bar{z}_K - \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |J|=q-1}} \left(\sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \Phi_J}{\partial \bar{z}_j} - a_j \Phi_J \right) d\bar{z}_j \right) \wedge d\bar{z}_J,$$

და, ამგვარად, $B_\epsilon(0)$ -ზე სრულდება:

$$\omega = \bar{\partial}_\alpha(\psi_0) + \bar{\partial}_\alpha(\psi_1) = \bar{\partial}_\alpha(\psi_0 + \psi_1);$$

მაშასადამე, $\psi := \psi_0 + \psi_1 \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,q-1}(B_\epsilon(0))$ ფორმა აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$\omega|_{B_\epsilon(0)} = \bar{\partial}_\alpha(\psi).$$

3.2 ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმების კონა

X კომპლექსურ მრავალსახეობაზე $p \in \mathbb{N}$ ნატურალური რიცხვის და $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ გლობალური $(0, 1)$ -ტიპის ფორმის მიმართ განვსაზღვროთ წინარეკონა:

$$\Psi_{X,\alpha}^p : \text{Open}(X)^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set}, \quad U \longmapsto \Psi_{X,\alpha}^p(U) \equiv \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p) := \{\omega \in \mathcal{A}_X^{p,0}(U) \mid \bar{\partial}\omega = \alpha|_U \wedge \omega\},$$

რომელსაც შეზღუდვის ჰომომორფიზმებად აქვს ჩვეულებრივი კვეთების შეზღუდვა

$$U \subseteq V \longmapsto r_U^V : \Psi_{X,\alpha}^p(V) \longrightarrow \Psi_{X,\alpha}^p(U), \quad \omega \mapsto r_U^V(\omega) := \omega|_U.$$

როგორც მომდევნო დებულებიდან გამოჩნდება, ეს წინარეკონა კონაა და მას ვუწოდებთ *ფსევდოანალიზური დიფერენციალური p -ფორმების კონას α -ის მიმართ*, ან, მეორენაირად, *α -ფსევდოანალიზური დიფერენციალური p -ფორმების კონას*.

დებულება 3.2.1. $\Psi_{X,\alpha}^p$ წინარეკონა $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონაა.

დამტკიცება. ყოველი $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლისათვის $\Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p)$ კვეთების სიმრავლე ბუნებრივად აღჭურვალია $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ -მოდულის სტრუქტურით: $\omega, \eta \in \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p)$ ფორმებისათვის და $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ჰოლომორფული ფუნქციებისათვის სამართლიანია:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(f\omega + g\eta) &= f\bar{\partial}\omega + g\bar{\partial}\eta = f \cdot \alpha|_U \wedge \omega + g \cdot \alpha|_U \wedge \eta = \alpha|_U \wedge (f\omega) + \alpha|_U \wedge (g\eta) \\ &= \alpha|_U \wedge (f\omega + g\eta), \end{aligned}$$

ანუ, $f\omega + g\eta \in \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p)$. $r_U^V : \Psi_{X,\alpha}^p(V) \rightarrow \Psi_{X,\alpha}^p(U)$ ასახვა კი $\omega, \eta \in \Gamma(V, \Psi_{X,\alpha}^p)$ კვეთებისათვის და $f, g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ ჰოლომორფული ფუნქციებისთვის აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$r_U^V(f\omega + g\eta) = (f\omega + g\eta)|_U = f|_U \omega|_U + g|_U \eta|_U;$$

მაშასადამე, $\Psi_{X,\alpha}^p$ არის $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა წინარეკონა.

აკმაყოფილდება ასევე სერის პირობები თავსებადი კვეთების ერთობლიობის ცალსახად შეწებების შესახებ (იხ. [10]), რაც გამომდინარეობს შემდეგიდან:

$$U = \bigcup_{j \in J} U_j$$

ღია დაფარვისათვის და $\omega, \eta \in \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p)$ კვეთებისათვის, რომლებისთვისაც $\omega|_{U_j} = \eta|_{U_j}$ ყოველი $j \in J$ -ისთვის, ვინაიდანაც ისინი ფიბრაციის კვეთებია, მათი ტოლობიდან ყოველი წერტილის მიდამოში გამომდინარეობს, რომ

$$\omega = \eta \in \Psi_{X,\alpha}^p(U);$$

კვთების ერთობლიობისათვის კი $\omega_j \in \Gamma(U_j, \Psi_{X,\alpha}^p) \subseteq \Gamma(U_j, \mathcal{A}_X^{p,0})$, რომლებისთვისაც $\omega_j|_{U_j \cap U_k} = \omega_k|_{U_j \cap U_k}$, არსებობს $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{A}_X^{p,0})$ კვთა ისეთი, რომ $\omega|_{U_j} = \omega_j$ და, რადგანაც $\Psi_{X,\alpha}^p$ -ის განმსაზღვრელი თვისება ლოკალურია, სრულდება $\omega \in \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p)$; მაშასადამე, $\Psi_{X,\alpha}^p$ კონაა. $\square$

უკანასკნელი დებულების მართებულება გამომდინარეობს ასევე იქიდან, რომ $\Psi_{X,\alpha}^p$ წარმოდგენადია გარკვეული კონათა ჰომომორფიზმის ბირთვის სახით: გლობალური $(0,1)$ -ტიპის $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ ფორმისათვის და ნებისმიერი $p, q \in \mathbb{N}$ -ისთვის განვიხილოთ შემდეგი $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონათა ჰომომორფიზმი

$$\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q} \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1},$$

რომელიც მოიცემა $\mathcal{A}_X^{p,q}(U), \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U), U \subseteq X$ კვთების სიმრავლეებს შორის, შემდეგი ასახვების ერთობლიობით:

$$\bar{\partial}_\alpha^U \equiv \bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U), \quad \omega \mapsto \bar{\partial}_\alpha(\omega) := \bar{\partial}_{\alpha|_U}(\omega) = \bar{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \omega.$$

დებულება 3.2.2. $\{\bar{\partial}_\alpha^U \equiv \bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U)\}_{U \subseteq X}$ ასახვების ერთობლიობა განსაზღვრავს $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა $\mathcal{A}_X^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}$ კონათა ჰომომორფიზმს.

დამტკიცება.

$$\bar{\partial}_\alpha^U \equiv \bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U), \quad \omega \mapsto \bar{\partial}_\alpha(\omega) := \bar{\partial}_{\alpha|_U}(\omega) = \bar{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \omega.$$

ასახვა $\mathcal{O}_X(U)$ -მოდულთა ჰომომორფიზმია, როგორც პირველ ნაწილში იქნა ნაჩვენები; $U \subseteq V$ ღია ქვესიმრავლეთათვის და $\omega \in \Gamma(V, \mathcal{A}_X^{p,q})$ კვთისათვის სამართლიანია:

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_\alpha^V(\omega))|_U &= (\bar{\partial}\omega - \alpha|_V \wedge \omega)|_U = (\bar{\partial}\omega)|_U - (\alpha|_V \wedge \omega)|_U = \bar{\partial}(\omega|_U) - (\alpha|_V)|_U \wedge \omega|_U \\ &= \bar{\partial}(\omega|_U) - \alpha|_U \wedge \omega|_U = \bar{\partial}_\alpha^U(\omega|_U), \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V, \mathcal{A}_X^{p,q}) & \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha^V} & \Gamma(V, \mathcal{A}_X^{p,q+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(U, \mathcal{A}_X^{p,q}) & \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha^U} & \Gamma(U, \mathcal{A}_X^{p,q+1}) \end{array}$$

დიაგრამა, რომელშიც ვერტიკალური მორფიზმები შეზღუდვებია, კომუტაციურია. $\square$

დებულება 3.2.3.

$$\Psi_{X,\alpha}^p = \ker(\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,0} \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}),$$

დამტკიცება. ნებისმიერი ღია $U \subseteq X$ ქვესიმრავლისთვის

$$\Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p), \Gamma(U, \ker(\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,0} \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,1})) \subseteq \Gamma(U, \mathcal{A}_X^{p,0})$$

და

$$\omega \in \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p) \Leftrightarrow \bar{\partial}\omega = \alpha|_U \wedge \omega \Leftrightarrow \bar{\partial}_\alpha(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega \in \Gamma(U, \ker(\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1})) ;$$

მაშასადამე, ყოველი ღია ქვესიმრავლისათვის ამ კონების კვეთების სიმრავლეები ერთმანეთს ემთხვევა; ასევე ემთხვევა ერთმანეთს შესაბამისი შეზღუდვის ჰომომორფიზმები, რაც ნიშნავს, რომ გვაქვს

$$\Psi_{X,\alpha}^p = \ker(\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,1}) .$$

□

თეორემა 3.2.1. (i) თუ $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ ფორმა $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილია, მაშინ $\Psi_{X,\alpha}^p$ ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ p -ფორმათა კონისა და Ω_X^p ჰოლომორფულ დიფერენციალურ p -ფორმათა კონის ღეროები, ყოველი $p \in \mathbb{N}$ -ისათვის, იზომორფულებია ყოველი $Q \in X$ წერტილში:

$$\Psi_{X,\alpha,Q}^p \cong \Omega_{X,Q}^p,$$

როგორც $\mathcal{O}_{X,Q}$ -მოდულები.

(ii) თუ $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ ფორმა $\bar{\partial}$ -ზუსტია, მაშინ

$$\Psi_{X,\alpha}^p \cong \Omega_X^p,$$

როგორც $\mathcal{O}_X$ -მოდულოთა კონები, ყოველი $p \in \mathbb{N}$ -ისათვის.

დამტკიცება. (i) რადგანაც $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ ფორმა $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილია, ის ლოკალურად $\bar{\partial}$ -ზუსტია, რაც ნიშნავს, რომ ყოველ წერტილს მოეძებნება მიდამო ისეთი, რომ α -ს შეზღუდვა ამ მიდამოზე ტოლი არის ამ მიდამოზე განსაზღვრული რაიმე გლუვი ფუნქციის ანასახისა $\bar{\partial}$ -ის მიმართ; განვიხილოთ $Q \in X$ წერტილი, მისი ღია $Q \in U$ მიდამო და ისეთი $f : U \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{C}_X^\infty(U)$ გლუვი ფუნქცია, რომ

$$\alpha|_U = \bar{\partial}f.$$

ვაჩვენოთ

$$\varphi : \Omega_{X,Q}^p \rightarrow \Psi_{X,\alpha,Q}^p, \quad [(\omega, V)] \mapsto \varphi([(\omega, V)]) := [((e^f)|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V)] ;$$

ასახვის განსაზღვრის კორექტულობა, ე.ი., მისი დამოუკიდებლობა ექვივალენტობის კლასის წარმომადგენლის შერჩევისაგან; თუ ავირჩევდით იმავე ექვივალენტობის კლასის სხვა $[(\omega, V)] = [(\eta, W)]$ წარმომადგენელს, მივიღებდით $((e^f)|_{U \cap W} \cdot \eta|_{U \cap W}, U \cap W)$ -ის შესაბამის ექვივალენტობის კლასს; განვიხილოთ $Q \in S \subseteq V \cap W$ ღია მიდამო ისეთი, რომ

$$\omega|_S = \eta|_S,$$

რის შესაბამისადაც გვაქვს

$$((e^f)|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V})|_{U \cap S} = (e^f)|_{U \cap S} \cdot \omega|_{U \cap S} = (e^f)|_{U \cap S} \cdot \eta|_{U \cap S} = ((e^f)|_{U \cap W} \cdot \eta|_{U \cap W})|_{U \cap S};$$

მაშასადამე,

$$[((e^f)|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V)] = [((e^f)|_{U \cap W} \cdot \eta|_{U \cap W}, U \cap W)],$$

ანუ, ეს შესაბამება დამოუკიდებელია ექვივალენტობის კლასის წარმომადგენლის შერჩევისგან. ვაჩვენოთ, რომ $[(e^f)|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V] \in \mathcal{A}_{X,Q}^{p,0}$ ანასახი $\Psi_{X,\alpha,Q}^p$ -ის ელემენტია. ტოლობიდან (სიმარტივისათვის გამოვტოვებთ სათანადო შეზღუდვების აღნიშვნებს, რომლებიც ნაგულისხმევია)

$$\bar{\partial}(e^f \cdot \omega) = \bar{\partial}(e^f) \wedge \omega + e^f \bar{\partial}(\omega) = e^f \cdot \alpha \wedge \omega = \alpha \wedge (e^f \cdot \omega),$$

ანუ

$$[(e^f)|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V] \in \Psi_{X,\alpha,Q}^p;$$

ელემენტათვის $[(\omega, V)], [(\eta, W)] \in \Omega_{X,Q}$ სრულდება:

$$\begin{aligned} \varphi([(\omega, V)] + [(\eta, W)]) &= \varphi([\omega|_{V \cap W} + \eta|_{V \cap W}, V \cap W]) \\ &= [(e^f)|_{U \cap V \cap W} \cdot (\omega|_{U \cap V \cap W} + \eta|_{U \cap V \cap W}), U \cap V \cap W] \\ &= [(e^f)|_{U \cap V \cap W} \cdot \omega|_{U \cap V \cap W}, U \cap V \cap W] + [(e^f)|_{U \cap V \cap W} \cdot \eta|_{U \cap V \cap W}, U \cap V \cap W] \\ &= [(e^f)|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V] + [(e^f)|_{U \cap W} \cdot \eta|_{U \cap W}, U \cap W] \\ &= \varphi([(\omega, V)]) + \varphi([(\eta, W)]), \end{aligned}$$

ხოლო $[(\omega, V)] \in \Omega_{X,Q}$ და $[(h, W)] \in \mathcal{O}_{X,Q}$ კი -

$$\begin{aligned} \varphi([(h, W)] \cdot [(\omega, V)]) &= \varphi([(h|_{V \cap W} \omega|_{V \cap W}, V \cap W)]) \\ &= [(e^f)|_{U \cap V \cap W} \cdot h|_{U \cap V \cap W} \omega|_{U \cap V \cap W}, U \cap V \cap W] \\ &= [(h, W)] \cdot [(e^f)|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V] = [(h, W)] \cdot \varphi([(\omega, V)]), \end{aligned}$$

მაშასადამე, φ არის $\mathcal{O}_{X,Q}$ -მოდულთა ჰომომორფიზმი; რადგანაც $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ არსადაა 0-ის ტოლი, შეგვიძლია განვიხილოთ შემდეგი ასახვა:

$$\psi : \Psi_{X,\alpha,Q}^p \longrightarrow \Omega_{X,Q}^p, \quad [(\omega, V)] \longmapsto \psi([(\omega, V)]) := \left[\left(\left(\frac{1}{e^f} \right) \Big|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V \right) \right].$$

ზემომოყვანილიდან გამომდინარე ეს შესაბამება დამოუკიდებელია ექვივალენტობის

კლასის წარმომადგენლის შერჩევისაგან, ხოლო $[(\omega, V)] \in \Psi_{X,\alpha,Q}^p$ -ისათვის კი

$$\bar{\partial} \left(\frac{1}{ef} \cdot \omega \right) = \bar{\partial} \left(\frac{1}{ef} \right) \wedge \omega + \frac{1}{ef} \cdot \bar{\partial}(\omega) = -\frac{1}{ef} \cdot \alpha \wedge \omega + \frac{1}{ef} \cdot \alpha \wedge \omega = 0,$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left[\left(\left(\frac{1}{ef} \right) \Big|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V \right) \right] \in \Omega_{X,Q}^p;$$

ასევე, ზემომოყვანილიდან გამომდინარე ψ ასახვა $\mathcal{O}_{X,Q}$ -მოდულთა ჰომომორფიზმია და $\psi \circ \varphi : \Omega_{X,Q}^p \longrightarrow \Omega_{X,Q}^p$ კომპოზიციისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi ([(\omega, V)]) &= \psi \left(\left[\left((ef) \Big|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V \right) \right] \right) \\ &= \left[\left(\left(\frac{1}{ef} \right) \Big|_{U \cap V} \cdot (ef) \Big|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V \right) \right] = [(\omega|_{U \cap V}, U \cap V)] = [(\omega, V)], \end{aligned}$$

ხოლო $\varphi \circ \psi : \Psi_{X,\alpha,Q}^p \rightarrow \Psi_{X,\alpha,Q}^p$ კომპოზიციისათვის კი

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi ([(\omega, V)]) &= \varphi \left(\left[\left(\left(\frac{1}{ef} \right) \Big|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V \right) \right] \right) \\ &= \left[\left((ef) \Big|_{U \cap V} \cdot \left(\frac{1}{ef} \right) \Big|_{U \cap V} \cdot \omega|_{U \cap V}, U \cap V \right) \right] = [(\omega|_{U \cap V}, U \cap V)] = [(\omega, V)] \end{aligned}$$

ტოლობა; მაშასადამე:

$$\psi \circ \varphi = \text{id}_{\Omega_{X,Q}^p}, \quad \varphi \circ \psi = \text{id}_{\Psi_{X,\alpha,Q}^p},$$

ანუ, $\psi = \varphi^{-1}$ და $\Omega_{X,Q}^p$ და $\Psi_{X,\alpha,Q}^p$ იზომორფული $\mathcal{O}_{X,Q}$ -მოდულებია.

(ii) რადგანაც α არის $\bar{\partial}$ -ზუსტი, $\alpha = \bar{\partial}f$, სადაც $f : X \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{C}_X^\infty(X)$ და ყოველი $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლისათვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ შემდეგი ასახვა

$$\varphi_U : \Gamma(U, \Omega_X^p) \longrightarrow \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p), \quad \omega \mapsto e^{f|_U} \cdot \omega,$$

რომელიც $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ -მოდულთა ჰომომორფიზმია; ხოლო $U \subseteq V$ და $\omega \in \Gamma(V, \Omega_X^p)$ ქვესიმრავლეებისათვის გვაქვს

$$(\varphi_V(\omega))|_U = (e^{f|_V} \cdot \omega)|_U = e^{f|_U} \cdot \omega|_U = \varphi_U(\omega|_U);$$

მაშასადამე,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V, \Omega_X^p) & \xrightarrow{\varphi_V} & \Gamma(V, \Psi_{X,\alpha}^p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(U, \Omega_X^p) & \xrightarrow{\varphi_U} & \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p) \end{array}$$

დიაგრამა, სადაც ვერტიკალური მორფიზმები კვეთების შეზღუდვებია, კომპუტაციუ-

რია და, შესაბამისად, ჰომომორფიზმების $\{\varphi_U : \Gamma(U, \Omega_X^p) \rightarrow \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p)\}_{U \subseteq X \text{ ღია}}$ ერთობლიობა განსაზღვრავს $\mathcal{O}_X$ -კონათა მოდულების ჰომომორფიზმს $\varphi : \Omega_X^p \rightarrow \Psi_{X,\alpha}^p$. ანალოგიურად, ასახვა

$$\psi_U : \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p) \longrightarrow \Gamma(U, \Omega_X^p), \quad \omega \mapsto \frac{1}{e|f|_U} \cdot \omega,$$

$\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ -მოდულთა ჰომომორფიზმია და

$$\{\psi_U : \Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p) \longrightarrow \Gamma(U, \Omega_X^p)\}_{U \subseteq X \text{ ღია}}$$

ერთობლიობა განსაზღვრავს $\mathcal{O}_X$ -კონათა მოდულების $\psi : \Psi_{X,\alpha}^p \rightarrow \Omega_X^p$ ჰომომორფიზმს; ამ კონათა ჰომომორფიზმების კომპოზიციისათვის სრულდება ტოლობები:

$$(\psi \circ \varphi)_U = \psi_U \circ \varphi_U = \text{id}_{\Gamma(U, \Omega_X^p)}, \quad (\varphi \circ \psi)_U = \varphi_U \circ \psi_U = \text{id}_{\Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p)};$$

მაშასადამე $\psi = \varphi^{-1}$ და $\Psi_{X,\alpha}^p$ და Ω_X^p იზომორფულია, როგორც $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონები. $\square$

შედეგი 3.2.1. (i) $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი ფორმებისათვის:

$$\Psi_{X,\alpha,Q}^p \cong \Psi_{X,\beta,Q}^p,$$

როგორც $\mathcal{O}_{X,Q}$ -მოდულები, ყოველი $Q \in X$ წერტილისა და $p \in \mathbb{N}$ -თვის;

(ii) $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ $\bar{\partial}$ -ზუსტი ფორმებისათვის:

$$\Psi_{X,\alpha}^p \cong \Psi_{X,\beta}^p,$$

როგორც $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონები, ყოველი $p \in \mathbb{N}$ -ისათვის.

დამტკიცება. (i) დებულება 3.2.1 (i)-ის ძალით, ორივე ეს მოდული იზომორფულია $\Omega_{X,Q}^p$ -ის, მაშასადამე, ისინი ერმანეთის იზომორფულია.

(ii) დებულება 3.2.1 (ii)-ის ძალით, ორივე ეს მოდულთა კონა იზომორფულია Ω_X^p კონისა, მაშასადამე, ისინი ერმანეთის იზომორფულია.

თუ, $\alpha = \bar{\partial}f, \beta = \bar{\partial}g$ გლობალურად განსაზღვრული გლუვი $f, g : X \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{C}_X^\infty(X)$ ფუნქციებისათვის, მაშინ იზომორფიზმი ცხადი სახით მოიცემა ასახვების შემდეგი ერთობლიობით:

$$\Gamma(U, \Psi_{X,\alpha}^p) \longrightarrow \Gamma(U, \Psi_{X,\beta}^p), \quad \omega \mapsto e^{(g-f)|_U} \cdot \omega,$$

ყოველი $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლისათვის. $\square$

შენიშვნა. ზემოთქმულიდან ვასკვნით შემდეგი ორი სიმრავლის ბიექციურობას

$$H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X) \cong \{\text{ფსევდოანალიზური } p\text{-დიფერენციალური ფორმების კონები}\} / \sim,$$

სადაც $\sim$ -ით აღნიშნულია $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონების იზომორფულობის ექვივალენტობის მიმართება. მაშასადამე, ნებისმიერი $p \in \mathbb{N}$ -ისათვის $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X)$ სივრცე შეიძლება გამოყენებულ იქნას p -ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმების კონათა ექვივალენტობის კლასთა პარამეტრიზაციისათვის და, შესაბამისად, განხილულ იქნას, როგორც ასეთი კონების მოდულთა სივრცე.

X და Y კომპლექსურ მრავალსახეობებს შორის $f : X \rightarrow Y$ ჰოლომორფული ასახვა ბუნებრივად ამყარებს კავშირს $\Psi_{Y,\alpha}^p$ და $f_*\Psi_{X,f^*\alpha}$ კონებს შორის, სადაც $\alpha \in \mathcal{A}_Y^{0,1}(Y)$ და $f^*\alpha$ არის α -ს უკან გადმოტანა (pullback) f -ის გასწვრივ, ხოლო $f_*\Psi_{X,f^*\alpha}$ კი $\Psi_{X,f^*\alpha}$ კონის წინ გადატანა (pushforward) f -ის გასწვრივ X -იდან Y -ზე; ეს შეადგენს შემდეგი დებულების შინაარსს.

დებულება 3.2.4. $f : X \rightarrow Y$ ჰოლომორფული ასახვა კომპლექსურ მრავალსახეობებს შორის ინდუცირებს $\Psi_{Y,\alpha}^p \rightarrow f_*\Psi_{X,f^*\alpha}$ ჰომომორფიზმს კონებს შორის მის გასწვრივ ფორმათა უკან გადმოტანის მეშვეობით, ყოველი $\alpha \in \mathcal{A}_Y^{0,1}(Y)$ ფორმისათვის:

$$f^* : \Psi_{Y,\alpha}^p \longrightarrow f_*\Psi_{X,f^*\alpha}, \quad \Psi_{Y,\alpha}^p(U) \ni \omega \longmapsto f^*\omega \in \Psi_{X,f^*\alpha}(f^{-1}(U)).$$

დამტკიცება. იმის გათვალისწინებით, რომ ჰოლომორფული ასახვის გასწვრივ ფორმათა უკან გადმოტანა კომუტირებს დოლბოს ოპერატორთან, მივიღებთ:

$$\bar{\partial}(f^*\omega) = f^*\bar{\partial}(\omega) = f^*(\alpha \wedge \omega) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\omega),$$

მაშასადამე, $f^*\omega \in \Psi_{X,f^*\alpha}(f^{-1}(U))$. □

კომპლექსურ მრავალსახეობათა თეორიაში დე რამის კოჰომოლოგიის გარდა მნიშვნელოვან როლს ასრულებს დოლბოს კოჰომოლოგია (იხ. [12], [15]); ამ უკანასკნელის განზოგადებას ემსახურება ქვემოთმოყვანილი დებულებები.

დებულება 3.2.5. ნებისმიერი $p \in \mathbb{N}$ -ისათვის $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონების ჰომომორფიზმების

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots$$

მიმდევრობა და $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -მოდულების ჰომომორფიზმების

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots$$

მიმდევრობა კომპლექსია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ ფორმა $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილია.

დამტკიცება. დებულება გამომდინარეობს იქიდან, რომ ნებისმიერი $U \subseteq X$ ღია ქვე-

სიმრავლისათვის და ნებისმიერი $\omega \in \Gamma(U, \mathcal{A}_X^{p,q})$ კვეთისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_\alpha \circ \bar{\partial}_\alpha(\omega) &= \bar{\partial}_\alpha(\bar{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \omega) = \bar{\partial}(\bar{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \omega) - \alpha|_U \wedge (\bar{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \omega) \\ &= -\bar{\partial}(\alpha|_U \wedge \omega) - \alpha|_U \wedge \bar{\partial}\omega = -\bar{\partial}(\alpha|_U) \wedge \omega + \alpha|_U \wedge \bar{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \bar{\partial}\omega \\ &= -(\bar{\partial}\alpha)|_U \wedge \omega.\end{aligned}$$

□

ეს უკანასკნელი იძლევა საშუალებას დოლბოს კოჰომოლოგია განისაზღვროს $\bar{\partial}_\alpha$ ოპერატორთა მიმართ, როდესაც α ფორმა $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილია; კლასიკური დოლბოს კოჰომოლოგია მიიღება, როდესაც $\alpha = 0$.

განსაზღვრება 3.2.1. $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}$ ფორმისათვის და $p \in \mathbb{N}$ -ისათვის

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots$$

კომპლექსს ვუწოდებთ X -ის p -ურ დოლბოს კომპლექსს α -ის მიმართ.

ამ კომპლექსის კოჰომოლოგიის ჯგუფებს აღვნიშნავთ $H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X)$ -ით:

$$H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X) := H^q\left(\mathcal{A}_X^{p,\bullet}, \bar{\partial}_\alpha^{p,\bullet}\right) = \frac{\ker(\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X))}{\operatorname{im}(\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q}(X))}.$$

თეორემა 3.2.2. X კომპლექსური მრავალსახეობისათვის $\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ ფორმის მიმართ განსაზღვრული $\Psi_{X,\alpha}^p$ ფსევდოდოჰანალიზური დიფერენციალური p ხარისხის ფორმების, $p \in \mathbb{N}$, კონის კონათა კოჰომოლოგიის q -ური ჯგუფი იზომორფულია X -ის p -ური α -ს მიმართ განსაზღვრული დოლბოს კომპლექსის q -ური კოჰომოლოგიის ჯგუფისა:

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \cong H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X).$$

დამტკიცება. ნებისმიერი $Q \in X$ წერტილისათვის ღეროებზე ჰომომორფიზმთა მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow \Psi_{X,\alpha,Q}^p \xrightarrow{\operatorname{id}_{\Psi_{X,\alpha,Q}^p}} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_{\alpha,Q}} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_{\alpha,Q}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{\alpha,Q}} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_{\alpha,Q}} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_{\alpha,Q}} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_{\alpha,Q}} \dots$$

ლემა 3.1.1-ის ძალით ზუსტი მიმდევრობაა: ნებისმიერი $[(\omega, U)] \in \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q}$ ელემენტისათვის, რომლისთვისაც

$$\bar{\partial}_{\alpha,Q}([\omega, U]) = [(\bar{\partial}_\alpha(\omega), U)] = 0,$$

ლემა 3.1.1-ის თანახმად მოიძებნება $Q \in V \subseteq U$ მიდამო და $\eta \in \Gamma(V, \mathcal{A}_X^{p,q-1})$ ფორმა

ისეთი, რომ $\bar{\partial}_\alpha(\eta) = \omega|_V$. შესაბამისად,

$$[(\omega, U)] = [(\omega|_V, V)] = [(\bar{\partial}_\alpha(\eta), V)] = \bar{\partial}_{\alpha,Q}([\eta, V]),$$

მაშასადამე,

$$\ker(\bar{\partial}_{\alpha,Q} : \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q+1}) = \text{im}(\bar{\partial}_{\alpha,Q} : \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q-1} \longrightarrow \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q});$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ზუსტია ასევე კონათა ჰომომორფიზმების შემდეგი მიმდევრობაც:

$$0 \longrightarrow \Psi_{X,\alpha}^p \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \dots$$

ვინაიდან თითოეული კონა $\mathcal{A}_X^{p,q}$ აციკლურია, ეს კომპლექსი $\Psi_{X,\alpha}^p$ -კონის აციკლური რე-ზოლვენტია, საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა.

უფრო ვრცლად, შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathcal{Z}_{X,\bar{\partial}_\alpha}^{p,q} := \ker(\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q} \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1})$$

და განვიხილოთ შემდეგი კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow \Psi_{X,\alpha}^p \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{Z}_{X,\bar{\partial}_\alpha}^{p,1} \longrightarrow 0;$$

მის შესაბამის კოჰომოლოგიის ჯგუფთა გრძელ მიმდევრობას, გამომდინარე იქიდან, რომ $\mathcal{A}_X^{p,q}$ -ის ყველა კონათა კოჰომოლოგიის ჯგუფი, გარდა 0-ოვანისა, ტრივიალურია, აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \Psi_{X,\alpha}^p) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,0}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \\ & & & & & \swarrow & \\ & & H^1(X, \Psi_{X,\alpha}^p) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \\ & & & & \dots & & \\ & & & & & & \\ & & H^{q-1}(X, \Psi_{X,\alpha}^p) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^{q-1}(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \\ & & & & & \swarrow & \\ & & H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \cong H^{q-1}(X, \mathcal{Z}_X^{p,1})$$

იზომორფიზმი. ანალოგიურად,

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_X^{p,1} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{Z}_X^{p,2} \longrightarrow 0$$

მოკლე ზუსტი მიმდევრობის შესაბამისი კოჰომოლოგიის ჯგუფთა გრძელი მიმდევრობის განხილვით დავასკვნით, რომ

$$H^{q-1}(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \cong H^{q-2}(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}).$$

ამგვარად, გვაქვს შემდეგი იზომორფიზმების ჯაჭვი

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \cong H^{q-1}(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}) \cong \dots \cong H^1(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1});$$

საბოლოოდ,

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}_\alpha} \mathcal{Z}_X^{p,q} \longrightarrow 0$$

კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობის შესაბამისი კოჰომოლოგიის ჯგუფთა

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{Z}_X^{p,q}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

გრძელი ზუსტი მიმდევრობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$H^1(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}) \cong \frac{\Gamma(X, \mathcal{Z}_X^{p,q})}{\Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1})} = \frac{\ker(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X))}{\text{im}(\bar{\partial}_\alpha: \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q}(X))} = H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X),$$

და, მაშასადამე:

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p) \cong H_{\bar{\partial}_\alpha}^{p,q}(X).$$

□

3.3 ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმები მნიშვნელობებით ჰოლომორფულ ვექტორულ ფიბრაციაში

განვიხილოთ m კომპლექსური რანგის $p: E \rightarrow X$ ჰოლომორფული ვექტორული ფიბრაცია X კომპლექსურ მრავალსახეობაზე, და აღვნიშნოთ $\mathcal{A}_X^{p,q}(-, E) \equiv \mathcal{A}_X^{p,q}(E)$ -ით

$$\bigwedge^{p,q} X \otimes E \longrightarrow X,$$

ფიბრაციის გლუვი კვეთების კონა, ანუ,

$$U \longmapsto \mathcal{A}_X^{p,q}(U, E) := \Gamma\left(U, \bigwedge^{p,q} X \otimes E\right),$$

ბუნებრივი შეზღუდვის ასახვებთან ერთად. $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ გლობალური $(0,1)$ -ტიპის ფორმის მიმართ განვსაზღვროთ

$$\bar{\partial}_{E,\alpha} : \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E),$$

კონათა ჰომომორფიზმი შემდეგნაირად: ყოველი $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლისათვის $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U, E)$ მასზე კვეთას ესაბამება

$$\omega \longmapsto \bar{\partial}_{E,\alpha}(\omega) = \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^m \omega_j \otimes \sigma_j \right) := \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes \sigma_j,$$

კვეთა, სადაც $\sigma_1, \dots, \sigma_m : V \rightarrow E, U \cap V \neq \emptyset$ ვექტორული E ფიბრაციის ლოკალური ჰოლომორფული მატრივიალიზებული კვეთებია; უფრო ზუსტად კი, U უნდა დაიფაროს ღია ქვესიმრავლეებით, რომლებზეც E ტრივიალიზდება, $U = U \cap \bigcup_{j \in J} V_j$, და ω -ს უნდა ესაბამებოდეს კვეთა U -ზე, რომელიც ლოკალურად ყოველ $U \cap V_j$ -ზე მოიცემა ზემომოყვანილი სახით.

დებულება 3.3.1. $\bar{\partial}_{E,\alpha} : \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E)$ ყოველი $p, q \in \mathbb{N}$ -ისათვის $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონათა ჰომომორფიზმია.

დამტკიცება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ მოყვანილი განსაზღვრების დამოუკიდებლობა ლოკალური მატრივიალიზებული კვეთების შერჩევისაგან. ვთქვათ,

$$\sigma'_1, \dots, \sigma'_m : V' \longrightarrow E, \quad U \cap V' \neq \emptyset$$

სხვა ასეთი ჰოლომორფული მატრივიალიზებული კვეთების ერთობლიობაა, მაშინ გვაქვს:

$$\sigma_j|_{U \cap V'} = \sum_{k=1}^m g_{kj} \sigma'_k|_{U \cap V'}, \quad j = 1, \dots, m,$$

სადაც $g : U \cap V' \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{C})$ ჰოლომორფული მატრიც-ფუნქციაა. ქვემოთ გამოვტოვებთ სათანადო ღია ქვესიმრავლეზე შეზღუდვის აღნიშვნას, რაც ორაზროვნებას არ გამოიწვევს. ω -სათვის სამართლიანია:

$$\omega = \sum_{j=1}^m \omega_j \otimes \sigma_j = \sum_{j=1}^m \omega_j \otimes \left(\sum_{k=1}^m g_{kj} \sigma'_k \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m g_{kj} \omega_j \right) \otimes \sigma'_k,$$

შესაბამისად, ახალი წარმოდგენისთვის იმის გათვალისწინებით, რომ $\bar{\partial}_\alpha$ $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა

კონათა ჰომომორფიზმია, გვაქვს ტოლობები:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{E,\alpha}(\omega) &= \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m g_{kj} \omega_j \right) \otimes \sigma'_k \right) = \sum_{k=1}^m \bar{\partial}_\alpha \left(\sum_{j=1}^m g_{kj} \omega_j \right) \otimes \sigma'_k \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m g_{kj} \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \right) \otimes \sigma'_k = \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes \left(\sum_{k=1}^m g_{kj} \sigma'_k \right) = \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes \sigma_j.\end{aligned}$$

$\omega, \eta \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U, E)$ კვეთათებისათვის

$$\omega = \sum_{j=1}^m \omega_j \otimes \sigma_j, \quad \eta = \sum_{j=1}^m \eta_j \otimes \sigma_j$$

წარმოგენებით და $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ ჰოლომორფული ფუნქციებისათვის, იმის გათვალისწინებით, რომ $\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}$ არის $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონათა ჰომომორფიზმი, სამართლიანია ტოლობა:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{E,\alpha}(f\omega + g\eta) &= \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^m (f\omega_j + g\eta_j) \otimes \sigma_j \right) = \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(f\omega_j + g\eta_j) \otimes \sigma_j \\ &= \sum_{j=1}^m (f\bar{\partial}_\alpha(\omega_j) + g\bar{\partial}_\alpha(\eta_j)) \otimes \sigma_j = f \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes \sigma_j + g \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\eta_j) \otimes \sigma_j \\ &= f\bar{\partial}_{E,\alpha}(\omega) + g\bar{\partial}_{E,\alpha}(\eta);\end{aligned}$$

ამგვარად, ყოველი $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლისათვის სათანადო ასახვა $\mathcal{O}_X(U)$ -წრფივია.

გვჭირდება ასევე ამ ოპერატორის შეზღუდვებთან კომუტირების ჩვენება; ამისათვის, განვიხილოთ $U \subseteq V \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლეები და $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(V, E)$ კვეთა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ რომ E -ს მატრიციალიზებული კვეთები მთელს V -ზეა განსაზღვრული. შესაბამისად, გვაქვს:

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}_{E,\alpha}(\omega))|_U &= \left(\sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes \sigma_j \right) \Big|_U = \sum_{j=1}^m (\bar{\partial}_\alpha(\omega_j))|_U \otimes \sigma_j|_U = \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\omega_j|_U) \otimes \sigma_j|_U \\ &= \bar{\partial}_{E,\alpha}(\omega|_U).\end{aligned}$$

მაშასადამე, $\bar{\partial}_{E,\alpha} : \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \rightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E)$ წარმოადგენს $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონათა ჰომომორფიზმს. $\square$

დებულება 3.3.2.

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,1}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots$$

და

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots$$

მიმდევრობები კომპლექსებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,1})$ ჩაკეტილია $\bar{\partial}$ -ის მიმართ.

დამტკიცება. დებულება გამომინარეობს $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U, E)$ კვეთისათვის შემდეგი ტოლობებიდან:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{E,\alpha} \circ \bar{\partial}_{E,\alpha}(\omega) &= \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes \sigma_j \right) = \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\bar{\partial}_\alpha(\omega_j)) \otimes \sigma_j \\ &= - \sum_{j=1}^m ((\bar{\partial}_\alpha)|_U \wedge \omega_j) \otimes \sigma_j.\end{aligned}$$

□

$\bar{\partial}$ -ჩაკეტილი α -ისთვის

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X, E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots$$

კომპლექსის კოჰომოლოგიის ჯგუფებისათვის გამოვიყენებთ აღნიშვნას:

$$H_{\bar{\partial}_{E,\alpha}}^{p,q}(X, E) := \frac{\ker(\bar{\partial}_{E,\alpha} : \mathcal{A}_X^{p,q}(X, E) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X, E))}{\operatorname{im}(\bar{\partial}_{E,\alpha} : \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X, E) \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,q}(X, E))}.$$

$p : E \rightarrow X$ ფიბრაციის ჰოლომორფული კვეთების კონისათვის გამოვიყენებთ იმავე სიმბოლოს, რომლითაც აღნიშნულია ფიბრაციის ტოტალური სივრცე, ანუ, E -ს, და სწორად ეს კონა იგულისხმება ტენზორულ ნამრავლში $\Psi_{X,\alpha}^p \otimes E$. სამართლიანია შემდეგი დებულება.

შედეგი 3.3.1.

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p \otimes E) \cong H_{\bar{\partial}_{E,\alpha}}^{p,q}(X, E).$$

დამტკიცება. ნებისმიერი $Q \in X$ წერტილისათვის დეროებზე სათანადო ჰომომორფიზმების

$$0 \longrightarrow \Psi_{X,\alpha,Q}^p \otimes E_Q \xrightarrow{\operatorname{id}} (\mathcal{A}_X^{p,0}(E))_Q \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha,Q}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha,Q}} (\mathcal{A}_X^{p,q}(E))_Q \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha,Q}} \dots$$

კომპლექსი ლემა 3.1.1-ის ძალით ზუსტია: $[(\omega, U)] \in (\mathcal{A}_X^{p,q}(E))_Q$ ელემენტისათვის ტოლობა

$$\bar{\partial}_{E,\alpha,Q}([(\omega, U)]) = 0$$

ნიშნავს, რომ ω კვეთის $\omega = \sum_{j=1}^m \omega_j \otimes \sigma_j$ ჯამად წარმოდგენისას Q -ს სათანადოდ შერჩეულ მიდამოზე მატრივიალიზებული კვეთების მიმართ (ზოგადობის შეუზღუდავად, ასეთი

მიდამო იყოს თვით $Q \in U \subseteq X$), თითოეული $j \in \{1, \dots, m\}$ -ისათვის გვაქვს $\bar{\partial}_\alpha(\omega_j) = 0$:

$$\bar{\partial}_{E,\alpha}(\omega) = \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) \otimes \sigma_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\partial}_\alpha(\omega_j) = 0, j \in \{1, \dots, m\},$$

მაშასადამე, ლემა 3.1.1-ის თანახმად, მოიძებნება $Q \in V \subseteq U$ მიდამო და $\eta_j \in \mathcal{A}_X^{p,q-1}(V)$ ფორმები, $j \in \{1, \dots, m\}$, ისეთები, რომ $\omega_j|_V = \bar{\partial}_\alpha(\eta_j)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, რის შესაბამისადც (სათანადო შეზღუდვის აღნიშვნების გამოტოვებით) გვაქვს ტოლობა:

$$\omega = \sum_{j=1}^m \omega_j \otimes \sigma_j = \sum_{j=1}^m \bar{\partial}_\alpha(\eta_j) \otimes \sigma_j = \bar{\partial}_{E,\alpha} \left(\sum_{j=1}^m \eta_j \otimes \sigma_j \right),$$

და, მაშასადამე:

$$[(\omega, U)] = [(\omega|_V, V)] = [(\bar{\partial}_{E,\alpha}(\eta), V)] = \bar{\partial}_{E,\alpha,Q}([(\eta, V)]),$$

შესაბამისად, ზუსტია ასევე კონათა ჰომომორფიზმების

$$0 \longrightarrow \Psi_{X,\alpha}^p \otimes E \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}_X^{p,0}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}_{E,\alpha}} \dots$$

კომპლექსიც, ანუ, გვაქვს $\Psi_{X,\alpha}^p \otimes E$ -ის აციკლური რეზოლვენტი და თერემა 3.2.2-ში მოყვანილის მსგავსად დავასკვნით:

$$H^q(X, \Psi_{X,\alpha}^p \otimes E) \cong H_{\bar{\partial}_{E,\alpha}}^{p,q}(X, E).$$

□

4 ფსევდოანალიზური გაგრძელება

ამ თავში მოიყვანება ერთ-ერთი ხერხი განზოგადდეს ფსევდოანალიზური (განზოგადებული ანალიზური) ფუნქციის ცნება რიმანის ზედაპირზე განსაზღვრულ ფუნქციებზე; განიხილება ასეთი ფუნქციების (მათი ყლორტების) წირის გასწვრივ ფსევდოანალიზური გაგრძელების საკითხი და ასეთი ფუნქციების კონა, მყარდება კავშირი ფსევდოანალიზურ გაგრძელებასა და წირის აწევას შორის კონის ეტალურ სივრცეში, როგორც ჰოლომორფული ფუნქციების (ყლორტების) და ანალიზური გაგრძელების კლასიკურ შემთხვევაში (იხ. [7], [14], [19]).

4.1 ფსევდოანალიზური ფუნქციების კონა რიმანის ზედაპირზე

განსაზღვრება 4.1.1. X რიმანის ზედაპირზე (ან, უფრო ზოგადად, კომპლექსურ მრავალსახეობაზე) $\alpha, \beta \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,1})$ გლობალური გლუვი დიფერენციალური $(0, 1)$ -ტიპის ფორმების მიმართ (გლუვ) ფსევდოანალიზურ (განზოგადებულ-ანალიზურ) ფუნქციასთან წინარეკონა მოიცემა შემდეგი შესაბამებით: ყოველ $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლეს ეთანადება

$$U \mapsto \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{C}_X^\infty(U) \mid \bar{\partial} f = f \cdot \alpha|_U + \bar{f} \cdot \beta|_U\},$$

ხოლო ყოველ $U \subseteq V$ ღია ქვესიმრავლეების წყვილს - ასახვების შეზღუდვა:

$$U \subseteq V \mapsto r_U^V : \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}(V) \longrightarrow \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}(U), \quad f \mapsto r_U^V(f) := f|_U.$$

ყოველი $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლისათვის $\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}(U)$ სიმრავლე ბუნებრივად აღჭურვალია $\mathbb{R}$ -წრფივი სივრცის სტრუქტურით და ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ისინი არიან ამ სტრუქტურით აღჭურვილი. შეზღუდვის ასახვები ამ სტრუქტურას ინარჩუნებენ, მაშასადამე, $\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}$ წარმოადგენს კონტრავარიანტულ ფუნქტორს $\text{Open}(X)$ -ზე მნიშვნელობებით $\mathbb{R}$ -წრფივ სივრცეთა კატეგორიაში

$$\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta} : \text{Open}(X)^{\text{op}} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}.$$

შენიშვნა. განვიხილოთ X -ის ლოკალური $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subseteq \mathbb{C}$ კოორდინატული სისტემა, რომლის შესაბამისი ანტიჰოლომორფული მხები და კომხები ფიბრაციების მატრივიალიზებული კვეთები იყოს $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \in \Gamma(V, T^{0,1}X)$ და $d\bar{z} \in \Gamma(V, (T^{0,1}X)^*)$. ამ უკანასკნელი კვეთის მიმართ წარმოვადგინოთ α და β ფორმები V -ზე:

$$\alpha|_V = a d\bar{z}, \quad \beta|_V = b d\bar{z}$$

$a, b : V \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქციების მეშვეობით. ნებისმიერი $f \in \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}(U)$ კვეთისათვის ისეთ $U \subseteq X$ -ზე, რომ $U \cap V \neq \emptyset$, ამ თანაკვეთაზე ($U \cap V$ ქვესიმრავლეზე) შეზღუდვას სიმარ-

ტივისათვის აღნიშნვაში არ ავსახავთ, ის ნაგულისხმევია) სამართლიანია

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = (af + b\bar{f})d\bar{z}.$$

φ^{-1} -ის გასწვრივ უკან გადმოტანის მეშვეობით, ანუ, $(\varphi^{-1})^*$ -ის მოდებით, დავასკვნით, რომ f -ის კოორდინატული წარმოდგენა ამ საკოორდინატო სისტემის მიმართ, ანუ, $f \circ \varphi^{-1}|_{U \cap V} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{C}$ ფუნქცია, აკმაყოფილებს კლასიკურ

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \circ \varphi^{-1} = (a \circ \varphi^{-1})(f \circ \varphi^{-1}) + (b \circ \varphi^{-1})(\overline{f \circ \varphi^{-1}}).$$

კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლებას $a \circ \varphi^{-1}, b \circ \varphi^{-1} : \varphi(V) \rightarrow \mathbb{C}$ კოეფიციენტებით.

დებულება 4.1.1. $\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}$ წინარეკონა ბუნებრივი ოპერაციებით $\mathbb{R}$ -წრფივ სივრცეთა კონაა; თუ $\beta = 0$, ის $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონაა.

დამტკიცება. ყოველი $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლისათვის, $f, g \in \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}(U)$ ფუნქციებისათვის და $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ რიცხვებისათვის გვაქვს ტოლობა:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\lambda f + \mu g) &= \lambda \bar{\partial}(f) + \mu \bar{\partial}(g) = \lambda (f \cdot \alpha|_U + \bar{f} \cdot \beta|_U) + \mu (g \cdot \alpha|_U + \bar{g} \cdot \beta|_U) \\ &= (\lambda f + \mu g) \cdot \alpha|_U + \overline{(\lambda f + \mu g)} \cdot \beta|_U, \end{aligned}$$

მაშასადამე, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}(U)$. ღია $U = \bigcup_{j \in J} U_j$ დაფარვისათვის და $f_j \in \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}(U_j)$ კვეთებისათვის, რომლებისთვისაც სრულდება: $f_j|_{U_j \cap U_k} = f_k|_{U_j \cap U_k}$, მოიძებნება ერთადერთი ფუნქცია $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ისეთი, რომ $f|_{U_j} = f_j$ ყოველი $j \in J$ -ისათვის. გამომდინარე იქიდან, რომ $\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}$ -ის განმსაზღვრელი თვისება ლოკალურია და ამგვარად მიღებული f მას ფლობს ყოველი წერტილის რაიმე მიდამოში, გვაქვს: $f \in \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}(U)$, მაშასადამე, $\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta}$ კონაა.

$f, g \in \mathcal{P}_X^{\alpha, 0}(U)$ ფსევდოანალიზური და $h_1, h_2 \in \mathcal{O}_X(U)$ ჰოლომორფული ფუნქციებისათვის სამართლიანია ტოლობები:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(h_1 f + h_2 g) &= h_1 \bar{\partial}(f) + h_2 \bar{\partial}(g) = h_1 (f \cdot \alpha|_U + \bar{f} \cdot \beta|_U) + h_2 (g \cdot \alpha|_U + \bar{g} \cdot \beta|_U) \\ &= (h_1 f + h_2 g) \cdot \alpha|_U + \overline{(h_1 f + h_2 g)} \cdot \beta|_U, \end{aligned}$$

მაშასადამე, $\mathcal{O}_X(U)$ რგოლი ბუნებრივად მოქმედებს $\mathcal{P}_X^{\alpha, 0}(U)$ აბელურ ჯგუფზე და ამგვარად ეს უკანასკნელი $\mathcal{O}_X(U)$ -მოდულია. ღია $U \subseteq V \subseteq X$ ქვესიმრავლეებისათვის და $f \in \mathcal{P}_X^{\alpha, 0}(V)$, $h \in \mathcal{O}_X(V)$ კვეთებისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$(h \cdot f)|_U = h|_U \cdot f|_U,$$

ანუ, რგოლის მოქმედება ჯგუფზე კომუტირებს შეზღუდვის ჰომომორფიზმებთან, ე.ი.,

შემდეგი დიაგრამა:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{P}_X^{\alpha,0}(V) & \longrightarrow & \mathcal{P}_X^{\alpha,0}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{P}_X^{\alpha,0}(U) & \longrightarrow & \mathcal{P}_X^{\alpha,0}(U) \end{array},$$

კომუტაციურია და, ამრიგად, $\mathcal{P}_X^{\alpha,0}$ კონა $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონაა. □

მაშასადამე, $\mathcal{P}_X^{\alpha,0}$ წარმოადგენს ფუნქტორს

$$\mathcal{P}_X^{\alpha,0} : \text{Open}(X)^{\text{op}} \longrightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X).$$

მომდევნო დებულების დამტკიცებაში $\left(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}\right)^{\text{ét}}$ -ის ელემენტებს აღვნიშნავთ (x, f_x) -ით, სადაც $x \in X$ ზედაპირის წერტილია, ხოლო f_x კი x -ის რაიმე ღია მიდამოზე რაიმე f კვეთის შესაბამისი ყლორტია x წერტილში. ეს დამტკიცება არსებითად ეყრდნობა კარლემანის თეორემას არანულოვანი ფსევდონალიზური ფუნქციის ნულების სიმრავლის დისკრეტულობის შესახებ (იხ. [3], [4], [28]).

დებულება 4.1.2. $\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}$ კონის ეტალური სივრცე $\left(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}\right)^{\text{ét}}$ ჰაუსდორფულია.

დამტკიცება. განვიხილოთ პროექციის ასახვა:

$$p : \left(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}\right)^{\text{ét}} \longrightarrow X, \quad \left((x, f_x) \in \mathcal{P}_{X,x}^{\alpha,\beta}\right) \longmapsto x$$

და ნებისმიერი ორი $(x, f_x) \neq (y, g_x) \in \left(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}\right)^{\text{ét}}$ განსხვავებული წერტილი. განსახილველია ორი შემთხვევა, $x \neq y$ და $x = y$; პირველ შემთხვევაში გამომდინარე იქიდან, რომ X , როგორც მრავალსახეობა, ჰაუსდორფულია, მოიძებნება x -ისა და y წერტილების განმაცალკეებელი $x \in U \subseteq X$ და $y \in V \subseteq X$, $U \cap V = \emptyset$ მიდამოები; მათი წინარესახეები p -ის მიმართ $p^{-1}(U)$ და $p^{-1}(V)$ წარმოადგენენ $(x, f_x) \neq (y, g_x) \in \left(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}\right)^{\text{ét}}$ წერტილების განმაცალკეებელ ღია მიდამოებს:

$$(x, f_x) \in p^{-1}(U), (y, g_x) \in p^{-1}(V), \text{ მათი თანაკვეთა კი ცარიელია : } p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V) = \emptyset.$$

თუ კი $x = y$, მაშინ $f_x \neq g_x$. ეს ორი ერთი და იმავე ღეროს სხვადასხვა ელემენტი წარმოადგენდა ორი განსხვავებული $f, g \in \Gamma(U, \mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})$, $f \neq g$, კვეთით, სადაც შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $x \in U$ ღია მიდამო ბმულია. რომელიმე $x' \in U$ წერტილში ამ ორი კვეთისათვის რომ სრულდებოდეს $f_{x'} = g_{x'}$, ანუ, ამ წერტილზე ღეროში ეს ორი კვეთა ერთსა და იმავე ექვივალენტობის კლასს იძლეოდეს, მაშინ მოიძებნებოდა $x' \in V \subseteq U$ მიდამო ისეთი, რომ $f|_V = g|_V$. უკანასკნელი ტოლობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ f და g ერთმანეთს ემთხვევა მთელს U -ზე შემდეგნაირად: ნებისმიერი $z \in U$ წერტილი, U -ს ბმულობიდან გამომდინარე, შეიძლება დავაკავშიროთ უწყვეტი წირით $x' \in U$ წერ-

ტილს:

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow U, \quad \gamma(0) = x', \quad \gamma(1) = z.$$

$\gamma([0, 1]) \subseteq U$ ანასახი კომპაქტურია და, შესაბამისად, შეიძლება დაფარულ იქნას სასრული რაოდენობა $\varphi_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}, j \in \{1, \dots, n\}$ კოორდინატული მიდამოებით, რომელთაგან ერთ-ერთი არის V . ამ ღია ქვესიმრავლეების სათანადოდ დალაგებით, ამგვარად, გვაქვს: $\gamma([0, 1]) \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_j \subseteq U, x' \in V_1 = V, z \in V_n$, ამასთანავე, სრულდება $V_j \cap V_{j+1} \neq \emptyset, j \in \{1, \dots, n-1\}$. ამ პირობებში, $f \circ \varphi_2^{-1}$ და $g \circ \varphi_2^{-1}$ ფუნქციები ერთმანერტის ემთხვევა $\varphi(V_1 \cap V_2) \subseteq \mathbb{C}$ ღია ქვესიმრავლეზე და, მაშასადამე, კარლემანის თეორემის თანახმად, ისინი მთელს თავიანთ განსაზღვრის არეზე ემთხვევა ერთმანეტს:

$$f|_{V_2} \circ \varphi_2^{-1} = g|_{V_2} \circ \varphi_2^{-1},$$

და, შესაბამისად,

$$f|_{V_2} = g|_{V_2}.$$

ამ პროცესის ანალოგიურად გაგრძელებით საბოლოოდ დავასკვნით, რომ

$$f|_{V_n} = g|_{V_n},$$

რაც, კერძოდ, ნიშნავს, რომ $f(z) = g(z)$ და, ამრიგად,

$$f = g \in \Gamma(U, \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta})$$

ერთი და იგივე კვეთაა; შესაბამისად, ვიღებთ წინააღმდეგობას. აქედან გამომდინარე, ყოველ $x' \in U$ წერტილში გვაქვს $f_{x'} \neq g_{x'}$ და შემდეგი ღია ქვესიმრავლეები:

$$(x', f_{x'})_{x' \in U} \subseteq \left(\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta} \right)^{\text{ét}}, \quad (x', g_{x'})_{x' \in U} \subseteq \left(\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta} \right)^{\text{ét}}$$

წარმოადგენენ $(x, f_x) \neq (x, g_x) \in \left(\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta} \right)^{\text{ét}}$ წერტილების განმაცალკეველ მიდამოებს:

$$(x, f_x) \in (x', f_{x'})_{x' \in U}, (x, g_x) \in (x', g_{x'})_{x' \in U}, \quad (x', f_{x'})_{x' \in U} \cap (x', g_{x'})_{x' \in U} = \emptyset.$$

□

რადგანაც კანონიკური

$$p : \left(\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta} \right)^{\text{ét}} \longrightarrow X, \quad \left((x, f_x) \in \mathcal{P}_{X, x}^{\alpha, \beta} \right) \longmapsto x$$

პროექციის ასახვა ლოკალური ჰომეომორფიზმია, $\left(\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta} \right)^{\text{ét}}$ ტოპოლოგიურ სივრცეზე

მოიძებნება კომპლექსური მრავალსახეობის ერთადერთი სტრუქტურა, რომლის მიმართაც p ასახვა ჰოლომორფულია. $(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ იყოს ამ სტრუქტურით აღჭურვილი; გამომდინარე იქიდან, რომ p ჰოლომორფული ასახვაა, ის ინარჩუნებს თავის გასწვრივ უკან გადმოტანისას დიფერენციალური ფორმის ტიპს და, შესაბამისად:

$$\alpha, \beta \in \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{0,1}) \Rightarrow p^*\alpha, p^*\beta \in \Gamma\left((\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}, \mathcal{A}_{(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}}^{0,1}\right).$$

დებულება 4.1.3. კანონიკური

$$\varphi : (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x, [(U, f)]) \longmapsto f(x)$$

ფუნქცია ფსევდოანალიზურია $p^*\alpha, p^*\beta$ -ის მიმართ, ანუ, $\varphi \in \Gamma\left((\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}, \mathcal{P}_{(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}}^{p^*\alpha, p^*\beta}\right)$.

დამტკიცება. $(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ სივრცის ტოპოლოგიის ბაზისის ნებისმიერი $B_f := (x, f)_{x \in U}, f \in \Gamma(U, \mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})$ ელემენტისთვის სამართლიანია:

$$\varphi|_{B_f} = f \circ p|_{B_f} = f \circ p \circ i_{B_f},$$

სადაც $i_{B_f} : B_f \rightarrow (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ ბუნებრივი ჩადგმაა. p -ის ჰოლომორფულობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\varphi|_{B_f}) &= \bar{\partial}(f \circ p|_{B_f}) = \bar{\partial}(p|_{B_f}^* f) = p|_{B_f}^* \bar{\partial}(f) = p|_{B_f}^* (f \cdot \alpha|_U + \bar{f} \cdot \beta|_U) \\ &= p|_{B_f}^* (f) \cdot p|_{B_f}^* (\alpha|_U) + p|_{B_f}^* (\bar{f}) \cdot p|_{B_f}^* (\beta|_U) = \varphi|_{B_f} \cdot p|_{B_f}^* (i_U^* \alpha) \\ &\quad + \overline{\varphi|_{B_f}} \cdot p|_{B_f}^* (i_U^* \beta) = \varphi|_{B_f} \cdot i_{B_f}^* ((p^* \alpha)|_{p^{-1}(U)}) + \overline{\varphi|_{B_f}} \cdot i_{B_f}^* ((p^* \beta)|_{p^{-1}(U)}) \\ &= \varphi|_{B_f} \cdot (p^* \alpha)|_{B_f} + \overline{\varphi|_{B_f}} \cdot (p^* \beta)|_{B_f} = (\varphi \cdot (p^* \alpha) + \bar{\varphi} \cdot (p^* \beta))|_{B_f}, \end{aligned}$$

მაშასადამე, იმის გათვალისწინებით, რომ $\bar{\partial}$ კომუტირებს შეზღუდვებთან, სამართლიანია ტოლობა:

$$(\bar{\partial}\varphi)|_{B_f} = (\varphi \cdot (p^* \alpha) + \bar{\varphi} \cdot (p^* \beta))|_{B_f}$$

ტოპოლოგიის ბაზისის ყოველი B_f წევრისთვის. გამომდინარე იქიდან, რომ $(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ სივრცე იფარება ასეთი ღია ქვესიმრავლეებით, ვასკვნით რომ გვაქვს გლობალური ტოლობა:

$$\bar{\partial}\varphi = \varphi \cdot (p^* \alpha) + \bar{\varphi} \cdot (p^* \beta),$$

რაც ნიშნავს, რომ $\varphi \in \Gamma\left((\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}, \mathcal{P}_{(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}}^{p^*\alpha, p^*\beta}\right)$. □

$\mathcal{P}_X^{\alpha,0}$ კონა ლოკალურად თავისუფალი მოდულთა კონაა, რანგით 1, ანუ, ის შებრუ-

ნებადია. მომდევნო ნაწილში სივრცის წერტილებს, ამ პარაგრაფის წინამდებარე ნაწილისგან განსხვავებით, აღვნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით.

თეორემა 4.1.1. $\mathcal{P}_X^{\alpha,0}$ კონა შებრუნებადია.

დამტკიცება. ყოველი $P \in X$ წერტილისათვის შევარჩიოთ მისი შემცველი $P \in U \subseteq X$ კოორდინატული მიდამო, $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ კოორდინატულ ფუნქციასთან ერთად. განვიხილოთ მისი მეშვეობით განსაზღვრული $\Delta_P := z^{-1}(B_{z(P)}) \subseteq U$ დისკი (z^{-1} -ით აღნიშნულია ბიექციური $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ ასახვის შებრუნებული ასახვა და არა $\frac{1}{z}$), სადაც $B_{z(P)} \subseteq z(U) \subseteq \mathbb{C}$ არის დისკი სიბრტყეზე ცენტრით $z(P)$ წერტილში, რომლის რადიუსიც საკმარისად მცირეა იმისათვის, რომ $B_{z(P)} \subseteq z(U)$; განვიხილოთ ასევე ამ დისკზე განსაზღვრული

$$f_{\Delta_P} : \Delta_P \rightarrow \mathbb{C}, \quad Q \mapsto f_{\Delta_P}(Q) := \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_P} \frac{1}{z - z(Q)} dz \wedge \alpha \right);$$

ფუნქცია. $a : U \rightarrow \mathbb{C}$ -ით აღვნიშნოთ α ფორმის შესაბამისი ფუნქცია $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ კოორდინატული სისტემის მიმართ, ე.ი., ისეთი, რომ: $\alpha = a d\bar{z}$. $\exp$ -ის ჰოლომორფულობის გათვალისწინებით, სამართლიანია ტოლობა:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\Delta_P}}{\partial \bar{z}} &= \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_P} \frac{a}{z - z(Q)} dz \wedge d\bar{z} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_P} \frac{a}{z - z(Q)} dz \wedge d\bar{z} \right) = \\ &= a f_{\Delta_P}, \end{aligned}$$

და, მაშასადამე,

$$\bar{\partial} f_{\Delta_P} = f_{\Delta_P} \cdot \alpha|_{\Delta_P},$$

რაც ნიშნავს, რომ $f_{\Delta_P} \in \mathcal{P}_X^{\alpha,0}(\Delta_P)$. ამ ფუნქციის მეშვეობით განვსაზღვროთ $\mathcal{O}_X|_{\Delta_P}$ -მოდულთა ჰომომორფიზმი შემდეგნაირად:

$$\mathcal{O}_X|_{\Delta_P} \rightarrow \mathcal{P}_X^{\alpha,0}|_{\Delta_P}, \quad 1 \mapsto f_{\Delta_P},$$

ანუ, ჰომომორფიზმი, რომელიც Δ_P -ის ღია ქვესიმრავლეებზე განსაზღვრულ კვეთებზე მოქმედებს f_{Δ_P} -ის სათანადო შეზღუდვაზე გამრავლებით; ის კორექტულად არის განსაზღვრული, ანუ, მისით $\mathcal{O}_X|_{\Delta_P}$ -ის კვეთებს მართლაც $\mathcal{P}_X^{\alpha,0}|_{\Delta_P}$ -ის კვეთები ესაბამება, ვინაიდან $h \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X|_{\Delta_P})$ კვეთისათვის გვაქვს ტოლობა:

$$\bar{\partial}(f_{\Delta_P}|_V h) = h \bar{\partial}(f_{\Delta_P}|_V) = h \bar{\partial}(f_{\Delta_P})|_V = f_{\Delta_P}|_V h \alpha|_V,$$

მაშასადამე, $f_{\Delta_P}|_V h \in \Gamma(V, \mathcal{P}_X^{\alpha,0}|_{\Delta_P})$. ამ კონათა ჰომომორფიზმს გააჩნია შებრუნებული ჰომომორფიზმი, რომელიც მოიცემა კვეთების გამრავლებით შემდეგი ფუნქციის:

$$\Delta_P \rightarrow \mathbb{C}, \quad Q \mapsto \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_P} \frac{1}{z(Q) - z} dz \wedge \alpha \right),$$

სათანადო შეზღუდვაზე, ე.ი., $\mathcal{O}_X|_{\Delta_P} \cong \mathcal{P}_X^{\alpha,0}|_{\Delta_P}$. გამომდინარე იქიდან, რომ $X = \bigcup_{P \in X} \Delta_P$,
 ვასკვნით, რომ $\mathcal{O}_X$ -მოდულთა კონა $\mathcal{P}_X^{\alpha,0}$ შებრუნებადია. $\square$

4.2 წირის გასწვრივ გაგრძელება

ამ პარაგრაფში მოცემულია ფსევდოანალიზურ ფუნქციების ყლორტების წირის გასწვრივ ფსევდოანალიზური გარძელების ინტერპრეტაციის ხერხი სათანადო კონის ეტალური სივრცის მეშვეობით.

განსაზღვრება 4.2.1. ვიტყვი, რომ $\tau \in \mathcal{P}_{X,y}^{\alpha,\beta}$ ელემენტი მიიღება $\sigma \in \mathcal{P}_{X,x}^{\alpha,\beta}$ ელემენტისგან $\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ წირის გასწვრივ ფსევდოანალიზური გაგრძელებით, თუ არსებობენ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ წერტილები, ბმული ღია

$$U_j \subseteq X, \quad \gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

სიმრავლეები და $f_j \in \mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}(U_j)$ კვეთები მათზე ისეთი, რომ $f_{1,x} = \sigma, f_{n,y} = \tau$ და ასევე $f_j|_{V_j} = f_{j+1}|_{V_j}$ წერტილის $\gamma(t_j)$ რაიმე ღია $\gamma(t_j) \in V_j, j \in \{1, \dots, n-1\}$ მიდამოსათვის.

ფსევდოანალიზური გაგრძელება წირის გასწვრივ ინარჩუნებს $\mathbb{R}$ -წრფივ კომბინაციებს.

დებულება 4.2.1. $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ წირისათვის და $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{P}_{X,\gamma(0)}^{\alpha,\beta}$ ელემენტებისათვის და მათი ამ წირის გასწვრივ ფსევდოანალიზური გაგრძელებით მიღებული $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{P}_{X,\gamma(1)}^{\alpha,\beta}$ ელემენტებისათვის მათი ნებისმიერი $a\tau_1 + b\tau_2 \in \mathcal{P}_{X,\gamma(1)}^{\alpha,\beta}, a, b \in \mathbb{R}$, წრფივი კომბინაცია ნამდვილი კოეფიციენტებით მიიღება $a\sigma_1 + b\sigma_2 \in \mathcal{P}_{X,\gamma(0)}^{\alpha,\beta}$ -ის ფსევდოანალიზური გაგრძელებით γ -ის გასწვრივ.

დამტკიცება. შესაძლებელია დავუშვათ, რომ ორივე ყლორტის გაგრძელება იწარმოება ერთი და იმავე წერტილებისა და ბმული ღია სიმრავლეების მეშვეობით, რადგანაც ყოველთვის შესაძლებელია გადასვლა ორი ასეთი ღია ქვესიმრავლეების ერთობლიობის საერთო გაწვრილებაზე. დავუშვათ, გვაქვს

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1, \quad U_j \subseteq X, \quad \gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

როგორც ზემოთ, სათანადო $f_{1j}, f_{2j} \in \mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}(U_j)$ კვეთებით ყოველ $U_j \subseteq X, j \in \{1, \dots, n\}$ ქვესიმრავლეზე, რომლებითაც უკავშირდება ერთმანეთს, შესაბამისად, σ_1 ელემენტი τ_1 -ს და σ_2 ელემენტი τ_2 -ს. ამ შემთხვევაში ყოველ U_j -ზე შეგვიძლია განვიხილოთ $a f_{1j} + b f_{2j} \in \mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}(U_j)$ წრფივი კომბინაცია, რომელიც, გამომდინარე იქიდან, რომ კანონიკური ასახვა:

$$\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}(U) \longrightarrow \mathcal{P}_{X,x}^{\alpha,\beta}, \quad f \longmapsto f_x$$

ნებისმიერი $U \subseteq X$ და $x \in U$ -ისათვის $\mathbb{R}$ -წრფივი ასახვაა, აკმაყოფილებს

$$(a f_{11} + b f_{21})_{\gamma(0)} = a f_{11,\gamma(0)} + b f_{21,\gamma(0)} = a \sigma_1 + b \sigma_2,$$

და

$$(af_{1n} + bf_{2n})_{\gamma(1)} = af_{1n,\gamma(1)} + bf_{2n,\gamma(1)} = a\tau_1 + b\tau_2.$$

მაშასადამე, $af_{1j} + bf_{2j} \in \mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}(U_j)$ კვეთების ერთობლიობით $a\tau_1 + b\tau_2 \in \mathcal{P}_{X,\gamma(1)}^{\alpha,\beta}$ ელემენტი მიიღება $a\sigma_1 + b\sigma_2 \in \mathcal{P}_{X,\gamma(0)}^{\alpha,\beta}$ ელემენტისგან γ წირის გასწვრივ ფსევდოანალიზური გაგრძელებით. $\square$

მომდევნო დებულება ამყარებს კავშირს წირის გასწვრივ ფსევდოანალიზურ გაგრძელებასა და ამ წირის კანონიკური პროექციის მეშვეობით ეტალურ სივრცეში აწევას შორის.

თეორემა 4.2.1. $\tau \in \mathcal{P}_{X,y}^{\alpha,\beta}$ ელემენტი მიიღება $\sigma \in \mathcal{P}_{X,x}^{\alpha,\beta}$ ელემენტისგან ფსევდოანალიზური გაგრძელებით

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow X, \quad \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

წირის გასწვრივ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს γ -ს აწევა $p : \left(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}\right)^{\text{ét}} \rightarrow X$ კანონიკური პროექციის მიმართ:

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow \left(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}\right)^{\text{ét}},$$

ისეთი, რომ $\tilde{\gamma}(0) = \sigma$ და $\tilde{\gamma}(1) = \tau$.

დამტკიცება. განვიხილოთ

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1, \quad \gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j \subseteq X, j \in \{1, \dots, n\}, \quad f_j \in \mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}(U_j)$$

მონაცემები σ -ის ფსევდოანალიზური გაგრძელებისათვის γ -ს გასწვრივ.

$$(z, f_{j,z})_{z \in U_j} \subseteq \left(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}\right)^{\text{ét}}, \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

ღია სიმრავლეები აისახებიან p -ის სათანადო შეზღუდვით ჰომეომორფულად $U_j \subseteq X$ ქვესიმრავლეებზე, რაც იძლევა შესაძლებლობას განისაზღვროს წირები ეტალურ სივრცეში შემდეგი კომპოზიციით:

$$\tilde{\gamma}_j := \left(p|_{(z, f_{j,z})_{z \in U_j}}\right)^{-1} \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U_j)} : \gamma^{-1}(U_j) \longrightarrow \left(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}\right)^{\text{ét}}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

გამომდინარე იქიდან, რომ f_j და f_{j+1} ერთმანეთს ემთხვევა $\gamma(t_j) \in U_j \cap U_{j+1}$ წერტილის რაიმე ღია მიდამოზე, კარლემანის თეორემის თანახმად, ისინი ემთხვევა ერთმანეთს მთელს $U_j \cap U_{j+1}$ -ზე. შესაბამისად, ასე განსაზღვრული ორი აწევა

$$\gamma^{-1}(U_j) \cap \gamma^{-1}(U_{j+1}) = \gamma^{-1}(U_j \cap U_{j+1})$$

თანაკვეთაზე ერთმანეთს ემთხვევა:

$$\left(p|_{(x,f_j,z)_{z \in U_j \cap U_{j+1}}}\right)^{-1} \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U_j \cap U_{j+1})} = \left(p|_{(z,f_{j+1},z)_{z \in U_j \cap U_{j+1}}}\right)^{-1} \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U_j \cap U_{j+1})},$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$\tilde{\gamma}_j|_{\gamma^{-1}(U_j \cap U_{j+1})} = \tilde{\gamma}_{j+1}|_{\gamma^{-1}(U_j \cap U_{j+1})}.$$

გამომდინარე იქიდან, რომ $[0, 1] = \bigcup_{j=1}^n \gamma^{-1}(U_j)$, წირები $\tilde{\gamma}_j : \gamma^{-1}(U_j) \rightarrow (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ ცალსახად განსაზღვრავენ უწყვეტ წირს მთელს $[0, 1]$ -ზე:

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}, \quad \tilde{\gamma}|_{\gamma^{-1}(U_j)} = \tilde{\gamma}_j, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\tilde{\gamma} = p \circ \gamma,$$

ანუ, არის p -თი γ წირის აწევა და სრულდება

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = \left(p|_{(z,f_1,z)_{z \in U_1}}\right)^{-1}(\gamma(0)) = \left(p|_{(z,f_1,z)_{z \in U_1}}\right)^{-1}(x) = f_{1,x} = \sigma$$

და

$$\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}_n(1) = \left(p|_{(z,f_n,z)_{z \in U_n}}\right)^{-1}(\gamma(1)) = \left(p|_{(z,f_n,z)_{z \in U_n}}\right)^{-1}(y) = f_{n,y} = \tau.$$

შებრუნებული დებულების საჩვენებლად, განვიხილოთ γ წირის თეორემის პირობაში მოყვანილი თვისებების მქონე

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$$

აწევა. ამ წირის უწყვეტობიდან და $[0, 1]$ ინტერვალის კომპაქტურობიდან გამომდინარეობს $\tilde{\gamma}([0, 1]) \subseteq (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ ანასახის კომპაქტურობაც. შესაბამისად, შეგვიძლია ეს ანასახი დავფაროთ სასრული რაოდენობის ღია ქვესიმრავლეებით, რომლებიც მიეკუთვნებიან $(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ სივრცის ტოპოლოგიის ბაზას:

$$\tilde{\gamma}([0, 1]) \subseteq \bigcup_{j=1}^n (z, f_{j,z})_{z \in U_j}, \quad (z, f_{j,z})_{z \in U_j} \subseteq (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}.$$

აქ $(z, f_{j,z})_{z \in U_j}$ ბაზის ელემენტები მიღებულია $f_j \in \mathcal{P}_X^{\alpha,\beta}(U_j)$ კვეთებისგან. შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $U_j \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლეები დალაგებულია γ წირის გასწვრივ. მაშა-

სადამე, გვაქვს

$$\gamma([0, 1]) \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_j,$$

დაფარვა და, უწყვეტობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია შევარჩიოთ $U_j \cap U_{j+1}$ თანაკვეთების წერტილები წირის გასწვრივ, ანუ, $\gamma(t_j) \in U_j \cap U_{j+1}$, ისე, რომ

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

ყოველივე ეს კი სწორედ განსაზღვრავს σ ელემენტის ფსევდოანალიზურ გაგრძელებას γ წირის გასწვრივ τ ელემენტში, რადგანაც:

$$f_{1,x} = \tilde{\gamma}(0) = \sigma, \quad f_{n,y} = \tilde{\gamma}(1) = \tau, \quad f_{j,\gamma(t_j)} = f_{j+1,\gamma(t_j)}, j \in \{1, \dots, n-1\}.$$

□

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი:

შედეგი 4.2.1. $\tau \in \mathcal{P}_{X,y}^{\alpha,\beta}$ ელემენტი მიიღება $\sigma \in \mathcal{P}_{X,x}^{\alpha,\beta}$ ელემენტისაგან წირის გასწვრივ ფსევდოანალიზური გაგრძელებით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც τ და σ ეკუთვნიან $(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ სივრცის ერთსა და იმავე ბმულ კომპონენტს.

დამტკიცება. თუ $\tau \in \mathcal{P}_{X,y}^{\alpha,\beta}$ ელემენტი მიიღება $\sigma \in \mathcal{P}_{X,x}^{\alpha,\beta}$ ელემენტისაგან წირის გასწვრივ ფსევდოანალიზური გაგრძელებით, მაშინ σ და τ ელემენტები, თეორემა 4.2.1.-ის თანახმად, შეიძლება შეერთებული იქნან უწყვეტი წირით და, მაშასადამე, ისინი ეკუთვნიან $(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ სივრცის ერთსა და იმავე ბმულ კომპონენტს.

პირიქით, თუ კი $\sigma, \tau \in (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ ეკუთვნიან ერთსა და იმავე ბმულობის კომპონენტს, მაშინ, იმის ძალით, რომ $(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ მრავალსახეობაა და, მაშასადამე, ბმული კომპონენტები წრფივად ბმულიც (path connected) არიან, ეს ორი ელემენტი შეიძლება შეერთებულ იქნას უწყვეტი წირით:

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}, \quad \gamma(0) = \sigma, \quad \gamma(1) = \tau.$$

თეორემა 4.2.1.-იდან გამომდინარე, τ მიიღება σ -ისგან ფსევდოანალიზური გაგრძელებით $p \circ \gamma$ წირის გასწვრივ. □

განვიხილოთ $x \in U \subseteq X$ წერტილი და $f \in \Gamma(U, \mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})$ კვეთა. C_{f_x} -ით აღვნიშნოთ $(\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ სივრცის ის ბმული კომპონენტი, რომელიც შეიცავს $(x, f_x) \in (\mathcal{P}_X^{\alpha,\beta})^{\text{ét}}$ ელემენტს; $p(C_{f_x})$ ანასახი, შედეგი 4.2.1-იდან გამომდინარე, შედგება X -ის ყველა იმ წერტილისაგან, რომელშიც შესაძლებელია f_x -ის ფსევდოანალიზური გაგრძელება წირის გასწვრივ.

ყოველი $f \in \Gamma(U, \mathcal{P}_X^{\alpha, \beta})$ კვეთა ბუნებრივად განსაზღვრავს ფუნქციას $(x, f_x)_{x \in U} \subseteq (\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta})^{\text{ét}}$ ღია ქვესიმრავლეზე, რომელსაც აღვნიშნავთ $\hat{f}$ -ით და რომელიც მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\hat{f} : (x, f_x)_{x \in U} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x, f_x) \longmapsto f(x).$$

ეს ფუნქცია წარმოადგენს f -ის $p : (\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta})^{\text{ét}} \rightarrow X$ კანონიკური ჰოლომორფული პროექციის გასწვრივ უკან გადმოტანის შეზღუდვას $(x, f_x)_{x \in U}$ -ზე. შესაბამისად, ის ფსევდოანალიზურია $p^* \alpha, p^* \beta$ -ის მიმართ. $\hat{f}$ შეიძლება ფსევდოანალიზურად გაგრძელდეს მთელს C_{f_x} -ზე $\varphi : (\mathcal{P}_X^{\alpha, \beta})^{\text{ét}} \rightarrow \mathbb{C}$ კანონიკური ფუნქციის მასზე შეზღუდვით. ამგვარად, C_{f_x} შეიძლება განხილულ იქნას f_x ყლორტით განსაზღვრული ფუნქციის ბუნებრივ განსაზღვრის არედ.

5 დასკვნა

ლ. ბერსის მიერ შექმნილ ფსევდონალიზური ფუნქციების თეორიაში კომპლექსური სიბრტყის ყოველ ღია ქვესიმრავლესთან ასოცირებული არის ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფსევდონალიზური ფუნქციების სივრცეები. ამ სივრცეთაგან ზოგიერთები ერთმანეთთან დაკავშირებადი არის ფსევდოგაწარმოების ოპერატორით ან ასეთების კომპოზიციით. თუ კი გავირბენთ სიბრტყის ყველა ღია ქვესიმრავლეს, ამგვარად მივიღებთ მეტად გადაუხედავ სიმრავლეს შემდგარს ყველა ფსევდონალიზური ფუნქციების სივრცეებისაგან, ამასთანავე გასათვალისწინებელია, თუ ამ სივრცეთაგან რომლები არიან დაკავშირებადი ერთმანეთთან ფსევდოგაწარმოებებით. სწორედ ამ ერთობლიობის ბუნებრივი სტრუქტურით აღჭურვას ეძღვნება პირველი ნაწილი. ამისთვის გამოიყენება 2-წინარეკონებისა და წინარედასტების თეორია, რომელიც, როგორც ცნობილია, დიდი მნიშვნელობის მქონე აღმოჩნდა არამხოლოდ ალგებრულ, არამედ კომპლექსურ გეომეტრიაშიც. ეს მიიღწევა შემდეგნაირად: თავდაპირველად შემოღებულ იქნა წარმომქმნელი წყვილების წინარეკონა განსაზღვრული კომპლექსურ სიბრტყეზე, რომელიც ბუნებრივად აკმაყოფილებს სერის აქსიომებს და, მაშასადამე, კონაა; შემდგომ, წარმომქმნელი წყვილისათვის მისი მახასიათებელი კოეფიციენტების შესაბამება მოცემულ იქნა წინარეკონათა მორფიზმის სახით; შემდეგ, კომპლექსური სიბრტყის ყოველი ღია ქვესიმრავლისათვის განისაზღვრა კატეგორია, რომელსაც ობიექტებად აქვს ამ ღია სიმრავლეზე განსაზღვრული ფსევდონალიზური ფუნქციების სივრცეები, ხოლო მორფიზმები კი მასში მოიცემა ასახვებით, რომლებიც ლოკალურად ფსევდოგაწარმოებათა კომპოზიციის სახით არის წარმოდგენადი. ნაჩვენები იქნა, თუ როგორ შეიძლება ფსევდონალიზურ ფუნქციათა თეორიის ზოგიერთი კლასიკური ცნება და შედეგი ინტერპრეტირდეს ამ კატეგორიაში (კერძოდ, დებულებები 2.2.3, 2.2.4); ნაჩვენები იქნა, რომ ყოველი ღია ქვესიმრავლისათვის სათანადო კატეგორიის შესაბამება გავრცელებადია ბუნებრივად (მკაცრ) 2-წინარეკონამდე კომპლექსურ სიბრტყეზე და, ასევე, რომ ამგვარად მიღებული 2-წინარეკონა, ან, უფრო ზუსტად, მასთან ასოცირებული ფიბრირებული კატეგორია, წინარედასტაა (იხ. თეორემა 2.3.1). განხილულია შესაბამისი ფიბრირებული კატეგორია და ნაჩვენებია, თუ როგორ შეიძლება გლობალური წარმომქმნელი წყვილისგან ინდუცირებული იქნას მისი კვეთა. მომდევნო ქვეთავში კონათა კოჰომოლოგიის მეშვეობით ნაჩვენებია, თუ როგორ არის ფსევდოგაწარმოების ოპერატორის სურიექციულობა დამოკიდებული იმ ფუნქციების, რომლებზეც ის მოქმედებს, განსაზღვრის არის ტოპოლოგიაზე (იხ. თეორემა 2.4.1). მოყვანილი კვლევა შეიძლება რამდენიმე მიმართულებით გაგრძელდეს, მაგალითად: მოყვანილი ფსევდონალიზური ფუნქციების სივრცეების წინარედასტა, უფრო ზუსტად, ამ ფიბრირებული კატეგორიის ტოტალური კატეგორია, საბაზო კატეგორიის სიტუსის სტრუქტურის მეშვეობით ბუნებრივად შეიძლება აღჭურვილ იქნას სიტუსის სტრუქტურით და განხილულ იქნას ამ სიტუსზე განსაზღვრული კონები, რომელთა შესწავლაც შესაძლოა სასარგებლო აღმოჩნდეს თვით ამ სიტუსისა და მისი ქვემდებარე კატეგორიის გამოკვლევისათვის. შესაძლოა განხილვა იმ საკითხისა, თუ არის შესაძლებელი პირველი გვარის ფსევდონალიზურ ფუნქციისათვის სათანადო მეორე გვარის ფსევდონალიზური ფუნქციის შესაბა-

მეზამ ინდუციროს (წინარე)კონა ტოტალურ კატეგორიაზე ან სათანადო წინარედასტათა მორფიზმი.

მესამე თავში განხილულია ფსევდოანალიზურობის (განზოგადებული ანალიზურობის) კერძო შემთხვევის განზოგადება კომპლექსურ მრავალსახეობაზე განსაზღვრულ დიფერენციალურ ფორმებზე. შემოტანილი იქნა მოცემული რიგის ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმების კონები, როგორც გარკვეული კონათა მორფიზმების ბირთვები; ამ მორფიზმებისათვის, შესაბამისად, სათანადო ოპერატორებისათვის ნაჩვენები იქნა პ. დოლბოს ლემის ანალოგის სამართლიანობა, ასევე ნაჩვენები იქნა, რომ ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონისთვის სამართლიანია დოლბოს თეორემის ანალოგი (იხ. თეორემა თეორემა 3.2.1). განხილული იქნა ასევე ფსევდოანალიზური დიფერენციალური ფორმების კონები, რომელი ფორმებიც იღებენ მნიშვნელობებს ჰოლომორფულ ვექტორულ ფიბრაციაში და მოიყვანება ასეთი კონებისთვისაც ანალოგიური შედეგი.

მეოთხე თავში განიხილება რიმანის ზედაპირზე ფსევდოანალიზური ფუნქციის (უფრო ზუსტად, ფსევდოანალიზური ფუნქციის ყლორტის) წირის გასწვრივ ფსევდოანალიზური გაგრძელების საკითხი; შემოღებული არის სათანადო კონა და წირის გასწვრივ გაგრძელება მოყვანილი არის კავშირში ამ წირის აწევასთან კონის ეტალურ სივრცეში, იმის ანალოგიურად, როგორც ეს ხდება კლასიკური ჰოლომორფული ფუნქციების (ყლორტთა) წირის გასწვრივ ანალიზური გაგრძელების შემთხვევაში.

ბიბლიოგრაფია

- [1] G. Akhalaia, G. Giorgadze, V. Jikia, N. Kaldani, G. Makatsaria, N. Manjavidze, *Elliptic systems on Riemann Surfaces*. Lecture notes of TICMI, vol.13, pp. 1–147, Tbilisi University Press, Tbilisi, 2012.
- [2] M. Artin, *Grothendieck topologies: notes on a seminar*. Harvard University, Dept. of Mathematics, 1962.
- [3] L. Bers, *Theory of pseudo-analytic functions*. Institute for Mathematics and Mechanics, New York University, New York, 1953.
- [4] L. Bers, *An Outline of The Theory of Pseudoanalytic functions*. Bulletin of the American Mathematical Society 62, 1956.
- [5] M. Brandenburg, *Einführung in die Kategorientheorie*. Springer Spektrum, 2017.
- [6] P. Dolbeault, *Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 236, 1953.
- [7] O. Forster, B. Gilligan, *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. K, 1991.
- [8] G. Giorgadze, *On monodromy of generalized analytic functions*. Journal of Mathematical Sciences 132 (6), 716-738, 2006.
- [9] G. Giorgadze, I. Sikharulidze, *The Structure of a Prestack over the Complex Plane on the Set of All Spaces of Pseudoanalytic Functions*. Mathematics. 2026; 14(5):807. <https://doi.org/10.3390/math14050807>
- [10] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris, 1973.
- [11] H. Grauert, R. Remmert, *Komplexe Räume*. Mathematische Annalen. 136, 1958.
- [12] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. A Wiley-Interscience Publication, 1978.
- [13] A. Grothendieck, *Revêtements Étales et Groupe Fondamental - Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie*. 1960/61 (SGA 1) , LNM 224 Springer (1971).
- [14] R.C. Gunning, *Lectures on Riemann Surfaces*. Princeton University Press, 1966.
- [15] D. Huybrechts, *Complex Geometry, An Introduction*. Springer-Verlag New York, 1991.
- [16] B. Iversen, *Cohomology of sheaves*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [17] M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and sheaves*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

- [18] W. Koppelman, *Boundary Value Problems For Pseudoanalytic Functions*. Bull. Amer. Math. Soc. 1961.
- [19] K. Lamotke, *Riemannsche Flächen*. Springer, 2009.
- [20] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Universitext, Springer-Verlag, 1992.
- [21] I. Moerdijk, *Introduction to the Language of Stacks and Gerbes*, arXiv:math/0212266, 2002.
- [22] Y. L. Rodin, *Generalized Analytic Functions on Riemann Surfaces*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [23] I. Sikharulidze, *On the Beltrami equation with a singular point*. Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics Vol.70, 2020.
- [24] I. Sikharulidze, *Sheaves of pseudoholomorphic functions and differential 1-forms*. Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics Vol.71, 2021.
- [25] I. Sikharulidze, *Sheaves of pseudoanalytic functions and continuation along curves*. Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol.74, 2024.
- [26] I. Sikharulidze, *Dolbeaut's theorem for sheaves of pseudoanalytic differential forms*. Georgian Mathematical journal, 2025.
- [27] I. Sikharulidze, *Prestack of Spaces of Pseudoanalytic Functions*. REPORTS OF QUALITDE, Volume 4, 2025.
- [28] I. N. Vekua, *Generalized analytic functions*. Nauka, 1988.
- [29] A. Vistoli, *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, arXiv:math/0412512, 2004.