

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტი

ფინანსური მოდელების რისკების შეფასება

ავტორი: ვალერიანე ჯობაძე

ეკონომიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარმოდგენილი დისერტაცია

მეცნიერ-ხელმძღვანელები:
პროფესორი იური ანანიაშვილი
პროფესორი ომარ ფურთუხია

თბილისი, 2025 წელი

რეზიუმე

წინამდებარე დისერტაციაში შესწავლილია ფინანსური მოდელების რისკების შეფასების მეთოდოლოგია ფინანსური რისკის გაზომვის, ეგზოტიკური დერივატივების ფასდადებისა და პორტფელის ოპტიმიზაციის კონტექსტში. ფინანსური მოდელი წინამდებარე ნაშრომში განსაზღვრულია - როგორც ფინანსური პოზიციის შემოსავლიანობის უცნობი ალბათური განაწილების კანონი. დისერტაციაში წარმოდგენილია საბაზრო რისკის საზომების ზოგადი კლასი, რომელიც ითვალისწინებს ფინანსურის მოდელის რისკს. გარდა ამისა, განსაზღვრულია მოდელის რისკის შეფასების ინოვაციური საზომები. ყველა ეს ახლად წარმოდგენილი რისკის საზომი მოითხოვს მოდელის სიმრავლეზე ალბათური განაწილების კანონის არსებობას. აღნიშნული განაწილების კანონი, ცხადია, უცნობია, თუმცა მისი ემპირიულად შეფასება შესაძლებელია ბაიესური რიცხვითი მეთოდებით. ნაშრომში ასევე წარმოდგენილია თეორიულად დამუშავებული მეთოდოლოგიის პრაქტიკული დემონსტრაცია საბაზრო რისკების მართვის მაგალითებში, კუდის რისკის მოდელირების ქეისში, სხვადასხვა ეგზოტიკური დერივატივების ფასდადების ამოცანებში და პორტფელის ოპტიმიზაციის პრობლემატიკაში. ნაჩვენებია მოდელის რისკის პრაქტიკული მნიშვნელობა და მისი მართვისა და შემცირების ეფექტური გზები.

Abstract

In this thesis, we explore model risk in the context of financial risk measurement, pricing of complex derivative positions, and portfolio optimization. We associate the model with unknown probability distribution of financial position's returns and build model set including all plausible models. We introduce a general class of market risk measures that are able to capture model risk. Furthermore, we explore opportunities to capture model risk in isolation. All these newly defined risk measures require knowledge of the probability distribution on the model set. For this purpose, we study effective Bayesian numerical approaches. Finally, based on numerous examples of market risk management, tail risk modelling, pricing path-dependent options, and portfolio optimization, we highlight the importance of model risk and demonstrate ways to mitigate it.

სარჩევი

სურათების სია	vii
ცხრილების სია	x
აბრევიატურების ჩამონათვალი	xii
შესავალი	1
1 ლიტერატურის მიმოხილვა	8
2 მოდელის რისკის შეფასების თეორიული კონცეფცია და მენეჯმენტი	13
2.1 საბაზრო რისკის საზომები	14
2.1.1 საბაზრო რისკების კლასიკური საზომები	14
2.1.2 მონეტარული რისკის საზომები	16
2.1.3 VaR და ES: შეფასების მეთოდები, უპირატესობები და ნაკლოვანებები	20
2.1.4 კონკრეტული მაგალითი: რამდენად მნიშვნელოვანია მოდელის რისკი?	25
2.2 საბაზრო რისკის განზოგადებული საზომები	26
2.2.1 საბაზრო რისკის საზომები უცნობი მოდელის შემთხვევაში	26
2.2.2 მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის საზომი	28
2.2.3 საბაზრო რისკების სუპერპოზიციური ზომები	29
2.2.4 სუპერპოზიციური რისკის ზომის რობასტული წარმოდგენა	32

2.2.5	მაგალითი: სუპერპოზიციური რისკის ზომის რობასტული წარმოდგენა, როდესაც რისკის ოჯახი არის ენტროპიული რისკის საზომი	36
2.3	მოდელის რისკების საზომები	38
2.3.1	მოდელის რისკის ზომების აქსიომატური მოთხოვნები	38
2.3.2	საბაზრო რისკის საზომის მოდელის რისკის შეფასება	40
2.3.3	მაგალითი: საბაზრო რისკების საზომის მოდელის რისკი	44
2.3.4	მოდელის რისკი დერივატივების ფასდადების თეორიაში	46
2.4	მოდელის რისკის ეფექტური მართვა	52
3	მოდელის რისკის შეფასების ეკონომეტრიკული მოდელები	61
3.1	მოდელის განაწილების შეფასება ბაიესური მიდგომით	61
3.2	მარკოვის ჯაჭვების მონტე კარლოს მოდელები	63
3.2.1	მოდელის განაწილების შეფასება, როდესაც მოდელის სიმრავლე შეიცავს მხოლოდ ერთ განაწილების კლასს	63
3.2.2	მოდელის განაწილების შეფასება, როდესაც მოდელის სიმრავლე შეიცავს მრავალ განაწილების კლასს	65
4	ქეისების ანალიზი	69
4.1	საბაზრო რისკის მოდელის რისკი	69
4.1.1	ქეისში გამოყენებული მონაცემები	69
4.1.2	მოდელის სიმრავლე	71
4.1.3	შებრუნებული ნახტომის MCMC სპეციფიკაცია	75
4.1.4	შედეგები	77
4.2	კუდის რისკის (tail risk) მოდელის რისკი	83
4.2.1	საბაზრო რისკების მართვა ექსტრემალური ღირებულების თეორიის მიხედვით	84
4.2.2	EVT, როდესაც დაკვირვებები არ არის დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული	88

4.2.3	რისკის ზომები EVT-ს მიხედვით	89
4.2.4	მოდელის რისკი EVT-სთვის	90
4.2.5	კუდის საბაზრო და მოდელის რისკის ეფექტური მართვა	96
4.3	ფასის მოდელის რისკი ზოგიერთი ეგზოტიკური დერივატი- ვისთვის	98
4.3.1	აქტივის ფასის მოდელი	98
4.3.2	ბარიერული ოფციონების ფასის მოდელის რისკი	100
4.3.3	არიტმეტიკული აზიური ოფციონების ფასის მოდელის რისკი	107
4.4	სიმულაცია: ლიკვიდური ევროპული ოფციონებით მოდელის განაწილების შეფასება	109
4.4.1	ოფციონების ფასდადება	110
4.4.2	სიმულაციური მონაცემები	112
4.4.3	DREAM RJ MCMC პარამეტრიზაცია	113
4.4.4	სიმულაციის შედეგები	113
4.5	პორტფელის ოპტიმიზაცია მოდელის რისკის გათვალისწინებით	115
4.5.1	პორტფელის ოპტიმიზაციის მათემატიკური ფორმულირება .	116
4.5.2	მოდელის სიმრავლე	118
4.5.3	ემპირიული მაგალითის ანალიზი	120
	დასკვნა	125
	დანართი A	129
	დანართი B	131
	დანართი C	144
	ლიტერატურა	148

სურათების სია

2.1	პორტფელის VaR და ES	17
2.2	მხარდაჭერის სიმრავლე (Acceptance Set) W_1 და W_2 ფინანსური პოზიცი- ბისგან შემდგარი პორტფელისთვის	18
2.3	VaR და ES განაწილება	26
2.4	საბაზრო რისკის ზომები სხვადასხვა NIG პარამეტრით	45
2.5	ფინანსური ინსტიტუტის რისკების მენეჯმენტი	58
3.1	MCMC სიმულაციის სქემატური წარმოდგენა	65
4.1	ინდექსების დღიური ლოგარითმული შემოსავლიანობა და ჰისტოგრამები	70
4.2	საბაზრო რისკის ზომების ჰისტოგრამები	79
4.3	სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები სხვადასხვა ნდობის დონით.	80
4.4	სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები სხვადასხვა ნდობის დონით	81
4.5	GEV განაწილების კუმულატიური განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე სხვადასხვა ξ პარამეტრისთვის	86
4.6	ბლოკის მაქსიმალური მეთოდი	86
4.7	პიკების მეთოდი	87
4.8	GP განაწილების კუმულატიური განაწილების ფუნქცია და სიმკვრივე სხვადასხვა ξ პარამეტრისთვის	88
4.9	საბაზრო რისკების განაწილებები	93
4.10	სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები DAX 30 საფონდო ინდექსის- თვის	95

4.11 სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები DAX 30 საფონდო ინდექსის- თვის	96
4.12 ევროპული ტიპის ბარიერული ოფციონების ფასების დამოკიდებულება მოდელის შერჩევაზე	103
4.13 ევროპული ტიპის ბარიერული ოფციონების დელტა ჰეჯირება	105
4.14 ევროპული ტიპის ბარიერული ოფციონების დელტა-გამა ჰეჯირება	106
4.15 Implied Volatility Surface ჰესტონის მოდელის მიხედვით	112
4.16 ჰესტონის მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილება და მო- დელის აპოსტერიორული ალბათობები	114
4.17 Efficient frontier სხვადასხვა მოდელის მიხედვით	123
B.1 DAX 30, S&P 500, DJIA და Nikkei 225 საფონდო ინდექსების ფასები 1970- 2018წწ	131
B.2 საფონდო ინდექსების პირობითი სტანდარტული გადახრები და სტან- დარტიზებული ლოგარითმული შემოსავლიანობა GARCH(1,1) მოდელის მიხედვით	132
B.3 GEV მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილება	133
B.4 GP მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილება	133
B.5 GEV მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული შერჩევა	134
B.6 GP მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული შერჩევა	135
B.7 GEV მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილების ავტოკორე- ლაციის ფუნქცია (SAF)	135
B.8 GP მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილების ავტოკორე- ლაციის ფუნქცია (SAF)	136
B.9 სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები S&P 500 საფონდო ინდექსის- თვის	138
B.10 სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები DJIA საფონდო ინდექსისთვის	139
B.11 სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები Nikkei 225 საფონდო ინდექს- ისთვის	140

B.12 სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები S&P 500 საფონდო ინდექსისთვის	141
B.13 სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები DJIA საფონდო ინდექსისთვის	142
B.14 სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები Nikkei 225 საფონდო ინდექსისთვის	143
C.1 mGH განაწილების λ, χ, ψ პარამეტრების შერჩევა და აპოსტერიორული ჰისტოგრამა	144
C.2 mGH განაწილების μ პარამეტრების შერჩევა და აპოსტერიორული ჰისტოგრამა	145
C.3 mGH განაწილების γ პარამეტრების შერჩევა და აპოსტერიორული ჰისტოგრამა	145
C.4 ლოგარითმული შემოსავლის სტანდარტული გადახრისა და კორელაციის აპოსტერიორული ჰისტოგრამები	146

ცხრილების სია

2.1	მოდელის სუპერპოზიციური რისკის ზომები სხვადასხვა საბაზრო რისკის ზომისთვის	46
4.1	საფონდო ინდექსების ლოგარითმული შემოსავლების აღწერითი სტატისტიკა	70
4.2	საფონდო ინდექსების ლოგარითმული შემოსავლების ისტორიული კორელაცია	71
4.3	საბაზრო რისკის ზომების აღწერითი სტატისტიკა	78
4.4	მაქსიმალური და მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის ზომები.	79
4.5	მაქსიმალური მოდელის რისკის ზომები	80
4.6	მოდელის რისკით შეწონილი რისკი და მაქსიმალური რისკის ზომები.	94
4.7	მოდელის მაქსიმალური რისკის ზომა.	96
4.8	ფასების დიაპაზონი და რისკის პარამეტრები ევროპული ბარიერული ოფციონებისთვის	103
4.9	ფასის სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები ევროპული ტიპის ბარიერული ოფციონებისთვის	107
4.10	ფასის სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები არითმეტიკული აზიური ოფციონებისთვის	108
B.1	საფონდო ინდექსების დღიური ლოგარითმული შემოსავლიანობის აღწერითი სტატისტიკა	131
B.2	GARCH(1,1) მოდელი სტიუდენტის t - განაწილებით DAX 30, S&P 500, DJIA და Nikkei 225 ლოგარითმული შემოსავლიანობისთვის	132
B.3	MCMC ალგორითმის კრებადობის შეფასება	134

B.4	საბაზრო რისკის ზომების აპოსტერიორული აღწერითი სტატისტიკა	137
C.1	mGH განაწილების პარამეტრების აპოსტერიორული სტატისტიკა	147
C.2	Gelman-Rubin ტესტი mGH პარამეტრებისთვის. PSRF სტატისტიკა და მისი 95% ნდობის ზედა საზღვარი	147

აბრევიატურების ჩამონათვალი

აბრევიატურა	განსაზღვრება
CVA	კრედიტის ღირებულების შესწორება
FX	ვალუტა
IR	საპროცენტო განაკვეთი
Equity	კაპიტალი
Value at Risk (VaR)	ღირებულება რისკის ქვეშ
Expected Shortfall (ES)	მოსალოდნელი ჩავარდნა
GARCH მოდელი	განზოგადებული ავტორეგრესიული პირობითი ჰეტეროსკედასტური მოდელი
Stochastic Volatility	შემთხვევითი ვოლატილობა
Local Volatility	ლოკალური ვოლატილობა
Calibration	მოდელის პარამეტრების შეფასება
Worst Case (WC) რისკი	მაქსიმალური რისკი
Relative Entropy	შედარებითი ენტროპია
Tail risk	კუდის რისკი
IFRS	საერთაშორისო ფინანსური ანგარიშგების სტანდარტი
Fair Value (FV)	სამართლიანი ღირებულება
USD	აშშ დოლარი
EUR	ევრო
Acceptance Set	მიღების სიმრავლე
Spectral Risk Measure (SPR)	სპექტრული რისკის საზომი
ENT	ენტროპია
bid-ask სპრედი	ყიდვა-გაყიდვის სპრედი
EMR	მოსალოდნელი მოდელის რისკი
MES	მოდელის მოსალოდნელი ჩავარდნა
MSPR	მოდელის სპექტრული რისკის საზომი

აბრევიატურა	განსაზღვრება
NIG (Normal Inverse Gaussian) განაწილება	ნორმალური შებრუნებული გაუსის განაწილება
DF	დისკონტირების ფაქტორი
MCMC	მარკოვის ჯაჭვის მონტე კარლო
RJ MCMC	შექცევადი ნახტომის მარკოვის ჯაჭვის მონტე კარლო
DAX 30	გერმანიის საფონდო ინდექსი
S&P 500	საფონდო ინდექსი
FTSE 100	საფონდო ინდექსი
S&P GSCI	სასაქონლო ინდექსი
ARCH მოდელი	ავტორეგრესიული პირობითი ჰეტერო-სკედასტური მოდელი
Maximum Likelihood	მაქსიმალური დასაჯერობა
VEC GARCH მოდელი	ვექტორული (მრავალგანზომილებიანი) განზოგადებული ავტორეგრესიული პირობითი ჰეტერო-სკედასტური მოდელი
DCC-GARCH მოდელი	დინამიური პირობითი კორელაციის (მრავალგანზომილებიანი) განზოგადებული ავტორეგრესიული პირობითი ჰეტერო-სკედასტური მოდელი
Heavy tail	მძიმე კუდი
EVT (Extreme Value Theory)	ექსტრემალური ღირებულების თეორია
i.i.d.	დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული
MDA (Maximum domain of attraction)	მაქსიმალური მიზიდულობის არე
Weibul განაწილება	ვეიბულის განაწილება
Gumbel განაწილება	გუმბელის განაწილება
Generalized Extreme Value (GEV)	განზოგადებული ექსტრემალური ღირებულების თეორია
Fréchet განაწილება	ფრეშეს განაწილება
Peaks over Threshold (POT) მეთოდი	პიკების მეთოდი
Median Shortfall (MS)	მედიანური ჩავარდნა

აბრევიატურა	განსაზღვრება
Generalized Pareto (GP) განაწილება	განზოგადებული პარეტოს განაწილება
Up-and-out Call (UOC)	შესვლის და გამოსვლის ქოლ ოფციონი
Down-and-out Put (DOP)	ჩამოსვლის და გამოსვლის ფუტ ოფციონი
Variance Gamma (VG)	ვარიაციის გამა მოდელი
NIG-OU	ნორმალური შებრუნებული გაუსის ორშტეინ-ულენბეკის სტოქასტური საათის მოდელი
NIG-CIR მოდელი	ნორმალური შებრუნებული გაუსის კოქს ინგერსოლ როსის სტოქასტური საათის მოდელი
VG-OU მოდელი	ვარიაციის გამა ორშტეინ-ულენბეკის სტოქასტური საათის მოდელი
VG-CIR მოდელი	ვარიაციის გამა კოქს ინგერსოლ როსის სტოქასტური საათის მოდელი
Fast Fourier Transform (FFT)	ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა
ITM ოფციონი	ოფციონი რომელსაც გააჩნია დადებითი შინაგანი ღირებულება
OTM ოფციონი	ოფციონი რომელსაც არ გააჩნია დადებითი შინაგანი ღირებულება
DREAM RJ MCMC	დიფერენციალური ევოლუციური მეტროპოლისის ალგორითმით განზოგადებული შექცევადი ნახტომების მარკოვის ჯაჭვის მონტე კარლო
Artificial Intelligence (AI)	ხელოვნური ინტელექტი
Deep learning	ღრმა სწავლება
mGH განაწილება	მრავალგანზომილებიანი განზოგადებული ჰიპერბოლური განაწილება
M-ES-EP	საშუალო-მოსალოდნელი ჩავარდნის ეფექტიანი საზღვარი
M-MVES-EP	საშუალო-მოდელის მოსალოდნელი ჩავარდნის ეფექტიანი საზღვარი
iBoxx EUR	საპროცენტო ინდექსი
DJIA	სასაქონლო ინდექსი
SAF	ავტოკორელაციის ფუნქციის ნიმუში
PSRF	პოტენციური მასშტაბის შემცირების ფაქტორი

შესავალი

"There are two kinds of forecasters: those who don't know, and those who don't know they don't know." John Kenneth Galbraith

"It ain't what you don't know that gets you into trouble. It's what you know for sure that just ain't so." Mark Twain

თემის აქტუალობა: რისკი ცხოვრების განუყოფელი ნაწილია, რომელიც გავლენას ახდენს ყველაფერზე. ყოველდღიური საქმიანობიდან დაწყებული რთული ბიზნეს ოპერაციებით დამთავრებული, რისკს ვაწყდებით თითოეულ ნაბიჯზე. ფინანსებში რისკების მართვა არ ისახავს მიზნად ყველა რისკის აღმოფხვრას, რადგან ეს არაპრაქტიკულია და მოგების შესაძლებლობას ახშობს. ამის ნაცვლად, რისკების ეფექტური მართვა გულისხმობს რისკების იდენტიფიცირებას, შეფასებას და პრიორიტეტს მათი გავლენის შესამცირებლად და ინფორმირებული გადაწყვეტილებების მისაღებად. მაგალითად, ჩვენ ვამცირებთ წვიმის უარყოფით შედეგებს ქოლგის ან წყალგაუმტარი ტანსაცმლის ტარებით, ხოლო მსხვილი კორპორაციები ფინანსური რისკებისგან თავს იცავენ ეკონომიკური კაპიტალის შეფასებით და ისეთი ჰეჯირების ინსტრუმენტების გამოყენებით, როგორიცაა ოფციონები და ფიუჩერსული კონტრაქტები. შესაბამისად, ფინანსური რისკების უპირველესი ამოცანაა უზრუნველყოს პოტენციური დანაკარგების გაგება და მართვა, რაც იძლევა სტრატეგიული დაგეგმვის საშუალებას და უზრუნველყოფს სტაბილურობასა და გრძელვადიან წარმატებას.

კომპლექსური ფინანსური პორტფელი მოითხოვს რისკების გაზომვისა და შეფასებისადმი ლოგიკურად თანმიმდევრულ მიდგომას. ცხადია, უნდა არსებობდეს უნივერსალური ენა, რომელიც გასაგები იქნება მსოფლიოს ნებისმიერი ინვესტორის, მენეჯერისა და ფინანსური სისტემის მარეგულირებელისთვის. აღნიშნულმა საჭიროებამ საფუძველი ჩაუყარა ფინანსური რისკების მოდელირებას და რისკების მენეჯმენტის მეცნიერებას. თანამედროვე ფინანსური რისკების შეფასების ფორმალური მეთოდები ეფუძნება მთელ რიგ მათემატიკურ დაშვებებს, რომლებიც აყალიბებენ მოდელებს. მოდელები ასახავენ ფინანსური სამყაროს მხოლოდ ზოგიერთ კონკრეტულ ასპექტს და

ამარტივებენ მრავალ ფაქტორს. შესაბამისად, ფინანსური მოდელირებისას ყოველთვის არსებობს შეცდომის ალბათობა (მოდელის რისკი). იმავდროულად, მოდელის არასწორმა დაშვებებმა შეიძლება კომპანია მიიყვანოს მცდარ გადაწყვეტილებამდე და მას დაემუქროს დიდი ფინანსური ზარალი. მაგალითად, Long-Term Capital Management (LTCM) ჰეჯფონდი გაკოტრდა არბიტრაჟის სტრატეგიაში მოდელის რისკის გაუთვალისწინებლობის გამო. კაპიტალის ბერკეტითა და რთული მათემატიკური მოდელების გამოყენებით, LTCM ცდილობდა მცირე ფასის შეუსაბამობების გამოყენებას. თუმცა მათმა მოდელებმა ზუსტად ვერ იწინასწარმეტყველა ბაზრის ქცევა და 1998 წელს რუსული სავალუტო კრიზისის დროს კომპანიამ დაკარგა დაახლოებით 4.6 მილიარდი აშშ დოლარი, რამაც გამოიწვია ჰეჯფონდის საბოლოო ფინანსური კოლაფსი (Edward, 1999). China Aviation Oil-მა 2004 წლის ნოემბერში განიცადა 550 მილიონი აშშ დოლარის ზარალი ფინანსური დერივატივების არასწორი მოდელირების შედეგად. კომპანია ეყრდნობოდა ოფციონების ფასდადებისას მხოლოდ ე.წ. შინაგან ღირებულებას (intrinsic value) და უგულებელყოფდა კონტრაქტის დროით ღირებულებას (time value) (Matulich and Currie, 2008). J.P. Morgan-მა 2012 წლის ევროპის ფინანსური კრიზისის დროს დაკარგა 6 მილიარდ აშშ დოლარზე მეტი საბაზრო რისკის მცდარი მეთოდოლოგიის გამო (Aggarwal et al., 2016).

მაკინზის კვლევის მიხედვით, ფინანსური ინსტიტუტების მიერ გამოყენებული მოდელები ყოველწლიურად 10-25%-ით იზრდება (Crespo et al., 2017). ახალი მოდელების უმრავლესობა გამოიყენება მეტწილად ან რეგულარული კაპიტალის გამოსაანგარიშებლად, ან სტრეს-ტესტირებისთვის. ამასთან, იზრდება არა მხოლოდ მოდელების რაოდენობა, არამედ მათემატიკური აპარატის სირთულეც. მაგალითად, მანქანური სწავლების (machine learning) და AI ტექნოლოგიის განვითარებამ მნიშვნელოვნად გაზარდა მოდელების დამოუკიდებელი პარამეტრების რაოდენობა და ფინანსური მოდელების ტიპები (Souza, 2023). შესაბამისად, გაიზარდა მოდელის რისკიც.

ფინანსური მოდელები შეიძლება კლასიფიცირდეს როგორც ფუნდამენტური, აღწერითი ან სტატისტიკური (Dowd, 2007). ფუნდამენტური და აღწერითი მოდელები არის ჩარჩოები, რომლებიც შეისწავლიან ეკონომიკური პროცესების მახასიათებლებს მათემატიკური დაშვებების ერთობლიობის საფუძველზე. ოფციონის ფასდადების მოდელები, რომლებიც დაფუძნებულია ლევის პროცესებზე, ფუნდამენტური მოდელების მაგალითებია. აღწერილობითი მოდელები უფრო ზედაპირულია, ვიდრე ფუნდამენტური მოდელები, მაგრამ ხშირად უფრო ადვილია მათთან მუშაობა. სტატისტიკური მოდელები ძირითადად ეფუძნება ეკონომეტრიკულ (რეგრესიულ) ინსტრუმენტებს, რომლებიც

ასახავენ დამოკიდებულებებს სხვადასხვა ეკონომიკურ ცვლადს შორის. სტატისტიკური მოდელები, ჩვეულებრივ, გამოიყენება ფუნდამენტური მოდელების ნაკლებობისას. წინამდებარე ნაშრომში შევისწავლით სამივე ტიპის მოდელის რისკს და წარმოვადგენთ მისი ეფექტური მართვის მეთოდებს.

კლასიკური საკრედიტო და საბაზრო რისკების შესწავლა მეოცე საუკუნის სამოცდაათიანი წლებიდან წარმატებით მიმდინარეობს. რაც შეეხება მოდელის რისკის შეფასებას, ეს უკანასკნელი მხოლოდ გასული ორი ათწლეულის ფინანსური კრიზისებისა და რთული ფინანსური პროდუქტების ფართოდ გავრცელების შედეგად გახდა აქტუალური (Alexander, 2009; Jokhadze and Schmidt, 2020). აღნიშნული გარემოებების გათვალისწინებით, მოდელის რისკების შეფასება, მონიტორინგი და მართვა გახდა მნიშვნელოვანი თემა საბანკო სისტემის მარეგულირებელი ორგანიზაციებისთვის (Hill, 2019). მაგალითად, ბაზელის კომიტეტი, ევროპის ცენტრალური ბანკი და ფედერალური რეზერვი ავალდებულებს მსხვილ ფინანსურ ინსტიტუტებს, საბაზრო, საკრედიტო და ოპერაციულ რისკებთან ერთად, განსაკუთრებული ყურადღება დაუთმონ მოდელის რისკების ანალიზსა და მის რეგულარულ სტრეს-ტესტს (BIS, 2010, 2011, 2012, 2016b; Federal Reserve, 2011). ბანკების რეგულირების გამკაცრების პარალელურად, ფინანსურმა ინსტიტუტებმა მნიშვნელოვნად გაზარდეს რესურსები მოდელის რისკის შესაფასებლად და მოდელის ვალიდაციის ფუნქციის გაძლიერებული მონიტორინგის დასაწერგად. აქცენტი კეთდება ორ გარემოებაზე: უზრუნველყოფილ იქნეს საფუძვლიანი ტესტირება ყველა მოდელისთვის, რომელიც გამოიყენება დერივატივების ფასდადებისთვისა და რისკის მენეჯმენტში, და პოლიტიკის აღსრულება, რომელიც შესაძლებლობას იძლევა გამოყენებული იქნეს მხოლოდ ის მოდელები, რომლებმაც გაიარეს მკაცრი ტესტირება (Hill, 2019; Turfus, 2018).

აღსანიშნავია, რომ ფინანსური ინსტიტუტებისთვის მოდელის რისკის მენეჯმენტი განსხვავდება სხვა ფინანსური რისკის მენეჯმენტისგან, რთული ორგანიზაციული სტრუქტურის გამო. კერძოდ, მოდელის გამოყენება არ ხდება მხოლოდ ერთ ცენტრალურ დეპარტამენტში, არამედ ორგანიზაციის თითქმის ყველა განყოფილება იყენებს განსხვავებულ ფინანსურ მოდელებს. მაგალითად, საკრედიტო რისკების მართვის დეპარტამენტი, რისკების კონტროლის დეპარტამენტი, ხაზინა, სხვადასხვა თრეიდუნგ, ანუ სავაჭრო განყოფილება, როგორცაა CVA, FX, IR, Equity ავითარებენ და იყენებენ განსხვავებულ მოდელებს. ხოლო, აღნიშნულ დეპარტამენტებს შორის ხშირად არ არსებობს ინფორმაციის გაცვლის მარტივი მექანიზმი¹. შესაბამისად, არ არის ცხადი ორგანიზაცი-

¹უფრო მეტიც, ზოგიერთ დეპარტამენტს შორის ინფორმაციის გაცვლა აკრძალულია ინტერესთა კონფლიქტის ან ინსაიდერული ვაჭრობის თავიდან აცილების მიზნით.

ულად როგორ უნდა იყოს მოწყობილი ეფექტური მოდელის რისკის მენეჯმენტი (Hill, 2019).

კვლევის ობიექტი და საგანი: ნაშრომის კვლევის ობიექტი არის მსხვილი ფინანსური ინსტიტუტების რისკების მართვის, პორტფელის ოპტიმიზაციისა და ფასდადების პროცესი; კვლევის საგანს წარმოადგენს აღნიშნულ პროცესებში არსებული მოდელის რისკი, მისი წყაროები, შეფასებისა და მართვის მეთოდები.

კვლევის მიზანი და ამოცანები: ნაშრომის მიზანია ინოვაციური ეკონომეტრიკული აპარატით, მოდელის რისკის შეფასების მეთოდოლოგიის განვითარება ფინანსური რისკების მენეჯმენტში, დერივატივების ფასდადებისა და პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანებში. კვლევის მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს უცნობი (შემთხვევითი) მოდელის პირობებში ფინანსური რისკების მართვის სისტემურ შესწავლასა და მისი მახასიათებლების განსაზღვრაში.

პრაქტიკაში გავრცელებული ფინანსური რისკების საზომები: ღირებულება რისკის ქვეშ (Value at Risk) და მოსალოდნელი ჩავარდნა (Expected Shortfall), რომლებიც განსაზღვრავენ ფინანსური ინსტიტუტისთვის ადეკვატური კაპიტალის მოცულობას ან გამოყენებას პოვნენ ფინანსური პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანებში, ეყრდნობიან მათემატიკურ დაშვებებს უცნობი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის შესახებ. ნაშრომში დავუშვებთ, რომ მოდელი (ე.ი. განაწილების კანონი) უცნობია ე.ი. იგი, თვითონ, მოდელი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს. განვიხილავთ ასეთი შემთხვევითი სიდიდის (ფინანსური მოდელების) სასრულ სიმრავლეს და მასზე დაყრდნობით განვაზოგადებთ ფინანსური რისკების საზომებს. აღნიშნული რისკის საზომები მოდელისგან დამოუკიდებლებია და არ შეიცავენ მოდელის რისკს. დავამტკიცებთ, რომ შესაძლებელია მსგავსი მიდგომით განზოგადდეს ნებისმიერი მონეტარული რისკის საზომი და იგი ეფექტურად იქნეს გამოყენებული, როგორც რისკების მენეჯმენტში, ისევე პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანებში. ნაშრომში ასევე განვიხილავთ დერივატივების ფასდადებისა და ჰეჯირების თეორიას და წარმოვადგენთ ფასის მოდელის რისკის ეფექტურ ზომებს. ასევე ჩამოვყალიბებთ მოდელის რისკის აქსიომატურ საფუძვლებს და დავამტკიცებთ, რომ წარმოდგენილი რისკების ზომები აკმაყოფილებენ ყველა აქსიომას.

მეთოდოლოგია და გამოყენებული მიდგომები: კვლევა განხორციელებულია ფართოდ გავრცელებული კლასიკური მოდელით რომელიც გულისხმობს პრობლემის დასმას, ჰიპოთეზების ფორმულირებას, თეორიული მოდელის ჩამოყალიბებას, ემპირიული კვლევის დიზაინს თეორიული მოდელის შესამოწმებლად, მონაცემთა შეგროვებას, მონაცემთა ანალიზსა და განზოგადებას. კვლევა დაფუძნებულია ფინანსების კლასიკურ

მათემატიკურ თეორიაზე და გამოყენებულია ალბათობის თეორიის ელემენტები. მონაცემთა ბაზად გამოყენებულია Bloomberg-ის მონაცემები.

რადგან განვიხილავთ მოდელს, როგორც შემთხვევით სიდიდეს, საჭიროა შეფასდეს მისი ემპირიული განაწილების კანონი. ამ მიზნისთვის, ბაიესის თეორემასა და მარკოვის ჯაჭვებზე დაფუძნებული ინოვაციური ეკონომეტრიკული მიდგომები წარმოადგენენ კვლევის ძირითად ემპირიულ მეთოდებს (იხ. Jokhadze and Schmidt, 2020). ასევე, კონკრეტულად შევისწავლით მრავალგანზომილებიანი GARCH და მრავალგანზომილებიანი განზოგადებული ჰიპერბოლური განაწილების დროითი მწკრივების მოდელებს და ვაჩვენებთ მოდელის რისკის მნიშვნელობასა და მისი მართვის შედეგებს.

მეცნიერული სიახლე და პრაქტიკული ღირებულება: ნაშრომი წარმოადგენს როგორც თეორიული, ისე გამოყენებითი ხასიათის კვლევას. მისი თეორიული მნიშვნელობა გამოიხატება უპირველეს ყოვლისა იმაში, რომ იგი უზრუნველყოფს მოდელის რისკების მართვის ეფექტურ ინტეგრირებას ფინანსური რისკების მენეჯმენტში და ფასდადების პროცესში. ნაშრომში წარმოდგენილი რისკის საზომები მათემატიკურად გამართულია და აფართოებს თანამედროვე რისკების მენეჯმენტის თეორიას. ამასთან, შემოთავაზებული მეთოდოლოგია ზოგადი ხასიათისაა და შესაძლებელია მისი დანერგვა არამხოლოდ რისკების მენეჯმენტში, არამედ ფასდადებისა და პორტფელის ოპტიმიზაციის თეორიულ და პრაქტიკულ ამოცანებში. შესაბამისად, წარმოდგენილი ინოვაციური მეთოდოლოგია ატარებს კომპლექსურ და სისტემურ ხასიათს.

ნაშრომის ძირითადი დებულებებისა და დასკვნების პრაქტიკული მნიშვნელობა გამოიხატება მათი გამოყენების შესაძლებლობაში მოდელის რისკების შეფასების, მონიტორინგის და მართვის თვალსაზრისით ფინანსური ინსტიტუტებისა და საბანკო სისტემის მარეგულირებელი ორგანიზაციების მიერ. წარმოდგენილი მოდელები და რისკის საზომები შედარებით მარტივი დასაწერია მსხვილი ფინანსური ინსტიტუტებისთვის, და კომპიუტერული ტექნოლოგიის განვითარებასა და ახალ მოდელთა აღმოცენების კვალდაკვალ, წარმოადგენს პრობლემის პრაგმატულ გადაჭრას.

დისერტაციაში წარმოდგენილი ზოგიერთი კომპონენტი ავტორების მიერ გამოქვეყნებულია შემდეგ სტატიებში Jokhadze and Schmidt, 2020, Jokhadze and Purtukhia, 2024.

ნაშრომის სტრუქტურის მოკლე მიმოხილვა და ძირითადი შედეგები: ნაშრომი შედგება რეზიუმეს, შესავლის, ოთხი თავისა და დასკვნისგან. მას ერთვის გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხა და დანართები.

დისერტაციის პირველ თავში მოკლედ არის განხილული მოდელის რისკების შეს-

წავლასთან დაკავშირებული არსებული ლიტერატურა. ნაჩვენებია, რომ არსებული კვლევები ძირითადად პრობლემის დასმას ეხება და დღემდე არ არსებობს ერთგვაროვანი და კომპლექსური მიდგომა მოდელის რისკის შეფასებისთვის. ასევე ნაჩვენებია, რომ არსებულ ლიტერატურაში მოდელის რისკი გაიგივებულია პარამეტრების შეფასების რისკთან და დაშვებულია, რომ მოდელის ტიპი (შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი) სწორადაა შერჩეული. ამავე თავში, გამოკვეთილია წინამდებარე დისერტაციის კვლევის მიმართება არსებულ ნაშრომებთან.

მეორე თავში ჩამოყალიბებულია მოდელის რისკის შეფასების ინოვაციური თეორიული კონცეფცია. კერძოდ, წარმოდგენილია საბაზრო რისკის შეფასების მეთოდოლოგია, რომელიც მოიცავს მოდელის რისკს. ასევე მოცემულია მოდელის რისკის აქსიომატური განსაზღვრება და მისი განზოგადებული საზომები. დამტკიცებულია მნიშვნელოვანი თეორემები, რომლებიც უზრუნველყოფს შემოთავაზებული საბაზრო და მოდელის რისკის საზომების ინტეგრირებას არსებულ რისკმენეჯმენტის თეორიაში.

მესამე თავი მიზნად ისახავს მოდელების სიმრავლეზე განაწილების კანონის ეკონომეტრიკული შეფასების მეთოდების შესწავლას. ნაჩვენებია, რომ მარკოვის ჯაჭვებზე დაფუძნებული სიმულაციებით შესაძლებელია მეორე თავში განხილული თეორიული კონცეფციის პრაქტიკული დანერგვა ფინანსურ ინსტიტუტებში.

მეოთხე თავში განხილულია საბაზრო რისკის, დერივატივების ფასდადებისა და პორტფელის ოპტიმიზაციის ხუთი მაგალითი და პრაქტიკულად ნაჩვენებია მოდელის რისკის მნიშვნელობა, მისი შეფასებისა და მართვის მეთოდები.

პირველ ქეისში შესწავლილია საბაზრო რისკის მოდელის რისკი, როდესაც პორტფელი შედგება ოთხი ძირითადი საფონდო DAX30, S&P 500, FTSE 100, Nikkei 225 და სასაქონლო ინდექსისგან (S&P GSCI). აღნიშნული ინდექსები არჩეულია, რადგან მათი საბაზრო რისკი უფრო ნაკლებია ვიდრე ცალკეული აქციის რისკი. ქეისში ნაჩვენებია, რომ ფინანსურ ინსტიტუტს, რომელსაც სჭირდება შეაფასოს ღირებულება რისკის ქვეშ (VaR) და მოსალოდნელი ჩავარდნა (ES) გააჩნია მნიშვნელოვანი მოდელის რისკი. ნაჩვენებია მოდელის რისკის ბუნება, რომელიც ხაზს უსვამს მაღალი ნდობის დონის გამოყენების შემთხვევაში (საბაზრო კუდის რისკი) საბაზრო რისკის მოდელის რისკით ჩანაცვლებას.

მეორე ქეისში შესწავლილია კუდის რისკის მოდელის რისკი ექსტრემალური ღირებულების თეორიის (EVT) მიხედვით. აღსანიშნავია, რომ EVT წარმოადგენს თანამედროვე რისკების მენეჯმენტის ოქროს სტანდარტს. მიუხედავად ამისა ნაჩვენებია, რომ კუდის რისკის მოდელირებისას მოდელის არასწორი შერჩევა დიდ ცდომილობას იძლევა.

მესამე ქეისში განხილულია მოდელის რისკი ეგზოტიკური დერივატივების ფასდადებისა და ჰეჯირების ამოცანებისთვის. კერძოდ, შესწავლილია ბარიერული და აზიური ოფციონები. შედეგებმა ცხადყო, რომ მოდელის რისკი არის უმნიშვნელოვანესი ფაქტორი დერივატივების ფასდადებისას.

მეოთხე ქეისში მონტე კარლოს სიმულაციაზე დაფუძნებული მონაცემებით შესწავლილია ქოლ ოფციონის მოდელისა და პარამეტრების კალიბრაციის ამოცანა. მარკოვის ჯაჭვებზე დაფუძნებულმა სიმულაციამ წარმატებით აღმოაჩინა ჰემმარიტი მოდელი.

მეხუთე ქეისში განხილულია მოდელის რისკი პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანისთვის. კერძოდ სამი ფინანსური ინდექსით DAX 30, S&P GSCI და iBoxx EUR შემდგარი პორტფელის ოპტიმიზაცია. შედეგები გვიჩვენებს, რომ მოდელის რისკი მნიშვნელოვან როლს თამაშობს. ნაჩვენებია, რომ შემოთავაზებული რისკის საზომები მოდელის რისკის გათვალისწინებით ოპტიმალური პორტფელის შერჩევის შესაძლებლობას იძლევა.

ემპირიულმა კვლევამ აჩვენა, რომ მოდელის რისკი ფინანსური რისკის მნიშვნელოვანი კომპონენტია და მისი უგულვებელყოფა მნიშვნელოვან ფინანსურ დანაკარგებთან იქნება დაკავშირებული. ასევე წარმოდგენილმა ქეისებმა ცხადყვეს, რომ მარკოვის ჯაჭვებზე დაფუძნებული სიმულაციური მიდგომები მოდელის სიმრავლეზე არსებული უცნობი განაწილების ეფექტურ ემპირიულ შეფასების შესაძლებლობას იძლევა.

დასკვნაში შეჯამებულია წინამდებარე ნაშრომის ძირითადი თეზისები და შედეგები.

1. ლიტერატურის მიმოხილვა

"The more I read, the more I acquire, the more certain I am that I know nothing."

Voltaire

ფინანსურ ლიტერატურაში არსებობს მოდელის რისკის აღწერისა და შეფასების ერთმანეთისაგან განსხვავებული მიდგომები. პიონერული ნაშრომები მოდელის რისკების კვლევის მიმართულებით აღწერითი ხასიათისაა და ძირითადად ვიწრო ჭრილში განიხილავენ მოდელის რისკს ოფციონების ფასდადების თეორიასა და ეგზოტიკური დერივატივების ჰეჯირების ამოცანებში. ერთ-ერთ ასეთ პირველ ნაშრომში დერმანმა განიხილა სხვადასხვა ფასდადების მოდელის სუსტი მხარეები, დაშვებების უზუსტობები და პირველმა წამოჭრა მოდელის რისკის შეფასების მნიშვნელობა საერთაშორისო საინვესტიციო ბანკებისთვის და მსხვილი ფონდებისთვის (Derman, 1996).

დერმანის სტატიით მოტივირებულია რამდენიმე მნიშვნელოვანი, ექსპერიმენტებზე დამყარებული ნაშრომი. ეკონომიკურ სიმულაციაზე დაფუძნებული კვლევით დასტურდება დერივატივებისა და, კერძოდ, ოფციონებით ვაჭრობისას წარმოქმნილი მნიშვნელოვანი მოდელის რისკი (T. C. Green and Figlewski, 1999). პრაქტიკაში ფართოდ გავრცელებული სტოქასტური (stochastic volatility) და ლოკალური ვოლატილობის (local volatility) მოდელების შესწავლისას დასტურდება, რომ ჰეჯირებული პორტფელი მნიშვნელოვანი მოდელის რისკის მატარებელია და კლასიკური დელტა ან დელტა-ვეგა ჰეჯირება ვერ იძლევა სასურველ შედეგს, მინიმუმამდე დაიყვანოს ფინანსური რისკი (იხ. An et al., 2007; Hull and Suo, 2002). ამავე ავტორებმა აჩვენეს, რომ მოდელის რისკი განსაკუთრებით დიდია აზიური და ბარიერული ოფციონების შემთხვევაში, როდესაც კონტრაქტის ღირებულება დამოკიდებულია არა მხოლოდ აქტივის საბოლოო ფასზე, არამედ ფასის ცვლილების ისტორიაზეც.

მონტე კარლოს მრავალი სიმულაციით შოუტენსმა განიხილა ორეტაპიანი ექსპერიმენტები, რომლებიც პირველ ეტაპზე მიზნად ისახავდა არსებული ევროპული მაღალ-ლიკვიდური ქოლ და ფუთ ოფციონებით სხვადასხვა სტოქასტური ვოლატილობის და ნახტომების მოდელების პარამეტრების შეფასებას (calibration). აღნიშნული მოდელებით მეორე ეტაპზე ავტორმა აჩვენა, რომ ე.წ. ეგზოტიკური დერივატივების ფასები მნიშვნელოვნად განსხვავდებოდა სხვადასხვა მოდელის გამოყენებისას (Schoutens et

al., 2004). ავტორმა ამ ფენომენის აღწერისას პირველად დაამკვიდრა ე.წ. მოდელზე დამოკიდებული კონტრაქტის ცნება.

კონტმა 2006 წელს გამოქვეყნებულ ნაშრომში პირველად შემოიტანა ე.წ. მაქსიმალური (worst case) მოდელის რისკის საზომი დერივატივების ფასდადების თეორიაში. ავტორმა აჩვენა, რომ, არასრული ბაზრის პირობებში, ოფციონებით ჰეჯირებისას მნიშვნელოვანი რეზიდუალური რისკი არსებობს¹. აღნიშნული რისკი დამოკიდებულია არა საბაზრო ფაქტორებზე, არამედ ჰეჯირების შერჩეულ მოდელზე და მის პარამეტრებზე. ნაშრომი მხარს უჭერს მაქსიმალური რისკის საზომის გამოყენებას. წინამდებარე დისერტაციაში ვაჩვენებთ, რომ მაქსიმალური რისკის საზომი მთელი რიგი პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრისას მოუხერხებელია და გადაჭარბებულად აფასებს რეალურ მოდელის რისკს. ბრანგერმა აჩვენა, რომ მოდელის არასწორი შერჩევა ჰეჯირების მნიშვნელოვან დანაკარგთან ასოცირდება (Branger et al., 2012). აღსანიშნავია, რომ როდესაც ექსპერიმენტული "ნამდვილი მოდელი" შეიცავს, როგორც ნახტომებს, ისევე სტოქასტურ ვოლატილობას, ჰეჯირების რისკი სტოქასტური ვარიაციის უგულვებელყოფისას გაცილებით უფრო დიდია, ვიდრე უწყვეტი მოდელის გამოყენების შემთხვევაში.

Lazar et al., 2024 ნაშრომში შემოთავაზებულია მოსალოდნელი ჩავარდნის (ES) ტიპის საზომები, რათა ცალ-ცალკე განისაზღვროს მოდელის პარამეტრის შეფასების რისკი და მოდელის სპეციფიკაციის რისკი (განაწილების კანონის არასწორი შერჩევის რისკი) უწყვეტი დროის ფინანსურ მოდელებში. ავტორების მიერ გამოიყენებული MCMC მეთოდები და ES-ზე დაფუძნებული რისკის საზომები ახლოსაა Jokhadze and Schmidt, 2020 მიერ შემოთავაზებულ მეთოდებთან. მიგვაჩნია, რომ ავტორების მიერ შემოთავაზებული განცალკევებული შეფასება მოდელის პარამეტრებისა და მოდელის სპეციფიკაციის არასწორია და არ იძლევა მოდელის რისკის სრულ სურათს.

Bannör and Scherer, 2013 უშვებს, რომ დერივატივების ფასდადებისა და ჰეჯირების მოდელი ცნობილია, ხოლო მოდელის რისკი დაყვანილია პარამეტრების არასწორად შეფასების რისკზე. ამასთანავე, ავტორები უშვებენ, რომ პარამეტრების ალბათური განაწილების კანონი ცნობილია. აღნიშნულ დაშვებებში ნაშრომი განიხილავს ფუნქციონალს, რომელიც შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს დერივატივების მოდელის რისკის გარეშე ფასდადებაში. მიუხედავად ინოვაციური თეორიული მიდგომისა, აღნიშნული ნაშრომის პრაქტიკაში გამოყენება შეუძლებელია, რადგან მოდელების პარამეტრების განაწილება უცნობია. იმავდროულად, მოდელის რისკისა და პარამეტრების რისკის გა-

¹ როდესაც ბაზრის მოდელი სრულია, მაშინ შესაძლებელია ნებისმიერი ეგზოტიკური დერივატივის შემოსავლიანობის ფუნქციის განმეორება (რეპლიკაცია) ბაზარზე არსებული ლიკვიდური ოფციონებითა და ურისკო აქტივის კომბინაციით.

თანაბრება უგულებელყოფს მრავალ ეკონომიკურ ფაქტს და ზღუდავს რეალური რისკის აღქმას. Detering and Packham, 2015, 2016 შეისწავლის დერივატივების ფასდადებას და ჰეჯირების ამოცანებს არასრული ბაზრის პირობებში. ავტორებმა განიხილეს შემთხვევა, როდესაც კონტრაქტის ფასი ყველა შესასწავლი მოდელისთვის უცვლელია. აღნიშნული დაშვება გამორიცხავს პარამეტრების არასწორი შეფასების რისკს. მიუხედავად კონტრაქტის იდენტური ფასისა, ოფციონების პორტფელის ჰეჯირება ასოცირებულია მოდელის მნიშვნელოვან რისკთან.

ასევე აღსანიშნავია, რომ მოდელის რისკი არასწორი ჰეჯირებისთვის ამერიკული ოფციონებისთვის განსაკუთრებით აქტუალურია (იხ. Bayraktar and Zhou, 2017; Bernard and Tang, 2016). Coqueret and Tavin, 2016 განიხილავს საპროცენტო განაკვეთის ჰეჯირების დერივატივების პორტფელს, რომელიც შედგება ვარიაციის სვოპებისა და ფორვარდ სტარტ ოფციონებისგან. არასრული ბაზრის პირობებში მსგავსი პორტფელის მოდელის რისკი მერყეობს 50-200 საბაზისო პუნქტამდე, რაც საპროცენტო განაკვეთის პორტფელისთვის წარმოადგენს უზარმაზარ რისკს. Glonti et al., 2015 შეისწავლის ეგზოტიკური ტიპის ოფციონის ჰეჯირების ამოცანას, სადაც გადახდის ფუნქცია წარმოადგენს ბინარული და აზიური ოფციონის კომბინაციას. შედეგები აჩვენებს, რომ ოპტიმალური ჰეჯირების შემთხვევაშიც არსებობს მნიშვნელოვანი ნარჩენი მოდელის რისკი.

Bernard and Vanduffel, 2015 განიხილულია პრაქტიკასთან მიახლოებული პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანა, როდესაც, ინვესტორის ეკონომიკური სარგებლიანობის ფუნქციიდან გამომდინარე, ბაზარზე მრავალი სარისკო საინვესტიციო აქტივი არსებობს. აღნიშნული კვლევა ხაზს უსვამს მოდელის რისკის ექსპონენციალურ ზრდას პორტფელის დივერსიფიცირების კვალდაკვალ. ცხადია, მრავალგანზომილებიანი პორტფელის ოპტიმიზაცია უზრუნველყოფს საბაზრო რისკის შემცირებას. ეკონომიკური თვალსაზრისით ხდება საბაზრო რისკის ჩანაცვლება მოდელის რისკით.

მოდელის რისკების მართვა ფინანსური რისკების მენეჯმენტში შედარებით ნაკლებად არის შესწავლილი. Alexander and Sheedy, 2008 აჩვენებს პარამეტრული მოდელების პრობლემები მოკლევადიანი რისკების პროგნოზირებაში. ავტორების აზრით, აღნიშნული პრობლემის გადაწყვეტის ოპტიმალურ მეთოდს წარმოადგენს პარამეტრული მოდელებისგან დამოუკიდებელი რეგულარული სტრესტესტის პრაქტიკის დამკვიდრება. მსგავსი იდეა არის წამოჭრილი Boucher et al., 2014 ნაშრომში, რომელიც მოდელის ბექტესტირებას მიიჩნევს ერთადერთ პრაქტიკულ გამოსავლად მოდელის რისკების შემცირებისთვის. არსებული ლიტერატურიდან აღსანიშნავია Kerkhof et al.-ის ნაშრომი, სადაც განხილულია მაქსიმალური (worst case) მოდელის რისკის საზომი ზოგიერთი

მონეტარული რისკის კლასისთვის (Kerkhof et al., 2010). ნაშრომში ფინანსური მოდელის შერჩევის რისკი გამოიყენება პარამეტრების არასწორი შეფასების რისკთან. სიმულაციურმა კვლევამ აჩვენა, რომ მოდელის რისკების მიტიგაციისთვის მნიშვნელოვანი კაპიტალის რეზერვია საჭირო. Alexander and Sarabia, 2012; Breuer and Csiszár, 2013, 2016; Glasserman and Xu, 2014 ნაშრომებში შესწავლილია შედარებითი ენტროპიით (relative entropy) მოდელის რისკის შეფასება Value at Risk ჩარჩოში. ავტორებმა აჩვენეს, რომ დამატებითი (მოდელის) კაპიტალის რეზერვი კომპლექსური პორტფელის შემთხვევაში აუცილებელია. აღსანიშნავია, რომ ზემოთ ხსენებულ ნაშრომებში გამოკვეთილია მოდელის რისკის მართვის მნიშვნელობა, თუმცა არ გვხვდება ლოგიკურად თანმიმდევრული მონეტარული მოდელის რისკის ცნება, და, შესაბამისად, არ იძლევა საფუძველს ფინანსური რისკების თანმიმდევრული გაზომვისთვის.

ზემოთ აღნიშნული ლიტერატურისგან განსხვავდება Barrieu and Scandolo, 2015, რომელიც მიზნად ისახავს მოდელების შედარებას და მათ დაჯგუფებას დაბალ, საშუალო და მაღალრისკიან მოდელებად. ნაშრომი ხაზს უსვამს, რომ კომპლექსური მოდელები, რომლებიც დამოკიდებული არიან მრავალ პარამეტრზე, არსებული მონაცემების შეზღუდვის გამო, ხშირად კლასიფიცირდებიან, როგორც ყველაზე სარისკო მოდელები. ნაშრომში განხილული თეორია წარმოადგენს საინტერესო მიგნებას, მაგრამ აღნიშნული მეთოდოლოგია არ იძლევა მოდელის რისკის გამომანგარიშებისა და შესაბამისი ადეკვატური კაპიტალის რეზერვის შეფასების საფუძველს.

Fontana et al., 2021 განიხილავს საკრედიტო რისკების მართვაში მოდელის რისკს და აჩვენებს, რომ მოდელის რისკი საკრედიტო პორტფელისთვის მნიშვნელოვანია მონაცემების სიმცირისა და დაუკვირვებადი პარამეტრების არსებობის გამო. ეს ნაშრომი დეტალურად ანალიზებს ყველა ერთობლივ მოდელს ურთიერთშემცვლელ ბერნულის ცვლადების ფარგლებში და რაოდენობრივად განსაზღვრავს მოდელის რისკს საკრედიტო პორტფელისთვის VaR-ისა და ES-ის გამოყენებით.

2008 წლის გლობალურმა ეკონომიკურმა კრიზისმა აჩვენა საბაზრო რისკების მოდელების ჩავარდნა. ე.წ. პორტფელის კუდის რისკი (tail risk), მთელ რიგ შემთხვევებში გამარტივებული სტატისტიკური დაშვებების შედეგად, ნაწილობრივ უგულებელყოფილი იყო. კრიზისის შედეგად გადაიხედა არა მხოლოდ საკრედიტო პორტფელის დივერსიფიცირების მოდელები და მიდგომები, არამედ განაწილების კანონის დაშვებები (იხ. Heitfield, 2009; Hellmich et al., 2013; Jorion, 2009; Morini, 2011; Tarashev, 2010). მიუხედავად მოდელის რისკის მართვის აპარატის შექმნის გარდაუვალი აუცილებლობისა, ევროპის ცენტრალური ბანკისა და ფედერალური რეზერვის მრავალი გამოკითხვა ადასტურებს,

რომ ფინანსური ბაზრის პრაქტიკოსები, ძირითადად ეყრდნობიან სცენარის ანალიზს და სტრესტესტირებას მოდელის რისკის შესაფასებლად. აღსანიშნავია, რომ სტრესტესტი მხოლოდ რისკის გაზომვის დამატებითი ინსტრუმენტია და მოდელის რისკს, ისევე, როგორც საკრედიტო და საბაზრო რისკებს, სჭირდება ფუნდამენტური მათემატიკური აპარატი (Alexander and Sheedy, 2008).

კიდევ ერთი სფერო, სადაც მოდელები ფართოდ გამოიყენება, არის ფინანსური აღრიცხვა. ფინანსური ანგარიშგების საერთაშორისო სტანდარტი (IFRS) და, კონკრეტულად, IFRS 13 განიხილავს სამართლიანი ღირებულების იერარქიას, რომელიც დაფუძნებულია ძირითადი აქტივებისა და ვალდებულების შესაფასებლად გამოყენებული შეფასების ტექნიკის დაკვირვებადობის ხარისხზე. კონკრეტულად, სტანდარტი განიხილავს სამართლიანი ღირებულების (FV) შესაფასებლად საჭირო მონაცემების სამ დონეს: საბაზრო (დონე 1), ირიბად დაკვირვებადი (დონე 2) და მოდელზე დაფუძნებული (დონე 3) (Diana, 2015). მესამე დონის აქტივებისთვის, FV გამოითვლება ფუნდამენტური ან სტატისტიკური მოდელების საფუძველზე, რაც ხშირ შემთხვევებში იწვევს მოდელის რისკს.

წინამდებარე დისერტაცია მოტივირებულია ზემოთ აღნიშნული ლიტერატურით და მიზნად ისახავს ფინანსური რისკის შეფასებისა და მართვის ფუნდამენტური ჩარჩოს შექმნას, სადაც მოდელის რისკი ბუნებრივად იქნება ინტეგრირებული ფინანსური რისკების მართვის ერთიან მექანიზმში.

2. მოდელის რისკის შეფასების თეორიული კონცეფცია და მენეჯმენტი

"A 99% Value-at-Risk calculation does not evaluate what happens in the last one percent... This is like an airbag that works all the time, except when you have a car accident.." David Einhorn

მათემატიკური ჩარჩო შეუცვლელია თანამედროვე ფინანსური რისკების მენეჯმენტში, რათა უზრუნველყოს მყარი, თანმიმდევრული და ყოვლისმომცველი სტრუქტურა, რომელიც შესაძლებელს გახდის სხვადასხვა ეკონომიკური ფენომენის უნივერსალურ აღწერას. უპირველეს ყოვლისა, მათემატიკა წარმოადგენს ზუსტ ენას რისკების რაოდენობრივი ანალიზისთვის, რაც საშუალებას იძლევა სხვადასხვა ტიპის რისკების სხვადასხვა კონტექსტში შესადარებლად. მათემატიკური მოდელების გამოყენებით, რისკის მენეჯერებს შეუძლიათ შეაფასონ არასასურველი მოვლენების ალბათობა და პოტენციური გავლენა, რაც საშუალებას მისცემს ინფორმირებული გადაწყვეტილებების მიღებას და სტრატეგიულ დაგეგმვას. უფრო მეტიც, მათემატიკური ჩარჩოები ხელს უწყობს რთული ურთიერთდამოკიდებულებების იდენტიფიცირებას რისკის ლანდშაფტში, ფარული შახლონებისა და ეკონომიკური ურთიერთობების გამოვლენას, რომლებიც შეიძლება არ იყოს აშკარა მხოლოდ თვისებრივი ანალიზის საშუალებით.

ჩვენი მიზანია წინამდებარე თავში ჩამოვაყალიბოთ ფინანსური რისკის შეფასების ჩარჩო მოდელის რისკის გათვალისწინებით. შესაბამისად, ეს თავი არის თეორიული ხასიათის, შეიცავს მათემატიკურ (სტოქასტურ) ფორმულირებას და ეკონომიკურ მოტივაციას¹. რაც შეეხება სხვადასხვა ემპირიულ და ეკონომიკურ სიმულაციაზე დაფუძნებულ პრაქტიკულ მაგალითებს, ისინი განხილულია დისერტაციის მე-4 თავში.

თავდაპირველად განვიხილოთ ზომადი სივრცე $(\Omega, \mathcal{F})$ და მასზე განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდე W , $W : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, სადაც $\mathcal{B}$ წარმოადგენს ბორელის σ -ალგებრას $\mathbb{R}$ -ზე. ეკონომიკური შინაარსით, Ω არის ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. $W(\omega)$ წარმოადგენს ფინანსური კონტრაქტის (პოზიციის) რეალიზებულ შემოსავალს, თუ ეკონომიკური სცენარი (ელემენტარული ხდომილობა) $\omega \in \Omega$ რეალიზდა. ამასთან,

¹წინამდებარე თავი შეიცავს მრავალ მათემატიკურ ფორმულირებას, რომლის დეტალურად ახსნა სცილდება ამ დისერტაციის ფარგლებს. გამოყენებული მათემატიკური თეორიის სრული მიმოხილვის ნახვა შესაძლებელია შემდეგ ნაშრომებში: Dudley, 2018; Föllmer and Schied, 2016.

W შეიძლება წარმოადგენდეს ნებისმიერ ფინანსურ აქტივს, (მაგ.: აქცია, ობლიგაცია, წარმოებული ფასიანი ქაღალდი) ან მთლიან პორტფელს.

აღვნიშნოთ $L^0(\Omega, \mathcal{F})$ შემთხვევითი სიდიდეების წრფივი სივრცე და $L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$ შემო-
საზღვრული შემთხვევითი სიდიდეების სივრცე. ჩვენ აღვნიშნავთ $\mathcal{X} \subseteq L^0(\Omega, \mathcal{F})$ შემ-
თხვევითი სიდიდეების წრფივ სივრცეს, რომელიც შეიცავს მუდმივებს. წინამდებარე
ნაშრომში რისკების ზომები იქნება მათემატიკურად განსაზღვრული $\mathcal{X}$ სივრცეზე.

2.1 საბაზრო რისკის საზომები

ამ ქვეთავში განხილულია საბაზრო რისკის საზომები. თავდაპირველად განვიხილოთ
ვარიაციაზე დაფუძნებული კლასიკური, პრაქტიკაში დამკვიდრებული რისკების საზო-
მები. შემდეგ შემოვიტანთ მონეტარული ფინანსური რისკის ცნებას და განვიხილავთ
ეკონომიკური და რეგულარული კაპიტალის შეფასების მეთოდებს. თითოეულ შემ-
თხვევაში პრაქტიკულად ვაჩვენებთ რისკის საზომის მოდელზე დამოკიდებულებას და,
შესაბამისად, მოდელის რისკის შეფასების მნიშვნელობას.

2.1.1 საბაზრო რისკების კლასიკური საზომები

ტრადიციულ ფინანსური რისკების მართვის თეორიას საფუძველი ჩაეყარა XX საუკუნის
მეორე ნახევარში და ეფუძნება ცნობილ საშუალო-ვარიაციის (mean-variance) თეორიას
(იხ. Dowd, 2007; Markowitz, 1952). ეს თეორია თავდაპირველად განიხილა ჰარი მარკო-
ვიტცმა 1952 წელს, რომელმაც შემოიღო დივერსიფიკაციის კონცეფცია, რაც გულისხმობს
საინვესტიციო პორტფელის ფინანსური რისკის ეფექტური შემცირების საშუალებას გან-
სხვავებულ, ერთმანეთთან ნაკლებად დაკავშირებულ აქტივებში ინვესტიციით. მარკო-
ვიტცის თეორიამ აჩვენა, რომ არაკორელირებულ აქტივებში ინვესტიციით, ინვესტორს
შეუძლია შეამციროს პორტფელის რისკი მოსალოდნელი შემოსავლის შემცირების გა-
რეშე. ამ თეორიის მიხედვით, პორტფელის ვარიაცია არის საბაზრო რისკის ერთადერთი
საზომი. დავუშვათ, P აღნიშნავს შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ცნობილ კანონს.

განსაზღვრება 2.1.1. W ფინანსური პოზიციის ვარიაცია $\sigma_P^2(W)$ განიმარტება როგორც:

$$\sigma_P^2(W) = \mathbb{E}_P[W - \mathbb{E}_P(W)]^2. \quad (2.1)$$

ცხადია, რომ ვარიაცია სიმეტრიულია, ის არ განასხვავებს საშუალო მოსალოდნელი
შედეგიდან დადებით და უარყოფით გადახრებს. რისკების მენეჯმენტისთვის საინტე-

რესო უარყოფითი გადახრების ანალიზი, რომელიც შეესაბამება პოტენციურ ფინანსურ ზარალს. ამ მიზანს ემსახურება უარყოფითი სემი-ვარიაცია (Markowitz, 1959).

განსაზღვრება 2.1.2. W ფინანსური პოზიციის უარყოფითი სემი-ვარიაცია $\sigma_{-,P}^2(W)$ განი-
მარტება როგორც:

$$\sigma_{-,P}^2(W) = \mathbb{E}_P [\max \{\mathbb{E}_P(W) - W, 0\}]^2. \quad (2.2)$$

უარყოფითი სემი-ვარიაცია საშუალებას აძლევს ინვესტორებს უკეთ შეაფასონ ზა-
რალის პოტენციალი და, შესაბამისად, მოახდინონ პორტფელის შერჩევა. მაგალითად,
ინვესტორს, რომელიც განსაკუთრებით რისკავერსია, შეუძლია ფოკუსირება მოახდი-
ნოს ინვესტიციებზე, რომლებსაც აქვთ დაბალი უარყოფითი რისკი, მაშინაც კი, თუ
ეს ნიშნავს პოტენციური შემოსავლის შემცირებას. ვარიაციის მსგავსად, უარყოფითი
სემი-ვარიაცია წარმოადგენს ფინანსური რისკის ადეკვატურ საზომს მხოლოდ საშუალო-
ვარიაციის თეორიის ჩარჩოში. ის არ ასახავს ფინანსური პოზიციის რეალიზებული
შემოსავლების შესაძლო ასიმეტრიას, ზარალის განაწილების მძიმე კუდებს და სხვა მა-
ღალ მომენტებს, რომელთა არსებობაც დასტურდება ემპირიული ანალიზით (Cont, 2001).
უფრო ზოგადი უარყოფითი რისკის საზომებია ე.წ. ქვედა ნაწილობრივი მომენტები
(lower partial moment) (იხ. Bawa, 1975; Harlow, 1991).

განსაზღვრება 2.1.3. W ფინანსური პოზიციის, n რიგის ქვედა ნაწილობრივი მომენტი τ
საზღვრით $LPM_{\tau,P}^n(W)$, წარმოადგენს:

$$LPM_{\tau,P}^n(W) = \mathbb{E}_P [\max \{\tau - W, 0\}]^n. \quad (2.3)$$

ეკონომიკური თვალსაზრისით, τ წარმოადგენს W -ს საშუალო შემოსავლიანობას ან
ინვესტორის ინდივიდუალური შემოსავლიანობის მოლოდინს, ე.წ. ბეჭმარკს. ცხადია,
უარყოფითი სემი-ვარიაცია არის ქვედა ნაწილობრივი მომენტი, როდესაც $\tau = \mathbb{E}_P(W)$
და $n = 2$.

ქვედა ნაწილობრივი მომენტების ერთ-ერთი მთავარი უპირატესობა ის არის, რომ
ისინი უზრუნველყოფენ რისკის უფრო ნიუანსურ გაგებას, ვიდრე ვარიაცია. ქვედა
ნაწილობრივი მომენტები სრულიად განისაზღვრება მხოლოდ 2 პარამეტრით და შე-
საძლებლობას გვაძლევს რისკის მოდელირებისას გავითვალისწინოთ შემთხვევითი
სიდიდის W ყველა სტატისტიკური ფაქტი. პარამეტრი n წარმოადგენს რისკის ავერ-
სიის მაჩვენებელს და განსაზღვრავს ინვესტორის ინდივიდუალური სარგებლიანობის
ფუნქციას.

2.1.2 მონეტარული რისკის საზომები

თანამედროვე ფინანსური რისკის მართვის ერთ-ერთი მთავარი გამოწვევაა განსაზღვროს კაპიტალის ოდენობა, რომელიც აუცილებელია პორტფელის რისკებისგან დამცავი ბუფერის როლის შესასრულებლად. ტრადიციული რისკის საზომები, როგორებიცაა ვარიაცია და ქვედა ნაწილობრივი მომენტები, არ იძლევა შესაძლებლობას სარისკო პოზიციისთვის საჭირო კაპიტალის გამოსათვლელად, რადგან ისინი პირდაპირ არ გვაწვდიან პოტენციური ზარალის სიდიდეს. კაპიტალის ადეკვატურობის სიდიდის დასადგენად, განიხილება ე.წ. მონეტარული რისკის ზომები (იხ. Föllmer and Schied, 2016, თავი 4).

განსაზღვრება 2.1.4. მონეტარული რისკის საზომი ρ არის ფუნქცია $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- (i) მონოტონურობა: თუ $W_1 \leq W_2$, მაშინ $\rho(W_1) \geq \rho(W_2)$.
- (ii) მუდმივის ინვარიანტულობა: $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho(W + \alpha) = \rho(W) - \alpha$.

აღნიშნული მოთხოვნების ეკონომიკური ინტერპრეტაცია ინტუიციურია. მონოტონურობა ნიშნავს, რომ ფინანსურ კონტრაქტს, რომელიც ნებისმიერი ეკონომიკური სცენარის მიხედვით გვპირდება მონეტარული თვალსაზრისით უფრო დიდ შემოსავალს, უნდა ჰქონდეს მცირე ფინანსური რისკი. მუდმივის ინვარიანტულობა უზრუნველყოფს, რომ ურისკო პოზიციის დამატება პორტფელში ამცირებს საერთო რისკს ურისკო პოზიციის ოდენობით. კაპიტალის ადეკვატურობის გამოთვლაში მონეტარული რისკის ზომების გამოყენება სულ უფრო პოპულარული გახდა ბოლო წლებში, განსაკუთრებით გლობალური ფინანსური კრიზისის შემდეგ, როდესაც აშკარა გახდა ტრადიციული რისკის ზომების არაადეკვატურობა. მარეგულირებელი ორგანო, როგორიცაა ბაზელის საბანკო ზედამხედველობის კომიტეტი, აღიარებს მონეტარული რისკის ზომების მნიშვნელობას კაპიტალის ადეკვატურობის გამოთვლაში და უზრუნველყოფს მათ გამოყენებას რისკზე დაფუძნებული კაპიტალის სხვადასხვა ჩარჩოში, როგორიცაა ბაზელ III და ბაზელ IV ჩარჩოები. ყველაზე გავრცელებული მონეტარული რისკის საზომებია ღირებულება რისკის ქვეშ (Value at Risk, VaR) და მოსალოდნელი ჩავარდნა (Expected Shortfall, ES) (იხ. მაგ. BIS, 2012, 2016a, 2016b).

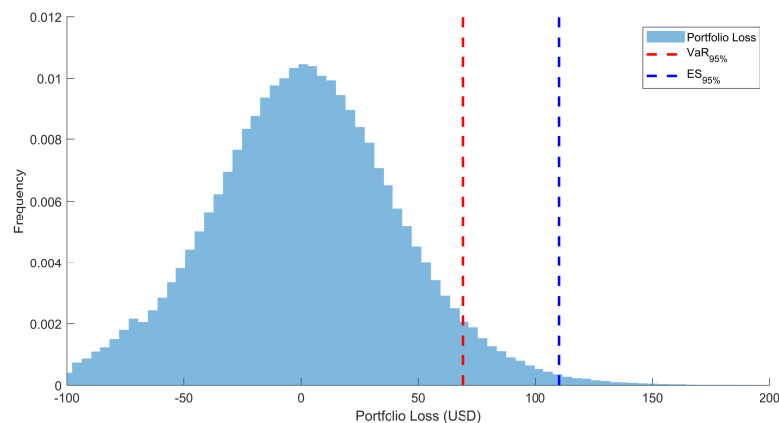
განსაზღვრება 2.1.5. ფინანსური პოზიციის W -ს ღირებულება რისკის ქვეშ (Value at Risk, VaR) $\alpha \in (0, 1)$ ნდობის დონით, ცნობილი განაწილების კანონის P -ს მიმართ $(\Omega, \mathcal{F})$ სივრცეზე განსაზღვრულია

$$\text{VaR}_{\alpha, P}(W) = \inf \{x \in \mathbb{R} : P(W < -x) \leq 1 - \alpha\}. \quad (2.4)$$

განსაზღვრება 2.1.6. დავუშვათ $\mathcal{X} \subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$. ფინანსური პოზიციის W -ს მოსალოდნელი ჩავარდნა (Expected Shortfall, ES) $\alpha \in (0, 1)$ ნდობის დონით, ცნობილი განაწილების კანონის P -ს მიმართ $(\Omega, \mathcal{F})$ სივრცეზე განსაზღვრულია

$$ES_{\alpha, P}(W) = -\frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}(W \mathbb{1}_{\{W \leq -\text{VaR}_{\alpha, P}(W)\}}) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_{\gamma, P}(W) d\gamma. \quad (2.5)$$

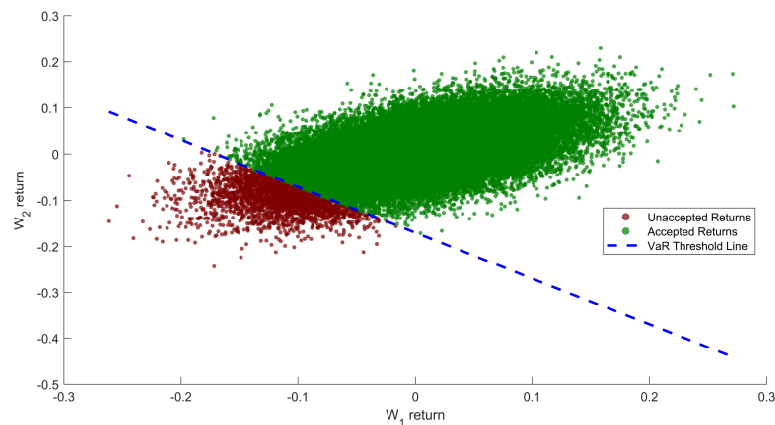
VaR შემუშავდა 1980-იანი წლების ბოლოს და მომდევნო ათწლეულის განმავლობაში იგი ჩამოყალიბდა, როგორც რისკის ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი საზომი გლობალურ ფინანსურ ბაზრებზე. მათემატიკურად VaR წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის კვანტილს და განსაზღვრავს მაქსიმალურ შესაძლო ფინანსურ ზარალს α ნდობის დონით. მრავალ შემთხვევაში VaR ვერ უზრუნველყოფს ექსტრემალური რისკის შეფასებას, რადგან არ ითვალისწინებს განაწილების კუდს. ES წარმოადგენს ზარალის პირობით ლოდინს, თუ ზარალი გადააჭარბებს VaR-ს. ES შეისწავლის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კუდს და უფრო მიზანშეწონილია კომპლექსური ბიმოდალური პორტფელების რისკის შეფასებისთვის (BIS, 2012). ამასთან, რადგან ES წარმოადგენს ინტეგრალს, მათემატიკურად უფრო მარტივია მისი პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანებში მისი გამოყენება, ვიდრე VaR-ის. სურათი 2.1 ასახავს პორტფელის VaR და ES საზომებს 95% ნდობის ინტერვალისთვის. მაგალითში დაშვებულია სტიუდენტის განაწილება 5 თავისუფლების ხარისხით და პორტფელის თავდაპირველი ღირებულება USD 1,000. როგორც მოველოდით ES გაცილებით უფრო დიდია ვიდრე VaR.



სურ. 2.1: პორტფელის VaR და ES.

მონეტარული რისკის ზომების კონტექსტში განისაზღვრება ე.წ. მხარდაჭერის სიმრავლე (Acceptance Set), A_ρ , რომელიც წარმოადგენს ფინანსური პორტფელების ერთობლიობას, რომლებიც არ საჭიროებენ კაპიტალის რეზერვს ρ -ს მიმართ. მონეტარული

რისკის მუდმივის ინვარიანტულობის თვისება უზრუნველყოფს, რომ ნებისმიერი ფინანსური პოზიციისთვის, ნებისმიერი მონეტარული რისკის საზომისთვის არსებობს კაპიტალის მოცულობა, რომელიც პოზიციას მოათავსებს მხარდაჭერის სიმრავლეში. მხარდაჭერის სიმრავლე განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანებში. მხარდაჭერის სიმრავლის მაგალითი სქემატურად წარმოდგენილია ორი ფინანსური აქტივისგან შემდგარი პორტფელისთვის 2.2 სურათზე. ლურჯი ხაზის ქვემოთ მოთავსებული პოზიციები საჭიროებენ კაპიტალის დამატებას, რომ მოხდეს არსებული ჭარბი ფინანსური რისკის კომპენსირება.



სურ. 2.2: მხარდაჭერის სიმრავლე (Acceptance Set) W_1 და W_2 ფინანსური პოზიციებისგან შემდგარი პორტფელისთვის.

ზოგადად, მონეტარული რისკის ზომები არ ითვალისწინებს დივერსიფიკაციის სარგებელს. მონეტარული რისკის ზომების მნიშვნელოვანი ოჯახი, რომელიც ითვალისწინებს დივერსიფიკაციის სარგებელს, არის კოჰერენტული რისკის ზომები (Artzner et al., 1999).

განსაზღვრება 2.1.7. მონეტარული რისკის ზომა $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ არის ლოგიკურად თანმიმდევრული (კოჰერენტული), თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ მოთხოვნებს:

- (i) სუბადიციურობა: $\rho(W_1 + W_2) \leq \rho(W_1) + \rho(W_2)$,
- (ii) დადებითი ჰომოგენურობა: $\rho(\alpha W) = \alpha \rho(W)$, $\alpha \geq 0$.

სუბადიციურობა ინვესტორს შესაძლებლობას აძლევს შეამციროს პორტფელის რისკი დივერსიფიკაციის სტრატეგიით. ზოგადი VaR ე.წ. არაელიპტიკური განაწილების კანონებისთვის შეიძლება არ იყოს სუბადიციური და, შესაბამისად, ლოგიკურად თანმიმდევრული. აღნიშნული შეზღუდვა წარმოადგენს VaR-ის, როგორც ადეკვატური რისკის

საზომის, ძირითად ნაკლოვანებას. მტკიცდება, რომ ES არის ყოველთვის კოჰერენტული რისკის საზომი (იხ. Acerbi and Tasche, 2002).

დადებითი ჰომოგენურობა არის მნიშვნელოვანი თეორიული თვისება, რომელიც მოითხოვს, რომ რისკი იყოს სკალირებადი. თუმცა, პრაქტიკაში ეს თვისება შეიძლება ყოველთვის არ იყოს ჭეშმარიტი, განსაკუთრებით ფინანსური პოზიციის ლიკვიდობის განთვალისწინებით. მაგალითად, ფინანსურ ბაზრებზე პოზიციების სკალირებამ შეიძლება გაზარდოს რისკი არაწრფივი გზით, ისეთი ფაქტორების გამო, როგორიცაა ბაზარზე გავლენა და ტრანზაქციის ხარჯები. შესაბამისად, მთელი რიგი ფინანსური აქტივებისთვის დადებითი ჰომოგენურობა არ დასტურდება ემპირიულად. ამ პრობლემის გადასაჭრელად პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ამოზნექილი რისკის ზომები, რადგან ისინი უზრუნველყოფენ მეტ მოქნილობას და, იმავდროულად, ითვალისწინებენ დივერსიფიკაციის სარგებელს.

განსაზღვრება 2.1.8. მონეტარული რისკის საზომი $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ არის ამოზნექილი საზომი, თუ:

$$\rho(\alpha W_1 + (1 - \alpha) W_2) \leq \alpha \rho(W_1) + (1 - \alpha) \rho(W_2), \text{ ნებისმიერი } \alpha \in [0, 1].$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი კოჰერენტული რისკის საზომი არის ამოზნექილი. ამოზნექილი რისკის საზომი არის კოჰერენტული, თუ ის აკმაყოფილებს დადებითი ჰომოგენურობის მოთხოვნას. ES არის ამოზნექილი რისკის საზომი, ხოლო VaR მხოლოდ ელიპტიკური განაწილებებისთვის. გარდა რეალისტური ეკონომიკური თვისებებისა, ამოზნექილი რისკების საზომი წარმოადგენს მათემატიკურად მარტივ მოდელს, რომელიც შესაძლებლობას გვაძლევს ვიპოვოთ ოპტიმალური პორტფელი სარგებლიანობის თეორიასა და პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანებში. ამოზნექილი რისკების საზომის მხარდაჭერის სიმრავლე მათემატიკურად ამოზნექილია, ხოლო ოპტიმიზაციის ამოცანები ამოზნექილ სიმრავლეზე კარგად არის შესწავლილი.

კოჰერენტული რისკების ზომებთან მჭიდრო კავშირშია ე.წ. სპექტრული რისკების ოჯახი. იხ. Acerbi, 2002.

განსაზღვრება 2.1.9. W ფინანსური პოზიციის სპექტრული რისკის საზომი $\text{SPR}_{\phi, P}(W)$ ცნობილი განაწილების კანონის P -ს მიმართ განსაზღვრულია:

$$\text{SPR}_{\phi, P}(W) = - \int_0^1 F_{W, P}^{-1}(\gamma) \phi(\gamma) d\gamma, \quad (2.6)$$

სადაც $F_{W, P}^{-1}$ წარმოადგენს W -ს კვანტილის ფუნქციას და ϕ არის მონოტონურად არამ-

ზარდი, არაუარყოფითი, მარჯვნიდან უწყვეტი, ინტეგრირებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $\int_0^1 \phi(\gamma) d\gamma = 1$.

ES და VaR წარმოადგენს სპექტრული ზომის კონკრეტულ შემთხვევებს. ES-ის მისაღებად საკმარისია განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია:

$$\phi(\gamma) = \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{1}_{\gamma \geq \alpha}. \quad (2.7)$$

როდესაც $\phi(p) = \delta_\alpha$ შესაბამისი რისკის საზომი არის VaR. აღსანიშნავია, რომ 2.1 სურათზე არსებული VaR-ის მარჯვნივ არსებული ნებისმიერი წერტილი, პორტფელის მაქსიმალურ დანაკარგამდე (ჩათვლით) წარმოადგენს სპექტრული რისკის საზომს სხვადასხვა რისკის მადის შემთხვევისთვის.

პრაქტიკაში ფართოდ არის გავრცელებული მონეტარული რისკის საზომი, რომელიც მთლიანად დამოკიდებულია W -ს ალბათური განაწილების კანონზე.

განსაზღვრება 2.1.10. მონეტარული რისკის საზომს ρ , ეწოდება განაწილების ინვარიანტული $\mathcal{X} \subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -ზე, თუ $\rho(W_1) = \rho(W_2)$, როდესაც W_1 და W_2 აქვს ერთი და იგივე ალბათური განაწილების კანონი P -ს მიხედვით (იხ. Föllmer and Schied, 2016).

ცხადია, რომ VaR, ES და სპექტრული ზომები არიან განაწილების ინვარიანტული.

რისკის საზომს ვუწოდებთ ნორმირებულს, თუ $\rho(0) = 0$. წინამდებარე ნაშრომში ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე დავუშვებთ, რომ რისკის საზომი ყოველთვის ნორმირებულია.

2.1.3 VaR და ES: შეფასების მეთოდები, უპირატესობები და ნაკლოვანებები

წინამდებარე ნაშრომში შესწავლილი რისკის ზომები ზოგადი ხასიათისაა და შედეგების განზოგადება შესაძლებელია ნებისმიერ მონეტარული რისკის საზომზე. თუმცა, პრაქტიკაში ყველაზე უფრო გავრცელებული რისკის საზომები არის VaR და ES. შესაბამისად ამ ქვეთავში ჩამოვყალიბებთ მათი შეფასების პრაქტიკულ მეთოდებს, და შევაჯამებთ მათ უპირატესობებსა და ნაკლოვანებებს.

თავდაპირველად საჭიროა განისაზღვროს ეკონომიკური პარამეტრები, როგორიცაა რისკის ჰორიზონტი და ნდობის დონე. აღნიშნული პარამეტრები ძირითადად ასახულია ფინანსური ინსტიტუტის მიერ შემუშავებულ რისკის მადის დოკუმენტში, სადაც აღწერილია რისკების საზღვრები და ეკონომიკური პარამეტრები.

VaR და ES გამომანგარიშებისას მეორე ეტაპი არის პორტფელში არსებული აქტივების დაკავშირება რისკის ფაქტორებთან. აღნიშნულ პროცესს ეწოდება რისკის დაშლა (Alexander, 2009). ზოგიერთ შემთხვევაში, ეს პროცესი შეიძლება იყოს ძალიან მარტივი: მაგალითად მხოლოდ უცხოური ვალუტებისგან შემდგარი პორტფელისთვის თავად ეს ვალუტები წარმოადგენენ რისკის ფაქტორებს. სხვა შემთხვევებში, პროცესი შეიძლება იყოს უფრო რთული. მაგალითად, კონვერტირებად ობლიგაციას გააჩნია, როგორც საპროცენტო განაკვეთის, ასევე აქციის რისკის ფაქტორები და საკრედიტო რისკი. რისკების დაშლის პროცესში შესაძლოა გამოყენებული იყოს რისკების ფაქტორების აგრეგაცია. მაგალითად, თუ დივერსიფიცირებული პორტფელი შეიცავს მხოლოდ აქციებს, ინდივიდუალური რისკის ფაქტორებს წარმოადგენენ შესაბამისი აქციები, თუმცა მათ ნაცვლად შეიძლება გამოყენებული იქნას საფონდო ინდექსი, რომელიც მჭიდროდ განსაზღვრავს ინდივიდუალური აქციის შემოსავლიანობას. რისკის დაშლის პროცესში მთავარია, ერთი მხრივ, რაც შეიძლება ზუსტად იყოს წარმოდგენილი პორტფელის დამოკიდებულება რისკის ფაქტორებზე და მეორე მხრივ, ეფექტურად გაკონტროლდეს რისკის ფაქტორების რაოდენობა, რომ არ შეიქმნას არაადეკვატურად დიდი რისკის ფაქტორების სიმრავლე. მაგალითად, განვიხილოთ გრძელვადიანი BBB-, BBB და BBB+ რეიტინგების კორპორაციული ობლიგაციებისგან შემდგარი პორტფელი. დავუშვათ, რომ პორტფელში შედის 30 ინსტრუმენტი, რომელთაგანაც 15 აქტივი არის ევროპული კომპანიების 20-წლიანი ვადით გამოშვებული ობლიგაციები დენომინირებული ევროში, ხოლო დანარჩენი 15 ასევე 20-წლიანი ვადით გამოშვებული ამერიკული კორპორაციების ობლიგაციები, რომლებიც დენომინირებულია აშშ დოლარში. სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ ყველა ინსტრუმენტი იხდის კუპონს წელიწადში ორჯერ ერთი და იმავე დღეს. აღნიშნული პორტფელის რისკი დამოკიდებულია ევროს მომგებიანობის მრუდზე, აშშ დოლარის მომგებიანობის მრუდზე და საკრედიტო რისკის მრუდებზე, ე.ი. BBB-, BBB და BBB+ რეიტინგის CDS (credit default swap) ბაზრის მრუდებზე. შესაბამისად, მარტივი პორტფელისთვის, რომელიც შეიცავს მხოლოდ 30 ობლიგაციას, არსებობს 5 მრუდი და თითოეული მრუდის 40 წერტილი (ყოველი ობლიგაცია არის 20-წლიანი ვადით და კუპონს იხდის წელიწადში ორჯერ), რაც ჯამში იძლევა 200 რისკის ფაქტორს. ცხადია, აღნიშნული რისკის დაშლა არაპრაგმატულია, რადგან 200 ფაქტორისგან შემდგარი მოდელის ანალიზი არა მხოლოდ რთულია კომპიუტერული გამომანგარიშების პერსპექტივით, არამედ პრობლემატურია ეკონომეტრიკული თვალსაზრისით, რადგან კალიბრაციისთვის საჭირო მონაცემების რაოდენობა ძალიან დიდია. პრაქტიკაში მსგავსი პორტფელის რისკის დაშლისას გამოყენებული იქნება ე.წ. პრინციპური კომპონენტების ანალიზი (PCA) მრუდებისთვის, რაც თითოეული მრუდისთვის შექმნის 2 ან 3 დამოუკიდებელ

რისკ ფაქტორს. შესაბამისად, 200 ფაქტორის ნაცვლად მოდელი დაფუძნებული იქნება 10-15 რისკ ფაქტორზე.

VaR და ES შეფასების შემდეგი ეტაპი მოითხოვს მონაცემთა ისტორიის შეგროვებას მოდელის თითოეული რისკის ფაქტორისთვის. ნებისმიერი ფინანსური მოდელისთვის პარამეტრების შეფასების ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული წყაროა ისტორიული მონაცემები. შესაბამისად, მონაცემთა ხარისხი და ხელმისაწვდომობა მნიშვნელოვანი ფაქტორია.

მეოთხე ეტაპზე ხდება უშუალოდ VaR და ES გამოანგარიშება. პრაქტიკაში განასხვავებენ 3 ძირითად მეთოდს (Alexander, 2009).

1. **ისტორიული სიმულაციის მეთოდი:** ისტორიული სიმულაციის მეთოდი არის ერთ-ერთი უმარტივესი და ინტუიციური მიდგომა VaR-ისა და ES-ის გამოსათვლელად. ის მოიცავს რისკ ფაქტორების ისტორიული მონაცემების გამოყენებას პორტფელის მომავალი შემოსავლიანობის განაწილების სიმულაციისთვის. აღნიშნული ემპირიული განაწილებიდან VaR და ES პირდაპირ გამოითვლება როგორც კვანტილი ისე სუპერკვანტილი. ისტორიული სიმულაციის მეთოდი გულისხმობს, რომ ისტორიული მონაცემები იძლევა გონივრულ საფუძველს მომავალი რისკების პროგნოზირებისთვის, რაც მის განხორციელებასა და გაგებას ამარტივებს. ის არ საჭიროებს რაიმე ვარაუდს განაწილების კანონის შესახებ, რაც მას შედარებით რთვასტულს ხდის მოდელის რისკის მიმართ. თუმცა, მისი დამოკიდებულება ისტორიულ მონაცემებზე ნიშნავს, რომ მას არ შეუძლია ასახოს მომავალი ცვლილებები ბაზრის ისეთ დინამიკაში, რომელიც ისტორიულად არ დაფიქსირებულა. მაგალითად, 2022 წლის აგვისტოში დაფიქსირებული ფასის დონე ევროპის ელექტროენერგიის ბირჟაზე და ვარიაცია უპრეცედენტო მასშტაბის მოვლენა იყო და ვერ იქნებოდა პროგნოზირებული მხოლოდ ისტორიულ მონაცემებზე დაყრდნობით (Tertre, 2023).
2. **პარამეტრული მეთოდი:** პარამეტრული მეთოდი, რომელიც ხშირად ცნობილია როგორც ვარიაცია-კოვარიაციის მიდგომა, ვარაუდობს, რომ აქტივების ლოგარითმული შემოსავლიანობა განაწილებულია ნორმალური კანონით. ამ დაშვებით, VaR შეიძლება გამოითვალოს მხოლოდ აქტივების შემოსავლიანობის საშუალო და სტანდარტული გადახრის გამოყენებით. ეს მეთოდი გაცილებით ეფექტურია და შესაფერისია პორტფელებისთვის, სადაც აქტივების შემოსავლიანობა საკმაოდ არის მიახლოებული ნორმალურ განაწილებასთან. თუმცა, მისი მთავარი ნაკლი

არის სწორედ ნორმალურობის დაშვება, რომელიც ვერ აფასებს განაწილების კუდებს, რაც არაადეკვატურად ასახავს დიდი ფინანსური დანაკარგების ალბათობას. ცხადია, რისკების საზომების შეფასების პარამეტრულ მეთოდს გააჩნია უზარმაზარი მოდელის რისკი. სწორედ ამიტომ, როგორც წესი, ის არ გამოიყენება მსხვილი ფინანსური ინსტიტუტების მიერ.

3. **მონტე კარლოს სიმულაცია:** მონტე კარლოს სიმულაცია არის მრავალმხრივი და მძლავრი მეთოდი VaR-ისა და ES-ის შესაფასებლად, განსაკუთრებით რთული პორტფელებისთვის, რომლებიც მოიცავს ოფციონებსა და სხვა არაწრფივ წარმოებულ ფასიან ქაღალდებს. ეს ტექნიკა იყენებს შემთხვევით შერჩევას დიდი რაოდენობის პოტენციური სამომავლო შედეგების სიმულირებისათვის. ამასთან, სიმულაციისთვის საჭიროა განაწილების კანონის დაშვება. მონტე კარლოს სიმულაციას შეუძლია გამოიყენოს ნებისმიერი განაწილების კანონი და, პარამეტრული მეთოდისგან განსხვავებით, არ შემოიფარგლება მხოლოდ ნორმალური განაწილებით. გენერირებული შედეგები ქმნიან შემოსავლიანობის ემპირიულ განაწილებას, საიდანაც გამოითვლება VaR და ES. ეს მეთოდი იძლევა შესაძლო სცენარის ფართო სპექტრის მოდელირებას და ისეთი სპეციფიკური მახასიათებლების, როგორებიცაა მძიმე კუდები, ასიმეტრია და ვარიაციის კლასტერი, ჩართვას მოდელში. მეთოდის მთავარი ნაკლი მდგომარეობს იმაში, რომ რთული პორტფელებისთვის სიმულაციის კრებადობის მისაღწევად საჭიროა მილიონობით იტერაცია, რაც გულისხმობს გამოანგარიშებებისთვის საჭირო დიდ დროს.

VaR და ES , როგორც რისკის საზომის გამოყენებას აქვს რამდენიმე მნიშვნელოვანი უპირატესობა:

1. **მათემატიკური და ეკონომიკური სიმარტივე.** ღირებულება რისკის ქვეშ და მოსალოდნელი ჩავარდნა შედარებით ადვილი გასაგებია. მიუხედავად იმისა, რომ მეთოდოლოგია შეიცავს ტექნიკურ დეტალებს, კონცეფცია ძალიან მარტივია. გადაწყვეტილების მიმღებებს ტექნიკური ცოდნის გარეშე შეუძლიათ გააცნობიერონ შესაძლო დანაკარგების ალბათობა. ამავედროს, რისკების მენეჯერს საშუალება აქვს შეაფასოს რისკი საჭირო კაპიტალის კონტექსტში.
2. **ფუნდამენტური კონცეფცია, როგორც ინვესტორებთან, ასევე მარეგულირებელ ორგანოებთან კომუნიკაციისას.** VaR და ES არის ფინანსურ სამყაროში დამკვიდრებული ენა, რომელზეც საუბრობს არა მხოლოდ რისკების მენეჯმენტი, არამედ

ინვესტორები, გენერალური მენეჯმენტი, მარეგულირებელი ორგანოები და მარკეტინგი. აღნიშნული საზომები შესაძლებელია გამოყენებული იყოს როგორც რისკების შესაფასებლად, ასევე პორტფელის პერფორმანცის გასაზომად, საზღვრების დასაწესებლად, რეალური და ფინანსური ინვესტიციების დასაგეგმავად, ბიუჯეტირებისთვის, ინვესტორებთან მარკეტინგული კომუნიკაციისთვის და ა.შ. თუ ინფორმაციის მიმღებს სრულად ესმის VaR და ES მნიშვნელობა და შეზღუდვები, VaR და ES წარმოადგენს მნიშვნელოვან და პრაქტიკულ ინფორმაციას.

3. **რისკების დაშლა და აგრეგაცია.** VaR და ES შესაძლებლობას იძლევა შეფასდეს არამხოლოდ არსებული პორტფელის მთლიანი რისკი, არამედ თითოეული კომპონენტის ცალკეული რისკი პორტფელის კონტექსტში (არსებული დივერსიფიკაციის სრული გათვალისწინებით). ამავდროულად, ადვილად არის შესაძლებელი გამოვიანგარიშოთ ზღვრული რისკის ზომები, რომლებიც საშუალებას იძლევა შეფასდეს მომავალი ინვესტიციების ზეგავლენა პორტფელის რისკზე.

გარდა მნიშვნელოვანი მოდელის რისკისა, VaR და ES გააჩნია ორი მთავარი ნაკლი:

1. **საბაზრო ლიკვიდურობის გაუთვალისწინებლობა.** თუ პორტფელში ზოგიერთი აქტივი შედარებით არალიკვიდურია, VaR და ES არ იძლევა რისკების ადეკვატურ შეფასებას. ლიკვიდურობის კრიზისისას, როდესაც ბევრი ინვესტორი ცდილობს არასასურველი ინსტრუმენტების გაყიდვას, ხოლო მყიდველთა რაოდენობა გაცილებით მცირეა, საბაზრო დანაკარგების გარდა, პორტფელს ექნება დამატებითი დანაკარგები ე.წ. იაფი ლიკვიდაციის გამო. აღნიშნული ფენომენი არ ჰპოვებს ასახვას სტანდარტულ VaR და ES საზომებში. იმისათვის, რომ მოხდეს პორტფელის საბაზრო ლიკვიდურობის რისკის ადეკვატური მონიტორინგი საჭიროა სპეციალური რეგულარული სტრეს-ტესტირება და ინსტრუმენტების საბაზრო ლიკვიდურობის სცენარების ანალიზი (იხ. მაგ.: Bervas et al., 2006; Dong et al., 2019; Ruozhi et al., 2013; Trebbi and Xiao, 2019).
2. **მოწყვლადობა საბაზრო ტრენდის მიმართ.** პორტფელი შეიძლება დარჩეს VaR და ES ლიმიტის ჩარჩოში ყოველდღე, მაგრამ განიცადოს გრძელვადიანი ყოველდღიური მცირე ზარალი, რომელიც ყოველდღიურად უახლოვდება საზღვარს. ასეთ ვითარებაში, პორტფელს შეუძლია მნიშვნელოვანი ზარალის დაგროვება მაშინ, როდესაც ტექნიკურად VaR და ES საზღვრები არ დაირღვევა. თუ მენეჯმენტი არ მოახდენს საბაზრო ტრენდის დროულ შეფასებას და პორტფელის დინამიურ

მართვას ასეთ შემთხვევაში VaR და ES ვერ უზრუნველყოფს საბაზრო რისკებისგან დაცვას. აღსანიშნავია, რომ აღნიშნული ფენომენი განსაკუთრებით საშიშია ბაზრის დაბალი ვოლატილობის პერიოდებში (Alexander, 2009).

2.1.4 კონკრეტული მაგალითი: რამდენად მნიშვნელოვანია მოდელის რისკი?

განვიხილოთ რისკიანი აქტივი W , რომლის ლოგარითმული შემოსავლიანობა განაწილებულია ნორმალური კანონით. დავუშვათ, რომ განაწილების მათემატიკური ლოდინი არის 0, ხოლო სტანდარტული გადახრა σ უცნობია. ამასთან, დავუშვათ, რომ σ -ს განაწილების კანონი ცნობილია და წარმოადგენს ბეტა განაწილებას ცნობილი პარამეტრებით 5 და 2. ნორმალური განაწილების შემთხვევაში, აქტივის VaR და ES განსაზღვრულია:

$$\text{VaR}_{\alpha, N(0, \sigma)}(W) = W_0 [1 - \exp(\sigma \Phi^{-1}(1 - \alpha))] , \quad (2.8)$$

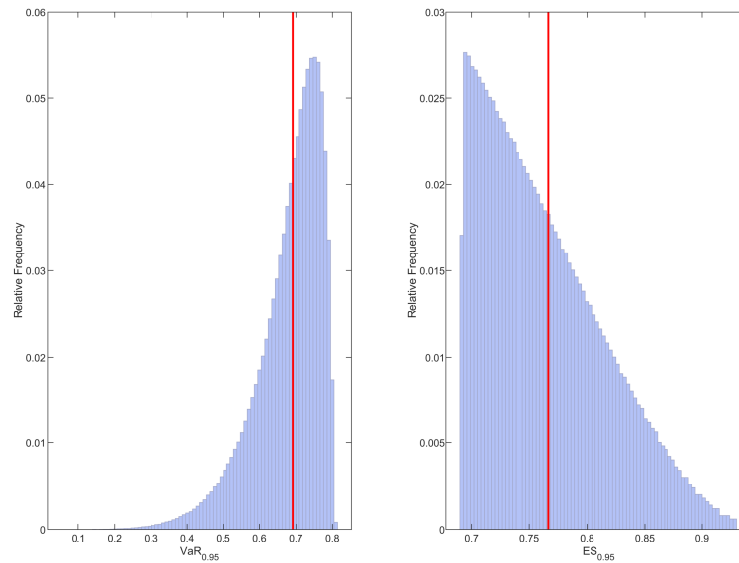
$$\text{ES}_{\alpha, N(0, \sigma)}(W) = W_0 \left[1 - \frac{1}{1 - \alpha} \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) [1 - \Phi(\sigma + \Phi^{-1}(\alpha))] \right] , \quad (2.9)$$

სადაც, W_0 წარმოადგენს აქტივის მიმდინარე ფასს, ხოლო Φ არის სტანდარტული ნორმალური განაწილების კუმულატიური განაწილების ფუნქცია.

დავუშვათ, რისკების მენეჯერი შეისწავლის აქტივის შემოსავლიანობის ისტორიულ მონაცემებს და დაასკვნის, რომ $\sigma = 0.7141$ ². დავუშვათ, აქტივის ღირებულება არის 1 ევრო. 95% ნდობის დონისთვის, რისკის ზომები ერთი წლის რისკის ჰორიზონტით არის $\text{VaR} = 0.6911$ და $\text{ES} = 0.7665$.

რადგან აქტივის რეალური სტანდარტული გადახრა უცნობია, საბაზრო რისკის ზომები წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს. სურათი 2.3 ასახავს $\text{VaR}_{0.95}$ და $\text{ES}_{0.95}$ განაწილებას. ცხადია, რეალური საბაზრო რისკი მნიშვნელოვნად განსხვავდება ზემოთ მოყვანილი წერტილოვანი შეფასებებისგან. განსაკუთრებით მგრძნობიარე მოდელის რისკის მიმართ არის $\text{ES}_{0.95}$, რადგან ის ითვალისწინებს ე.წ. კუდის რისკს (tail risk). შემდეგ თავებში დეტალურად განვიხილავთ სხვადასხვა რისკის საზომს, რაც შესაძლებლობას მოგვცემს მთლიანად გავითვალისწინოთ მოდელის შეცდომით შერჩევის რისკი.

²აღნიშნული მნიშვნელობა შეესაბამება სტანდარტული გადახრის საშუალო მნიშვნელობას ქეისში დაშვებული ბეტა განაწილების პარამეტრების მიხედვით.



სურ. 2.3: $VaR_{0.95}$ და $ES_{0.95}$ განაწილება. წითელი ხაზით აღნიშნულია რისკების ზომების წერტილოვანი შეფასებები.

2.2 საბაზრო რისკის განზოგადებული საზომები

რისკების მენეჯმენტის პრაქტიკაში დამკვიდრებული ტრადიციული და მონეტარული რისკების ზომები დამოკიდებულია რისიკიანი აქტივის ან პორტფელის განაწილების კანონზე. კლასიკური ეკონომიკური მიდგომით აღნიშნული განაწილების კანონი მოცემულია. ყველგან ქვემოთ დავუშვებთ, რომ მოდელი უცნობია და ჩამოვყალიბებთ საბაზრო რისკის გაზომვის ჩარჩოს, რომელიც ითვალისწინებს მოდელის რისკებს. კერძოდ, განხილული იქნება მონეტარული საბაზრო რისკის საზომები, რომლებიც მოიცავენ მოდელის რისკს. ჩვენ განვსაზღვრავთ და დეტალურად განვიხილავთ მოდელით შეწონილ საბაზრო რისკის ზომებს და ზოგად სუპერპოზიციურ რისკის ზომებს. შესწავლილი იქნება ამ ზომების ძირითადი ეკონომიკური და მათემატიკური თვისებები. ასევე წარმოდგენილია სხვადასხვა პრაქტიკული მაგალითები. ქვეთავის ბოლოს, ჩვენ დავამტკიცებთ სუპერპოზიციური რისკის ზომის რობასტულ წარმოდგენას ამოზნექილი რისკის საზომებისთვის.

2.2.1 საბაზრო რისკის საზომები უცნობი მოდელის შემთხვევაში

მონეტარული რისკის ზომები დაფუძნებულია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონზე P რომელიც განსაზღვრულია ზომად სივრცე $(\Omega, \mathcal{F})$ -ზე. ჩვენ ვუწოდებთ ამ უცნობ ალბათურ ზომას P მოდელს. განვიხილოთ სიმრავლე M , რომელიც მოიცავს

ალბათურ ზომა P -ს $(\Omega, \mathcal{F})$ ზომად სივრცეზე. მაგალითად, M შეიძლება იყოს სიმრავლე, რომელიც მოიცავს ყველა პარამეტრულ ალბათურ განაწილების კანონს $(\Omega, \mathcal{F})$ სივრცეზე.

$$M = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}, \quad (2.10)$$

სადაც $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ წარმოადგენს პარამეტრების სივრცეს. განვსაზღვროთ σ -ალგებრას $\mathcal{M}$, M სიმრავლეზე,

$$\mathcal{M} = \{\{P_\theta : \theta \in D\}, D \in \mathcal{B}(\Theta)\}, \quad (2.11)$$

სადაც, $\mathcal{B}(\Theta)$ აღნიშნავს ბორელის σ -ალგებრა Θ სიმრავლეზე. ცხადია ამ შემთხვევაში მოდელის სივრცე $(M, \mathcal{M})$ არის ზომადი.

შემდგომში, ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვებთ, რომ მოდელის სიმრავლე M მოცემულია. თითოეული მოდელისთვის $m \in M$ განვსაზღვროთ ფინანსური პოზიციის $W \in \mathcal{X}$ მონეტარული რისკის საზომი $\rho_m : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. მონეტარული რისკის ზომის ოჯახი განვსაზღვროთ, როგორც $\rho = (\rho_m)_{m \in M}$. ამასთან, ჩვენ ვუწოდებთ ρ კოჰერენტულს (ამოზნეპილს) თუ ρ_m არის კოჰერენტული (ამოზნეპილი) ყოველი მოდელისთვის $m \in M$. ასევე, ρ ვუწოდებთ $\mathcal{M}$ -ზომადს თუ $\rho(W) : M \rightarrow \mathbb{R}$ არის $\mathcal{M}$ -ზომადი ყოველი ფინანსური პოზიციისთვის $W \in \mathcal{X}$. რისკის ზომის ოჯახს ρ ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ $\rho_m(W)$ შემოსაზღვრულია M -ზე, ყოველი $W \in \mathcal{X}$. როდესაც, $\mathcal{X} \subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$, მონოტონურობის, მუდმივის ინვარიანტულობისა და ნორმირებულობის თვისებებიდან, ρ არის შემოსაზღვრული ყოველი $W \in \mathcal{X}$ ფინანსური პოზიციისთვის.

ყველაზე მარტივი საბაზრო რისკის საზომი, რომელიც ითვალისწინებს მოდელის რისკს არის მაქსიმალური (worst case) საბაზრო რისკის საზომი.

განსაზღვრება 2.2.1. განვიხილოთ შემოსაზღვრული საბაზრო რისკის საზომის ოჯახი ρ . მაქსიმალური (worst case) საბაზრო რისკის საზომი ρ_{WC} განისაზღვრება:

$$\rho_{WC}(W) = \sup_{m \in M} (\rho_m(W)), W \in \mathcal{X}. \quad (2.12)$$

ცხადია, რომ ρ_{WC} არის მონეტარული რისკის საზომი. ამასთან, ρ_{WC} არის კოჰერენტული (ამოზნეპილი) თუ ρ არის კოჰერენტული (ამოზნეპილი) რისკის ოჯახი. მაქსიმალური რისკის საზომი პრაქტიკაში მოუქნელია, რადგან ის გადაჭარბებით აფასებს საჭირო ეკონომიკურ კაპიტალს.

2.2.2 მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის საზომი

დავუშვათ $(M, \mathcal{M})$ წარმოადგენს ზომად მოდელის სივრცეს და μ არის მასზე განსაზღვრული ალბათური ზომა. დავუშვათ რომ ρ არის $\mathcal{M}$ -ზომადი და შემოსაზღვრული³.

განსაზღვრება 2.2.2. მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის საზომი $\rho * \mu$ განსაზღვრულია, როგორც

$$\rho * \mu(W) = \int_M \rho_m(W) d\mu(m). \quad (2.13)$$

განსაზღვრება 2.2.2 ითვალისწინებს ფინანსური ინსტრუმენტის ყველა განაწილების კანონს მოდელის სივრცეზე $(M, \mathcal{M})$. პრაქტიკული დანიშნულებისთვის საინტერესო მაგალითს წარმოადგენს, როდესაც საბაზრო რისკის ზომის ოჯახი ρ არის VaR სხვადასხვა განაწილების კანონის მიხედვით. ცხადია ამ შემთხვევაში $\rho * \mu$ არის მოდელის რისკით შეწონილი VaR. რაც შეეხება თვითონ მოდელის განაწილების კანონს μ , მისი შეფასების პრაქტიკულ ეკონომეტრიკულ მეთოდებს განვიხილავთ შემდეგ თავებში.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს რომ მოდელით შეწონილი რისკის საზომი ინარჩუნებს საბაზრო რისკის ოჯახის ყველა ეკონომიკურ თვისებას. დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ შემდეგ თეორემა.

თეორემა 2.2.1. მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის საზომი არის მონეტარული რისკის საზომი. ამასთან, თუ რისკის ოჯახი ρ არის კოჰერენტული (ამოზნექილი), მაშინ $\rho * \mu$ არის კოჰერენტული (ამოზნექილი).

აღნიშნული თვისება ეკონომიკურად მნიშვნელოვანია და შემდეგ თავებში ხშირად გამოვიყენებთ, როგორც ეკონომიკური კაპიტალის გამონაგარიშებისას, აგრეთვე პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანების გადაწყვეტისას.

შენიშვნა 1. აღსანიშნავია, რომ 2.2.2-თან მონათესავე მიდგომას წარმოადგენს მოდელით შეწონილი განაწილების კანონის გამოყენება. კონკრეტულად, დავუშვათ, $(M, \mathcal{M})$ არის მოდელის ზომადი სივრცე და μ წარმოადგენს ამ სივრცეზე განსაზღვრულ ზომას. შეწონილი ზომა (განაწილების კანონი) $\hat{P}$ ხდომილებათა სივრცე $(\Omega, \mathcal{F})$ -ზე არის

$$\hat{P}(A) = \int_M m(A) d\mu(m), A \in \mathcal{F}. \quad (2.14)$$

³საბაზრო რისკის ზომის ოჯახის შემოსაზღვრულობა არ არის ყოველთვის აუცილებელი პირობა მოდელით შეწონილი რისკის ზომის განსაზღვრისთვის, საკმარისია რომ ინტეგრალი (2.2.2) იყოს მათემატიკურად განსაზღვრული.

ცხადია, შესაძლებელია საბაზრო რისკის განსაზღვრა $\hat{P}$ -ს მიმართ. მაგალითად $\text{VaR}_{\alpha, \hat{P}}(W)$. თუმცა განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ აღნიშნული რისკის საზომი არ წარმოადგენს მოდელით შეწონილ რისკის საზომს და, შესაბამისად, მისი ეკონომიკური ინტერპრეტაცია არაინტუიციურია.

$$\text{VaR}_{\alpha, \hat{P}}(W) \neq \int_M \text{VaR}_{\alpha, m}(W) d\mu(m) = (\text{VaR}_{\alpha, \cdot} * \mu)(W).$$

ამასთან, $\text{VaR}_{\alpha, \hat{P}}(W)$ არ არის მოდელის რისკისგან დამოუკიდებელი საზომი, რადგან ის არ ითვალისწინებს $\text{VaR}_{\alpha, m}(W)$ -ის ვარიაციას მოდელის სივრცეზე.

შენიშვნა 2. მოდელით შეწონილი საბაზრო რისკი განსაზღვრეთ μ ალბათური ზომის მიმართ. აღნიშნული განსაზღვრება მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაჭრისას საკმარისად ზოგადია. თუმცა, იგი არ ითვალისწინებს ეკონომიკური აგენტის სარგებლიანობის ფუნქციას. იმისთვის, რომ ავირიდოთ აღნიშნული შეზღუდვა შესაძლებელია [2.2.2](#) განვაზოგადოთ.

დავუშვათ μ არის სიმრავლის ფუნქცია, რომელიც ნორმირებულია და მონოტონურია $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$, და $\mu(A) \leq \mu(B) = 1$, როდესაც $A \subset B$. μ -ს ეწოდება ფაზური ზომა. დავუშვათ, μ განსაზღვრულია $(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე იხ. Sriboonchita et al., [2009](#) თავი 5. განვიხილოთ შემდეგი რისკის ზომა,

$$\begin{aligned} \rho * \mu(W) &= \int_M \rho_m(W) d\mu(m) \\ &= \int_{-\infty}^0 [\mu(\{m : \rho_m(W) > x\}) - 1] dx + \int_0^\infty \mu(\{m : \rho_m(W) > x\}) dx. \end{aligned}$$

აღსანიშნავია, რომ განზოგადებული რისკის ზომისთვის თეორემა [2.2.1](#) ჭემატირია, თუ μ არის სუბმოდულარული. დამატებითი ინფორმაციისთვის მსგავსი ინტეგრალის ეკონომიკური და მათემატიკური მახასიათებლების შესახებ იხ. Denneberg, [1994](#); Sriboonchita et al., [2009](#), თავი 5.

2.2.3 საბაზრო რისკების სუპერპოზიციური ზომები

მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის ზომის ეკონომიკური ინტერპრეტაცია მჭიდრო კავშირშია ე.წ. მოდელის რისკის ნეიტრალურ გაგებასთან. პრაქტიკაში, არ არის აუცილებელი, რომ რისკების მენეჯერს სურდეს კაპიტალის გამოანგარიშება საშუალო მოდელის რისკისთვის. ისევე, როგორც საბაზრო და საკრედიტო რისკის მენეჯმენტისას, სავარაუდოდ, რისკ მენეჯერს აინტერესებს ე.წ. კუდის რისკი (tail risk). მეორე მხრივ,

ჰეჯფონდის მენეჯერს შეიძლება ჰქონდეს შედარებით დიდი მოდელის რისკის მადა (model risk appetite), თუ ფინანსური კონტრაქტი ან პორტფელი ადეკვატურ მოგებას სთავაზობს. ცხადია, პრაქტიკული ამოცანები საჭიროებს მოქნილ რისკის ზომას, რომელიც გაითვალისწინებს მოდელის რისკებს. ამ მიზნით, ჩვენ განვიხილავთ განზოგადებულ საბაზრო რისკის ზომის ოჯახს, ე.წ. სუპერპოზიციური რისკის ზომას. აღნიშნული ზომა მათემატიკურად წარმოადგენს ფუნქციურ სუპერპოზიციას $\mathcal{X} \subseteq L^0(\Omega, \mathcal{F})$ და $L^\infty(M, \mathcal{M})$ სივრცეებზე.

დავუშვათ, $\zeta : L^\infty(M, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ წარმოადგენს მონეტარული რისკის ზომას მოდელის სივრცეზე $L^\infty(M, \mathcal{M})$. ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ რისკის ზომის ოჯახი ρ არის $\mathcal{M}$ -ზომადი და შემოსაზღვრული.

განსაზღვრება 2.2.3. სუპერპოზიციური რისკის საზომი $\zeta \circ \rho$ ეწოდება სიდიდეს,

$$\zeta \circ \rho(W) = \zeta(-\rho(W)), \quad W \in \mathcal{X}. \quad (2.15)$$

აღნიშნული განსაზღვრება წარმოადგენს ფინანსური რისკის ზომის ყველაზე განზოგადებულ ფორმულირებას. ცხადია, პრაქტიკაში დღესდღეობით დამკვიდრებული ყველა მონეტარული რისკის საზომი წარმოადგენს 2.2.3 კონკრეტულ შემთხვევას. მაგალითად, თუ დავუშვებთ რომ ζ არის დირაკის დელტა ფუნქცია, ხოლო ρ VaR, მაშინ $\zeta \circ \rho$ წარმოადგენს VaR. ამასთან, მნიშვნელოვანია რომ სუპერპოზიციური რისკის საზომი ნაწილობრივ ინარჩუნებს ζ და ρ ეკონომიკურ თვისებებს. რასაც ცხადყოფს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.2.2. სუპერპოზიციური რისკის საზომი $\zeta \circ \rho$ არის მონეტარული რისკის საზომი $\mathcal{X}$ სიმრავლეზე. ამასთან, $\zeta \circ \rho$ არის კოჰერენტული (ამოხსნეილი) რისკის ზომა, თუ ζ და ρ , ორივე კოჰერენტულია (ამოხსნეილი).

დამტკიცება. ნებისმიერი $\alpha \in \mathbb{R}$, ცხადია

$$\zeta \circ \rho(W + \alpha) = \zeta(-\rho(W) + \alpha) = \zeta \circ \rho(W) - \alpha.$$

დავუშვათ, რომ W_1 და W_2 წარმოადგენენ ფინანსურ აქტივს და $W_1 \leq W_2$. მაშინ, $-\rho_m(W_1) \leq -\rho_m(W_2)$, $m \in M$, და, რადგან ζ არის მონოტონური ზომა,

$$\zeta \circ \rho(W_1) \geq \zeta \circ \rho(W_2).$$

შესაბამისად, $\zeta \circ \rho$ არის მონეტარული რისკის ზომა.

დავუშვათ, რომ ζ და ρ , ორივე კოპერენტულია. $\zeta \circ \rho$ -ს დადებითი ჰომოგენურობის თვისება ტრივიალურად გამომდინარეობს განსაზღვრებიდან. ასევე, რადგან ორივე ζ და ρ არის მონოტონური და სუბადიციური,

$$\begin{aligned}\zeta \circ \rho (W_1 + W_2) &= \zeta (-\rho (W_1 + W_2)) \\ &\leq \zeta (-\rho (W_1) - \rho (W_2)) \\ &\leq \zeta (-\rho (W_1)) + \zeta (-\rho (W_2)) \\ &= \zeta \circ \rho (W_1) + \zeta \circ \rho (W_2) .\end{aligned}$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $\zeta \circ \rho$ არის ამოზნექილი რისკის საზომი თუ ζ და ρ ორივე ამოზნექილია. $\square$

სუპერპოზიციური რისკის ზომები გვთავაზობს მრავალფეროვან არჩევანს საბაზრო რისკის მოდელირების და ერთდროულად ითვალისწინებს, როგორც საბაზრო რისკის ასევე მოდელის რისკის ინდივიდუალურ პრეფერენციას. განვიხილოთ რისკ მენეჯმენტის პრაქტიკისთვის რამდენიმე საინტერესო მაგალითი.

თუ $\zeta(\cdot) = \sup_{m \in M}(-\cdot)$ მაშინ სუპერპოზიციური რისკი წარმოადგენს მოდელის რისკის მიმართ მაქსიმალურ საბაზრო რისკის ზომას (worst case) ρ_{WC} . თუ $\zeta(\cdot) = -\mathbb{E}_\mu(\cdot)$ ცხადია სუპერპოზიციური რისკი არის მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის საზომი $\rho * \mu$. პრაქტიკაში განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევები, როდესაც ζ წარმოადგენს კვანტილს ან მასთან დაკავშირებულ ფუნქციას. ასეთი მაგალითებია VaR, ES და სპექტრული რისკის განზოგადებული ზომები.

განსაზღვრება 2.2.4. დავუშვათ μ არის ალბათური ზომა $(M, \mathcal{M})$ მოდელის სივრცეზე.

- (i) განზოგადებული ღირებულება რისკის ქვეშ, ρ რისკის ოჯახის მიმართ, $\alpha \in (0, 1)$ სტატისტიკური ნდობის დონით, განისაზღვრება როგორც:

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{\alpha, \rho, \mu}(W) &= \text{VaR}_{\alpha, \mu}(-\rho(W)) \\ &= \inf \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{m : \rho_m(W) > x\}) \leq 1 - \alpha\}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

- (ii) განზოგადებული მოსალოდნელი ჩავარდნა, ρ რისკის ოჯახის მიმართ, $\alpha \in (0, 1)$ სტატისტიკური ნდობის დონით, განისაზღვრება როგორც:

$$\text{ES}_{\alpha, \rho, \mu}(W) = \text{ES}_{\alpha, \mu}(-\rho(W)) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_{\gamma, \rho, \mu}(W) d\gamma \quad (2.17)$$

- (iii) დავუშვათ, ϕ არის მონოტონურად არა ზრდადი, არაუარყოფითი, მარჯვნიდან უწყვეტი და ინტეგრირებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $\int_0^1 \phi(\gamma) d\gamma = 1$. სპექტრული რისკის საზომი ρ რისკის ოჯახის მიმართ, განისაზღვრება როგორც:

$$\text{SPR}_{\phi, \rho, \mu}(W) = \text{SPR}_{\phi, \mu}(-\rho(W)) = \int_0^1 \text{VaR}_{\gamma, \rho, \mu}(W) \phi(\gamma) d\gamma. \quad (2.18)$$

2.2.2 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $\text{ES}_{\alpha, \rho, \mu}$ და $\text{SPR}_{\phi, \rho, \mu}$ არის კოჰერენტული თუ ρ არის კოჰერენტული. ხოლო $\text{VaR}_{\alpha, \rho, \mu}$ კოჰერენტულია, მხოლოდ თუ μ ელიფსური განაწილების კანონია და იმავდროულად ρ კოჰერენტული რისკის ოჯახს წარმოადგენს.

მივიჩნევთ, რომ საინვესტიციო ბანკების რისკების მენეჯმენტისთვის ყველაზე მნიშვნელოვან რისკის საზომს წარმოადგენს განზოგადებული მოსალოდნელი ჩავარდნა. კერძოდ, როდესაც საჭიროა ეკონომიკური კაპიტალის გამომანგარიშება ან პორტფელის ოპტიმიზაცია განზოგადებული მოსალოდნელი ჩავარდნა უნდა იყოს გამოყენებული როდესაც რისკის ოჯახიც მოსალოდნელი ჩავარდნაა. აღნიშნულის საზომის ცხადი ეკონომიკური უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ რისკების მენეჯერს შეუძლია საბაზრო და მოდელის რისკების მადის თავისუფალი და ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი შერჩევა ($\text{ES}_{\alpha, \text{ES}, \mu}$ გააჩნია ორი სტატისტიკური ნდობის დონე). აღნიშნული რისკის საზომი არამხოლოდ ეკონომიკური თვალსაზრისით არის გამართლებული, არამედ მარტივ მათემატიკური მოდელირების შესაძლებლობასაც იძლევა. რაც შეეხება საბანკო რეგულაციას აქ შესაძლებელია გამოყენებული იყოს როგორც $\text{ES}_{\alpha, \text{ES}, \mu}$, ასევე $\text{ES}_{\alpha, \text{VaR}, \mu}$.

2.2.4 სუპერპოზიციური რისკის ზომის რობასტული წარმოდგენა

საბაზრო რისკის ზომის მოდელის რისკის შეფასება ხშირად დაკავშირებულია ე.წ. რისკის რობასტულ წარმოდგენასთან, რომლის მიხედვითაც ფინანსური პოზიციის რისკი არის განსაზღვრული, როგორც სუპრემუმი რაიმე ალბათური მოდელის სივრცეზე, ფინანსური პოზიციის მათემატიკური ლოდინისა $\mathbb{E}_Q(-W)$ და ე.წ. რისკის საჯარიმო ფუნქციის $\alpha(Q)$ სხვაობის. ამასთან, $\alpha(Q)$ წარმოადგენს Q ალბათური კანონის (მოდელის) სანდოობისა და მოდელის რისკის ავერსიანობის ერთგვარ საზომს.

მსგავსი წარმოდგენა პრაქტიკული დანიშნულებისაა და მნიშვნელოვნად ამარტივებს ეკონომიკურ ამოცანებს, რომლებიც საჭიროებენ მათემატიკურ ოპტიმიზაციას. მაგალითად, პორტფელის მოგების მაქსიმიზაცია რისკის გათვალისწინებით, საბაზრო რისკის (ეკონომიკური კაპიტალის) მინიმიზაცია და ა.შ. ამ პარაგრაფში დავამტკიცებთ სუპერპოზიციური რისკის ზომის რობასტული წარმოდგენის არსებობას და მოვიყვანთ

რამდენიმე საინტერესო მაგალითს.

დავუშვათ, რომ $\mathcal{X} \subseteq L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$. ამასთან, დავუშვათ, რომ ყოველი $m \in M$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი რომელიმე P ალბათური ზომის მიმართ. ასევე, რისკების ზომის ოჯახი ρ არის ალბათური კანონის ინვარიანტული, ე.ი.,

$$\rho_m(W_1) = \rho_m(W_2), \text{ if } W_1 = W_2 \text{ P-a.s., } W_1, W_2 \in \mathcal{X}. \quad (2.19)$$

რისკების ოჯახს ρ ეწოდება უწყვეტი, თუ ყოველი მიმდევრობისთვის, რომელსაც გააჩნია ზღვარი $W_n \rightarrow W$, P-a.s., $W_n, W \in \mathcal{X}$, ნებისმიერ რისკის ზომას გააჩნია ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_m(W_n) = \rho_m(W)$, ყოველი მოდელისთვის $m \in M$. ასევე ვამბობთ, რომ ρ არის უწყვეტი ზემოდან თუ $W_n \downarrow W$, P-a.s., $W_n, W \in \mathcal{X}$, ჭეშმარიტია $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_m(W_n) = \rho_m(W)$, ყოველი $m \in M$.

სიმრავლე $\mathcal{X}$ -ზე განსაზღვრული რისკის საზომი ρ აკმაყოფილებს ფატუს თვისებას (Fatou property), თუ შემოსაზღვრული სიმრავლისთვის $W_n \rightarrow W$, P-a.s., $W_n, W \in \mathcal{X}$, ჭეშმარიტია $\rho(W) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(W_n)$.

დავუშვათ $M_1(P)$ წარმოადგენს სიმრავლეს, რომელიც მოიცავს ყველა შესაძლო ალბათურ ზომას $(\Omega, \mathcal{F})$ -ზე, რომელიც არის აბსოლუტურად უწყვეტი P -ს მიმართ, შესაბამისად $M \subseteq M_1(P)$. დამტკიცების გარეშე მოვიყვანთ თეორემას ამოზნექილი რისკის ზომების რობასტული წარმოდგენის შესახებ.

თეორემა 2.2.3. (იხ., თეორემა 4.33 Föllmer and Schied, 2016) დავუშვათ $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ არის ამოზნექილი რისკის საზომი, რომელიც აკმაყოფილებს ფატუს თვისებას. მაშინ ρ -ს გააჩნია შემდეგი წარმოდგენა

$$\rho(W) = \sup_{Q \in M_1(P)} (\mathbb{E}_Q(-W) - \alpha^{\min}(Q)), W \in \mathcal{X}, \quad (2.20)$$

სადაც მინიმალური ჯარიმის ფუნქცია $\alpha^{\min}$ არის,

$$\alpha^{\min}(Q) = \sup_{W \in \mathcal{X}} \{\mathbb{E}_Q(-W) - \rho(W)\}. \quad (2.21)$$

სუპერპოზიციური რისკის ზომის რობასტული წარმოდგენისთვის განვიხილოთ რაიმე ბენჩმარკ მოდელი μ , რომელიც არის ალბათური ზომა $(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე. აღვნიშნოთ $N_1(\mu)$ სიმრავლე ყველა ალბათური ზომის, რომელიც აბსოლუტურად უწყვეტია μ -ს მიმართ. ასევე, დავუშვათ, რომ ფუნქცია ζ არის განსაზღვრული $L^\infty(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე და μ -ინვარიანტულია, ანუ $\zeta(X_1) = \zeta(X_2)$ თუ $X_1 = X_2$ μ -a.s.

თუ ζ არის ამოზნექილი რისკის ზომა, რომელიც აკმაყოფილებს ფატუს თვისებას, ცხადია, თეორემა 2.2.5-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ელემენტისთვის მოდელის სივრცეზე $X \in L^\infty(M, \mathcal{M})$, ჰემმარიტია

$$\zeta(X) = \sup_{\nu \in N_1(\mu)} (\mathbb{E}_\nu(-X) - \beta^{\min}(\nu)) \quad (2.22)$$

$$\beta^{\min}(\nu) = \sup_{X \in L^\infty(M, \mathcal{M})} \{\mathbb{E}_\nu(-X) - \zeta(X)\}. \quad (2.23)$$

იმავდროულად, თუ $\rho = (\rho_m)_{m \in M}$ არის ამოზნექილი და უწყვეტი, მაშინ

$$\rho_m(W) = \sup_{Q \in M_1(P)} (\mathbb{E}_Q(-W) - \alpha_m^{\min}(Q)) \quad (2.24)$$

$$\alpha_m^{\min}(Q) = \sup_{W \in \mathcal{X}} \{\mathbb{E}_Q(-W) - \rho_m(W)\}. \quad (2.25)$$

ეკონომიკური თვალსაზრისით საინტერესოა კავშირის დადგენა საჯარიმო ფუნქციების $\beta^{\min}$, $\alpha_m^{\min}$ და $\zeta \circ \rho$ სუპერპოზიციური რისკის ზომას შორის. შემდეგი თეორემა აღწერს ამ კავშირს და ამტკიცებს ამოზნექილი სუპერპოზიციური რისკების რობასტული წარმოდგენის არსებობას.

თეორემა 2.2.4. დავუშვათ ζ არის ამოზნექილი რისკის საზომი $L^\infty(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე, რომელიც აკმაყოფილებს ფატუს თვისებას. იმავდროულად, დავუშვათ რომ ρ არის ამოზნექილი რისკების ზომის ოჯახი და ρ არის უწყვეტი. მაშინ, $\zeta \circ \rho$ სუპერპოზიციური რისკის ზომას გააჩნია შემდეგი რობასტული წარმოდგენა,

$$\zeta \circ \rho(W) = \sup_{Q \in M_1(P)} \{\mathbb{E}_Q(-W) - \gamma(Q)\}, W \in \mathcal{X} \quad (2.26)$$

სადაც γ წარმოადგენს სუპერპოზიციური რისკის საჯარიმო ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია,

$$\gamma(Q) = \inf_{\nu \in N_1(\mu)} (\alpha^\nu(Q) + \beta^{\min}(\nu)), \quad (2.27)$$

$$\alpha^\nu(Q) = \inf_{Q: |M \rightarrow M_1(P) \text{ with } \int_M Q_m \nu(dm) = Q} \int_M \alpha_m^{\min}(Q_m) \nu(dm) \quad (2.28)$$

ხოლო $\alpha_m^{\min}$ და $\beta^{\min}$ არიან განსაზღვრული (2.25), და (2.23) ფორმულებით.

თეორემის დამტკიცება იხ. A დანართში.

აღსანიშნავია, რომ სუპერპოზიციური რისკის საზომი შეიძლება წარმოდგენილი

იყოს, როგორც ES ზომების შეუღლება. მართლაც განვიხილოთ სიმრავლე $M_1([0, 1])$, რომელიც მოიცავს ყველა შესაძლო ალბათურ ზომას $[0, 1]$ სიმრავლეზე. არსებობს ამოზნექილი რისკის ზომის შემდეგი წარმოდგენა⁴.

თეორემა 2.2.5. (იხ, თეორემა 4.62 Föllmer and Schied, 2016) დავუშვათ $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ არის ამოზნექილი რისკის საზომი რომელიც არის ალბათური კანონის მიმართ ინვარიანტული და ზემოდან უწყვეტი. მაშინ, ρ -ს გააჩნია შემდეგი წარმოდგენა

$$\rho(W) = \sup_{\eta \in M_1([0,1])} \left(\int_{[0,1]} \text{ES}_{\alpha, P}(W) \eta(d\alpha) - \gamma^{\min}(\eta) \right), W \in \mathcal{X}, \quad (2.29)$$

სადაც

$$\gamma^{\min}(\eta) = \sup_{W \in \mathcal{A}_\rho} \int_{[0,1]} \text{ES}_{\alpha, P}(W) \eta(d\alpha), \quad (2.30)$$

ხოლო $\mathcal{A}_\rho$ აღნიშნავს მიღების სიმრავლეს ρ -სთვის.

განვიხილოთ ამოზნექილი და ზემოდან უწყვეტი რისკის ოჯახი $\rho = (\rho_m)_{m \in M}$, რომელიც აკმაყოფილებს ფატუს თვისებას. 2.2.5 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი მოდელისთვის $m \in M$ არსებობს,

$$\rho_m(W) = \sup_{\eta \in M_1([0,1])} \left(\int_{[0,1]} \text{ES}_{\alpha, P}(W) \eta(d\alpha) - \gamma_m^{\min}(\eta) \right), \quad (2.31)$$

$$\gamma_m^{\min}(\eta) = \sup_{W \in \mathcal{A}_{\rho_m}} \int_{[0,1]} \text{ES}_{\alpha, P}(W) \eta(d\alpha). \quad (2.32)$$

განვიხილოთ ბენჩმარკ მოდელი (ალბათური ზომა) μ , რომელიც განსაზღვრულია $(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე. დავუშვათ, რომ რისკის საზომი ζ , $L^\infty(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე არის ალბათური კანონის ინვარიანტული.

თეორემა 2.2.6. დავუშვათ ζ არის ამოზნექილი რისკის საზომი $L^\infty(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე, რომელიც აკმაყოფილებს ფატუს თვისებას. ამასთან დავუშვათ, რომ რისკების ზომის ოჯახი ρ არის ამოზნექილი და ზემოდან უწყვეტი. მაშინ არსებობს სუპერპოზიციური რისკის ზომის შემდეგი წარმოდგენა,

$$\zeta \circ \rho(W) = \sup_{\eta \in M_1([0,1])} \left(\int_{[0,1]} \text{ES}_{\alpha, P}(W) \eta(d\alpha) - \delta(\eta) \right), W \in \mathcal{X}, \quad (2.33)$$

⁴აღნიშნული წარმოდგენა ჭეშმარიტია, თუ ბენჩმარკი ალბათური ზომა $(\Omega, \mathcal{F})$ სივრცეზე არის არაატომური.

სადაც,

$$\delta(\eta) = \inf_{\nu \in N_1(\mu)} (\gamma^\nu(\eta) + \beta^{\min}(\nu)), \quad (2.34)$$

$$\gamma^\nu(\eta) = \inf_{\eta, |M \rightarrow M_1([0,1]) \text{ with } \int_M \eta_m \nu(dm) = \eta} \int_M \gamma_m^{\min}(\eta_m) \nu(dm) \quad (2.35)$$

და $\gamma_m^{\min}$ და $\beta^{\min}$ არიან განსაზღვრული (2.32) და (2.23) ფორმულებით.

დამტკიცება. განვიხილოთ (2.22) და (2.31). ლემა ?? გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} & \zeta \circ \rho(W) \\ &= \sup_{\nu \in N_1(\mu)} \left(\int_M \sup_{\eta \in M_1([0,1])} \left(\int_{[0,1]} \text{ES}_{\alpha, P}(W) \eta(d\alpha) - \gamma_m^{\min}(\eta) \right) \nu(dm) - \beta^{\min}(\nu) \right) \\ &= \sup_{\nu \in N_1(\mu)} \left(\sup_{\eta, |M \rightarrow M_1([0,1])} \int_M \left(\int_{[0,1]} \text{ES}_{\alpha, P}(W) \eta_m(d\alpha) - \gamma_m^{\min}(\eta_m) \right) \nu(dm) - \beta^{\min}(\nu) \right). \end{aligned}$$

დამტკიცების დანარჩენი ნაწილი ანალოგიურია 2.2.4 თეორემის დამტკიცებისა. $\square$

2.2.5 მაგალითი: სუპერპოზიციური რისკის ზომის რობასტული წარმოდგენა, როდესაც რისკის ოჯახი არის ენტროპიული რისკის საზომი

რისკის ზომის რობასტული წარმოდგენის არსებობა მნიშვნელოვანია, როგორც პრაქტიკული პორტფელის ოპტიმიზაციისათვის, ასევე პრეფერენციების თეორიების ჩამოყალიბებისთვის. ცხადია, ყველა კონკრეტულ სუპერპოზიციური რისკის ზომას გააჩნია უნიკალური საჯარიმო ფუნქცია. ცალკეული მაგალითების განხილვისგან თავს შევიკავებთ. თუმცა, განსაკუთრებით საინტერესო შემთხვევას წარმოადგენს ე.წ. ენტროპიული რისკის ოჯახი, რომელიც იძლევა სუპერპოზიციური რისკისთვის მათემატიკურად მარტივ წარმოდგენას.

განვიხილოთ ენტროპიული რისკის ოჯახი $\text{ENT}_{\lambda, P}(W)$, რომელიც განისაზღვრება ალბათური ზომის P -ს მიმართ (იხ.: Föllmer and Knispel, 2011),

$$\text{ENT}_{\lambda, P}(W) = \frac{1}{\lambda} \log \mathbb{E}_P[e^{-\lambda W}], \quad (2.36)$$

სადაც, $\lambda \in [0, \infty)$ არის არაუარყოფითი მუდმივი და $\text{ENT}_{0, P}(W) = \mathbb{E}_P(-W)$. ადვილი საჩვენებელია, რომ ენტროპიული რისკის საზომი ყოველთვის ამოზნექილია და გააჩნია

შემდეგი რობასტული წარმოდგენა (იხ. Föllmer and Knispel, 2011).

$$\text{ENT}_{\lambda, P}(W) = \sup_{Q \in M_1(P)} \left(\mathbb{E}_Q(-W) - \frac{1}{\lambda} H(Q|P) \right), \quad (2.37)$$

სადაც, $H(Q|P) = \mathbb{E}_Q \left[\log \frac{dQ}{dP} \right]$ აღნიშნავს შედარებით ენტროპიას⁵.

განვიხილოთ სუპერპოზიციური რისკის საზომი $\zeta \circ \rho$, სადაც ρ არის ენტროპიული რისკის ზომის ოჯახი. განვიხილოთ შემთხვევები, როდესაც ζ არის უარყოფითი მათემატიკური ლოდინი, მოსალოდნელი ჩავარდნა (expected shortfall), ან ენტროპიული რისკის ზომა.

- (i) $\zeta = -\mathbb{E}_\mu(\cdot)$. რადგან ζ არის კოჰერენტული რისკის საზომი მინიმალური საჯარიმო ფუნქცია შეიძლება იყოს მხოლოდ 0 ან ∞ . განვიხილოთ სიმრავლე

$$V = \{ \nu \in N_1(\mu) | \beta^{\min}(\nu) = 0 \}.$$

2.2.4 თეორემიდან და (2.37) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\zeta \circ \rho$ -ს საჯარიმო ფუნქციას აქვს შემდეგი ფორმა,

$$\gamma(Q) = \frac{1}{\lambda} \left[\inf_{\nu \in V} \left\{ \inf_{Q_m | M \rightarrow M_1(P) \text{ with } \int_M Q_m \nu(dm) = Q} \int_M \mathbb{E}_{Q_m} \left(\log \frac{dQ_m}{dP} \right) \nu(dm) \right\} \right]. \quad (2.38)$$

- (ii) $\zeta = \text{ES}_{\alpha, \mu}(\cdot)$. რადგან Expected shortfall არის კოჰერენტული ზომა, საჯარიმო ფუნქცია იდენტურია (2.38) ფორმულის.

- (iii) $\zeta = \text{ENT}_{\delta, \mu}(\cdot)$. ამ შემთხვევაში თეორემა 2.2.4 და ფორმულა (2.37) გვაძლევს $\zeta \circ \rho$ -ს საჯარიმო ფუნქციის შემდეგ წარმოდგენას,

$$\gamma(Q) = \inf_{\nu \in N_1(\mu)} \left\{ \frac{1}{\lambda} \inf_{Q_m | M \rightarrow M_1(P) \text{ with } \int_M Q_m \nu(dm) = Q} \int_M \mathbb{E}_{Q_m} \left(\log \frac{dQ_m}{dP} \right) \nu(dm) - \frac{1}{\delta} H(\nu|\mu) \right\}. \quad (2.39)$$

რადგან, მათემატიკურად საჯარიმო ფუნქციები წარმოადგენს მარტივ ტოლობებს და მათი გამოყენება შესაძლებელია კომპლექსური პორტფელის შერჩევისას.

⁵შედარებითი ენტროპია ყოველთვის არის განსაზღვრული, რადგან ყოველი $Q \in M_1(P)$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი P-ს მიმართ.

2.3 მოდელის რისკების საზომები

ზემოთაღწერილი საბაზრო რისკის ზომები $\mathcal{X} \subseteq L^0(\Omega, \mathcal{F})$ სივრცეზე ითვალისწინებენ მოდელის რისკს, თუმცა აღნიშნული ზომები არ იძლევა საბაზრო და მოდელის რისკის განცალკევების შესაძლებლობას. ამ ქვეთავში შესწავლილია მოდელის რისკი საბაზრო რისკისგან დამოუკიდებლად. მოდელის რისკის ზომები ეკონომიკურად მნიშვნელოვანია, რადგან იძლევა მოდელისა და საბაზრო რისკის კომპონენტების განცალკევებისა და ადეკვატური კაპიტალის გამოანგარიშების შესაძლებლობას თითოეული რისკის ტიპისთვის. თავდაპირველად, განვიხილავთ აქსიომებს მოდელის რისკის ზომებისთვის. აღნიშნული აქსიომები მჭიდროდ არის დაკავშირებული როგორც რისკების მენეჯმენტის, ასევე ფინანსური კონტრაქტების ფასდადების თეორიის ეკონომიკურ საფუძვლებზე. წინამდებარე თავში განხილული მოდელის რისკის ზომები განსაზღვრულია ე.წ. ბენჩმარკ მოდელის მიმართ. ცხადია, აღნიშნული მიდგომა არ წარმოადგენს ეკონომიკურ შეზღუდვას, რადგან რისკების მენეჯერს ყოველთვის გააჩნია გარკვეული მოდელი, რომლის რისკის შეფასებაც წარმოადგენს ეკონომიკურ ამოცანას. აქვე წარმოდგენილია რამდენიმე მაგალითი მოდელის რისკის დემონსტრაციისათვის.

2.3.1 მოდელის რისკის ზომების აქსიომატური მოთხოვნები

განვიხილოთ ზომადი მოდელის სივრცე $(M, \mathcal{M})$ და მასზე განსაზღვრული ფუნქციების ოჯახი $\rho = (\rho_m)_{m \in M}$. ამ ოჯახის თითოეული ელემენტი წარმოადგენს ფუნქციას $\rho_m : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ სივრცეზე. ზოგადობის დაუკარგავად დავუშვათ, რომ ρ არის $\mathcal{M}$ -ზომადი.

მოდელის რისკის შესწავლისთვის დავუშვათ, რომ ρ_m არის ზოგადი ფუნქცია და არ შემოვიფარგლებით მხოლოდ მონეტარული რისკის ზომის კლასით. უფრო მეტიც, $\rho_m(W)$ შესაძლებელია იყოს ფინანსური ისტრუმენტის ფასის ფუნქცია ან ჰეჯირების პარამეტრი (მაგ. დელტა, გამა) მოდელი m -ის მიმართ. შესაბამისად, ჩვენ განვაზოგადებთ მოდელის რისკს პრაქტიკულად ყველა მნიშვნელოვანი შემთხვევისათვის.

მოდელის რისკის საზომი წარმოადგენს ასახვას $P_\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, რომელიც ყოველი $W \in \mathcal{X}$ ფინანსური პოზიციისთვის, ზომავს $\rho_m(W)$ ფუნქციის შეცდომას, ანუ მნიშვნელობების დისპერსიას. აღნიშნული დისპერსია წარმოიქმნება, რადგან მოდელი m ცვალებადია M -ზე. ამასთან, მოდელის რისკი $P_\rho(W)$ უნდა იყოს გამოხატული ფულად ერთეულებში და იყოს ნორმირებული, რათა მივიღოთ სხვა ფინანსურ რისკებთან შესადარისი კაპიტალის შეფასების მექანიზმი.

განვიხილოთ ფინანსური პოზიციები, რომლებიც მოდელის მიმართ ინვარიანტულია. ასეთი ფინანსური ინსტრუმენტების მაგალითია მაღალლიკვიდური ქოლ და ფუთოფციონი, სვოპციონი, კაპი და ფლორი, რომელთა ფასიც სრულიად განისაზღვრება საბაზრო მოთხოვნა-მიწოდებით და არ არიან დამოკიდებული ფინანსური მოდელის დაშვებებზე. H აღნიშნავს მოდელის მიმართ ინვარიანტული ფინანსური პოზიციების სიმრავლეს

$$H = \{W \in L^0(\Omega, \mathcal{F}) : \rho_{m_1}(W) = \rho_{m_2}(W), \forall m_1, m_2 \in M\}.$$

განსაზღვრება 2.3.1. ყოველი მოდელის რისკის საზომი $P_\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ მოთხოვნებს (აქსიომებს):

- (i) მოდელის რისკი შემოსაზღვრული ფუნქციის ოჯახისთვის არის შემოსაზღვრული. ე.ი. თუ $\rho_m(W) \in [a, b], m \in M$ მაშინ $P_\rho(W) \leq b - a$.
- (ii) მოდელის მიმართ ინვარიანტული პოზიციებს მოდელის რისკი არ აქვთ, ე.ი. $P_\rho(W) = 0$ ყოველი $W \in H$.

ჩვენ ვუწოდებთ მოდელის რისკის ზომას დადებითად ჰომოგენურს, თუ $P_\rho(\alpha W) = \alpha P_\rho(W)$, ყოველი $\alpha \geq 0$.

აღნიშნულ აქსიომებს გააჩნიათ ეკონომიკური ინტერპრეტაცია. თუ ρ შემოსაზღვრულია რაიმე ინტერვალში, მაშინ მოდელის რისკი არ შეიძლება აღემატებოდეს ამ ინტერვალის სიგრძეს. მსგავსი იდეა განხილულია Cont, 2006 (ტოლობა 4.4.), სადაც ავტორი გვთავაზობს, რომ ლიკვიდური ინსტრუმენტის მოდელის რისკი დაიყვანება ე.წ. ბიდ-ასკ სპრედზე.

თუ ფინანსური აქტივი მოდელის მიმართ ინვარიანტულია, მაშინ მოდელის რისკი არ არსებობს. ფასების მოდელის რისკის თვისება, რომელიც განხილულია Cont-ის მიერ (განტოლება 4.6, Cont, 2006) არის (ii) აქსიომის კერძო შემთხვევა: თუ ოფციონის შემოსავლიანობის ფუნქცია შეიძლება მოდელის გარეშე განმეორდეს, მაშინ არ არსებობს მოდელის რისკი.

დადებითი ჰომოგენურობა (i) აქსიომასთან ერთად უზრუნველყოფს მოდელის რისკის შეფასებას იმავე ფულად ერთეულში, როგორშიც განსაზღვრულია ρ .

შენიშვნა 3. აღსანიშნავია, რომ მოდელის რისკის საზომი არ არის მონეტარული რისკის ზომა. რადგან $P_\rho(W)$ აღწერს მოდელის სიმრავლეზე $\rho_m(W), m \in M$, ფუნქციის

ცვალებადობას მონოტონურობა და სუბადიციურობა ფინანსური პოზიციის მიმართ არ არის სავალდებულო. უფრო მეტიც ამ თვისებებს არ აქვს ეკონომიკური აზრი მოდელის რისკის ზომებისთვის. ასევე, მოდელის რისკის ზომები არ აკმაყოფილებს ფულადი მუდმივის ინვარიანტულობის თვისებას.

უმარტივესი მოდელის რისკის ზომა, რომელიც აკმაყოფილებს ზემოთ აღწერილ აქსიომებს, არის მაქსიმალური მოდელის რისკის ზომა.

განსაზღვრება 2.3.2. მაქსიმალური მოდელის რისკის საზომი $P_{\rho,WC}$ W ფინანსური პოზიციისთვის განისაზღვრება როგორც:

$$P_{\rho,WC}(W) = \sup_{m \in M} \rho_m(W) - \inf_{m \in M} \rho_m(W). \quad (2.40)$$

თეორემა 2.3.1. მაქსიმალური მოდელის რისკის საზომი $P_{\rho,WC}$ აკმაყოფილებს მოდელის რისკის აქსიომებს. ამასთან, თუ ρ არის დადებითად ჰომოგენური, მაშინ $P_{\rho,WC}$ არის დადებითად ჰომოგენური.

დამტკიცება. თუ $\rho_m(W)$, $m \in M$ არის შემოსაზღვრული და იღებს მნიშვნელობას $[a, b]$ ინტერვალზე, მაშინ ცხადია $\sup_{m \in M} \rho_m(W) \leq b$ და $\inf_{m \in M} \rho_m(W) \geq a$. შესაბამისად, $P_{\rho,WC}(W) \leq b - a$. თუ $W \in H$, ანუ $\rho_{m_1}(W) = \rho_{m_2}(W)$ ყოველი $m_1, m_2 \in M$, მაშინ $\sup_{m \in M} \rho_m(W) = \inf_{m \in M} \rho_m(W)$ და $P_{\rho,WC}(W) = 0$. ამასთან, ცხადია, რომ მაქსიმალური მოდელის რისკის საზომი აკმაყოფილებს დადებით ჰომოგენურობის თვისებას, თუ ρ არის დადებითად ჰომოგენური ფუნქცია. $\square$

მაქსიმალური მოდელის რისკის ზომას აქვს ტენდენცია, გადაჭარბებით შეაფასოს რეალური მოდელის რისკი, რადგან იგი ზომავს მაქსიმალურ მანძილს, რომელიც ფუნქციამ შეიძლება მიიღოს მოდელის სიმრავლეზე. მომდევნო პარაგრაფში შევისწავლით უფრო პრაქტიკულ მოდელის რისკის ზომებს.

2.3.2 საბაზრო რისკის საზომის მოდელის რისკის შეფასება

როგორც აღვნიშნეთ, ფინანსური რისკის ოპტიმალური მართვისათვის სასურველია პორტფელის მთლიანი ფინანსური რისკის დაშლა საბაზრო და მოდელის რისკის კომპონენტებად. ეს დაშლა გვეხმარება გავიგოთ თუ რა არის რისკის ძირითადი წყარო და როგორ უნდა გადანაწილდეს კაპიტალი თითოეული რისკის ტიპზე. ამ ქვეთავში ჩვენ კონკრეტულად ვსწავლობთ საბაზრო რისკის საზომის მოდელს რისკის შეფასების მეტოდებს. აღნიშნული მოდელის რისკის ზომები თავსებადია სუპერპოზიციურ რისკის

ზომებთან. შესაბამისად, მათი პრაქტიკაში დანერგვა უზრუნველყოფს ყველა ტიპის ფინანსური რისკის მიმართ ჰომოგენურ მიდგომას.

განვიხილოთ მოდელის ზომადი სივრცე $(M, \mathcal{M})$ და რისკის ოჯახი $\rho = (\rho_m)_{m \in M}$. დავუშვათ, რომ ρ არის მონეტარული რისკის ოჯახი $\mathcal{X} \subseteq L^0(\Omega, \mathcal{F})$ სივრცეზე. ამასთან, ρ არის $\mathcal{M}$ -ზომადი და შემოსაზღვრული.

განვიხილოთ ე.წ. ბენჩმარკ რისკის საზომი ρ^0 . ჩვენ განვსაზღვრავთ მოდელის რისკს აღნიშნული ბენჩმარკ ზომის მიმართ. ასეთი რისკის ზომის შერჩევა პრაქტიკული თვალსაზრისით ადვილია, მაგალითად $\rho^0 = \rho_k$ რომელიმე მოდელისთვის $k \in M$. პრაქტიკაში, ρ^0 შეიძლება იყოს ნორმალური განაწილების დაშვებით კალიბრირებული სტანდარტული VaR ან ES, რომელსაც ფინანსური ინსტიტუტი იყენებს საბაზრო რისკის შეფასებისთვის. ასევე შესაძლებელია, ρ^0 იყოს სტრეს-ტესტის სცენარით გამოანგარიშებული რისკის საზომი და $k \notin M$.

ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ ρ^0 არის დაკავშირებული რისკის ზომის ოჯახთან ρ შემდეგი უტოლობებით⁶

$$\inf_{m \in M} \{\rho_m(W)\} \leq \rho^0(W) \leq \sup_{m \in M} \{\rho_m(W)\}, W \in \mathcal{X}. \quad (2.41)$$

დავუშვათ, რომ $\zeta : L^\infty(M, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ არის მონეტარული რისკის საზომი $L^\infty(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე.

განსაზღვრება 2.3.3. მოდელის სუპერპოზიციური რისკის საზომი ბენჩმარკ საბაზრო რისკის ზომის ρ^0 მიხედვით განისაზღვრება როგორც:

$$P_{\rho, \rho^0, \zeta}(W) = \zeta(\rho^0(W) - \rho(W)). \quad (2.42)$$

მოდელის სუპერპოზიციური რისკის ზომის მნიშვნელოვანი კონკრეტული წარმომადგენელია შემთხვევა, როდესაც საბაზრო რისკის ბენჩმარკი არის სუპერპოზიციური რისკის საზომი ანუ $\rho^0 = \zeta \circ \rho$. ამ შემთხვევაში ფინანსური პოზიციის მთლიანი რისკი შეიძლება ეფექტურად გაიყოს მხოლოდ საბაზრო რისკის $\zeta \circ \rho(W)$ და მხოლოდ მოდელის რისკის $P_{\rho, \zeta \circ \rho, \zeta}(W)$ კომპონენტებად. აღნიშნული გაყოფა წარმოადგენს კაპიტალის დაგეგმვისა და საზღვრების იმპლემენტირების მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს.

თეორემა 2.3.2. დავუშვათ, ζ არის ნორმირებული, ანუ $\zeta(0) = 0$. მაშინ მოდელის სუპერპოზიციური რისკის საზომი $P_{\rho, \rho^0, \zeta}$ აკმაყოფილებს მოდელის რისკის აქსიომებს.

⁶პრაქტიკაში ყოველთვის მიიღწევა აღნიშნული უტოლობა. საკმარისია მოდელის სიმრავლის გაფართოება შესაბამისი ელემენტით.

ამასთან, თუ ρ, ρ^0 და ζ არიან დადებითად ჰომოგენური რისკის ზომები მაშინ $P_{\rho, \rho^0, \zeta}$ არის დადებითად ჰომოგენური.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\rho_m(W), m \in M$ შემოსაზღვრულია $[a, b]$ ინტერვალზე. მაშინ, (2.41) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\rho^0(W) \in [a, b]$. შესაბამისად, $\rho^0(W) - \rho_m(W) \geq a - b$ და რადგან ζ არის მონოტონური რისკის ზომა,

$$P_{\rho, \rho^0, \zeta}(W) = \zeta(\rho^0(W) - \rho(W)) \leq \zeta(a - b) \leq b - a,$$

სადაც, ბოლო უტოლობა მიიღება ζ ფუნქციის ნორმირებისა და მუდმივის ინვარიანტულობის თვისებებიდან. თუ $W \in H$, მაშინ $\inf_{m \in M} \{\rho_m(W)\} = \sup_{m \in M} \{\rho_m(W)\}$ და (2.41) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\rho^0(W) = \rho(W)$. მაშასადამე,

$$P_{\rho, \rho^0, \zeta}(W) = \zeta(\rho^0(W) - \rho(W)) = \zeta(0) = 0.$$

დადებითი ჰომოგენურობის თვისების დამტკიცება ტრივიალურია. □

განვიხილოთ მოდელის სუპერპოზიციური რისკის ზომის რამდენიმე მნიშვნელოვანი წარმომადგენელი, რომლებსაც შემდგომ თავებში ხშირად გამოვიყენებთ პრაქტიკული მაგალითების განხილვისას.

განსაზღვრება 2.3.4. დავუშვათ μ არის ალბათური ზომა განსაზღვრული მოდელის ზომაზე $(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე და დავუშვათ, რომ ρ არის შემოსაზღვრული რისკის ოჯახი. მოსალოდნელი მოდელის რისკი $\text{EMR}_{\rho, \rho^0, \mu}, \rho^0$ ბენჩმარკ საბაზრო რისკის ზომის მიმართ, განსაზღვრულია როგორც:

$$\text{EMR}_{\rho, \rho^0, \mu}(W) = \int_M [\rho_m(W) - \rho^0(W)] d\mu(m), W \in L^0(\Omega, \mathcal{F}). \quad (2.43)$$

შენიშვნა 4. ცხადია $\text{EMR}_{\rho, \rho^0, \mu}(W) = \rho * \mu(W) - \rho^0(W)$, სადაც $\rho * \mu$ განსაზღვრულია 2.2.2-ს მიხედვით.

განსაზღვრება 2.3.5. დავუშვათ, μ არის ალბათური ზომა $(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე.

- (i) მოდელის ღირებულება რისკის ქვეშ (MVaR) ρ საბაზრო რისკის ზომის ოჯახისთვის, $\alpha \in (0, 1)$ ნდობის დონით და ρ^0 ბენჩმარკი რისკის ზომის მიმართ განსაზღვრულია როგორც:

$$\text{MVaR}_{\alpha, \rho, \rho^0, \mu}(W) = \inf \{x \in \mathbb{R} : \mu(\rho^0(W) - \rho(W) < -x) \leq 1 - \alpha\}. \quad (2.44)$$

- (ii) მოდელის მოსალოდნელი ჩავარდნა (MES) ρ საბაზრო რისკის ზომის ოჯახისთვის, $\alpha \in (0, 1)$ ნდობის დონით და ρ^0 ბენჩმარკი რისკის ზომის მიმართ განსაზღვრულია როგორც:

$$\text{MES}_{\alpha, \rho, \rho^0, \mu}(W) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 \text{MVaR}_{\gamma, \rho, \rho^0, \mu}(W) d\gamma. \quad (2.45)$$

- (iii) მოდელის სპექტრული რისკის საზომი (MSPR) ρ საბაზრო რისკის ზომის ოჯახისთვის, $\alpha \in (0, 1)$ ნდობის დონით და ρ^0 ბენჩმარკი რისკის ზომის მიმართ განსაზღვრულია როგორც:

$$\text{MSPR}_{\phi, \rho, \rho^0, \mu}(W) = \int_0^1 \text{MVaR}_{\gamma, \rho, \rho^0, \mu}(W) \phi(\gamma) d\gamma. \quad (2.46)$$

სადაც, ϕ წარმოადგენს არაზრდად, მარჯვნიდან უწყვეტ, ინტეგრირებად ფუნქციას რომელიც აკმაყოფილებს $\int_0^1 \phi(\gamma) d\gamma = 1$.

საინტერესო ეკონომიკურ შემთხვევას წარმოადგენს, როდესაც 2.3.4 და 2.3.5 არსებული ბენჩმარკი საბაზრო რისკის საზომი არის მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკი $\rho^0 = \rho * \mu$. იმავდროულად საბაზრო რისკის მართვა უნდა განხორციელდეს ρ^0 ზომით. თავად ρ ოჯახის შერჩევა დამოკიდებულია ფინანსური ინსტიტუტის ტიპზე, პორტფელის კომპლექსურობაზე და მარეგულირებელი ორგანოების მოთხოვნებზე.

საბაზრო რისკის ზომები, რომლებიც დაფუძნებულია განაწილების კვანტილზე, ფართოდ გამოიყენება რისკის ეკონომიკური კაპიტალის დასადგენად. ჩვენს მიერ განხილული მოდელის რისკის ზომები, რომლებიც ასევე დაფუძნებულია განაწილების კვანტილზე ეხმარება ფინანსურ ინსტიტუტებს შექმნან თანმიმდევრული ბაზრის და მოდელის რისკის გაზომვის მეთოდოლოგია. რა თქმა უნდა, ფინანსურმა ინსტიტუტმა შეიძლება ასევე აირჩიოს საბაზრო და მოდელის რისკის კვანტილზე დაფუძნებული რისკების სხვადასხვა ტიპები, მაგალითად, საბაზრო რისკის გასაზომად VaR მიდგომა და მოდელის რისკის გასაზომად MES მიდგომა.

შენიშვნა 5. ფინანსური პოზიცია W წარმოიქმნის მთლიან ფინანსურ რისკს რომელიც მოიცემა

$$\rho^0(W) + P_{\rho, \rho^0, \mu}(W).$$

აღნიშნული რისკის საზომი დამოკიდებულია რისკების მენეჯერის საბაზრო და მოდელის რისკის პრეფერენციებზე. დავუშვათ, რისკების მენეჯერს გააჩნია კონკრეტული

წარმოდგენა მოდელის რისკის ტოლერანტობის შესახებ (მოდელის რისკის ავერსია). ამ შემთხვევაში, ფინანსურმა ინსტიტუტმა შეიძლება განიხილოს პორტფელის მთლიანი რისკის შემდეგი ოპტიმიზაციის პრობლემა ბენჩმარკი საბაზრო რისკის შერჩევისთვის ρ^0 ,

$$\inf_{\rho^0} \{ \rho^0(W) + P_{\rho, \rho^0, \mu}(W) \}.$$

აღნიშნული მიდგომა ეკონომიკურად გამართლებულია. ხშირად პორტფელის სირთულიდან გამომდინარე ფინანსურ ინსტიტუტს აქვს მოდელის ვალიდაციის პროცედურა, რომელიც განსაზღვრავს მოდელის რისკის მადას. ხოლო ეკონომიკური კაპიტალის მინიმიზაციის ამოცანა იძლევა საბაზრო და მოდელის რისკის მართვის დინამიური მიდგომის შესაძლებლობას.

2.3.3 მაგალითი: საბაზრო რისკების საზომის მოდელის რისკი

განვიხილოთ რისკიანი აქცია S . რისკების მენეჯერს მიაჩნია, რომ აქციის დღიური ლოგარითმული შემოსავალი $\ln S_t - \ln S_{t-1}$ განაწილებულია ნორმალური კანონით. აქციის დროითი მწკრივით იგი გამოითვლის ნორმალური განაწილების პარამეტრებს და შეაფასებს VaR და ES რისკის საზომებს:

$$\text{VaR}_{\alpha, N(\mu, \sigma)} = S_0 \left[1 - \exp \left(\mu T + \sigma \sqrt{T} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right) \right], \quad (2.47)$$

$$\text{ES}_{\alpha, N(\mu, \sigma)} = S_0 \left[1 - \frac{1}{1 - \alpha} \exp \left(\mu T + \frac{1}{2} \sigma^2 T \right) [1 - \Phi(\sigma + \Phi^{-1}(\alpha))] \right], \quad (2.48)$$

სადაც S_0 წარმოადგენს აქციის მიმდინარე ფასს. Φ წარმოადგენს სტანდარტული ნორმალური განაწილების კუმულატიური განაწილების ფუნქციას.

დავუშვათ, $S_0 = 100$, $T = 1$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.3$. (2.47) და (2.48) ტოლობებით ვიღებთ, რომ $\text{VaR}_{0.95} = 32.5279$, $\text{VaR}_{0.99} = 45.0037$, $\text{ES}_{0.95} = 40.4689$ and $\text{ES}_{0.99} = 50.2929$.

დავუშვათ, რომ რეალურად აქციის ლოგარითმული შემოსავალი განაწილებულია ნორმალური შებრუნებული გაუსური განაწილებით (Normal inverse Gaussian, ან NIG).⁷ მარტივი მომენტების შესატყვისი (moment-matching method) მიდგომის გამოყენებით

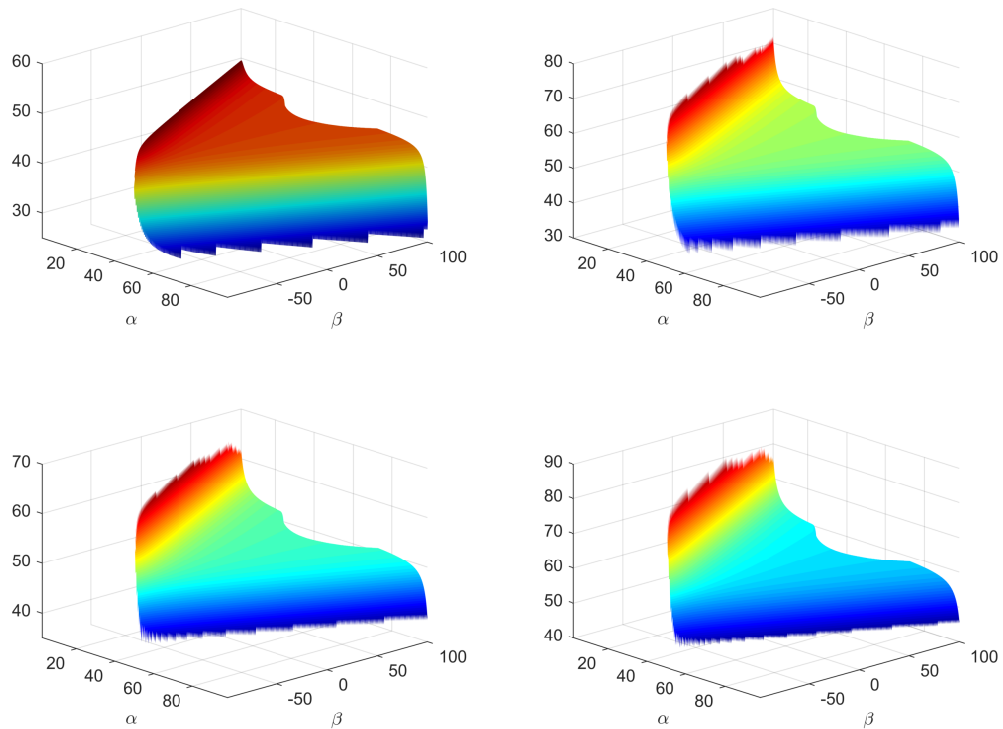
⁷NIG განაწილების შესახებ დაწვრილებითი ინფორმაციისთვის იხ. O. E. Barndorff-Nielsen, 1997.

ვიღებთ:

$$\mu = m + \frac{\delta\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}. \quad (2.49)$$

$$\sigma^2 = \frac{\delta\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}}, \quad (2.50)$$

სადაც α, β, m და δ წარმოადგენენ NIG განაწილების პარამეტრებს. ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე, დავაფიქსიროთ m და δ პარამეტრები და განვიხილოთ მოდელის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ყველა შესაძლო NIG განაწილებას პარამეტრებით: $\alpha \in [1, 100], \beta \in [-100, 100], \alpha > |\beta|$. მთლიანი სიმრავლისთვის შევაფასოთ VaR და ES საზომები. ნახაზი 2.4 ასახავს შედეგებს. როგორც ვხედავთ, საბაზრო რისკის საზომები დამოკიდებულია არა მხოლოდ მოდელის სწორ კალიბრაციაზე, არამედ მოდელის ტიპის სწორ შერჩევაზეც.



სურ. 2.4: საბაზრო რისკის ზომები სხვადასხვა NIG პარამეტრით. მარცხნივ ზემოთ: $\text{VaR}_{0.95,\text{NIG}}$. მარჯვნივ ზემოთ: $\text{VaR}_{0.99,\text{NIG}}$. მარცხნივ ქვემოთ: $\text{ES}_{0.95,\text{NIG}}$. მარჯვნივ ქვემოთ: $\text{ES}_{0.99,\text{NIG}}$.

დავუშვათ, რომ α და β განაწილებულია ორგანზომილებიანი თანაბარი განაწილების

კანონით.⁸ დავუშვათ, ნორმალური განაწილებით მიღებული საბაზრო რისკები წარმოადგენენ ბენჩმარკ ზომებს. ცხრილი 2.1 ასახავს შედეგებს. ასეთი მარტივი მაგალითის პირობებშიც არსებობს მოდელის დიდი რისკი. EMR მერყეობს თავდაპირველი ბენჩმარკ რისკის შეფასების [19%, 34%] ინტერვალში, ხოლო მაქსიმალური მოდელის რისკი კი [72%, 85%] ინტერვალში. საბაზრო რისკის საზომის მსგავსი დისპერსია შეუსაბამოებაში მოდის საბანკო რეგულაციის მოთხოვნებთან (იხ. BIS, 2010, 2011, 2012, 2016a, 2016b; Federal Reserve, 2011).

	VaR _{0.95}	VaR _{0.99}	ES _{0.95}	ES _{0.99}
$P_{\rho, \text{WC}}$	23.5632	41.8035	27.9049	42.5726
$\text{EMR}_{\rho, \rho^0, \mu}$	11.5898	9.8202	10.9633	9.6510
$\text{MVaR}_{0.95, \rho, \rho^0, \mu}$	14.9858	16.9555	16.5487	18.1567
$\text{MES}_{0.95, \rho, \rho^0, \mu}$	16.0089	21.6678	20.2571	24.2216

ცხრ. 2.1: მოდელის სუპერპოზიციური რისკის ზომები სხვადასხვა საბაზრო რისკის ზომისთვის.

2.3.4 მოდელის რისკი დერივატივების ფასდადების თეორიაში

ფასწარმოქმნის მოდელის შემუშავება მოიცავს მათემატიკური მოდელების შექმნას, რომლებიც აფასებენ ფინანსური პროდუქტების სამართლიან ღირებულებას. დავუშვათ $\rho(W)$ არის წარმოებული ფასიანი ქაღალდი, რომლის ღირებულებაც დამოკიდებულია რაიმე (რისკიან-) აქტივზე W . დავუშვათ $h(W)$ არის დერივატივის შემოსავლიანობის ფუნქცია. მაშინ, დერივატივის ფასი გამოითვლება:

$$DF \times \mathbb{E}_m h(W), \quad (2.51)$$

სადაც, DF აღნიშნავს დისკონტირების ფაქტორს, ხოლო $m \in M$ არის რისკ-ნეიტრალური ალბათური ზომა.

XX საუკუნის ბოლო ათწლეულიდან მსხვილმა საინვესტიციო ბანკებმა და ჰეჯფონდებმა დაიწყეს ინოვაციური ეგზოტიკური დერივატივებით აქტიურად ვაჭრობა. აღნიშნულ ფინანსურ პროდუქტებს გააჩნიათ რთული შემოსავლიანობის ფუნქცია და მათი ფასდადებისთვის საკმარისი არ არის ნორმალურ განაწილების ფუნქციაზე დაფუძნებული მოდელების გამოყენება. თანამედროვე საშუალო ზომის ბანკის მათემატიკური ფასდადების მოდელების სიმრავლე M მოიცავს სტოქასტური მოდელების ფართო სპექტრს. მათ შორის: ლევის უსასრულო ნახტომების პროცესები, ლოკალური

⁸მოდელის სიმრავლეზე ალბათური ზომის შეფასების ეკონომეტრიკულ მეთოდებს განვიხილავთ 3 თავში.

და სტოქასტური ვარიაციის პროცესები, მერტონის სასრული რაოდენობის ნახტომის მოდელები და ა.შ. ლევის და მერტონის პროცესები, რომლებიც აღწერენ აქტივების ფასების ნახტომებს, უზრუნველყოფენ ბაზრის ქცევის უფრო სრულყოფილ წარმოდგენას ტრადიციულ მოდელებთან შედარებით. სტოქასტური ვარიაციისა და სტოქასტური საპროცენტო განაკვეთის მოდელები, ითვალისწინებენ ბაზრის პარამეტრების დინამიურ ბუნებას (Tankov, 2003). ამ მოწინავე მეთოდოლოგიების გამოყენებით, დერივატივების ფასების მოდელები ისწრაფვიან აღიქვან ბაზრის რთული დინამიკა და მიაღწიონ ფასების შეფასების მაქსიმალურ სიზუსტეს. მოდელების მუდმივი დახვეწა და განვითარება საშუალებას აძლევს ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრეებს, ინვესტორებსა და ფინანსურ ინსტიტუტებს მიიღონ ინფორმირებული გადაწყვეტილებები ვაჭრობის სტრატეგიების, რისკების მართვისა და პორტფელის ოპტიმიზაციის შესახებ. მაგრამ, რაც უფრო რთულია მათემატიკური მოდელი და ფინანსური პროდუქტები, მით უფრო შრომატევადია ფასის მოდელის რისკის შეფასება.

დავუშვათ, $\rho = (\rho_m)_{m \in M}$, $\rho_m : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, არის ფასის ფუნქციის ოჯახი სხვადასხვა მოდელის მიმართ $m \in M$. ფასის ფუნქცია არის წრფივი ყოველი მოდელისთვის:

$$\rho_m(\alpha U + \beta V) = \alpha \rho_m(U) + \beta \rho_m(V). \quad (2.52)$$

განსაზღვრება 2.3.6. დავუშვათ, $P_\rho^{\text{price}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ აკმაყოფილებს მოდელის რისკის ზომის აქსიომებს. P_ρ^{price} ეწოდება ფასის მოდელის რისკის ზომა, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს (ფასის აქსიომებს):

- (i) ფასის მოდელის რისკი უცვლელი რჩება მოდელის ინვარიანტული პოზიციის დამატებით. ე.ი., $P_\rho^{\text{price}}(W + V) = P_\rho^{\text{price}}(W)$, ყოველი $V \in H$.
- (ii) ფასის მოდელის რისკი არის სუბადიციური, ე.ი. $P_\rho^{\text{price}}(W_1 + W_2) \leq P_\rho^{\text{price}}(W_1) + P_\rho^{\text{price}}(W_2)$.

პირველი აქსიომა მოითხოვს, რომ მოდელის რისკი უცვლელი დარჩეს თუ პორტფელს დაემატება ფინანსური ინსტრუმენტი, რომლის ფასიც არ არის დამოკიდებული მოდელზე (მაგალითად, მაღალლიკვიდური სვოპციონი). ასევე Cont, 2006 აღნიშნავს, რომ პორტფელის მოდელის რისკი უცვლელია თუ მას დავუმატებთ ოფციონს და მისივე ჰეჯირებულ პოზიციას, რაც წარმოადგენს აქსიომა (i) კერძო შემთხვევას. მეორე აქსიომის მიხედვით, მოდელის რისკი შეიძლება შემცირდეს რისკის დივერსიფიკაციით. აღსანიშ-

ნავია, რომ საბაზრო რისკის კონტექსტში აღნიშნული თვისება აზრსმოკლებულია⁹.

შენიშვნა 6. ოფციონებით ვაჭრობისას ფართოდ დამკვიდრებული ვეგა ჰეჯირება წარმოადგენს ცხად მაგალითს თუ როგორ შეიძლება შემცირდეს მოდელის რისკი დივერსიფიკაციით. დავუშვათ, ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრეს სჯერა, რომ ოფციონის აღსრულებისას (at option maturity) ფინანსური პოზიცია განაწილებულია ლოგნორმალური კანონით P_σ , სადაც σ წარმოადგენს ვარიაციის პარამეტრს. შესაბამისად, მოდელის სიმრავლე მოცემულია, როგორც

$$M = \{P_\sigma : \sigma \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]\},$$

სადაც $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}$ არის ან რომელიმე ფინანსური მოდელის კალიბრაციის შედეგად მიღებული პარამეტრები ან დამოკიდებულია ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრის სუბიექტურ შეფასებაზე. მოდელის რისკის ჰეჯირების მიზნით, პრაქტიკოსები გამოთვლიან ვეგას, რაც არის ოფციონის ფასის მგრძნობელობა σ პარამეტრთან მიმართებაში $\frac{\partial \rho(W)}{\partial \sigma}$. მოდელის რისკი ეფექტურად მცირდება (ჰეჯირდება) ლიკვიდური ფინანსური კონტრაქტის გაყიდვით, რომელსაც გააჩნია საპირისპირო ვეგა.

განსაზღვრება 2.3.7. ფასის მოდელის რისკის ზომას $P_\rho^{\text{price}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ვუწოდებთ კოჰერენტულს თუ ის აკმაყოფილებს ფასის მოდელის რისკის ყველა აქსიომას და არის დადებითად ჰომოგენური, $P_\rho^{\text{price}}(\alpha W) = \alpha P_\rho^{\text{price}}(W)$, $\alpha \geq 0$.

თეორემა 2.3.3. მაქსიმალური რისკის ზომა,

$$P_{\rho, \text{WC}}^{\text{price}}(W) = \sup_{m \in M} \rho_m(W) - \inf_{m \in M} \rho_m(W),$$

აკმაყოფილებს ფასის მოდელის რისკის ზომის აქსიომებს. ამასთან, თუ ρ არის დადებითად ჰომოგენური, მაშინ $P_{\rho, \text{WC}}^{\text{price}}$ არის ფასის მოდელის რისკის კოჰერენტული ზომა.

დამტკიცება. 2.3.1 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მაქსიმალური რისკის საზომი არის მოდელის რისკის ზომა. დავუშვათ, $V \in H$, მაშინ $\rho_m(V) = c$ ყოველი $m \in M$, $c \in \mathbb{R}$

⁹ოფციონების მოდელის რისკის შესაფასებლად Cont, 2006 მოითხოვს რისკის ზომის ამოხსნეულობას. ჩვენ შემოვიფარგლებით მხოლოდ სუბადიციურობის მოთხოვნით.

და

$$\begin{aligned}
 P_{\rho, \text{WC}}^{\text{price}}(W + V) &= \sup_{m \in M} \rho_m(W + V) - \inf_{m \in M} \rho_m(W + V) \\
 &= \sup_{m \in M} (\rho_m(W) + \rho_m(V)) - \inf_{m \in M} (\rho_m(W) + \rho_m(V)) \\
 &= \sup_{m \in M} \rho_m(W) - \inf_{m \in M} \rho_m(W) \\
 &= P_{\rho, \text{WC}}^{\text{price}}(W).
 \end{aligned}$$

განვიხილოთ ორი ფინანსური პოზიცია $W_1, W_2 \in \mathcal{X}$, მაშინ

$$\begin{aligned}
 P_{\rho, \text{WC}}^{\text{price}}(W_1 + W_2) &= \sup_{m \in M} \rho_m(W_1 + W_2) - \inf_{m \in M} \rho_m(W_1 + W_2) \\
 &= \sup_{m \in M} (\rho_m(W_1) + \rho_m(W_2)) - \inf_{m \in M} (\rho_m(W_1) + \rho_m(W_2)) \\
 &\leq \sup_{m \in M} (\rho_m(W_1)) + \sup_{m \in M} (\rho_m(W_2)) - \left(\inf_{m \in M} (\rho_m(W_1)) + \inf_{m \in M} (\rho_m(W_2)) \right) \\
 &= P_{\rho, \text{WC}}^{\text{price}}(W_1) + P_{\rho, \text{WC}}^{\text{price}}(W_2).
 \end{aligned}$$

დადებითი ჰომოგენურობის თვისება გამომდინარეობს 2.3.1 თეორემიდან. $\square$

მაქსიმალური მოდელის რისკის საზომი ლიტერატურაში უკვე კარგად არის დამკვიდრებული, მაგალითად Cont, 2006-ის მიერ წარმოდგენილი რისკის საზომი პარაგრაფ 4.2-ში, არის მაქსიმალური მოდელის რისკის ზომის კერძო შემთხვევა. მიუხედავად ამისა, მისი გამოყენება თითქმის ყველა პრაქტიკულ ქეისში მოუხერხებელია. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ უფრო პრაქტიკული ფასის მოდელის რისკის ზომები, ჩვენ კვლავ ავირჩიეთ ბენჩმარკული ფასდადების მოდელი ρ^0 , რომელიც თავსებადია ფასის ფუნქციონალის ოჯახის ρ -ს მიმართ,

$$\inf_{m \in M} \{\rho_m(W)\} \leq \rho^0(W) \leq \sup_{m \in M} \{\rho_m(W)\}, W \in \mathcal{X}. \quad (2.53)$$

ასევე მოვითხოვთ, რომ ρ^0 არის აკმაყოფილებს (2.52).

დავუშვათ, $\zeta : L^\infty(M, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ არის მონეტარული რისკის საზომი $L^\infty(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე.

განსაზღვრება 2.3.8. ფასის მოდელის სუპერპოზიციური რისკის საზომი $P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}$, წარმოადგენს

$$P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}(W) = \zeta(-|\rho(W) - \rho^0(W)|).$$

თეორემა 2.3.4. თუ ζ არის სუბადიციური და ნორმირებული, მაშინ $P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}$ არის ფასის მოდელის რისკის ზომა. ამასთან, თუ ρ, ρ^0 და ζ ფუნქციები აკმაყოფილებენ დადებითი ჰომოგენურობის თვისებას, მაშინ $P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}$ არის კოჰერენტული.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\rho_m(W), m \in M$, იღებს მნიშვნელობებს $[a, b]$ ინტერვალზე. (2.53) ტოლობიდან განზიდინარეობს, რომ $\rho^0 \in [a, b]$. ζ -ს მონოტონურობის, ნორმირებულობისა და მუდმივის ინვარიანტულობის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}(W) = \zeta(-|\rho(W) - \rho^0(W)|) \leq \zeta(-|b - a|) \leq b - a.$$

თუ $V \in H$, მაშინ (2.53) ტოლობით, $\rho^0(V) = \rho(V)$. შესაბამისად,

$$P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}(V) = \zeta(-|\rho(V) - \rho^0(V)|) = \zeta(0) = 0.$$

ასევე,

$$\begin{aligned} P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}(W + V) &= \zeta(-|\rho(W + V) - \rho^0(W + V)|) \\ &= \zeta(-|\rho(W) + \rho(V) - \rho^0(W) - \rho^0(V)|) = P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}(W). \end{aligned}$$

განვიხილოთ ორი ფინანსური პოზიცია $W_1, W_2 \in \mathcal{X}$. ასევე დავუშვათ, რომ ζ არის სუბადიციური. მონოტონურობის თვისებით გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}(W_1 + W_2) &= \zeta(-|\rho(W_1 + W_2) - \rho^0(W_1 + W_2)|) \\ &= \zeta(-|\rho(W_1) + \rho(W_2) - \rho^0(W_1) - \rho^0(W_2)|) \\ &\leq \zeta(-|\rho(W_1) - \rho^0(W_1)| - |\rho(W_2) - \rho^0(W_2)|) \\ &\leq \zeta(-|\rho(W_1) - \rho^0(W_1)|) + \zeta(-|\rho(W_2) - \rho^0(W_2)|) \\ &= P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}(W_1) + P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}(W_2). \end{aligned}$$

დადებითი ჰომოგენურობის დამტკიცება ტრივიალურია. □

შენიშვნა 7. 2.3.8 განსაზღვრებაში ვარიაცია ბენჩმარკ მოდელის მიმართ იზომება აბსოლუტური მნიშვნელობით. დავუშვათ, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ არის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $g(x) \leq x, g(-x) \leq x, x \in \mathbb{R}_+$ და $g(x + y) \leq g(x) + g(y), x, y \in \mathbb{R}$. განვიხილოთ 2.3.8 განსაზღვრების განზოგადებული ვერსია,

$$\hat{P}_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}(W) = \zeta(-g[\rho(W) - \rho^0(W)]), W \in \mathcal{X}. \quad (2.54)$$

ცხადია, $\hat{P}_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}$ აკმაყოფილებს ფასის მოდელის რისკის ყველა აქსიომას. მიუხედავად აღნიშნული განზოგადების არსებობისა, ნაშრომის დანარჩენ ნაწილში განვიხილავთ ფასების რისკის ისეთ ზომას როგორც მოცემულია 2.3.8 განსაზღვრებაში.

განვიხილოთ ფასის მოდელის სუპერპოზიციური რისკის ზომის $P_{\rho, \rho^0, \zeta}^{\text{price}}$ რამდენიმე საინტერესო წარმომადგენელი.

განსაზღვრება 2.3.9. დავუშვათ, რომ μ არის მოცემული ალბათური ზომა მოდელის სივრცეზე $(M, \mathcal{M})$.

(i) ფასის მოსალოდნელი მოდელის რისკი განისაზღვრება, როგორც:

$$\text{EMR}_{\rho, \rho^0, \mu}^{\text{price}}(W) = \int_M |\rho(W) - \rho^0(W)| d\mu(m). \quad (2.55)$$

(ii) ფასის მოდელის ღირებულება რისკის ქვეშ ნდობის დონით $\alpha \in [0, 1]$

$$\text{MVaR}_{\alpha, \rho, \rho^0, \mu}^{\text{price}}(W) = \inf \{x : \mu(|\rho_m(W) - \rho^0(W)| > x) \leq 1 - \alpha\}. \quad (2.56)$$

(iii) ფასის მოდელის მოსალოდნელი ჩავარდნა ნდობის დონით $\alpha \in [0, 1]$

$$\text{MES}_{\alpha, \rho, \rho^0, \mu}^{\text{price}}(W) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 \text{MVaR}_{\gamma, \rho, \rho^0, \mu}^{\text{price}}(W) d\gamma. \quad (2.57)$$

(iv) ფასის მოდელის სპექტრული რისკის ზომა, ფუნქცია ϕ -ს მიმართ:

$$\text{MSPR}_{\phi, \rho, \rho^0, \mu}^{\text{price}}(W) = \int_0^1 \text{MVaR}_{\gamma, \rho, \rho^0, \mu}^{\text{price}}(W) \phi(\gamma) d\gamma. \quad (2.58)$$

ρ^0 -ის შერჩევის რამდენიმე მეთოდი არსებობს. ცხადია, ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრემ შეიძლება განიხილოს მარტივი ფასდადების მოდელი (მაგ. ბლექ-შოულსის მოდელი ოფციონებისთვის) და განიხილოს ფასის ცვალებადობა მის მიმართ. მეორე მხრივ, შესაძლებელია განვიხილოთ იყოს სტანდარტული მოდელი, რომელიც ყველაზე ხშირად გამოიყენება ჰეჯირებისას. ასევე, საინტერესო ბუნებრივ არჩევანს ბენჩმარკ ფასების მოდელისთვის წარმოადგენს ფასის მათემატიკური ლოდინი $\rho^0(W) = \int_M \rho_m(W) d\mu(m)$. ცხადია, ამ შემთხვევაში იქმნება კოორდინირებული სინერგია რისკების მენეჯმენტსა და ფასიანი ქაღალდების ვაჭრობის ფუნქციებს შორის, რაც აძლიერებს მთლიან ინსტიტუციურ ეფექტიანობას.

შენიშვნა 8. Detering and Packham, 2016 სტატიაში დერივატივების ფასის მოდელის რისკის შეფასების საინტერესო მიდგომაა შესწავლილი. ავტორები განიხილავენ მოდელის

რისკს რაიმე ფიზიკური ალბათური ზომების სიმრავლის მიმართ, რომელიც აღწერილია, როგორც $\mathbb{P}_a, a \in \Theta$ ¹⁰. Detering and Packham, 2016 განიხილავს მოდელის რისკის ზომებს, რომლებიც დაფუძნებულია ჰეჯირების შეცდომაზე, როდესაც ჰეჯირება ხორციელდება სტრატეგიით, რომელიც გამომდინარეობს რომელიმე სტოქასტური მოდელიდან. ავტორები თეორიულად აღწერენ μ განაწილების კანონს, რომელიც განსაზღვრულია მოდელის სივრცეზე და განიხილავენ ე.წ. შეწონილ ალბათურ ზომას $\int \mathbb{P}_a(\cdot) \mu(da)$. აღნიშნული ზომით განსაზღვრულია სხვადასხვა მოდელის რისკი. აღსანიშნავია, რომ ამგვარად განსაზღვრული ზოგიერთი რისკის საზომი შეიძლება აკმაყოფილებდეს მოდელის რისკის ზომის აქსიომებს, მაგრამ შეწონილი ალბათური ზომით განსაზღვრული მოდელის რისკის ეკონომიკური ინტერპრეტაცია არ არის ცხადი. იმავდროულად, შეუძლებელია მოდელის და საბაზრო რისკის კომპონენტების განცალკევება და მთლიანი ეკონომიკური კაპიტალის ან სავაჭრო საზღვრების დადგენა.

2.4 მოდელის რისკის ეფექტური მართვა

ამ თავში აღწერილი მოდელის რისკის შეფასების თეორიული კონცეფცია წარმოადგენს რთულ ეკონომიკურ პროცესს, რომელიც მოიცავს მრავალ საფეხურს და რომლის პრაქტიკაში დანერგვის წინაპირობასაც წარმოადგენს ფინანსური ინსტიტუტის სხვადასხვა დეპარტამენტების ეფექტური კოოპერაცია. იმისთვის, რომ შესაძლებელი იყოს მოდელის რისკის შეფასება და ეფექტური მართვა საჭიროა არსებობდეს შესაბამისი ორგანიზაციული სტრუქტურა (ან მოხდეს საჭირო კორპორაციული გარდაქმნა). ამ ქვეთავში Crespo et al., 2017; European Central Bank, 2019; Federal Reserve, 2011 რეკომენდაციების თანახმად განვიხილავთ მოდელის რისკის ეფექტური მენეჯმენტისთვის საჭირო ორგანიზაციულ სტრუქტურას.

რისკის სტრატეგიის ამოსავალი წერტილია ფინანსური ინსტიტუტის ზოგადი სტრატეგია, სადაც განხილულია ინსტიტუტის მისია, ბიზნეს მოდელი, კონკურენციის მოდელი და შესაბამისი რისკის სტრატეგია. ცხადია, რისკის კონსერვატიული მართვა გულისხმობს მომგებიანობის პოტენციალის შეზღუდვას. შესაბამისად, სხვადასხვა ფინანსურ ინსტიტუტს გააჩნია განსხვავებული რისკის სტრატეგია. მაგალითად, არასისტემურ ბანკს, რომელიც დეპოზიტების წყალობით ახერხებს ფულის მასის შექმნას, უნდა ჰქონდეს უფრო მეტად კონსერვატიული სტრატეგია, ვიდრე ფინანსურ ფონდს, რომელიც არ იყენებს ფინანსურ ბერკეტს და აქვს ე.წ. „მხოლოდ გრძელი“ სტრატეგია.

¹⁰ ფინანსური მოდელის სისრულის დაშვებიდან გამომდინარეობს, რომ ალბათურ ფიზიკურ ზომებს გააჩნია შესაბამისი რისკ-ნეიტრალური ზომები ამავე სიმრავლეზე, $\mathbb{Q}_a, a \in \Theta$.

ხოლო სისტემურად მნიშვნელოვან ბანკს უნდა გააჩნდეს კიდევ უფრო კონსერვატიული და კომპლექსური რისკის სტრატეგია, რადგან, ერთი მხრივ, გააჩნია მრავალფეროვანი პორტფელი და მეორე მხრივ, სისტემური ბანკის გაკოტრება გამოიწვევს სისტემურ კრიზისს.

ნებისმიერ ფინანსურ ინსტიტუტს უნდა გააჩნდეს გარკვეული ტოლერანტობა (მადა), რომელიმე რისკის მიმართ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ბიზნესის მოდელი უბრალოდ აზრს დაკარგავს და კომპანია მიიღებს მხოლოდ ურისკო საპროცენტო განაკვეთს მოგების სახით ¹¹. რისკის სტრატეგიიდან პირდაპირ განისაზღვრება რისკის მადა, რომლის მიხედვითაც ინსტიტუტი აწარმოებს რისკების მართვას. რისკის მადა შეიცავს დეტალურ აღწერას, სხვადასხვა რისკის მიმართ ფინანსური ინსტიტუტის ტოლერანტობის შესახებ. მაგალითად, საინვესტიციო ბანკს გააჩნია მნიშვნელოვანი საპროცენტო განაკვეთისა და ვალუტის რისკის ტოლერანტობა. ამავდროულად, დიდი ალბათობით, ბანკს არ სურს გააჩნდეს სასაქონლო ბაზრის მერყეობის რისკი. მეორე მხრივ, ფონდს, რომელიც ვაჭრობს ენერგიის ბაზარზე (ელექტრო ენერგია, ბუნებრივი გაზი, ნავთობი ა.შ.) აქვს სასაქონლო ბაზრის რისკის მნიშვნელოვანი ტოლერანტობა, მაგრამ სურს მინიმუმამდე დაიყვანოს საპროცენტო განაკვეთისა და სავალუტო რისკები. რისკის სტრატეგიის სწორი დანერგვისა და რეალიზაციის მონიტორინგს უზრუნველყოფს შიდა აუდიტი, რომელიც ანგარიშვალდებულია სამეთვალყურეო საბჭოს მიმართ და გარე აუდიტი, რომელიც ანგარიშვალდებულია, როგორც სამეთვალყურეო საბჭოს მიმართ, ასევე წარმოადგენს ობიექტური ინფორმაციის წყაროს ინვესტირებისა და ფართო აუდიტორიისთვის.

რისკის მართვა რთული პროცესია, რომელიც აერთიანებს სხვადასხვა მნიშვნელოვან ფუნქციას. სურათი 2.5 დეტალურად წარმოადგენს რისკის მართვის ორგანიზაციას ფინანსური ინსტიტუტებისთვის. წარმატებული რისკების მართვის პროცესი დაფუძნებულია შემდეგი კომპონენტების ეფექტურ სინთეზზე:

1. **რისკების იდენტიფიკაცია:** რისკების მართვის პირველი და ყველაზე მნიშვნელოვანი ეტაპი არის რისკების იდენტიფიკაცია. ყოველი ფინანსური ინსტიტუტი მოწყვლადია სხვადასხვა ხარისხით სხვადასხვა ფინანსური და არაფინანსური რისკის მიმართ. პორტფელის მუდმივი ანალიზი და რისკების მართვის დეპარტამენტის მჭიდრო კავშირი ხაზინის, საინვესტიციო და ფინანსური აღრიცხვის დეპარტამენტებთან წარმოადგენს ფინანსური რისკების იდენტიფიცირების მნიშ-

¹¹ აღნიშნული პირდაპირ გამომდინარეობს არბიტრაჟის თეორიიდან, როდესაც ყველა რისკი სრულიად არის ჰეჯირებული მოგება შეადგენს ჰეჯირების ტრანზაქციის დანახარჯებით დაკორექტირებულ ურისკო საპროცენტო განაკვეთს.

ვნელოვან წყაროს. არანაკლებ მნიშვნელოვანია არაფინანსური რისკების იდენტიფიკაცია, რაც ძირითადად ხდება ექსპერტული შეფასებით ან ე.წ. რისკების ჩემპიონების მიერ მოწოდებული ინფორმაციით¹². თანამედროვე ფინანსური სისტემის ტურბულენტობიდან გამომდინარე აუცილებელია როგორც ფინანსური, ასევე არაფინანსური რისკებისთვის ე.წ. რისკების ინვენტარის წარმოება (Lagat and Tenai, 2017; Tchankova, 2002).

2. რისკების მონიტორინგი და მართვა: რისკების მონიტორინგი არის კრიტიკულად მნიშვნელოვანი უწყვეტი პროცესი, რომელიც უზრუნველყოფს სხვადასხვა რისკის ზემოქმედების მუდმივ ზედამხედველობას, რისკებთან ასოცირებული ფინანსური დანაკარგების შეფასებასა და რისკების დინამიურ მართვას. ეს გულისხმობს ძირითადი რისკის ინდიკატორების (KRIs) რეგულარულ თვალყურის დევნებას და ანალიზს პოტენციური პრობლემების ადრეული გამაფრთხილებელი სიგნალების გამოსავლენად, რაც საშუალებას მისცემს რისკის შემცირების პროაქტიულ სტრატეგიებს. რისკის ეფექტური მონიტორინგი ასევე მოიცავს პერიოდულ სტრეს-ტესტს, რათა შეფასდეს ინსტიტუტის მდგრადობა სხვადასხვა სცენარების პირობებში და უზრუნველყოს კაპიტალის ადეკვატურობა. რისკების მონიტორინგის შენარჩუნებით, ფინანსურ ინსტიტუტებს შეუძლიათ სწრაფად მოახდინონ რეაგირება წარმოშობილ რისკებზე, დაიცვან რეგულაციების შესაბამისობა და დაიცვან თავიანთი ფინანსური სტაბილურობა და რეპუტაცია. აღმოჩენილი არასასურველი რისკების ჰეჯირების რეკომენდაცია გაიცემა რისკების დეპარტამენტის მიერ და როგორც წესი, რეალიზდება ხაზინის მიერ¹³.

3. რისკების მონაცემთა ბაზების მართვა და ანალიტიკა: რისკის მონაცემთა ბაზა ფინანსურ ინსტიტუტში ემსახურება ცენტრალიზებულ საცავს რისკთან დაკავშირებული ყველა მონაცემისთვის, რომელიც მოიცავს საკრედიტო, საბაზრო, ლიკვიდურობის, ოპერაციულ და სხვა სახის რისკებს. ეს მონაცემთა ბაზა არის დაწესებულების რისკის მართვის ჩარჩოს განუყოფელი ნაწილი, რაც გულისხმობს

¹²რისკის ჩემპიონი არის ფინანსური ინსტიტუტის სხვადასხვა დეპარტამენტში არსებული გუნდი, რომელიც ვალდებულია რეგულარულად მიაწოდოს რისკების ცენტრალურ დეპარტამენტს ინფორმაცია მის დეპარტამენტში არსებული რისკების შესახებ. მაგალითად IT დეპარტამენტში არსებობს გუნდი, რომელიც მონიტორინგს უკეთებს IT რისკებს, როგორცაა ჰაკერული თავდასხმა, პროგრამული ჩავარდნა და ა.შ.

¹³როგორც წესი, რისკების დეპარტამენტი იღებს გადაწყვეტილებას არასასურველი რისკის შემცირების შესახებ, თუმცა თავად ჰეჯირება უზრუნველყოფილია ხაზინის მიერ. ასევე, ხაზინა ირჩევს თითოეულ შემთხვევაში ჰეჯირების პროდუქტს (ოფციონები, ფიუჩერსები და ა.შ.). როლების ამგვარი განაწილება განპირობებულია ეფექტიანობით, რადგან ხაზინა უფრო გამოცდილია დერივატივებით ვაჭრობის პრაქტიკული ასპექტებით, ვიდრე რისკების დეპარტამენტი. ამასთანავე, აღნიშნული სისტემა უზრუნველყოფს ე.წ. ოთხი თვალის პრინციპს, ე.ი. რისკების მენეჯერი და ხაზინის წარმომადგენელი, ორივე ადევნებს თვალყურს ჰეჯირების ეფექტურობას.

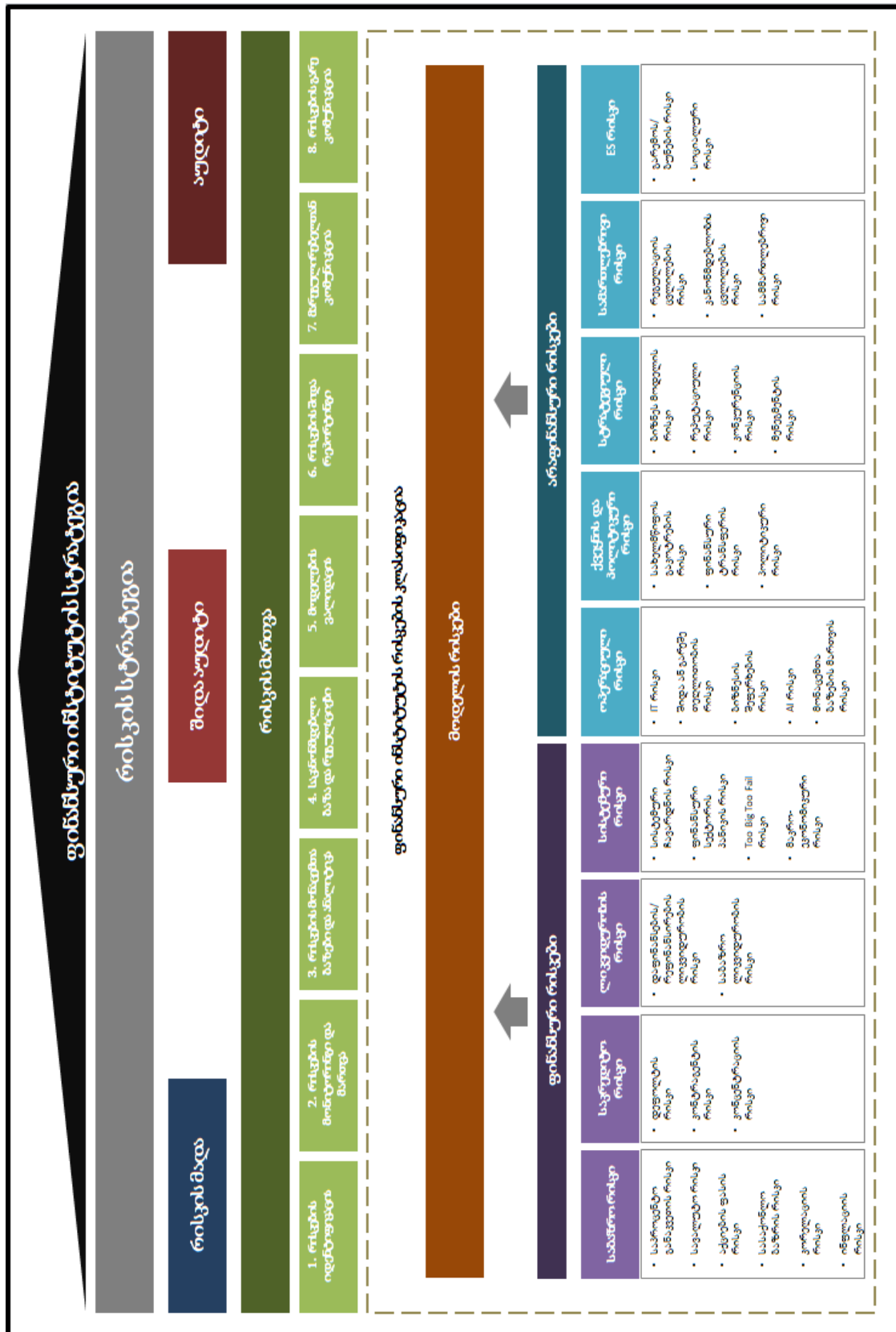
ყოველმცველ მონაცემთა შეგროვებას, შენახვასა და განახლებას. მაღალი ხარისხის, სტანდარტიზებული და განახლებული მონაცემების შენარჩუნებით, რისკების მონაცემთა ბაზა მხარს უჭერს რისკის რობასტულ ანალიზსა და ანგარიშგებას. გაფართოებული ანალიტიკა, მათ შორის პროგნოზირებადი მოდელირება, სცენარის ანალიზი და სტრეს ტესტირება, გამოიყენება ამ მონაცემებზე ტენდენციების იდენტიფიცირებისთვის, პოტენციური რისკის მოვლენების პროგნოზირებისთვის და მათი გავლენის შესაფასებისთვის. ე.წ. დიდი მონაცემების (big data) და მანქანური სწავლების მოდელების დანერგვის პარალელურად უფრო დიდ მნიშვნელობას იძენს მონაცემთა მენეჯმენტი (Dicuonzo et al., 2019). რისკების მონაცემთა ბაზის და მასთან დაკავშირებული ანალიტიკის ეფექტური გამოყენების მეშვეობით, ფინანსურ ინსტიტუტებს შეუძლიათ მიაღწიონ უფრო პროაქტიულ და მონაცემებზე ორიენტირებულ მიდგომას რისკების მართვის მიმართ (იხ. მაგ.: Cornwell et al., 2023; Dvorski Lacković et al., 2016).

4. **საკანონმდებლო ბაზა და რეგულაციები:** ინსტიტუტი ყოველთვის უნდა იყოს შესაბამისობაში არსებულ საკანონმდებლო და მარეგულირებელ ლანდშაფტებთან. ეს გულისხმობს კანონების, რეგულაციებისა და გაიდლაინების ცვლილებების სისტემატურ თვალყურის დევნებას, რომლებიც გამოცემულია მარეგულირებელი ორგანოების მიერ როგორც ეროვნულ, ისე საერთაშორისო დონეზე. ხორციელდება მიმდინარე სასწავლო პროგრამები, რათა პერსონალმა იცოდეს შესაბამისობის ვალდებულებების შესახებ. გულმოდგინე მონიტორინგით და მარეგულირებელ განახლებებთან ადაპტირებით, ფინანსურ ინსტიტუტებს შეუძლიათ შეამსუბუქონ სამართლებრივი რისკები, აირიდონ ჯარიმები და შეინარჩუნონ რეპუტაცია კანონისა და მარეგულირებელი წესების დაცვაში.
5. **მოდელის ვალიდაცია:** მოდელის ვალიდაცია უზრუნველყოფს რისკების მართვის, ფინანსური პროგნოზირებისა და გადაწყვეტილების მიღებისთვის გამოყენებული მოდელების სიზუსტეს, საიმედოობასა და ადეკვატურობას. ეს პროცესი მოიცავს მოდელების დაშვებების, მეთოდოლოგიების, შემავალი მონაცემებისა და გამომავალი შედეგების საფუძვლიან და დამოუკიდებელ განხილვას. ვალიდაციის ჯგუფები, რომლებშიც ხშირად შედიან როგორც რისკების ექსპერტები ასევე მათემატიკოსები, მკაცრად ამოწმებენ მოდელებს სხვადასხვა სცენარის მიხედვით, რათა გამოავლინონ ნებისმიერი სისუსტე ან მიკერძოება. ისინი ასევე აფასებენ მოდელების მუშაობას რეალური შედეგებისა და ინდუსტრიის კრიტერიუმების მიხედვით. რეგულარული ვალიდაციის ჩატარებით, ფინანსურ ინსტიტუტებს

შეუძლიათ აღმოაჩინონ და გამოასწორონ ხარვეზები, გააძლიერონ მოდელის მმართველობა და უზრუნველყონ შესაბამისობა მარეგულირებელ სტანდარტებთან. მოდელის ეფექტური ვალიდაცია არა მხოლოდ იცავს დაწესებულებას პოტენციური ფინანსური ზარალისგან, არამედ აყალიბებს ნდობას მოდელების პროგნოზირების შესაძლებლობებში და მხარს უჭერს ჯანსაღ სტრატეგიულ გადაწყვეტილებებს.

6. **რისკების რეპორტინგი:** რისკების ანგარიშგება არის კრიტიკული ფუნქცია, რომელიც უზრუნველყოფს ყოვლისმომცველ ხედვას დაწესებულების რისკის პროფილის შესახებ და ეხმარება სტრატეგიული გადაწყვეტილებების მიღების პროცესს. ეს პროცესი მოიცავს სხვადასხვა რისკების შესახებ მონაცემთა სისტემატურ შეგროვებას, ანალიზსა და წარდგენას ფინანსური ინსტიტუტის მენეჯმენტისა და სამეთვალყურეო საბჭოსთვის. მაღალი ხარისხის რისკის ანგარიშები გენერირდება რეგულარულად და მორგებულია სხვადასხვა დაინტერესებული მხარისთვის. ეს ანგარიშები, როგორც წესი, მოიცავს ძირითადი რისკის ინდიკატორებს (KRIs), სტრეს ტესტის შედეგებსა და ტენდენციების ანალიზს, რაც გვაძლევს დაწესებულების რისკის ლანდშაფტის ნათელ სურათს.
7. **მარეგულირებელთან კომუნიკაცია:** მარეგულირებელ ორგანოებთან ეფექტური კომუნიკაცია უზრუნველყოფს ინსტიტუტის შესაბამისობას მარეგულირებელ მოლოდინებთან და მოთხოვნებთან. ის გულისხმობს ყოვლისმომცველი ანგარიშების, გამჟღავნებისა და დოკუმენტაციის დროულ წარდგენას, როგორც ეს მარეგულირებელი ჩარჩოებით არის დადგენილი. გარდა ამისა, რეგულარული შეხვედრები და კონსულტაციები მარეგულირებლებთან ხელს უწყობს შესაბამისობის საკითხების გარკვევას, წარმოშობილი რისკების განხილვასა და დაწესებულების რისკის მართვის პრაქტიკის განახლებებს. გამჭვირვალე და აქტიური კომუნიკაცია ხელს უწყობს ნდობასა და თანამშრომლობით ურთიერთობას მარეგულირებლებთან.
8. **რისკების გარე კომუნიკაცია:** რისკების კომუნიკაცია გარე მხარეებთან, როგორიცაა პოტენციური ინვესტორები ან მედია, ფინანსური ინსტიტუტის გამჭვირვალობისა და რეპუტაციის მართვის სტრატეგიის მნიშვნელოვანი კომპონენტია. ეს კომუნიკაცია გულისხმობს შესაბამისი რისკის ინფორმაციის გამჟღავნებას სხვადასხვა არხებით, მათ შორის წლიური ანგარიშებით, ინვესტორების პრეზენტაციებით, პრესრელიზებითა და მარეგულირებელი დოკუმენტებით. მკაფიო, ზუსტი და დროული კომუნიკაცია ხელს უწყობს დაინტერესებულ მხარეებს შორის ნდობის ჩამოყალიბებას.

სურათი 2.5 ასევე აღწერს ფინანსური ინსტიტუტის ძირითად რისკებს, რომელიც შეიძლება დაიყოს ფინანსურ და არაფინანსურ რისკებად. ფინანსური რისკები ერთიანდება საბაზრო, საკრედიტო, ლიკვიდურობისა და სისტემის რისკებად. არაფინანსურ რისკებს განეკუთვნება ოპერაციული რისკები, ქვეყნისა და პოლიტიკური რისკები, სტრატეგიული რისკები, სამართლებრივი რისკები და გარემოსა და სოციალური (ES) რისკები. თითოეული ზემოთჩამოთვლილი რისკის მართვა წარმოუდგენელია მოდელის გარეშე, შესაბამისად, ჩვენ განვიხილავთ მოდელის რისკს როგორც ე.წ. მეორე დონის რისკს. ზოგიერთი მეცნიერის აზრით, მოდელის რისკი არის ოპერაციული რისკების ნაწილი (იხ. მაგ.: Sibbertsen et al., 2008), თუმცა, ერთი მხრივ, ასეთი მიდგომა წარმოადგენს მოდელის რისკის ძალიან ვიწრო ჭრილში განხილვას, ხოლო მეორე მხრივ, ფინანსური ინსტიტუტის რისკის მართვის ეფექტური ორგანიზაციისთვის არათანმიმდევრულ მიდგომას.



სურ. 2.5: ფინანსური ინსტიტუტის რისკების მენეჯმენტი. აღნიშნული წარმოდგენა მოტივირებულია ბაზელის კომიტეტისა და ევროპის ცენტრალური ბანკის რეკომენდაციებითა და ევროპული მსხვილი ფინანსური ინსტიტუტების თარგმნის პრინციპების მიხედვით.

შეიძლება განვსაზღვროთ მოდელის რისკის ეფექტურად მართვის ექვსი ძირითადი საყრდენი:

1. **მოდელის რისკების მართვის დამოუკიდებელი ცენტრალური ფუნქცია:** როგორც სურათი 2.5 აღწერს ფინანსური ინსტიტუტის რისკების მართვის დეპარტამენტში უნდა არსებობდეს ცენტრალური გუნდი, რომელიც მართავს მოდელის რისკის და შეასრულებს ზედამხედველობასა. ეს გუნდი უზრუნველყოფს მოდელების ინვენტარის შექმნას და მართავს ახალი მოდელების თავდაპირველი ვალიდაციისა და არსებული მოდელების რეგულარული ვალიდაციისა და განახლების პროცესებს. მოდელის რისკის მართვის დეპარტამენტი დაკომპლექტებული უნდა იყოს ინტერდისციპლინარული პროფესიონალებით, რომლებიც შეაფასებენ მოდელის რისკებს სხვადასხვა კონტექსტში. ცხადია, არ არსებობს ერთიანი მიდგომა ფინანსური და არაფინანსური რისკების მოდელის რისკების შეფასებისთვის, თუმცა გათვალისწინებულ უნდა იქნას თითოეული მათგანი და მიმდინარეობდეს აქტიური მონიტორინგი.
2. **მოდელის საფუძვლიანი შემოწმება:** მრავლისმომცველი ვალიდაცია გადამწყვეტია ნებისმიერი ფინანსური რისკის ან ფასდადების მოდელის ადეკვატურობის შესაფასებლად. საჭიროა, არამხოლოდ დადასტურდეს მათემატიკური აპარატის სიზუსტე, არამედ დეტალურად განისაზღვროს მოდელის გამოყენების არეალი. ამასთან, სასურველია დაცული იყოს სიმარტივის პრინციპი, რაც გულისხმობს სხვა თანაბარ პირობებში მარტივი მოდელისთვის უპირატესობის მინიჭებას. მოდელის შემოწმების პროცესი მოიცავს მოდელის ტესტირებას სხვადასხვა მონაცემთა ბაზაზე პრაქტიკული თუ თეორიული სცენარების გათვალისწინებას.
3. **გამჭვირვალე დოკუმენტაცია:** საჭიროა არსებობდეს სრული დოკუმენტაცია, რომელშიც დეტალურადაა აღწერილი მოდელის არქიტექტურა, მოდელის ტესტირებისა და ტრენინგის პროცესი, საჭირო მონაცემები, დაშვებები და შეზღუდვები. ასევე უნდა იყოს დოკუმენტირებული მოდელის ყველა აუდიტის/ვალიდაციის დასკვნები.
4. **მონაცემთა მართვა:** მაღალი ხარისხის, მრავალფეროვანი და სრული მონაცემები აუცილებელი წინაპირობაა მოდელის სიზუსტისთვის. მონაცემთა ხარისხის შემოწმების კონტროლი, მონაცემთა წინასწარი დამუშავება და მონაცემთა მართვის პრაქტიკის ჩამოყალიბება ხელს უწყობს ეფექტური მოდელის რისკის მენეჯმენტს.

5. **რეგულარული მონიტორინგი და განახლება:** რეგულარული მონიტორინგი ხელს უწყობს ხარვეზების გამოვლენას და მათ სწრაფ აღმოფხვრას.
6. **სცენარის ანალიზი და სტრეს-ტესტირება:** სხვადასხვა ეკონომიკური სცენარის ანალიზი და სტრეს-ტესტი მნიშვნელოვნად წარმოაჩენს მოდელის სუსტ და ძლიერ მხარეებს. ხშირად სწორედ ექსტრემალური სცენარები იძლევა შესაძლებლობას ადეკვატურად შეფასდეს ფინანსური რისკი.

ფინანსური ინსტიტუტის ორგანიზაციული სტრუქტურა ხშირად კონსერვატიული და მოუქნელია. შესაბამისად, რისკის ფუნქციის გარდაქმნა, როგორც ეს წარმოდგენილია [2.5](#) სურათზე არის მტკიცნეული და გრძელვადიანი პროექტი (Crespo et al., [2017](#); European Central Bank, [2019](#)).

3. მოდელის რისკის შეფასების ეკონომეტრიკული მოდელები

წინა თავში განხილულია საბაზრო რისკის ზომები, რომლებიც მოიცავენ მოდელის რისკს და განვითარებულია მოდელის რისკის ზომის თეორიული კონცეფცია. განხილული საბაზრო და მოდელის რისკების უმეტესობა ეყრდნობა განაწილებას მოდელის სივრცეზე. ბაიესური ანალიზი არის სტანდარტული ტექნიკა, რომელიც ცდილობს შეაფასოს ასეთი განაწილება დაკვირვებების საფუძველზე. ბაიესის ჩარჩოში საწყისი წერტილი არის აპრიორული განაწილება მოდელის სივრცეზე (მაგ., სუბიექტური რწმენა), რომელიც შემდეგ გარდაიქმნება აპოსტერიორულ განაწილებად სტატისტიკური მონაცემების გამოყენებით. ამ თავში დაწვრილებით შევისწავლით ბაიესის თეორემაზე დაფუძნებულ მრავალ ეკონომეტრიკულ სიმულაციის მეთოდს, რომელიც ეფექტურად აფასებს მოდელის უცნობ განაწილების კანონს.

3.1 მოდელის განაწილების შეფასება ბაიესური მიდგომით

სტატისტიკური ანალიზის სფეროში არსებობს ერთმანეთისგან განსხვავებული ორი მიდგომა, ე.წ. სიხშირული და ბაიესური მიდგომა. თითოეული გვთავაზობს განსხვავებულ პერსპექტივას, თუ როგორ უნდა მოხდეს მონაცემების ანალიზი და ინტერპრეტაცია, რაც გავლენას ახდენს უცნობი პარამეტრების შეფასებაზე და სტატისტიკური დასკვნის მიღებაზე.

დავუშვათ, Y წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილებაც დამოკიდებულია უცნობ θ პარამეტრზე. ბაიესის თეორემის მიხედვით:

$$P(\theta|Y = y) = \frac{P(Y = y|\theta) \cdot P(\theta)}{P(Y)}, \quad (3.1)$$

სადაც $P(\theta)$ არის θ პარამეტრის აპრიორული განაწილება, ხოლო $P(\theta|Y = y)$ წარმოადგენს θ პარამეტრის აპოსტერიორულ განაწილებას.

ტოლობა (3.1) მიხედვით Y განაწილების კანონის ტიპი ცნობილია, მხოლოდ პარამეტრია უცნობი. პრაქტიკაში გამოყენებული რისკების შეფასების მოდელები განსხვავდება არამხოლოდ პარამეტრებით, არამედ ფუნდამენტური სტატისტიკური ტიპით. მაგალითად, VaR მოდელი შეიძლება დაფუძნებული იყოს ნორმალურ განაწილებაზე, რომელიც

განსაზღვრულია ვარიაციის და საშუალოს პარამეტრებით და არ ითვალისწინებს ასიმეტრიას ან ექსცესს. ასევე, VaR მოდელი შეიძლება უშვებდეს NIG განაწილებას, რომელიც დამოკიდებულია 4 პარამეტრზე და უშვებს ასიმეტრიას და სხვა მაღალი რანგის მომენტების არსებობას. შესაბამისად, საჭიროა (3.1) ტოლობის განზოგადება.

განვიხილოთ მოდელის ზომადი სივრცე $(M, \mathcal{M})$, სადაც თითოეული მოდელი $m \in M$ არის ალბათური განაწილების კანონი $(\Omega, \mathcal{F})$ სივრცეზე. ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ მოდელის სიმრავლე M შეიცავს N განსხვავებულ ალბათური განაწილების კანონის კლასს, რომელიც აღვნიშნოთ $\Lambda^1, \dots, \Lambda^N$. ალბათური განაწილების კლასი შეიძლება იყოს ნორმალური განაწილება, სტიუდენტის t -განაწილება, NIG განაწილება და ა.შ. ასეთ შემთხვევაში თითოეულ $m \in M$ მოდელს შეესაბამება წყვილი (Λ^j, θ^j) , სადაც $\theta^j \in \Theta^j \subseteq \mathbb{R}^{n_j}$ არის Λ^j კლასის პარამეტრების ვექტორი. ამ ფაქტის ხაზგასასმელად შემოვიტანოთ აღნიშვნა $m_{(\Lambda^j, \theta^j)}$.

დავუშვათ, $\Pi(\Lambda^j)$ წარმოადგენს აპრიორულ ალბათური Λ^j ალბათობის განაწილების კლასისთვის, ხოლო π_j არის აპრიორული განაწილების სიმკვრივე $\theta^j \in \Theta^j$ პარამეტრის ვექტორისთვის, Λ^j განაწილების კლასის მიმართ. დავუშვათ, მოცემულია დაკვირვება y უცნობი შემთხვევითი სიდიდის $Y \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \subseteq L^0(\Omega, \mathcal{F})$, მაშინ ცხადია:

$$P(Y = y) = \sum_j \int_{\Theta^j} m_{(\Lambda^j, \theta^j)}(Y = y) \pi_j(\theta^j) d\theta^j \Pi(\Lambda^j), \quad (3.2)$$

სადაც, $m_{(\Lambda^j, \theta^j)}(Y = y)$ აღნიშნავს დასაჯერობას (likelihood) $m_{(\Lambda^j, \theta^j)}$ მოდელის მიმართ. ბაიესის თეორემის მიხედვით, მოდელის სივრცეზე აპოსტერიორული განაწილება μ განისაზღვრება, როგორც:

$$\mu((\Lambda^j, \theta^j) | Y = y) = \frac{m_{(\Lambda^j, \theta^j)}(Y = y) \pi_j(\theta^j) \Pi(\Lambda^j)}{\sum_i \int_{\Theta^i} m_{(\Lambda^i, \theta^i)}(Y = y) \pi_i(\theta^i) d\theta^i \Pi(\Lambda^i)}. \quad (3.3)$$

ამავდროულად შესაძლებელია აპოსტერიორული ალბათობის გამოთვლა თავად Λ^j მოდელის კლასისთვის. მართლაც (3.3) ინტეგრირებით პარამეტრის ვექტორის სივრცეზე მოვიღებთ,

$$\mu(\Lambda^j | Y = y) = \frac{\int_{\Theta^j} m_{(\Lambda^j, \theta^j)}(Y = y) \pi_j(\theta^j) d\theta^j \Pi(\Lambda^j)}{\sum_i \int_{\Theta^i} m_{(\Lambda^i, \theta^i)}(Y = y) \pi_i(\theta^i) d\theta^i \Pi(\Lambda^i)}, \quad (3.4)$$

ხოლო პარამეტრების ვექტორის აპოსტერიორული განაწილება გამოიანგარიშება:

$$\mu(\theta^j | Y = y) = \frac{m_{(\Lambda^j, \theta^j)}(Y = y) \pi_j(\theta^j)}{\int_{\Theta^j} m_{(\Lambda^j, \theta^j)}(Y = y) \pi_j(\theta^j) d\theta^j}. \quad (3.5)$$

გარდა ზოგიერთი ტრივიალური შემთხვევისა, აპოსტერიორული ალბათობის გამომანგარიშების ტოლობა (3.3) წარმოადგენს სტატისტიკური თვალსაზრისით მნიშვნელოვან გამოწვევას. პრობლემის მასშტაბურობის შესაფასებლად განვიხილოთ საშუალო ზომის ბანკის საბაზრო პორტფელი, რომელიც მოიცავს ასეულობით განსხვავებულ ფინანსურ პროდუქტს, როგორიცაა: ცალკეული კომპანიის აქციები, აქციის ან სექტორის ინდექსები, სახაზინო ობლიგაციები, წარმოებული ფასიანი ქაღალდები და ა.შ. თითოეული მოდელი დაფუძნებულია ყოველდღიურ დაკვირვებებზე წლების მანძილზე, ხოლო მოდელის სიმრავლე შეიძლება შეიცავდეს ათეულობით განსხვავებულ განაწილების კლასს! ცხადია, პრაქტიკული თვალსაზრისით (3.3) ტოლობის მნიშვნელში არსებული ინტეგრალი მოითხოვს სპეციალურ სიმულაციის მეთოდებს.

3.2 მარკოვის ჯაჭვების მონტე კარლოს მოდელები

განვიხილოთ (3.3) ტოლობის მიხედვით აპოსტერიორული მოდელის განაწილების შეფასების ორი შემთხვევა:

- (i) მოდელის სიმრავლე შეიცავს მხოლოდ ერთი განაწილების კლასს
- (ii) მოდელის სიმრავლე შეიცავს მრავალ განსხვავებულ განაწილების კლასებს

3.2.1 მოდელის განაწილების შეფასება, როდესაც მოდელის სიმრავლე შეიცავს მხოლოდ ერთ განაწილების კლასს

განვიხილოთ (Ω, F) ზომადი სივრცე, $t \in \mathbb{N}$, S_i აღნიშნავს ზომად სიმრავლეს. მარკოვის პროცესი $X_t(\omega) \in \Omega$ არის სტოქასტური პროცესი, რომელიც აკმაყოფილებს მარკოვის თვისებას:

$$P(X_t(\omega) \in S_t | X_0(\omega) \in S_0, X_1(\omega) \in S_1, \dots, X_{t-1}(\omega) \in S_{t-1}) = P(X_t(\omega) \in S | X_{t-1}(\omega) \in S_{t-1}) \quad (3.6)$$

ე.ი. შემთხვევითი სიდიდის რეალიზაციის შედეგი t დროს დამოკიდებულია მხოლოდ მის $t - 1$ მნიშვნელობაზე და არ არის დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდის ისტორიაზე. დისკრეტული დროის მარკოვის პროცესს ეწოდება მარკოვის ჯაჭვი. მარკოვის თვისება საფუძვლად უდევს მარკოვის ჯაჭვის მონტე კარლოს (MCMC) მეთოდს, რომელიც არის შემთხვევითი შერჩევის (სიმულაციური) მეთოდი. კლასიკური მონტე კარლოს სიმულაციისგან განსხვავებით, MCMC-ის მიზანი არ არის მრავალგანზომილებიანი რეგიონის ერთგვაროვანი შესწავლა, არამედ ალგორითმი ავტომატურად აახლებს შერჩევის

რეგიონს არსებული შერჩევის (რეალიზაციის) მიხედვით. შესაბამისად, MCMC არის ძალიან მძლავრი მეთოდი მრავალგანზომილებიანი ალბათური განაწილებიდან შერჩევის აღებისთვის და მოსალოდნელი მნიშვნელობის ან სხვა სტატისტიკის შესაფასებლად (მრავალგანზომილებიანი ინტეგრალის გამოსათვლელად), იმ შემთხვევაში, როდესაც ანალიზური მეთოდები ან კლასიკური მონტე კარლოს სიმულაციები ვერ გვთავაზობენ პრობლემის გადაჭრას (იხ., Brooks et al., 2011; Geweke, 1999).

MCMC წარმოქმნის სიმულირებულ შემთხვევით თანმიმდევრობას ისე, რომ მიმდევრობის თითოეული წევრი დამოკიდებულია მხოლოდ წინაზე, ანუ თანმიმდევრობა არის მარკოვის ჯაჭვი. MCMC სიმულაციის პოპულარული სპეციფიკაციაა ეგრეთ წოდებული მეტროპოლის-ჰასტინგის (Metropolis-Hastings) ალგორითმი (Hastings, 1970; Metropolis et al., 1953). მთავარი იდეა მდგომარეობს მარკოვის ჯაჭვის აგებაში, რომლის სტაციონარული განაწილება არის მოდელის აპოსტერიორული განაწილება.

დავუშვათ, მოდელის სივრცე M შეიცავს მოდელებს მხოლოდ ერთი განაწილების კლასიდან Λ^j . განვიხილოთ მარკოვის ჯაჭვი არსებული მდგომარეობით θ . სიმულაციები წარმოიქმნება ორსაფეხურიანი პროცედურით: მარკოვის ჯაჭვის არსებული მდგომარეობის გათვალისწინებით, პირველ საფეხურზე ხდება θ^p შემდეგი მდგომარეობის შემოთავაზება შემთხვევითი შერჩევით. θ^p გენერირებულია ალბათური სიმკვრივის ფუნქციიდან $q(\theta^p|\theta)$.

მეორე საფეხურზე, შემოთავაზებული მდგომარეობა მიიღება გარკვეული ალბათობით $\alpha(\theta^p|\theta)$, რომელიც მოიცავს (3.3) ალბათობების თანაფარდობას მიმდინარე და შემოთავაზებული მდგომარეობისთვის;

$$\alpha(\theta^p|\theta) = \min \left(1, \frac{m_{(\theta^p)}(Y = y)\pi(\theta^p)q(\theta|\theta^p)}{m_{(\theta)}(Y = y)\pi(\theta)q(\theta^p|\theta)} \right). \quad (3.7)$$

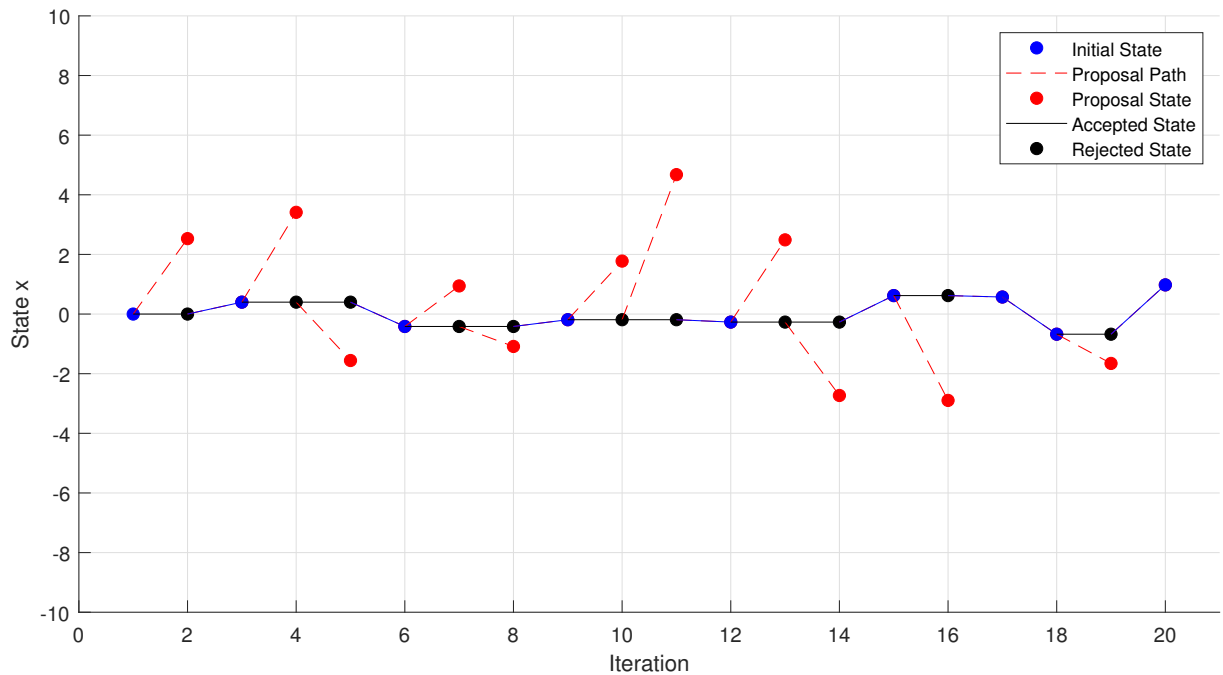
თუ შემოთავაზებული ახალი პარამეტრების ვექტორი არ იქნება მიღებული, ჯაჭვი რჩება არსებულ მდგომარეობაში.

ცხადია, რომ (3.3) ტოლობის თანაფარდობების აღებით ავირიდებთ მრავალგანზომილებიანი ინტეგრალის პირდაპირ გამოთვლას. ახალი წევრის მიღების ალბათობა განისაზღვრება ისე, რომ დაკმაყოფილებულია ეგრეთ წოდებული დეტალური ბალანსის პირობა, რაც გულისხმობს,

$$\mu(\theta^p|Y = y)\alpha(\theta|\theta^p) = \mu(\theta|Y = y)\alpha(\theta^p|\theta). \quad (3.8)$$

შესაბამისად, ალგორითმი ყოველთვის კონვეგირდება და მოდელის აპოსტერიორული

განაწილება არის ჯაჭვის სტაციონარული განაწილება. სურათი 3.1 სქემატურად ასახავს MCMC სიმულაციას.



სურ. 3.1: MCMC სიმულაციის სქემატური წარმოდგენა.

მეტროპოლის-ჰასტინგის ალგორითმი გამოირჩევა მოქნილობით და შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს განსაკუთრებით რთულ განაწილებებთან (იხ. Smith and Roberts, 1993, Tierney, 1994, Chib and Greenberg, 1995). ასევე მეტროპოლის-ჰასტინგის ალგორითმი ხასიათდება ეფექტურობით, რადგან არ საჭიროებს მრავალგანზომილებიანი ინტეგრალების შეფასებას. ამ მეთოდის ნაკლი ის არის, რომ მისი გამოყენება შესაძლებელია მხოლოდ მოდელის სივრცეებისთვის, სადაც M მოიცავს მხოლოდ ერთ განაწილების კლასს. (დამატებითი დეტალებისთვის კლასიკური MCMC სიმულაციების შესახებ იხ. Geweke, 1999; Gilks, 2005, Gamerman and Lopes, 2006, Robert, 2007, Brooks et al., 2011).

3.2.2 მოდელის განაწილების შეფასება, როდესაც მოდელის სიმრავლე შეიცავს მრავალ განაწილების კლასს

მოდელის რისკის გაზომვის კონტექსტში ცნობილი განაწილების კლასის დაშვება დიდი შეზღუდვაა. მეტროპოლის-ჰასტინგის ალგორითმი არ იძლევა სრული აპოსტერიორული მოდელის განაწილების შეფასების საშუალებას ზოგად (3.3) შემთხვევაში. სხვადასხვა განაწილების კლასის არსებობისას, P. J. Green, 1995 შემოგვთავაზა ე.წ. შექცევადი ნახტომის MCMC ალგორითმი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ავაშენოთ მარკოვის ჯაჭვი სტაციონარული განაწილებით, რომელიც წარმოადგენს განაწილების კლასისა და

პარამეტრების ვექტორის ერთობლივ აპოსტერიორულ განაწილებას.

განვიხილოთ შექცევადი ნახტომის MCMC ალგორითმი დეტალურად. დავუშვათ k არის მარკოვის ჯაჭვის ნახტომის ინდექსი, რომელიც განსაზღვრულია $\mathcal{K}$ თვლად სიმრავლეზე ისე, რომ ყოველი $k \in \mathcal{K}$ მოიცავს ჯაჭვის ნახტომს (Λ^i, θ^i) მდგომარეობიდან (Λ^i, θ^i) მდგომარეობაზე და შესაბამის უკუ ნახტომს (Λ_i, Λ_j) მოდელის კლასის წყვილის-თვის. დავუშვათ, რომ $(\Lambda^i, \theta^i), \theta^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ არის მარკოვის ჯაჭვის არსებული მდგომარეობა. განვიხილოთ $u_k^i \in \mathbb{R}^{r_k^i}$, რომელიც გენერირებულია რომელიმე ცნობილი g_k^i განაწილების სიმკვრივიდან. ჯაჭვის ახალი მდგომარეობის შემოთავაზება θ^j გამოითვლება რაიმე დეტერმინისტული ფუნქციით $h_k : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{r_k^i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_j} \times \mathbb{R}^{r_k^j}$, ისე, რომ $(\theta^j, u_k^j) = h_k(\theta^i, u_k^i)$, სადაც $u_k^j \in \mathbb{R}^{r_k^j}$ არის გენერირებული g_k^j სიმკვრივიდან და $n_i + r_k^i = n_j + r_k^j$. უკუ ნახტომის შემოთავაზება გენერირებულია g_k^j და h_k^{-1} ფუნქციების მიერ. დავუშვათ, $q_k(\Lambda^i, \theta^i)$ არის ალბათობა, რომ ნახტომი k იქნება შემოთავაზებული (Λ^i, θ^i) მდგომარეობისთვის. მარკოვის ჯაჭვის ეფექტური კონსტრუქციისთვის M მოდელის სივრცეზე საკმარისია სრულდებოდეს დეტალური ბალანსის პირობა: P. J. Green and Hastie, 2009,

$$\int_{((\Lambda^i, \theta^i), (\Lambda^j, \theta^j)) \in A \times B} \mu((\Lambda^i, \theta^i) | Y = y) q_k((\Lambda^i, \theta^i)) g_k^i(u_k^i) \alpha((\Lambda^j, \theta^j) | (\Lambda^i, \theta^i)) dm du_k^i = \quad (3.9)$$

$$\int_{((\Lambda^i, \theta^i), (\Lambda^j, \theta^j)) \in A \times B} \mu((\Lambda^j, \theta^j) | Y = y) q_k((\Lambda^j, \theta^j)) g_k^j(u_k^j) \alpha((\Lambda^i, \theta^i) | (\Lambda^j, \theta^j)) dm' du_k^j, \quad (3.10)$$

სადაც $A, B \in M$, $\alpha((\Lambda^j, \theta^j) | (\Lambda^i, \theta^i))$ აღნიშნავს ახალი შემოთავაზებული მდგომარეობის თანხმობის ალბათობას. თუ h_k და მისი შებრუნებული h_k^{-1} არიან დიფერენცირებადი ფუნქციები, მაშინ:

$$\alpha((\Lambda^j, \theta^j) | (\Lambda^i, \theta^i)) = \min \left\{ 1, \frac{\mu((\Lambda^j, \theta^j) | W = \omega) q_k((\Lambda^j, \theta^j)) g^j(u_k^j)}{\mu((\Lambda^i, \theta^i) | W = \omega) q_k((\Lambda^i, \theta^i)) g^i(u_k^i)} J \right\}, \quad (3.11)$$

სადაც, $J = \left| \frac{\partial(\theta^j, u_k^j)}{\partial(\theta^i, u_k^i)} \right|$ აღნიშნავს (θ^i, u_k^i) -დან (θ^j, u_k^j) -მდე გარდაქმნის იაკობიანს. ტოლობები (3.3) და (3.11) გვაძლევს:

$$\alpha((\Lambda^j, \theta^j) | (\Lambda^i, \theta^i)) = \min \left\{ 1, \frac{m_{(\Lambda^j, \theta^j)}(W = w) \pi_j(\theta^j | \Lambda^j) \Pi(\Lambda^j) q_k((\Lambda^j, \theta^j)) g^j(u_k^j)}{m_{(\Lambda^i, \theta^i)}(W = w) \pi_i(\theta^i | \Lambda^i) \Pi(\Lambda^i) q_k((\Lambda^i, \theta^i)) g^i(u_k^i)} J \right\}, \quad (3.12)$$

მაშასადამე, შექცევადი ნახტომის MCMC სიმულაცია არის მეტროპოლის-ჰასტინგის ალგორითმის განზოგადება, რომელიც მოიცავს შემდეგ ორ საფეხურს. პირველ ეტაპზე პარამეტრის ვექტორის განახლება ხდება მოცემული მიმდინარე ფიქსირებული განაწილების კლასის მიხედვით. ეს განახლება შეიძლება განხორციელდეს მეტროპოლის-

ჰასტინგის ალგორითმის საფუძველზე შესაბამისი პარამეტრის ვექტორულ სივრცეში. მეორე ნაბიჯი შედგება განაწილების კლასისა და მასთან დაკავშირებული პარამეტრის ვექტორის ერთდროული განახლებისგან. შექცევადი ნახტომის MCMC სიმულაციის კრებადობის დამტკიცებისათვის და ტექნიკური დეტალებისთვის იხ. P. L. Green and Worden, 2015; P. J. Green, 1995; P. J. Green and Hastie, 2009. ხოლო MCMC თეორიის ყოვლისმომცველი მიმოხილვისთვის იხ. Roberts, Rosenthal, et al., 2004; Robert, 2007 თავი 6, Gelman et al., 2014.

შენიშვნა 9. შექცევითი ნახტომის MCMC სიმულაციის ალტერნატივას წარმოადგენს ე.წ. გარდამავალი მარკოვის ჯაჭვის მონტე კარლოს სიმულაცია (TMCMC). Ching and Chen, 2007-ის მიერ შემოთავაზებული TMCMC მეთოდი მიეკუთვნება ნაწილაკების ფილტრის თანმიმდევრული მეთოდების კლასს; მოდელი ეტაპობრივად აღწერს მრავალგანზომილებიან მოდელის სივრცეს და მონაცემებზე დაფუძნებით იკვლევს აპოსტერიორულ განაწილებას (იხ. P. L. Green and Worden, 2015, Betz et al., 2016). წინამდებარე ნაშრომში TMCMC პრაქტიკულ აპლიკაციას არ განვიხილავთ, რადგან ჩვენს მიერ შესწავლილი ყველა შემთხვევა ოპტიმალურად იხსნება შექცევითი ნახტომის MCMC მეთოდით.

ბაიესური მეთოდების მთავარი ნაკლოვანება არის ალგორითმების კრებადობის სიჩქარე. თეორიულად, ყოველი ზემოთ განხილული MCMC ალგორითმი, რომელიც აკმაყოფილებს დეტალურ ბალანსის პირობას, ყოველთვის კრებადია აპოსტერიორულ განაწილებასთან თუ მოცემულია საკმარისად დიდი რაოდენობის სიმულაციური შერჩევა (იხ. Gamerman and Lopes, 2006, Brooks et al., 2011). თუმცა არ არსებობს მათემატიკური მეთოდი, რომელიც ზუსტად შეაფასებს საჭირო შერჩევის (იტერაციის) რაოდენობას.

MCMC ალგორითმების ახალი მდგომარეობის შემომთავაზებელი სიმკვრივისა (proposal density) და აპრიორული განაწილების დაშვებები გადამწყვეტ როლს თამაშობენ კრებადობის სიჩქარისთვის. MCMC-ის კრებადობის მონიტორინგის რამდენიმე მეთოდი არსებობს. უმარტივესი მეთოდია ჯაჭვებზე ვიზუალურად დაკვირვება (მონიტორული შერევა) და აპოსტერიორული განაწილების ნიმუშის ავტოკორელაციების გამოკვლევა.

ერთგანზომილებიანი MCMC ალგორითმებისთვის სტატისტიკური კრებადობის ტესტირების მეთოდები განხილულია Geweke, 1992 და Heidelberger and Welch, 1983. მრავალგანზომილებიანი MCMC ალგორითმებისთვის Gelman and Rubin, 1992, Cowles and Carlin, 1996 და Geweke, 2005 გვთავაზობს კრებადობის რამდენიმე სტატისტიკურ ტესტს. ჩვენ გამოვიყენებთ აღნიშნულ ტესტებს შემდეგ თავებში კონკრეტული ქეისების

შესწავლისას.

მრავალგანზომილებიანი ქეისებისთვის, როდესაც შესაფასებელი პარამეტრების რაოდენობა აღემატება 30-ს, MCMC ალგორითმის სისწრაფე შეიძლება მნიშვნელოვნად გაუმჯობესდეს ე.წ. ადაპტირებული MCMC ალგორითმების (Haario et al., 1999, Haario et al., 2001, Haario et al., 2006) და დიფერენციალური ევოლუციის ალგორითმების (ter Braak, 2006, ter Braak and Vrugt, 2008, Vrugt et al., 2009, Vrugt, 2016) გამოყენებით. ეს ტექნიკა საშუალებას იძლევა თავიდან ავიცილოთ დაშვებები ახალი მდგომარეობის შემომთავაზებელი სიმკვრივის (proposal density) ფორმის შესახებ. აღნიშნული მეთოდები ეფუძნება რიცხვითი ოპტიმიზაციის ცნობილ გენეტიკურ ალგორითმს და ისინი ადვილად შეიძლება გამოყენებული იქნეს როგორც კლასიკური MCMC სიმულაციის მეთოდისთვის, ისე შექცევითი ნახტომის MCMC შემთხვევაში. მრავალი ექსპერიმენტის შედეგად Vrugt et al., 2009 და Vrugt, 2016 აჩვენებს, რომ MCMC სიმულაციის 100-ჯერადი ეფექტურობის გაუმჯობესება შეიძლება განხორციელდეს თუ მრავალი მარკოვის ჯაჭვი იქნება პარალელურად გამოყენებული დიფერენციალური ევოლუციის პრინციპით. მეთოდი ავტომატურად არეგულირებს შემომთავაზებელი სიმკვრივის დისპერსიასა და შერჩევის მიმართულებას მრავალგანზომილებიან ზედაპირზე, რათა მაქსიმალურად გაზარდოს საშუალო ნორმირებული გადახტომის მანძილი თითოეულ ჯაჭვში. იმავდროულად, თუ რომელიმე ჯაჭვი ჩაიკეტება ლოკალური მინიმუმის სიახლოვეს, დანარჩენი პარალელური ჯაჭვები უზრუნველყოფენ მის "დახსნას".

4. ქეისების ანალიზი

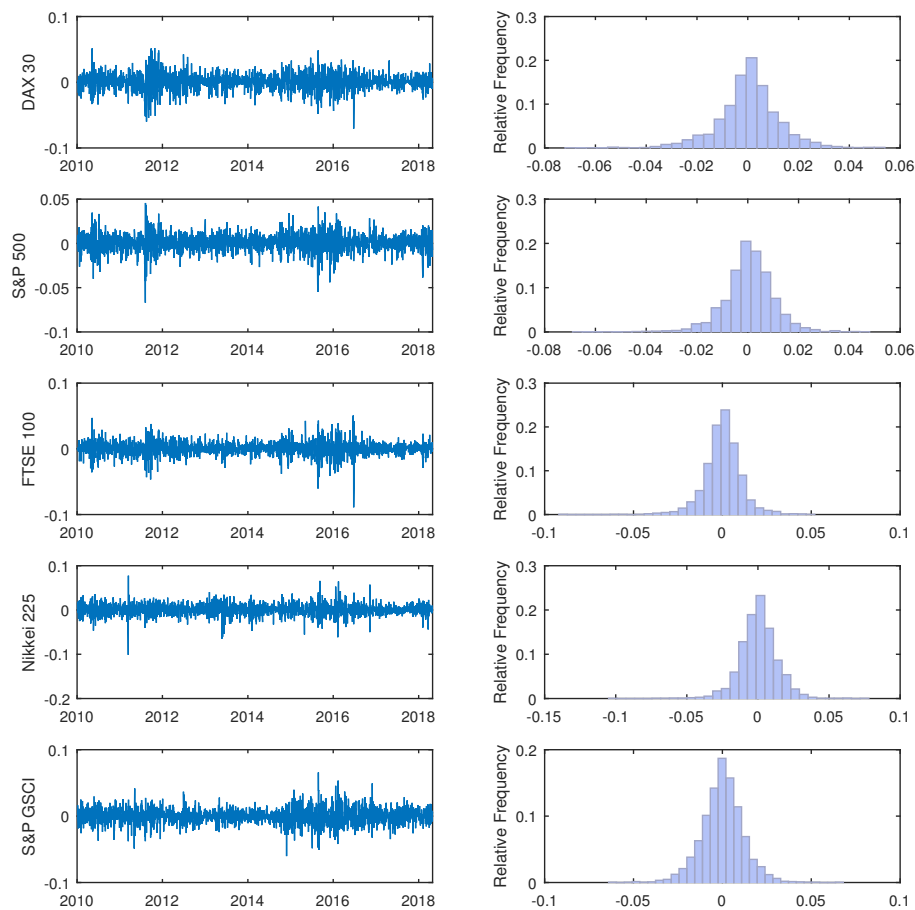
4.1 საბაზრო რისკის მოდელის რისკი

წინა თავებში დეტალურად არის განხილული მოდელის რისკის შეფასების მეთოდები და მოდელის სივრცეზე არსებული განაწილების ემპირიული შეფასების მეთოდები. ამ თავში წარმოდგენილია რეალურ პრობლემასთან მიახლოებული შემთხვევის ანალიზი, რომელიც აჩვენებს მოდელის რისკის მნიშვნელობას საბაზრო რისკის მართვის პროცესში. მოდელის სივრცეზე განაწილების შესაფასებლად გამოყენებულია ბაიესის თეორემაზე დაფუძნებული შექცევადი ნახტომის MCMC ალგორითმი.

4.1.1 ქეისში გამოყენებული მონაცემები

დავუშვათ ფინანსური ინსტიტუტის პორტფელი მოიცავს ოთხ ძირითად საფონდო ინდექსს: DAX 30, S&P 500, FTSE 100, Nikkei 225 და სასაქონლო ინდექსს S&P GSCI. განვიხილოთ აღნიშნული ინდექსების ყოველდღიური დახურვის ფასები 2010 წლის 04 იანვრიდან 2018 წლის 30 აპრილამდე¹. ფინანსური ინდექსები შერჩეულია მათი პოპულარობის გათვალისწინებით. გარდა ამისა, მნიშვნელოვანია აღინიშნოს, რომ ინდექსების საბაზრო რისკი და ფასის რყევების დონე მნიშვნელოვნად დაბალია, ვიდრე ცალკეული აქციების ფასების ცვალებადობა. გამომდინარე იქიდან, რომ კვლევის ძირითადი მიზანი მოდელის რისკის ანალიზს გულისხმობს, მიზანშეწონილად ჩაითვა შედარებით ნაკლებად რისკიანი პორტფელის შერჩევა, რათა საბაზრო ცვალებადობის გავლენა მინიმუმამდე შემცირდეს და ყურადღება სრულად მოდელის განუზღვრელობის შესწავლაზე გადატანილიყო. აღნიშნული ინდექსები ივაჭრება განსხვავებულ ვალუტაში. იმისთვის, რომ მივიღოთ ერთგვაროვანი სურათი, ყველა ინდექსის ფასები გადაყვანილია ევროში, შესაბამისი დღიური გაცვლითი კურსით. სურათი 4.1 ასახავს ინდექსების ლოგარითმულ შემოსავლიანობას. თითოეული ინდექსის შემთხვევაში ნათლად ჩანს არაერთგვაროვანი შემოსავლიანობა. არის პერიოდები, როდესაც შემოსავლიანობის ვარიაცია განსაკუთრებით დიდია (მაგ. 2011-12წწ ევროპული ფინანსური კრიზისის დროს). აღნიშნულ ფენომენს ეწოდება ვარიაციის კლასტერი, როდესაც დიდი რყევები და მცირე რყევები დროით მწკრივში დაჯგუფებულია.

¹წყარო Bloomberg.



სურ. 4.1: ინდექსების დღიური ლოგარითმული შემოსავლიანობა და ჰისტოგრამები

ცხრილი 4.1 ასახავს ინდექსების დღიური ლოგარითმული შემოსავლიანობის აღწერით სტატისტიკას. თითოეული ინდექსი ხასიათდება უარყოფითი ასიმეტრიით და ექსცესით რომელიც შეესაბამება ე.წ. heavy tail განაწილებებს.

	DAX 30	S&P 500	FTSE 100	Nikkei 225	S&P GSCI
საშუალო	0.0003	0.0005	0.0002	0.0004	0.00002
მედიანა	0.0008	0.0007	0.0006	0.0005	0.0001
სტანდარტული გადახრა	0.0123	0.0099	0.0107	0.0133	0.0118
ასიმეტრია	-0.2770	-0.4159	-0.4789	-0.3206	-0.0531
ექსცესი	5.5822	6.4005	8.0048	7.2886	4.9750
მაქსიმუმი	0.0521	0.0457	0.0508	0.0775	0.0658
მინიმუმი	-0.0707	-0.0670	-0.0890	-0.1014	-0.0602

ცხრ. 4.1: საფონდო ინდექსების ლოგარითმული შემოსავლების აღწერითი სტატისტიკა

ჩვენს მიერ განხილულ საფონდო ინდექსებს შორის არსებობს მნიშვნელოვანი დადებითი კორელაცია. ცხადია, გლობალური ეკონომიკური დინამიკა მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს თითოეულ ინდექსზე. ცხრილი 4.2 აღწერს ისტორიულ პირსონის კორელაციას საფონდო ინდექსების შემოსავლიანობებს შორის.

	DAX 30	S&P 500	FTSE 100	Nikkei 225	S&P GSCI
DAX 30	1.0000	0.5389	0.8115	0.1278	0.3058
S&P 500	0.5389	1.0000	0.6080	0.1668	0.4181
FTSE 100	0.8115	0.6080	1.0000	0.2275	0.4443
Nikkei 225	0.1278	0.1668	0.2275	1.0000	0.1207
S&P GSCI	0.3058	0.4181	0.4443	0.1207	1.0000

ცხრ. 4.2: საფონდო ინდექსების ლოგარითმული შემოსავლების ისტორიული კორელაცია

მონაცემების სტატისტიკური ანალიზი ცხადყოფს, რომ მოდელის სიმრავლე უნდა მოიცავდეს მრავალგანზომიანი შემთხვევითი სიდიდის აღწერის მოდელებს, რომლებიც ითვალისწინებენ პორტფელის კომპონენტების კორელაციას, ცალკეული აქტივების შემოსავლიანობის ასიმეტრიას, ავტოკორელაციას, ვარიაციის კლასტერს და მაღალი რიგის მომენტებს, როგორიცაა ექსცესი.

4.1.2 მოდელის სიმრავლე

ფინანსური ინდექსების ზემოთჩამოთვლილ სტატისტიკურ ფაქტებს ესადაგება ე.წ. განზოგადებული ავტორეგრესიული პირობითი ჰეტერო-სკედასტიურობის (GARCH) ტიპის მოდელები.

განვიხილოთ GARCH ტიპის მოდელები ერთგანზომილებიანი და მრავალგანზომილებიანი დროითი მწკრივებისთვის. ინოვაციურ ნაშრომში, R. F. Engle, 1982 პირველმა განიხილა ავტორეგრესიული პირობითი ჰეტერო-სკედასტიურობის (ARCH) მოდელი. Bollerslev, 1986 წარმოგიდგენთ განზოგადებულ ARCH (GARCH) მოდელს, რომელიც განსაკუთრებული პოპულარობით სარგებლობს სტოქასტური ვარიაციის მოდელირებისთვის (იხ. მაგ., Alexander and Lazar, 2006; R. Engle, 2001).

ერთგანზომილებიანი GARCH მოდელი

დავუშვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, m)$ არის ფილტრირებული ალბათური სივრცე და ფილტრაცია $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, აკმაყოფილებს სტანდარტულ მოთხოვნებს, ე.ი. ალბათური სივრცე $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ არის სრული, $\mathcal{F}_t$ არის მარჯვნიდან უწყვეტი და $\mathcal{F}_0$ შეიცავს $\mathcal{F}$ -ის ყველა ნული ზომის სიმრავლეს. ასევე, დავუშვათ, რომ ამ სივრცეზე განსაზღვრულია დისკრეტული დროით აქტივის ფასის პროცესი $\{S_t\}_{t \geq 0}$. აღვნიშნოთ ლოგარითმული შემოსავლიანობა $y_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$, რომელსაც გააჩნია სასრული ვარიაცია, ანუ $\mathbb{E}(y_t^2) < \infty$. ზოგადი

ერთგანზომილებიანი GARCH(p,q) მოდელი განისაზღვრება, როგორც

$$y_t = \epsilon_t \sigma_t, \quad (4.1)$$

სადაც, ϵ_t არის დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული ნაშთი, რომლის მათემატიკური ლოდინიც არის 0 და ვარიაცია არის 1-ის ტოლი, და

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2. \quad (4.2)$$

ჩამორჩენის კოეფიციენტები $p > 0, q \geq 0$ წარმოადგენენ ნატურალურ რიცხვებს, $\omega > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$. ამასთან, დროითი მწკრივის სუსტი სტაციონარულობის მისაღწევად $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$. თუ $p = 0$, მაშინ მოდელი (4.2) დაიყვანება ARCH(q) პროცესზე. პარამეტრი p წარმოადგენს ავტორეგრესიული კომპონენტების რაოდენობას პირობითი ვარიაციის განტოლებაში, ხოლო პარამეტრი q ასახავს ნაშთითი კომპონენტების რაოდენობას. ხშირად რეკომენდირებულია, რომ q უნდა იყოს p -ზე მეტი ან ტოლი, რათა ეფექტურად იქნას აღწერილი დროითი მწკრივის ვარიაცია. ასევე $q \geq p$ უზრუნველყოფს, რომ შენარჩუნებული იყოს მოდელის სტატისტიკური სტაბილურობა (განსაკუთრებით პარამეტრების მაქსიმალური დასაჯერისობის მეთოდით შეფასებისას).

აღსანიშნავია, რომ არსებობს GARCH(p,q) მოდელის ე.წ. ARMA(q,p) წარმოდგენა. განვიხილოთ $\eta_t := y_t^2 - \sigma_t^2$. მაშინ

$$y_t^2 = \omega + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \right) y_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j \eta_{t-j}^2 + \eta_t. \quad (4.3)$$

სადაც, $\eta_t = \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \sigma_t^2$. ამასთან მტკიცდება, რომ $\frac{y_t^2}{\sigma_t^2}$ არის χ^2 განაწილების შემთხვევითი სიდიდე თავისუფლების ხარისხით 1. η -ს პირობითი ლოდინი არის 0 და პირობითი ვარიაცია არის $2\sigma_t^2$ (იხ. თავი 3 Ardia et al., 2008). ტოლობა (4.3) გამოსადეგია GARCH(p,q) მოდელისთვის შექცევადი ნახტომის MCMC-ის კონსტრუქციისთვის.

GARCH მოდელები ასახავენ აქტივების შემოსავლიანობის განაწილების მრავალ ემპირიულ ფაქტს და ამ მიზეზით, ისინი ძალიან პოპულარულია რისკის მენეჯმენტში (იხილეთ მაგ., Cont, 2001; Sewell, 2011). მაგალითად, მოდელი უზრუნველყოფს ცვალებად ვარიაციას და შესაძლებლობას იძლევა ე.წ. ვარიაციის კლასტერის მოდელირების.

ამასთან შემოსავლიანობის პროცესს გააჩნია მეოთხე რიგის მომენტი და შესაბამისად აღწერს ე.წ. განაწილების მძიმე კუდს (heavy tail).

მრავალგანზომილებიანი GARCH მოდელები

განვიხილოთ დისკრეტული დროით ვექტორული სტოქასტური პროცესი $\{y_t\}_{t \geq 0} \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^n$, რომელიც აღწერს აქტივების ლოგარითმულ შემოსავლიანობას. დავუშვათ, $\mathcal{F}_t$ არის სიგმა ალგებრა, რომელიც გენერირებულია ინფორმაციით t დრომდე. ასევე დავუშვათ, რომ $\mathbb{E}(y_t) = 0$. y_t განსაზღვრულია, როგორც

$$y_t = H_t^{1/2} \epsilon_t, \quad (4.4)$$

სადაც, $H_t^{1/2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ არის სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული (positive definite) მატრიცა და H_t წარმოადგენს y_t პროცესის პირობით ვარიაციას. $\epsilon_t \in \mathbb{R}^n$ არის ნაშთების ვექტორი და $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$, $\text{var}(\epsilon_t) = I_n$.

ლიტერატურაში არსებობს რამდენიმე მიდგომა მრავალგანზომილებიანი GARCH მოდელების შესაქმნელად. Bollerslev et al., 1988 განიხილავს ე.წ. VEC მოდელს, სადაც H_t განისაზღვრება, როგორც

$$\text{vech}(H_t) = C + \sum_{i=1}^q A_i \text{vech}(\epsilon_{t-i} \epsilon_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^p B_j \text{vech}(H_{t-j}), \quad (4.5)$$

სადაც $\text{vech}()$ აღნიშნავს სიმეტრიული მატრიცის ქვედა ნაწილის სვეტის დაწყობის ოპერატორს. $C \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)}$ არის დადებითად ნახევრადგანსაზღვრული (semi-definite) მატრიცა და $A_i \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)}$, $B_j \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1) \times \frac{1}{2}n(n+1)}$ ყოველი $i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, p$. VEC ფორმულირება პორტფელის ვარიაციის ძალიან მოქნილი მოდელირების საშუალებას იძლევა, თუმცა მისი მიწუსი იმაში მდგომარეობს, რომ საჭიროა კალიბრაციისას პარამეტრების მონიტორინგი, რომ გარანტირებული იყოს H_t მატრიცის ვარიაციის ელემენტების დადებითობა. VEC მოდელის მეორე ნაკლი მდგომარეობს შესაფასებელი პარამეტრების დიდ რაოდენობაში. VEC(1,1) მოდელის პარამეტრების საერთო რაოდენობა არის $\frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$. შესაბამისად მოდელი პორტფელისთვის, რომელიც შეიცავს 5 აქტივს საჭიროებს 465 პარამეტრის სტატისტიკური შეფასება, რაც პრაქტიკული თვალსაზრისით ძალიან რთულია.

მრავალგანზომილებიანი GARCH მოდელის სხვა მნიშვნელოვანი წარმომადგენელია ე.წ. DCC-GARCH მოდელი. განვიხილოთ პირობითი კოვარიაციის მატრიცის H_t -

შემდეგი დეკომპოზიცია,

$$H_t = D_t R_t D_t, \quad (4.6)$$

სადაც R_t არის პირობითი კორელაციის მატრიცა და D_t არის დიაგონალური მატრიცა, რომელიც შეიცავს პირობით სტანდარტულ გადახრებს დიაგონალურ ელემენტებად $\sqrt{h_{ii,t}}$. ამასთან, თითოეული პირობითი ვარიაცია წარმოადგენს ერთგანზომილებიან GARCH(p,q) პროცესს,

$$h_{ii,t} = \omega_i + \sum_{k=1}^q \alpha_{i,k} y_{i,t-k}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{i,j} h_{ii,t-j}, \quad (4.7)$$

სადაც, $\omega \in \mathbb{R}_+^n$, $\alpha \in (0, 1)^{n \times q}$, $\beta \in (0, 1)^{n \times p}$, $\sum_{k=1}^q \alpha_{i,k} + \sum_{j=1}^p \alpha_{i,j} < 1$, ყოველი $i = 1, \dots, n$.

R. F. Engle and Sheppard, 2001 შეიმუშავა ე.წ. დინამიური პირობითი კორელაციის GARCH მოდელი (DCC-GARCH). DCC-GARCH(1,1) გააჩნია შემდეგი ფორმულირება:

$$R_t = \text{diag}(Q_t^{-1/2}) Q_t \text{diag}(Q_t^{-1/2}), \quad (4.8)$$

Q_t არის სიმეტრიული დადებითად ნახევრადგანსაზღვრული მატრიცა,

$$Q_t = (1 - a - b)V + aD_{t-1}^{-1}y_{t-1}y_{t-1}^T D_{t-1}^{-1} + bQ_{t-1}, \quad (4.9)$$

სადაც, V წარმოადგენს უპირობო კოვარიაციის მატრიცას $D_t^{-1}y_t$ -სათვის და $a, b > 0$, $a + b < 1$ (დამატებითი დეტალები GARCH-ის მრავალვარიანტული მოდელების შესახებ იხილეთ Bauwens et al., 2006).

DCC-GARCH(1,1) შემდგარი მოდელის სივრცე

მაგალითისთვის განვიხილავთ DCC-GARCH(1,1) მოდელებს სადაც ნაშთი ϵ_t განაწილებულია, მრავალგანზომილებიანი ასიმეტრიული ნორმალური და მრავალგანზომილებიანი ასიმეტრიული სტიუდენტის t განაწილებებით. Bauwens and bastien Laurent, 2005-ის მიერ შემოთავაზებული სტანდარტული n -განზომილებიანი ასიმეტრიული ალბათური განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია მოცემულია,

$$f(y|\gamma) := 2^n \left(\prod_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{1 + \gamma_i^2} \right) g(\kappa). \quad (4.10)$$

სადაც, g არის სიმეტრიული განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია. ვექტორი κ განსაზღვრულია როგორც, $\kappa_i = y_i/\gamma_i$ თუ $y_i > 0$ და $\kappa_i = y_i\gamma_i$ თუ $y_i \leq 0$. γ_i განსაზღვრავს მარგინალური განაწილების ასიმეტრიას, $\gamma_i > 1$ შეესაბამება დადებით ასიმეტრიას და $\gamma_i < 1$ შეესაბამება უარყოფით ასიმეტრიას. თუ γ არის ერთეული ვექტორი მაშინ მრავალგანზომილებიანი განაწილება სიმეტრიულია. ჩვენს ქვისში g წარმოადგენს სტანდარტულ ნორმალურ განაწილებას ან სტიუდენტის t განაწილებას თავისუფლების ხარისხით ν .

შესაბამისად, მაგალითში განვიხილავთ შემდეგ მოდელის სიმრავლეს

$$M = M_1 \cup M_2,$$

სადაც,

$$M_1 = \{\text{N-DCC-GARCH}(1,1) | \omega \in \mathbb{R}_+^5, \alpha \in (0, 1)^5, \beta \in (0, 1)^5, \gamma \in \mathbb{R}^5, a \in (0, 1), b \in (0, 1)\},$$

$$M_2 = \{\text{t-DCC-GARCH}(1,1) | \omega \in \mathbb{R}_+^5, \alpha \in (0, 1)^5, \beta \in (0, 1)^5, \gamma \in \mathbb{R}^5, a \in (0, 1), b \in (0, 1), \nu \in (2, \infty]\}.$$

4.1.3 შებრუნებული ნახტომის MCMC სპეციფიკაცია

დავუშვათ, Λ^N და Λ^t წარმოადგენს DCC-GARCH(1,1) მოდელებს მრავალგანზომილებიანი ნორმალური და სტიუდენტის t განაწილების კლასებისთვის. დავუშვათ, რომ აპრიორული ალბათობა ორივე მოდელის კლასისთვის თანაბარია, $\Pi(\Lambda^N) = \Pi(\Lambda^t) = \frac{1}{2}$.

შებრუნებული ნახტომის MCMC ალგორითმი შესრულებულია შემდეგი ლოგიკით.

დავუშვათ i იტერაციისას, მარკოვის ჯაჭვი არის (Λ_i, θ_i) მდგომარეობაში, რომელიც შეესაბამება ან (Λ^N, θ_i^N) ნორმალური განაწილების კლასს ან (Λ^t, θ_i^t) სტიუდენტის t განაწილების კლასს. მოდელის პარამეტრებისთვის გამოყენებულია შემდეგი აპრიორული განაწილებები.

$$\pi(\omega_l^N | \Lambda^N) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{\omega_l^N > 0}, \pi(\omega_l^t | \Lambda^t) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{\omega_l^t > 0}, l = 1, \dots, 5, \quad (4.11)$$

$$\pi(\alpha_l^N | \Lambda^N) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{0 < \alpha_l^N < 1}, \pi(\alpha_l^t | \Lambda^t) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{0 < \alpha_l^t < 1}, l = 1, \dots, 5, \quad (4.12)$$

$$\pi(\beta_l^N | \Lambda^N) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{0 < \beta_l^N < 1}, \pi(\beta_l^t | \Lambda^t) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{0 < \beta_l^t < 1}, l = 1, \dots, 5, \quad (4.13)$$

$$\pi(\gamma_l^N | \Lambda^N) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{\gamma_l^N > 0}, \pi(\gamma_l^t | \Lambda^t) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{\gamma_l^t > 0}, l = 1, \dots, 5, \quad (4.14)$$

$$\pi(a_l^N | \Lambda^N) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{0 < a_l^N < 1}, \pi(a_l^t | \Lambda^t) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{0 < a_l^t < 1}, l = 1, \dots, 5, \quad (4.15)$$

$$\pi(b_l^N | \Lambda^N) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{0 < b_l^N < 1}, \pi(b_l^t | \Lambda^t) = N(0, 0.5) \mathbb{1}_{0 < b_l^t < 1}, l = 1, \dots, 5, \quad (4.16)$$

$$\pi(\nu^t | \Lambda^t) = N(10, 10) \mathbb{1}_{\nu^t > 2}, \quad (4.17)$$

სადაც $N(\mu, \sigma)$ აღნიშნავს ნორმალურ განაწილებას საშუალოთი μ და სტანდარტული გადახრით σ . აღნიშნული განაწილებები შეესაბამება ე.წ. არაინფორმაციულ აპრიორულ განაწილებებს, რომელებიც გულისხმობენ, რომ რისკების მენეჯერს არ გააჩნია წინასწარი ინფორმაცია პარამეტრის შესაძლო განაწილების შესახებ.

სიმულაციის პირველ საფეხურზე გენერირებულია შემთხვევითი პარამეტრების ვექტორის შემოთავაზება θ_{i+1} არსებული მოდელის კლასის დაშვებით. აღნიშნული პროცედურა ხორციელდება მეტროპოლის-ჰასტინგის ალგორითმის მიხედვით (Fioruci et al., 2014). θ_{i+1} აღნიშნავს პირველი საფეხურის შედეგს, ე.ი. ის წარმოადგენს ან ჯაჭვის ახალ პოზიციას შემოთავაზებული პარამეტრების მიხედვით ან წინა არსებულ პარამეტრებს.

მეორე საფეხურზე ხდება მოდელის კლასის განახლება. იმავდროულად, თუ არის შეუსაბამობა პარამეტრების ვექტორის განზომილებასა და მოდელის კლასს შორის, საჭიროა პარამეტრების ვექტორის განახლებაც. $\Lambda_i = \Lambda^N$ ნორმალური განაწილების კლასიდან $\Lambda_{i+1} = \Lambda^t$, სტიუდენტის t განაწილების კლასში ნახტომისას განახლებული შემოთავაზებული პარამეტრების ვექტორი განისაზღვრება, როგორც $\theta_{i+1}^t = h(\theta_{i+1}^N, u) = (\theta_{i+1}^N, u)$, სადაც u განაწილებულია ნორმალურად მინიმალური ქვედა ზღვარით $u \sim N(10, 10) \mathbb{1}_{u > 2}$, ხოლო $\theta_{i+1}^N = (\omega_{i+1}^N, \alpha_{i+1}^N, \beta_{i+1}^N, \gamma_{i+1}^N, a_{i+1}^N, b_{i+1}^N)$ გენერირებულია პირველ საფეხურზე. h გარდაქმნის იაკობიანი არის 1. შესაბამისად, მეტროპოლის-ჰასტინგ-გრინის კოეფიციენტი არის,

$$A_{N,t} = \frac{m_{(\Lambda^t, \theta_{i+1}^t)}(Y = y)}{m_{(\Lambda^N, \theta_{i+1}^N)}(Y = y)}. \quad (4.18)$$

$(\Lambda^N, \theta_{i+1}^N)$ მდგომარეობიდან $(\Lambda^t, \theta_{i+1}^t)$ მდგომარეობაში ნახტომის თანხმობის ალბათობა არის $\min\{1, A_{N,t}\}$.

$\Lambda_i = \Lambda^t$ მოდელის კლასიდან, $\Lambda_{i+1} = \Lambda^N$ მოდელის კლასში ნახტომისას პარამეტ-

რების ვექტორი არის $\theta_{i+1}^N = h'(\theta_{i+1}^t) = (\omega_{i+1}^t, \alpha_{i+1}^t, \beta_{i+1}^t, \gamma_{i+1}^t, a_{i+1}^t, b_{i+1}^t)$ სადაც θ_{i+1}^t გენერირებულია პირველ საფეხურზე. ნახტომის თანხმობის ალბათობა არის $\min \{1, A_{t,N}\}$, სადაც

$$A_{t,N} = \frac{m_{(\Lambda^N, \theta_{i+1}^N)}(Y = y)}{m_{(\Lambda^t, \theta_{i+1}^t)}(Y = y)}. \quad (4.19)$$

სიმულაციის კრებადობის უზრუნველსაყოფად გენერირებულია 250,000,000 იტერაცია, ხოლო პირველი 225,000,000 იტერაცია არ არის გამოყენებული ანალიზისთვის (ე.წ. burn in მეთოდი). ჩვენ ვაკვირდებით, რომ ჯაჭვები კარგად არის შერეული და ჯაჭვების ავტოკორელაცია შედარებით მცირეა. (კრებადობისა და დიაგნოსტიკური მეთოდების მიმოხილვისთვის იხ. Castellote and Zimmerman, 2002; Cowles and Carlin, 1996).

შენიშვნა 10. აღნიშნული შემთხვევის შესწავლისას, ჩვენ ვიყენებთ MCMC-ს ერთდროულად ორი მოდელის კლასისთვის სადაც DCC-GARCH მოდელს ნორმალურ განაწილების კლასისთვის აქვს 22 პარამეტრი, ხოლო სტიუდენტის t განაწილების კლასისთვის 23 პარამეტრი. უფრო რთული (მრავალგანზომილებიანი) მოდელის კლასის შემთხვევაში სიმულაციის კრებადობის სიჩქარე შეიძლება მნიშვნელოვნად გაუმჯობესდეს ადაპტაციური სქემების გამოყენებით, რომლებიც განხილულია Haario et al., 2006, Vrugt, 2016; Vrugt et al., 2009. ეს ალგორითმები შეიძლება ადვილად მოერგოს შეზღუდული ნახტომის MCMC მეთოდს.

4.1.4 შედეგები

DCC-GARCH(1,1) მოდელის აპოსტერიორული ალბათობა ნორმალური კლასით არის $\mu(\Lambda^N | Y = y) = 0.1384$, ხოლო სტიუდენტის t კლასით $\mu(\Lambda^t | Y = y) = 0.8616$. შესაბამისი ბაიესის ფაქტორი არის

$$\frac{\mu(\Lambda^N | Y = y) \Pi(\Lambda^N)}{\mu(\Lambda^t | Y = y) \Pi(\Lambda^t)} = 6.2254$$

. ასე რომ, დაკვირვებული მონაცემების გათვალისწინებით, არსებობს ძლიერი მტკიცებულება DCC-GARCH(1,1) სტიუდენტის t -განაწილების კლასის სასარგებლოდ (იხ., Wasserman, 2000).

შემდეგ მაგალითში ჩვენ განვიხილავთ საბაზრო და მოდელის რისკის ზომებს, რომლებიც იყენებენ სიმულაციით მიღებულ აპოსტერიორულ განაწილებას მოდელის სივრცეზე. დავუშვათ, რომ პორტფელი წარმოადგენს EUR 1000 თანაბარწონად ინვესტიციას

ზემოთაღწერილ საფონდო ინდექსებში.

საბაზრო რისკის ზომები

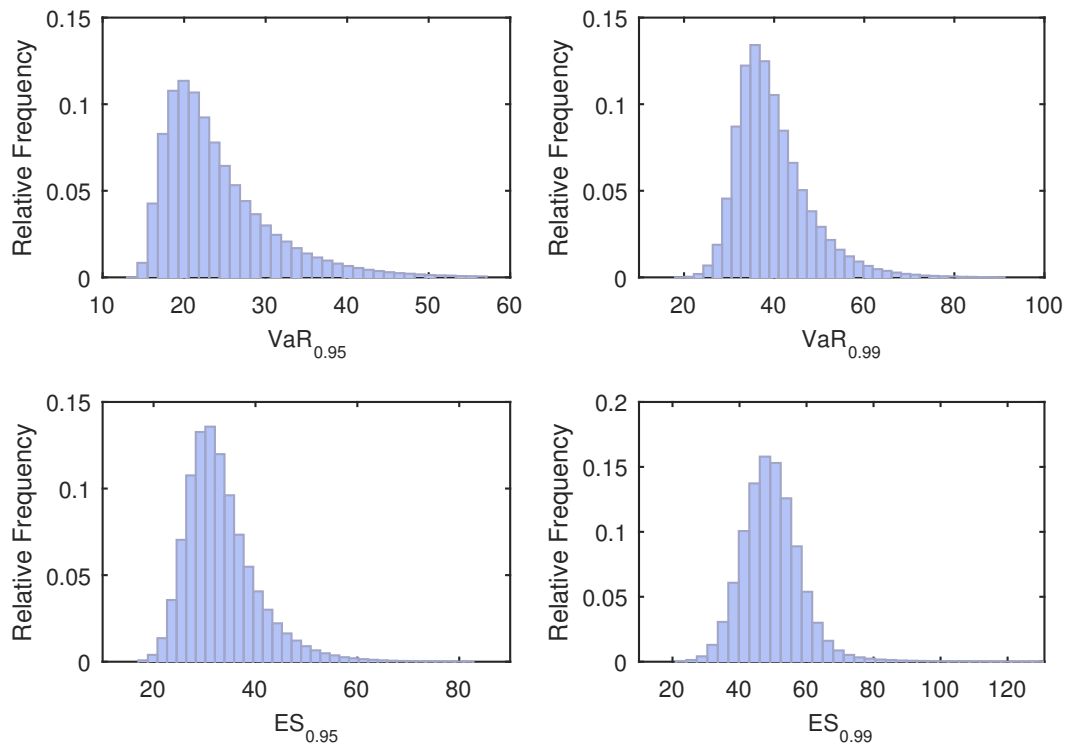
დავუშვათ საბაზრო რისკის ჰორიზონტი არის 1 დღე². გამოვიანგარიშოთ VaR და ES 95% და 99% ნდობის დონით, სიმულირებული მოდელის შედეგებით (Λ_i, θ_i) . რისკის ზომებს DCC-GARCH მოდელში არ გააჩნიათ ანალიტიკური ფორმულები, შესაბამისად მათ გამოსაანგარიშებლად გამოვიყენეთ მონტე კარლოს სიმულაცია 100.000 იტერაციით. სურათი 4.2 ასახავს რისკების ზომის ემპირიულ განაწილებას და ცხრილი 4.3 იძლევა აღწერით სტატისტიკას.

ყველა მიღებული აპოსტერიორული განაწილება ხასიათდება დადებითი ასიმეტრიით და მძიმე კუდებით. ES-ს აქვს ბევრად უფრო დიდი სტანდარტული გადახრა, ასიმეტრია და ექსცესი, ვიდრე VaR ზომას. გარდა ამისა, რისკის ზომებს 99% ნდობის დონით აქვთ უფრო მაღალი სტანდარტული გადახრები, ასიმეტრია და ექსცესი, ვიდრე შესაბამის საბაზრო რისკის ზომებს 95% ნდობის დონით. ეს შედეგები აჩვენებს, რომ საბაზრო რისკის ზომები, რომლებიც ითვალისწინებს განაწილების კუდს, უფრო მგრძნობიარეა მოდელის რისკის მიმართ.

	VaR _{0.95}	VaR _{0.99}	ES _{0.95}	ES _{0.99}
საშუალო	24.0131	39.7324	33.2941	49.6187
მედიანა	22.3131	38.1723	32.0351	49.0533
სტანდარტული გადახრა	6.5245	8.0822	7.0304	8.8499
ასიმეტრია	1.4972	1.2887	1.3178	1.0661
ექსცესი	5.7435	5.7708	6.1068	7.5276
მაქსიმუმი	57.0771	91.0999	82.4595	130.4805
მინიმუმი	13.6715	18.2893	17.4313	22.4281

ცხრ. 4.3: საბაზრო რისკის ზომების აღწერითი სტატისტიკა.

²პრაქტიკაში საბაზრო რისკის ჰორიზონტის დადგენა ხდება იმის მიხედვით თუ რამდენად სწრაფად შეუძლია ფინანსურ ინსტიტუტს პოზიციის დახურვა ფასის არასახარბიელო განვითარების შემთხვევაში.



სურ. 4.2: საბაზრო რისკის ზომების ჰისტოგრამები.

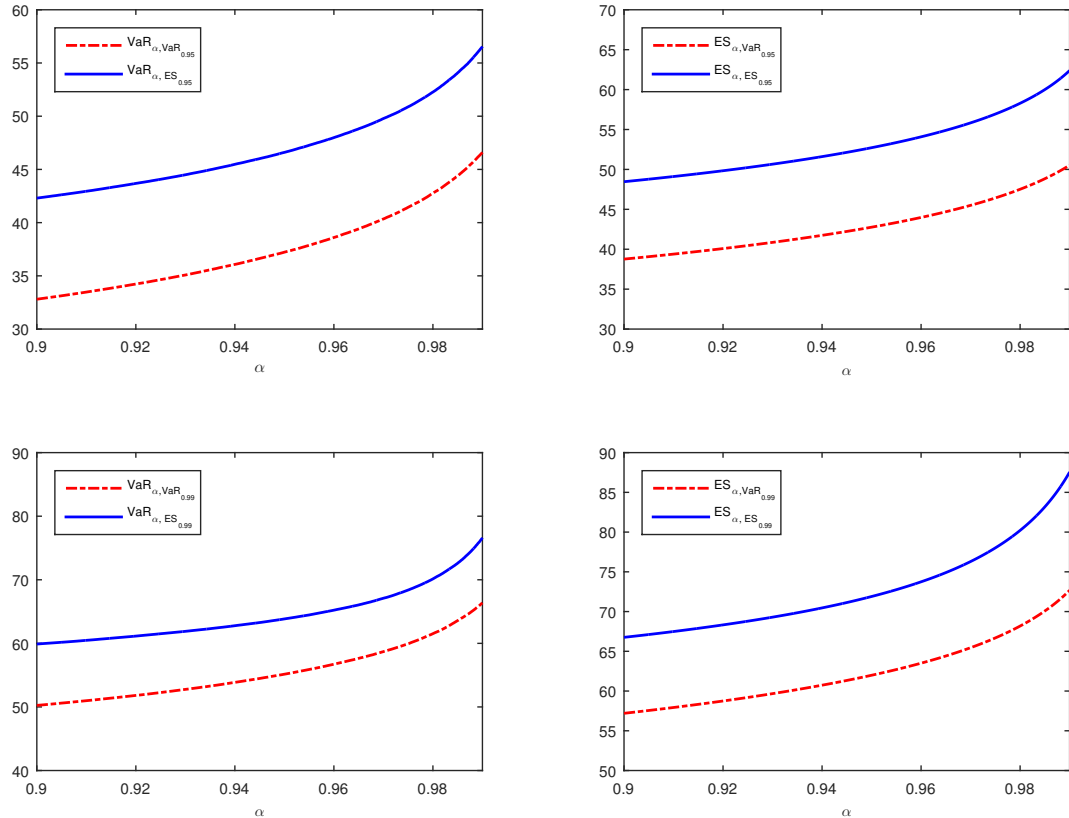
ცხრილ 4.4-ში მოცემულია მაქსიმალური საბაზრო რისკის ზომები ρ_{WC} , (2.12) ტოლობის მიხედვით, და მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის ზომები $\rho * \mu$ იხ.(2.2.2). 1 დღის რისკის ჰორიზონტისთვის. მიღებული შესაძლო საბაზრო რისკის ზომების დიაპაზონი საკმაოდ დიდია [2.4%, 4.9%]. ეს აიხსნება იმ ფაქტით რომ პორტფელი არ არის დივერსიფიცირებული და თითოეული საფონდო ინდექსი მჭიდრო კავშირშია გლობალური ეკონომიკურ კონიუნქტურასთან. ცხადია, მაქსიმალური რისკის საზომი მნიშვნელოვნად აღემატება მოდელით შეწონილ რისკს და მერყეობს [5.7%, 13.0%] ინტერვალში.

	$VaR_{0.95}$	$VaR_{0.99}$	$ES_{0.95}$	$ES_{0.99}$
ρ_{WC}	57.0771	91.0999	82.4595	130.4805
$\rho * \mu$	24.0131	39.7324	33.2941	49.6187

ცხრ. 4.4: მაქსიმალური - და მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის ზომები.

განვიხილოთ სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის რამდენიმე მაგალითი. ვინაიდან $VaR_{0.99}$, $VaR_{0.95}$ და $ES_{0.99}$, $ES_{0.95}$ ზომების ემპირიული განაწილებები ხასიათდება დადებითი ასიმეტრიით და მძიმე კუდებით, მიზანშეწონილია განვიხილოთ VaR (2.16) და ES (2.17) ფუნქციები სუპერპოზიციური რისკის ზომის განსაზღვრისთვის. მოდელის ალბათობა μ - მოცემულია აპოსტერიორული განაწილებით. სურათი 4.3 გვიჩვენებს სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომებს: $VaR_{\alpha, VaR_{0.95}, \mu}$, $VaR_{\alpha, VaR_{0.99}, \mu}$, $VaR_{\alpha, ES_{0.95}, \mu}$,

$VaR_{\alpha, ES_{0.99}, \mu}$ და $ES_{\alpha, VaR_{0.95}, \mu}$, $ES_{\alpha, VaR_{0.99}, \mu}$, $ES_{\alpha, ES_{0.95}, \mu}$, $ES_{\alpha, ES_{0.99}, \mu}$ ნდობის სხვადასხვა დონის-
თვის α . რისკის აღნიშნული ზომები იკვლევს საბაზრო რისკის კუდს, შესაბამისად
ისინი ადელტებიან მოდელის რისკით შეწონილ ზომას, თუმცა იმავდროულად მათი
მნიშვნელობები ბევრად უფრო მცირეა, ვიდრე მაქსიმალური საბაზრო რისკის ზომები.



სურ. 4.3: სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები სხვადასხვა ნდობის დონით.

მოდელის რისკის შეფასება

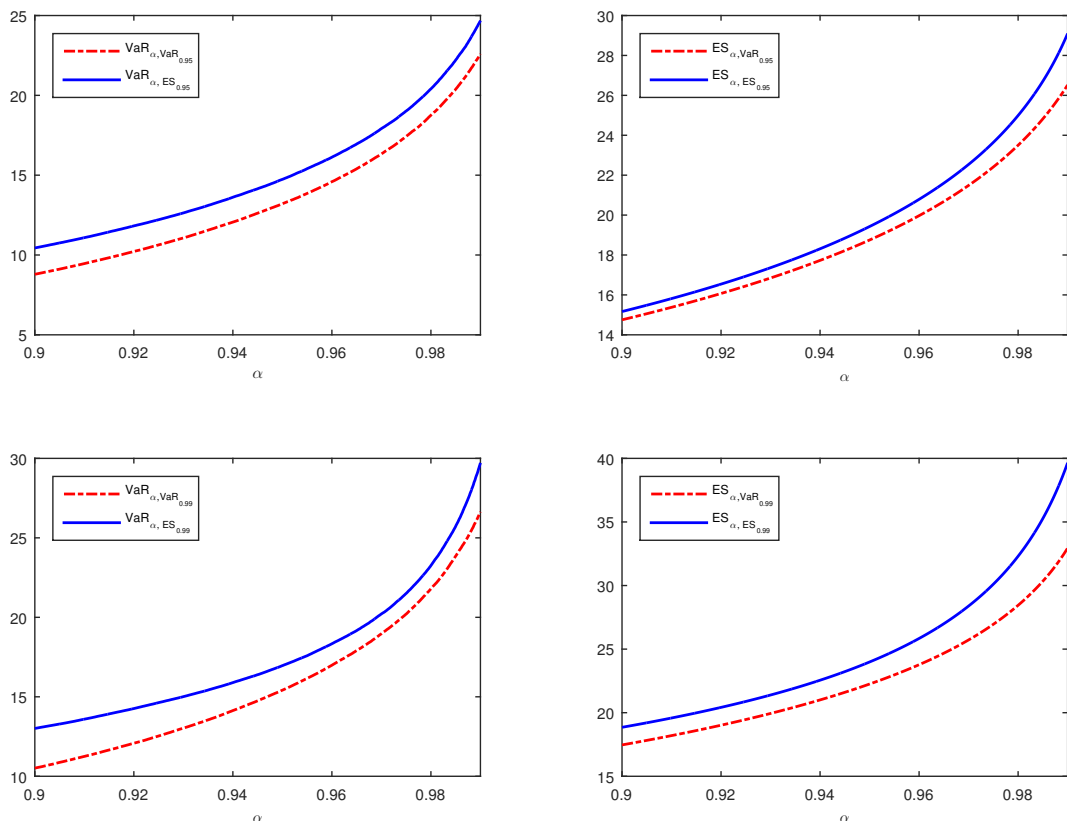
განვიხილოთ მოდელის რისკის ზომები. მაქსიმალური მოდელის რისკი (2.40) წარ-
მოდგენილია 4.5 ცხრილში. ისევე როგორც საბაზრო რისკის შემთხვევაში, მაქსიმალური
რისკის ზომები გადაჭარბებით აფასებენ არსებულ მოდელის რისკს, ისინი მერყეობს
[4.3%, 10.1%] ინტერვალში. თუ რისკების მენეჯერი გამოიყენებს მაქსიმალური რისკის
ზომას მოდელის რისკის შემთხვევაში მაშინ გამოდის რომ მოდელის რისკი წარმოადგენს
მთლიანი ფინანსური რისკის 76% – 83%. აღნიშნული მიდგომა მართებულია მხოლოდ
იმ შემთხვევაში, როდესაც რისკ მენეჯერს გააჩნია უსასრულო მოდელის რისკის ავერსია.

$P_{VaR_{0.95}, WC}$	$P_{VaR_{0.99}, WC}$	$P_{ES_{0.95}, WC}$	$P_{ES_{0.99}, WC}$
43.4055	72.8106	65.0282	108.0525

ცხრ. 4.5: მაქსიმალური მოდელის რისკის ზომები.

პრაქტიკული თვალსაზრისით უფრო მიზანშეწონილია განვიხილოთ მოდელის რისკის სუპერპოზიციული ზომები 2.3.3 განსაზღვრების მიხედვით. ამასთან დავუშვათ, რომ ბენჩმარკ მოდელს წარმოადგენს მოდელის რისკით შეწონილი შესაბამისი საბაზრო რისკის ზომები, ე.ი. $\rho_{\text{VaR}}^0 = \text{VaR} * \mu$ და $\rho_{\text{ES}}^0 = \text{ES} * \mu$ შესაბამისი ნდობის დონით. ბენჩმარკ მოდელის ამგვარი შერჩევისას, სასურველია მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის ზომის გამოყენება საბაზრო რისკის (ეკონომიკური) კაპიტალის გამოსაანგარიშებლად.

სურათი 4.4 აღწერს MVaR (იხ. (2.44)) და MES (იხ. (2.45)) სხვადასხვა α ნდობის დონისთვის. Expected Shortfall რისკის ოჯახისთვის მოდელის რისკი გაცილებით აღემატება ღირებულება რისკის ქვეშ რისკის ოჯახს. რაც მოსალოდნელი იყო, რადგან Expected Shortfall მოდელის პარამეტრების მიმართ განსაკუთრებით მგრძნობიარეა იხ. BIS, 2012, 2016a. კონკრეტული მაგალითის ემპირიული შედეგები თანხმობაშია არსებულ ლიტერატურასთან. მაგალითად Bernard and Vanduffel, 2015 აჩვენა, რომ VaR ძალიან მაღალი ნდობის დონეზე (როდესაც VaR განიხილავს კუდის რისკებს) მიდრეკილია მოდელის უზარმაზარი რისკისკენ.



სურ. 4.4: სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები სხვადასხვა ნდობის დონით.

შენიშვნა 11. ზემოთგანხილული მარტივი მაგალითი შესაძლებლობას გვაძლევს ფინანსური და მოდელის რისკების მართვის ეფექტური ჩარჩოს გაანალიზებისთვის. მნიშ-

ვნელოვანია ჰარმონიაში მოვიდეს ორივე ტიპის რისკის მართვა და კაპიტალის ადეკვატურად განაწილება რისკების ტიპებს შორის. ოპტიმალური რისკის ზომის შერჩევა დამოკიდებულია ფინანსური ინსტიტუტის ზომაზე, პორტფელში შემავალი ფინანსური ინსტრუმენტების სირთულეზე, საბაზრო და მოდელის რისკის მადაზე. განვიხილოთ რამდენიმე საინტერესო შემთხვევა:

- (i) მაქსიმალური რისკის საზომი საბაზრო რისკისთვის. ამ შემთხვევაში მოდელის რისკი არ არსებობს, რადგან საბაზრო რისკი განიხილავს მოვლენების განვითარების ყველაზე ცუდ შემთხვევას (მოცემული მოდელის სიმრავლის შემთხვევაში). ცხადია, რომ ეკონომიკური კაპიტალის მთლიანი ალოკაცია ხდება საბაზრო რისკზე. აღნიშნული შემთხვევა მხოლოდ თეორიული ხასიათისაა. თითქმის არცერთ ფინანსურ ინსტიტუტს არ გააჩნია საკმარისი (იაფი) კაპიტალი, რომ რისკების მონიტორინგი განახორციელოს მაქსიმალური რისკის ზომით და იმავდროულად შეინარჩუნოს კონკურენტუნარიანობა.
- (ii) მაქსიმალური რისკის საზომი მოდელის რისკისთვის. ამ შემთხვევაში ეკონომიკური კაპიტალის მნიშვნელოვანი ნაწილი მოდის მოდელის რისკზე. ნაშთითი მოდელის რისკი არ არსებობს. ნაშთითი საბაზრო რისკი დამოკიდებულია შერჩეული საბაზრო რისკის ოჯახზე და ნდობის დონეზე. მსგავსი მიდგომა მიზანშეწონილია მხოლოდ საშუალო ზომის ფინანსური ინსტიტუტებისთვის, რომელთაც არ გააჩნიათ რთული პორტფელი და ადამიანური რესურსები მოდელის რისკის მონიტორინგისთვის.
- (iii) მოდელის რისკით შეწონილი რისკის საზომი საბაზრო რისკებისთვის და მოდელის რისკის შეფასების ბენჩმარკ ზომისთვის. აღნიშნულ შემთხვევაში ფინანსური ინსტიტუტი ეფექტურად ითვალისწინებს მოდელის რისკს საბაზრო რისკებში. თავად მოდელის რისკი კი შესაძლებელია შეფასდეს $MVaR$ ან MES მიხედვით. აღნიშნული მიდგომა წარმოადგენს რისკის მართვის ეფექტურ მეთოდს მსხვილი ბანკებისთვის.
- (iv) სუპერპოზიციური რისკის საზომი საბაზრო რისკებისთვის, როდესაც $\zeta = ES$ და მოდელის რისკის შეფასების ბენჩმარკ ზომისთვის. მოდელის რისკი შეფასებულია MES მიხედვით. აღნიშნული მიდგომა ოპტიმალურია მოდელის ვალიდაციისას და სტრეს ტესტირებისთვის.

4.2 კუდის რისკის (tail risk) მოდელის რისკი

ბოლო წლებში ფინანსური რისკების მართვის სფერომ განიცადა მნიშვნელოვანი ცვლილებები და გამოწვევები ბაზრის უპრეცედენტო მოვლენებისა და ფინანსური ლანდშაფტის გაზრდილი სირთულის გამო. განსაკუთრებული მნიშვნელობა შეიძინა კუდის რისკი (tail risk) მოდელირებამ, რომელიც ითვალისწინებს ექსტრემალური მოვლენების შეფასებას, ანუ რისკის შეფასება კლასიკური ნორმალური განაწილების მიღმა. კუდის რისკის მოვლენებს განეკუთვნება ბაზრის კრაზი, სისტემური კრიზისი, ომი და ა.შ. მსგავსი მოვლენების მოხდენის სტატისტიკური ალბათობა მცირეა, თუმცა ეკონომიკური შედეგები კატასტროფული. არსებობს კუდის რისკის შეფასების ორი ძირითადი მიდგომა. ფინანსურმა ინსტიტუტებმა შეიძლება გამოიყენონ ისტორიული ან ჰიპოთეზური სცენარების ანალიზი, და შეაფასონ წარსულში მომხდარი ეკონომიკური მოვლენის გავლენა არსებულ პორტფელზე. მეორეს მხრივ შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას რისკის მოდელირების მათემატიკური აპარატი, რომელიც ცნობილია, როგორც ექსტრემალური ღირებულების თეორია (Extreme Value theory, EVT) (Gilli and Kellezi, 2006). ამ თავში განხილულია მოდელის რისკი EVT-ს პირობებში ³.

როგორც ცნობილია, ექსტრემალური ღირებულების თეორია პირველად შესწავლილია Fisher and Tippet, 1928; Gnedenko, 1943 ნაშრომებში. Rocco, 2014 აჯამებს ექსტრემალური ღირებულების თეორიის რამდენიმე გამოყენებას საბაზრო რისკის მართვაში. თეორია დაფუძნებულია მარტივ სტატისტიკურ ფაქტზე, რომ ნებისმიერი უცნობი განაწილების ნორმირებული მაქსიმალური პროცესი განაწილებულია განზოგადებული ექსტრემალური ღირებულების განაწილების (GEV) კანონით (იხ. Fisher and Tippet, 1928 და Gnedenko, 1943). ასევე ცნობილია, რომ კუდის მოვლენების განაწილება მიჰყვება განზოგადებულ პარეტოს (GP) კანონს (Balkema and de Haan, 1974; Pickands III, 1975).

ამ თავში შესწავლილია EVT-ს პარამეტრული მეთოდები: ბლოკის მაქსიმალური მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია განზოგადებული ექსტრემალური ღირებულების (GEV) განაწილებაზე და პიკების (Peak over the Threshold) მეთოდი, რომელიც ეფუძნება განზოგადებულ პარეტოს (GP) განაწილებას.

³ამ ქვეთავში წარმოდგენილი ქეისი ნაწილობრივ გამოქვეყნებულია ავტორის მიერ იხ. Jokhadze and Purtukhia, 2024

4.2.1 საბაზრო რისკების მართვა ექსტრემალური ღირებულების თეორიის მიხედვით

ექსტრემალური ღირებულების თეორია (EVT) ფოკუსირებულია ზოგიერთი უცნობი განაწილების კუდის მოდელირებაზე, განაწილების ცენტრის შესახებ რაიმე ვარაუდის გაკეთების გარეშე. ის მიზნად ისახავს უპასუხოს მთავარ კითხვას: რამდენად სერიოზული შეიძლება იყოს ზარალი, თუ იშვიათი, მაგრამ შესაძლებელი საბაზრო მოვლენა მოხდება? ექსტრემალური მოვლენების შესწავლით, EVT უზრუნველყოფს ბუნებრივ მიდგომას საბაზრო რისკის გამოთვლაში, რომელიც ავსებს ტრადიციული რისკის ზომებს. თანამედროვე EVT მოიცავს ორ პარამეტრულ ჩარჩოს: ბლოკის მაქსიმალური მეთოდი და პიკების მეთოდი. განვიხილოთ ეს მეთოდები და მათი მათემატიკური ურთიერთკავშირი.

ბლოკის მაქსიმალური მეთოდი

განვიხილოთ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცე. დავუშვათ, რომ $x_1, \dots, x_n$ წარმოადგენს n დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ (i.i.d.) შემთხვევით სიდიდეს. აღვნიშნოთ F -ით P მოდელის კუმულატიური განაწილების ფუნქცია. განვიხილოთ,

$$\text{MAX}_n = \max(x_1, \dots, x_n). \quad (4.20)$$

დავუშვათ არსებობენ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული მიმდევრობები $a_n, b_n > 0$, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$P \left\{ \frac{\text{MAX}_n - a_n}{b_n} \leq x \right\} = F^n(b_n x + a_n) \rightarrow H(x), \text{ როდესაც } n \rightarrow \infty, \quad (4.21)$$

სადაც, H აღნიშნავს რომელიმე არაგადაგვარებულ განაწილების ფუნქციას. თუ ტოლობა (4.21) ჭეშმარიტია, მაშინ ვიტყვით რომ F არის H -ს მიზიდულობის მაქსიმალურ არეში (maximum domain of attraction), $F \in \text{MDA}(H)$ და შესაძლებელია დამტკიცდეს შემდეგი თეორემა.

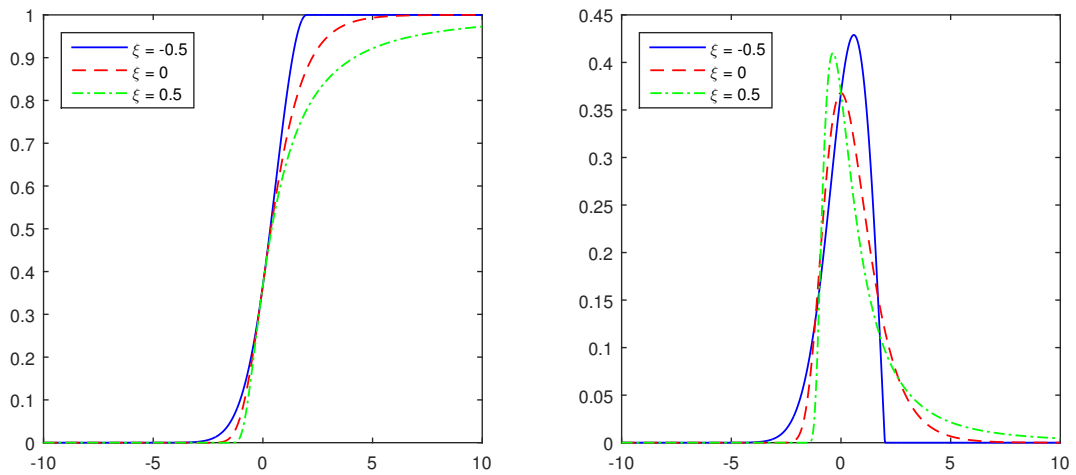
თეორემა 4.2.1. (Fisher and Tippett, 1928 და Gnedenko, 1943). დავუშვათ, $F \in \text{MDA}(H)$, მაშინ H შეიძლება იყოს მხოლოდ ან ფრემეს განაწილება. ან გუმბელის განაწილება, ან ვეიბულის განაწილება. ეს განაწილებები წარმოადგენენ განზოგადებული ექსტრემალური ღირებულების განაწილების კონკრეტულ შემთხვევებს.

განზოგადებული ექსტრემალური ღირებულების (GEV) განაწილება μ ლოკაციის

პარამეტრით, σ სკალირების პარამეტრით და ξ ფორმის პარამეტრით განისაზღვრება როგორც:

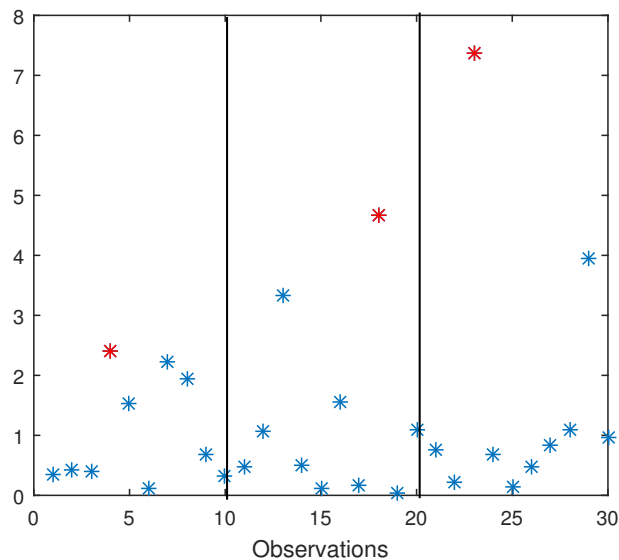
$$\text{GEV}(x|\mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, & \text{თუ } \xi \neq 0 \text{ და } 1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma} > 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\}, & \text{თუ } \xi = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

ფორმის პარამეტრი ξ , აკონტროლებს განაწილების კუდს. როდესაც $\xi > 0$ GEV განაწილებას ახასიათებს მძიმე კუდი, რომელიც უფრო ნელა მცირდება, ვიდრე ექსპონენციალური განაწილება. ეს ცნობილია, როგორც ფრემეს შემთხვევა. ამ დროს ექსტრემალური მოვლენები უფრო სავარაუდოა. ექსცესი 3-ზე მეტია, რაც მიუთითებს ნორმალურ განაწილებასთან შედარებით უფრო მძიმე კუდზე. რაც უფრო დიდია ξ -ის მნიშვნელობა, მით უფრო სავარაუდოა ექსტრემალური მოვლენები. როდესაც, ფორმის პარამეტრი $\xi = 0$ GEV განაწილება დაიყვანება გუმბელის განაწილებამდე. გუმბელის განაწილებას უფრო მსუბუქი კუდი აქვს ფრემეს შემთხვევასთან შედარებით. ამ შემთხვევაში ექსტრემალური მოვლენები მაინც ხდება, მაგრამ ისინი ნაკლებად ხშირია. გუმბელის შემთხვევისთვის ექსცესი 3 ტოლია, რაც იმას ნიშნავს, რომ კუდებს აქვთ იგივე სიმძიმე, როგორც ნორმალური განაწილების დროს. თუ $\xi < 0$, GEV განაწილება წარმოადგენს ვეიბულის შემთხვევას. ვეიბულის განაწილებას გააჩნია სწრაფად კლებადი კუდი, რაც ექსტრემალურ მოვლენებს ნაკლებად სავარაუდოს ხდის ფრემესა და გუმბელის შემთხვევებთან შედარებით. ექსცესი ვეიბულის განაწილებისთვის უარყოფითია, რაც მიუთითებს ნორმალურ განაწილებასთან შედარებით მსუბუქ კუდებზე (De Haan and Ferreira, 2007, Rocco, 2014). ფინანსებში ყველაზე საინტერესო შემთხვევაა ფრემეს განაწილება, როდესაც მოდელს აქვს მძიმე კუდი. სურათი 4.5 აჩვენებს GEV განაწილების კუმულატიური განაწილების ფუნქციასა და სიმკვრივის სხვადასხვა ξ პარამეტრებისთვის.



სურ. 4.5: GEV განაწილების კუმულატიური განაწილების ფუნქცია (მარცხნივ) და სიმკვრივე (მარჯვნივ) სხვადასხვა ξ პარამეტრისთვის.

პრაქტიკაში, ბლოკის მაქსიმალური მეთოდი მარტივი დასაწერია. დავუშვათ, მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის n დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული დაკვირვებები, რომლებიც განაწილებულია k ჯგუფში (ბლოკში), ისე რომ თითოეულ ჯგუფში შედის n/k მონაცემი. ამის შემდეგ ვირჩევთ თითოეულ ჯგუფში მაქსიმუმს. თეორემა 4.2.1 ამტკიცებს, რომ თუ n და k საკმარისად დიდია, მაშინ ბლოკის მაქსიმუმი მიჰყვება განზოგადებულ ექსტრემალურ მნიშვნელობების განაწილებას. სურათი 4.6 სქემატურად ასახავს მიდგომას.



სურ. 4.6: ბლოკის მაქსიმალური მეთოდი.

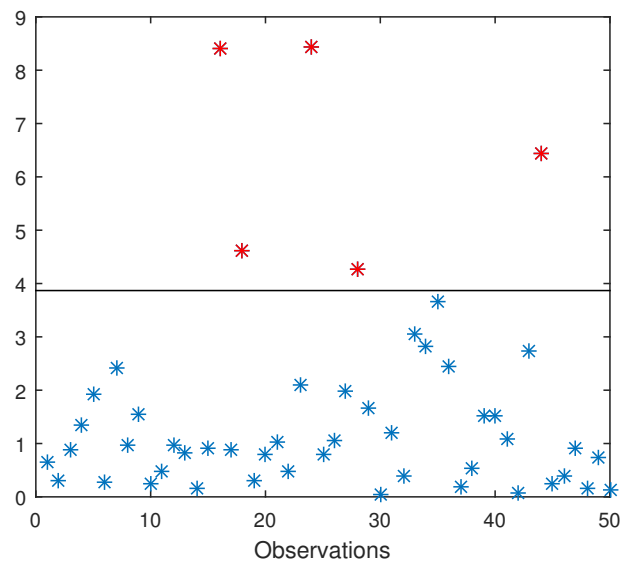
ბლოკის მაქსიმალურ მეთოდს გააჩნია რამდენიმე უპირატესობა:

- (i) ერთადერთი ხელმისაწვდომი ინფორმაცია შეიძლება იყოს ბლოკის მაქსიმუმები, მაგალითად, წლიური მაქსიმუმები დიდი ისტორიით.

- (ii) მეთოდი უკეთეს შედეგს იძლევა, როდესაც დაკვირვებები არ არის დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული (Ferreira and De Haan, 2015).

პიკების მეთოდი

პიკების (POT) მეთოდი აღგენს კონკრეტულ ზღვარს u და განიხილავს ყველა დაკვირვებას, რომელიც u -ს აღემატება. u წარმოადგენს ექსტრემალური მნიშვნელობების საზღვარს. მეთოდი აღწერს ექსტრემალური მნიშვნელობების განაწილებას და მის საფუძველზე ხდება საბაზრო რისკის ზომების შეფასება. სურათი 4.7 სქემატურად აღწერს პიკების მეთოდს.



სურ. 4.7: პიკების მეთოდი.

დავუშვათ $z \in \mathbb{R} \cup \infty$ წარმოადგენს F განაწილების მაქსიმალურ შესაძლო მნიშვნელობას. ალბათობა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას რომელიც გადააჭარბებს u -ს არის, (McNeil, 1999; Rocco, 2014).

$$P\{X - u \leq x | X > u\} = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}, x \in [0, z - u]. \quad (4.23)$$

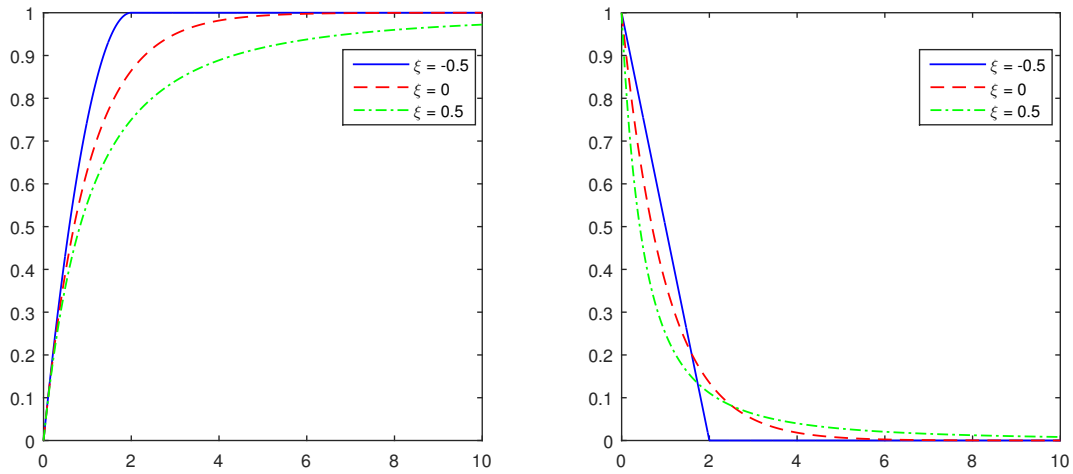
Balkema and de Haan, 1974; Pickands III, 1975 ნაშრომებში დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.2.2. დავუშვათ $F \in \text{MDA}(H)$, მაშინ შემთხვევითი სიდიდის მიერ u -ს გადაჭარბების ზღვრული განაწილება არის განზოგადებული პარეტოს განაწილება თუ $u \rightarrow \infty$.

განზოგადებული პარეტოს (GP) ალბათური განაწილების კანონი განისაზღვრება, როგორც

$$GP(x|\xi, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{თუ } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left\{-\frac{x}{\beta}\right\}, & \text{თუ } \xi = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

სადაც, ξ არის ფორმის პარამეტრი და β არის სკალირების პარამეტრი. სურათი 4.8 აჩვენებს GP განაწილების კუმულატიური განაწილების ფუნქციასა და სიმკვრივეს სხვადასხვა ξ პარამეტრებისთვის.



სურ. 4.8: GP განაწილების კუმულატიური განაწილების ფუნქცია (მარცხნივ) და სიმკვრივე (მარჯვნივ) სხვადასხვა ξ პარამეტრისთვის.

არსებობს ბუნებრივი კავშირი ბლოკის მაქსიმალურ მეთოდსა და პიკების მეთოდს შორის.

თეორემა 4.2.3. (Rocco, 2014 თეორემა 1.7). ყოველი $\xi \in \mathbb{R}$, არსებობს ზომადი ფუნქცია $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, ისე რომ

$$\lim_{u \rightarrow x} \sup_{0 < x < z - u} |F_u(x) - GP(x|\xi, \beta(u))| = 0 \quad (4.25)$$

ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $F \in \text{MDA}(\text{GEV}(x|\mu, \sigma, \xi))$.

4.2.2 EVT, როდესაც დაკვირვებები არ არის დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული

ისეთი სტატისტიკური ფაქტები, როგორიცაა ვარიაციის კლასტერი, აჩვენებს, რომ ფინანსური აქტივის შემოსავლიანობის დროითი მწკრივი არ არის i.i.d. (იხილეთ მაგ., Cont,

2001). ექსტრემალური ღირებულების თეორია ეფუძნება i.i.d. დაშვებას. იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ ეს შეზღუდვა, გამოყენებულია GARCH(1,1) ფილტრი სტიუდენტის t - განაწილებით ფინანსური დროითი მწკრივისთვის (McNeil and Frey, 2000). რამდენიმე სიმულაციური კვლევის გამოყენებით, Jalal and Rockinger, 2008 აჩვენებს, რომ მაშინაც კი, როდესაც GARCH მოდელი არასწორად არის შეფასებული, GARCH ფილტრაცია EVT-სთვის რობასტულია და იძლევა კარგ შედეგებს. EVT-ის გამოთვლა GARCH ფილტრის მეშვეობით ცნობილი მიდგომაა და მხარდაჭერილია Jalal and Rockinger, 2008; McNeil and Frey, 2000 კვლევებში. მეთოდი მოიცავს ორ საფეხურს: პირველ ეტაპზე GARCH მოდელი შეფასებულია მოცემული მონაცემებისთვის და შედეგების მიხედვით გამოითვლება დროითი მწკრივების ვარიაცია, რომელიც გამოიყენება სტანდარტიზებული ნაშთების გამოსათვლელად, რომლებიც უკვე აკმაყოფილებენ i.i.d. მოთხოვნას. მეორე ეტაპზე, EVT გამოიყენება გაფილტრული მონაცემებისთვის.

4.2.3 რისკის ზომები EVT-ს მიხედვით

დავუშვათ $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$ არის ფინანსური აქტივი, ხოლო $x_1, \dots, x_n$ არის ლოგარითმული შემოსავლიანობის დაკვირვებები. ასევე დავუშვათ, რომ N_u დაკვირვება n შერჩევიდან აღემატება u ზღვარს. GP განაწილება არის შეფასებული N_u მონაცემებისთვის. დავუშვათ $\hat{\xi}, \hat{\beta}$ წარმოადგენენ GP განაწილების შეფასებულ პარამეტრებს. (4.23) ტოლობიდან და 4.2.2 თეორემიდან ემპირიულ კუმულატიურ განაწილების ფუნქცია $\hat{F}$, $x > u$ -სათვის განისაზღვრება (იხ. მაგ., McNeil, 1999; Rocco, 2014)

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{x - u}{\hat{\beta}} \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}. \quad (4.26)$$

(4.26) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$ ფინანსური პოზიციისთვის, რომლის მოცემული ღირებულებაც შეადგენს x_0 , ღირებულება რისკის ქვეშ და მოსალოდნელი ჩავარდნა, 1-დღის რისკის ჰორიზონტით განისაზღვრება, როგორც ⁴ (see e.g., McNeil, 1999, Rocco, 2014)

$$\widehat{\text{VaR}}_{\alpha, m}(X) = x_0 (1 - \exp(-q)), \quad (4.27)$$

$$\widehat{\text{ES}}_{\alpha, m}(X) = x_0 \left(1 - \exp \left\{ -\frac{q}{1 - \hat{\xi}} - \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}} \right\} \right), \quad (4.28)$$

⁴სიმარტივისთვის დაშვებულია, რომ დღიური შემოსავლიანობის საშუალო არის 0-ის ტოლი.

სადაც,

$$q = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{n}{N_u} (1 - \alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right]. \quad (4.29)$$

თუ განაწილების ფუნქცია არის უწყვეტი არსებობს მედიანური ჩავარდნა (MS), რომელიც განისაზღვრება როგორც,

$$MS_{\alpha,m}(X) = VaR_{\frac{1+\alpha}{2},m}(X). \quad (4.30)$$

რადგან, GP განაწილება უწყვეტია, MS მოიცემა როგორც,

$$\widehat{MS}_{\alpha,m}(X) = x_0 \left(1 - \exp \left\{ -u - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{n}{N_u} \left(\frac{1-\alpha}{2} \right) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] \right\} \right). \quad (4.31)$$

4.2.4 მოდელის რისკი EVT-სთვის

EVT თეორიის გამოსაყენებლად, საჭიროა დაკვირვებების დიდი რაოდენობა (Rocco, 2014). დიდი მონაცემთა ნაკრების მისაღებად არსებობს ორი გზა: მაღალი სიხშირის მონაცემებთან მუშაობა ან დაკვირვების პერიოდის გაზრდა. ორივე მეთოდს აქვს თავისი დადებითი და უარყოფითი მხარეები. მაღალი სიხშირის მონაცემები საშუალებას იძლევა მივიღოთ საკმარისი დაკვირვებები სტატისტიკური მოდელირებისთვის. თუმცა, მაღალი სიხშირის მონაცემები საჭიროებს დამატებით კორექტირებას და ასევე არ მოიცავს ბევრ ისტორიულ (რელევანტურ) მოვლენას (Andersen, 2000; O. E. Barndorff-Nielsen and Shephard, 2005). დაკვირვების პერიოდის გაზრდის შემდეგ მონაცემთა ბაზა მოიცავს ისტორიულ პერიოდებს, რომლებიც ძალიან ძველია პრაქტიკული რისკის გაზომვის მიზნებისთვის.

ჩვენ განვიხილეთ ყოველდღიური ისტორიული მონაცემები 1970 წლის 02 იანვრიდან 2018 წლის 31 აგვისტომდე DAX 30, S&P 500, DJIA და Nikkei 225 საფონდო ინდექსებისთვის⁵. აღნიშნული პერიოდი მოიცავს რამდენიმე მნიშვნელოვან ისტორიულ მოვლენას, რომელმაც უარყოფითი გავლენა მოახდინა ფინანსურ ბაზრებზე, მათ შორის, ბრეტონ ვუდსის სისტემის დაშლა 1970-იან წლებში, (იხ. მაგ., Dooley et al., 2004), "შავი ორმაზი" - 1987 წლის 19 ოქტომბერი (იხ. მაგ., Bogle, 2008), აზიის კრიზისი 1997 წელს (იხ. მაგ., Wade, 1998), LTCM-ის გაკოტრება რუსეთის სავალდებულო კრიზისის შემდეგ 1998 წელს (იხ. მაგ., Edward, 1999), 2001 წლის 11 სექტემბრის ტერორისტული თავდასხმები,

⁵წყარო: Bloomberg.

გლობალური ფინანსური კრიზისი 2007-2008 წლებში და ევროპული სახაზინო ვალის კრიზისი 2011 წელს.

სურათი B.1 დანართში ასახავს ამ ინდექსების ისტორიული ფასის ევოლუციას და ლოგარითმულ ანაზღაურებას. ცხადია, რომ ვარიაცია დროში არაერთგვაროვანია. ჩვენ ვაკვირდებით მკაფიო ვარიაციის კლასტერებს. ცხრილი B.1 დანართში წარმოადგენს აღწერით სტატისტიკას. საფონდო ინდექსების ყოველდღიური საშუალო შემოსავალი და მედიანა ნულს უახლოვდება. გარდა ამისა, სტანდარტული გადახრები უფრო დიდია, ვიდრე საშუალო ანაზღაურება. საგულისხმოა, რომ განაწილებებს გააჩნიათ უარყოფითი ასიმეტრია და მნიშვნელოვანი ექსცესი. განსაკუთრებით, S&P 500 და DJIA ხასიათდება მძიმე კუდებით.

იმისათვის, რომ მივიღოთ i.i.d. დროითი მწკრივები გამოვიყენეთ GARCH(1,1) ფილტრი სტიუდენტის t - განაწილებით. შეფასების დეტალები მოცემულია დანართში იხ. ცხრილი B.2 და ფიგურა B.2.

მოდელის სიმრავლე და MCMC ალგორითმი

განვიხილოთ შემდეგი ორი მოდელის სიმრავლე

$$M_1 = \{GEV_{\mu,\sigma,\xi} | \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+, \xi \in \mathbb{R}\}. \quad (4.32)$$

$$M_2 = \{GP_{\xi,\beta} | \xi \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}_+\}. \quad (4.33)$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ საბაზრო რისკი როგორც გრძელი, ასევე მოკლე საბაზრო პოზიციებისთვის, ჩვენ განვიხილავთ სტანდარტიზებული შემოსავლების აბსოლუტურ მნიშვნელობებს. ბლოკის მაქსიმალური მეთოდისთვის ვიყენებთ ბლოკებს, რომლებიც შეიცავს 20 დაკვირვებას. ამიტომ, DAX 30-სთვის გვაქვს 613 ბლოკები. S&P 500-ისთვის, DJIA-სთვის და Nikkei 225-ისთვის ჩვენ გვაქვს 614, 615 და 600 ბლოკები შესაბამისად. პიკების მეთოდისთვის, დაშვებულია 90%-იანი ბარიერის დონე.

აპოსტერიორული განაწილების შესაფასებლად გამოვიყენეთ R პროგრამის პაკეტი 'MCMC4Extremes' do Nascimento and Moura e Silva, 2016. პაკეტი იყენებს სტანდარტულ Metropolis-Hasting ალგორითმს GEV და GP განაწილების პარამეტრების შერჩევის მისაღებად. ორივე მოდელის სიმრავლის შემთხვევაში გამოყენებულია 10'000'000 იტერაცია. ანალიზის დროს კი შევარჩიეთ იტერაციის ბოლო 10%. ვინაიდან მოდელებს აქვთ 2 და

3 პარამეტრი, იტერაციის დიდი რაოდენობა კონსერვატიული მიდგომაა და უზრუნველყოფს ალგორითმების კრებადობას. იხ. დანართი 4.5.3 კრებადობის დიაგნოსტიკისთვის.

სუპერპოზიციური საბაზრო რისკები

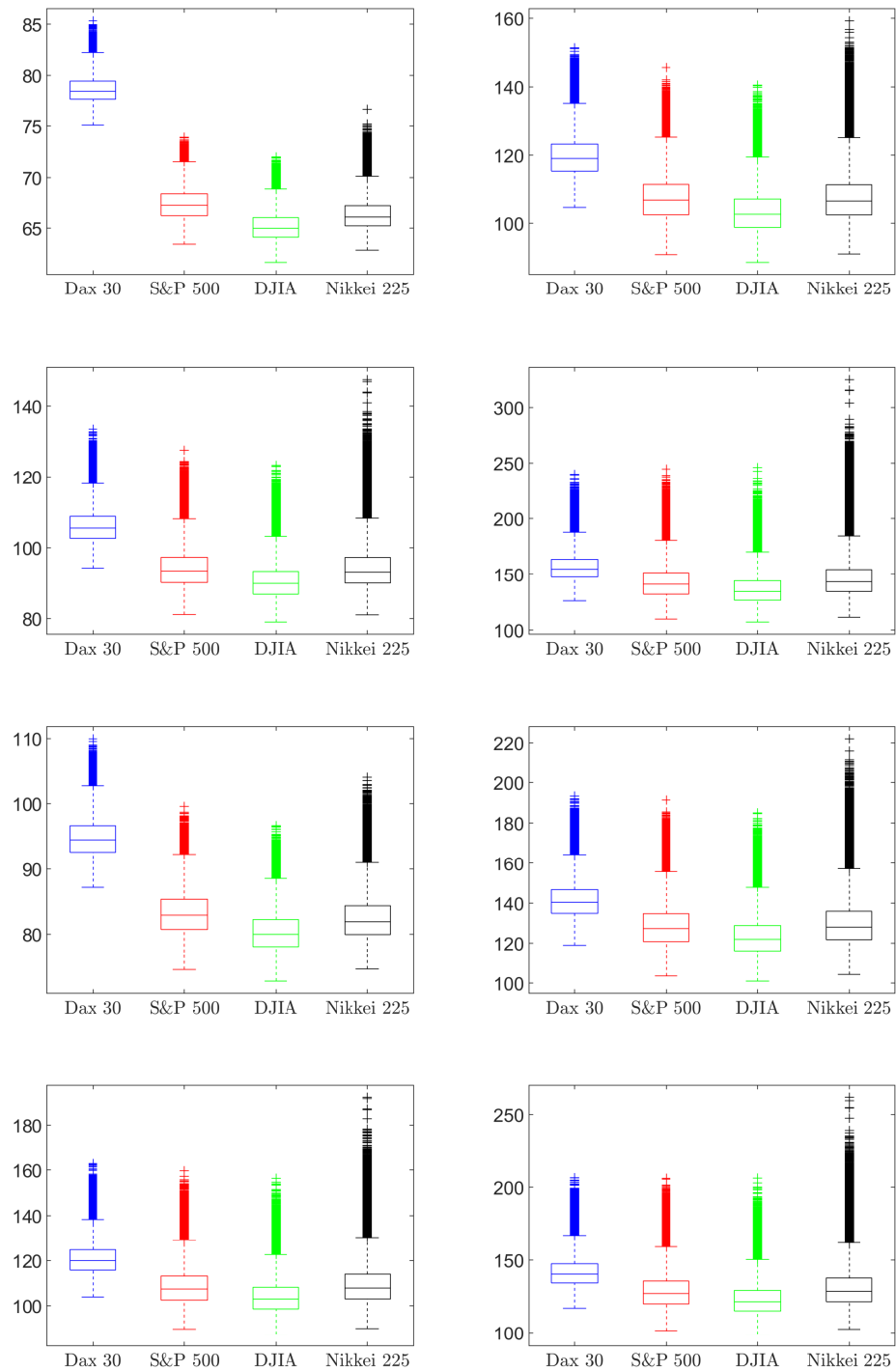
ჩვენ განვიხილეთ ოთხი განსხვავებული ფინანსური პოზიცია: 1000 ევროს ინვესტიცია DAX 30 ინდექსში, 1000 აშშ დოლარის ინვესტიცია S&P 500- და DJIA ინდექსებში, და JPY 1000 ინვესტიცია Nikkei 225 ინდექსში. MCMC სიმულაციის შედეგების საფუძველზე ჩვენ ვიანგარიშებთ 10 დღის VaR, ES და MS 95% და 99% ნდობის დონეებით (იხ. განტოლებები (4.27), (4.28) და (4.31)). ასევე, განვიხილავთ სპექტრული რისკის ზომას შემდეგი წონის ფუნქციით

$$\phi(\alpha) = \frac{\exp(-(1-\alpha)/\gamma)}{\gamma(1-\exp(-1/\gamma))}, \quad (4.34)$$

სადაც, γ რისკის ავერსიულობის მაჩვენებელია. ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევებს, როდესაც $\gamma = 0.01$ და $\gamma = 0.02$.

რადგან მონაცემთა დამუშავებისას გამოვიყენეთ GARCH ფილტრი, შედეგები საჭიროებს ვარიაციის კორექტირებას, რასაც ვახდენთ ასევე შესაბამისი GARCH(1,1) პროცესის სიმულაციით, B.2 ცხრილში მოცემული პარამეტრებით.

სურათი 4.9 ასახავს საბაზრო რისკის ზომებს. მოსალოდნელი ჩავარდნის (Expected Shortfall) და მედიანური ჩავარდნის (Median Shortfall) აპოსტერიორული განაწილებები ხასიათდებიან გაცილებით დიდი დისპერსიით ვიდრე VaR-ის აპოსტერიორული განაწილება. გარდა ამისა, რისკის ზომები 99% ნდობის დონით უფრო მიდრეკილია მოდელის რისკისკენ, ვიდრე რისკის ზომები 95% ნდობის დონით. საფონდო ინდექსებიდან ყველაზე რისკიანი Nikkei 225 ინდექსია. დანართში მოცემული ცხრილი B.4 წარმოადგენს საბაზრო რისკის ზომების დეტალურ სტატისტიკას.



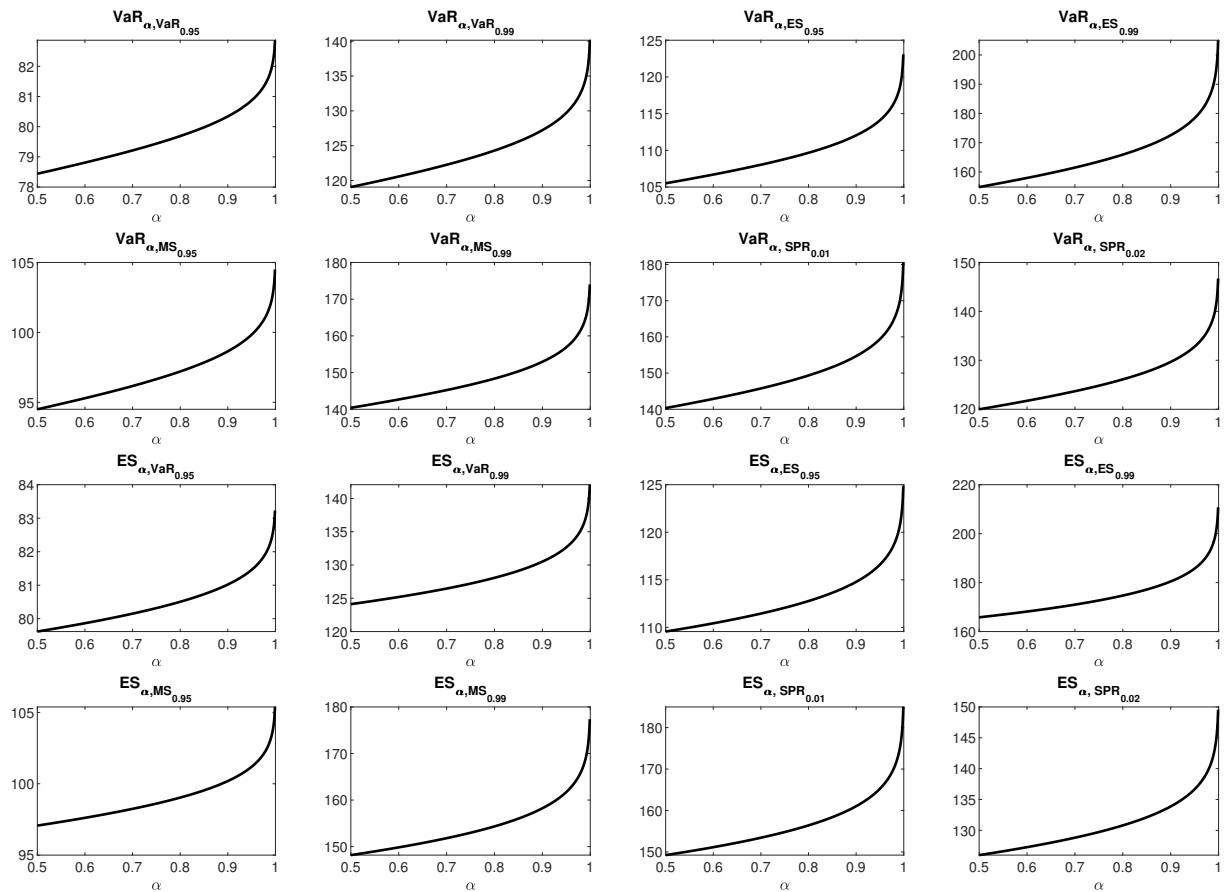
სურ. 4.9: საბაზრო რისკების განაწილებები. პირველი რიგი მარცხნივ: $VaR_{0.95}$. მარჯვნივ: $VaR_{0.99}$. მეორე რიგი მარცხნივ: $ES_{0.95}$. მარჯვნივ: $ES_{0.99}$. მესამე რიგი მარცხნივ: $MS_{0.95}$. მარჯვნივ: $MS_{0.99}$. მეოთხე რიგი მარცხნივ: სპექტრალური რისკის საზომი $\gamma = 0.02$ პარამეტრით. მარჯვნივ: სპექტრალური რისკის საზომი $\gamma = 0.01$ პარამეტრით.

		VaR ₉₅	ES ₉₅	MS ₉₅	VaR ₉₉	ES ₉₉	MS ₉₉	SPR($\gamma = 0.02$)	SPR($\gamma = 0.01$)
DX	$\rho * \mu$	78.5712	105.9722	94.7815	119.6032	156.2704	141.2746	120.6966	141.4696
	ρ_{WC}	85.3276	133.5212	109.9657	151.4056	239.9172	193.3287	162.7979	206.4292
S	$\rho * \mu$	67.3402	94.0216	83.1954	107.3630	142.8567	128.3900	108.3260	128.5124
	ρ_{WC}	73.9097	127.5581	99.5813	145.6367	244.6444	191.3280	159.6284	206.0859
D	$\rho * \mu$	65.1373	90.4344	80.3288	103.2890	136.3857	123.1046	103.8951	122.8897
	ρ_{WC}	72.0086	123.3116	96.6742	140.5334	246.0768	184.9958	156.3856	206.2260
N	$\rho * \mu$	66.3152	94.1171	82.4188	107.5016	146.0945	129.7828	109.3030	130.7835
	ρ_{WC}	76.5972	147.7455	103.9832	159.2550	325.8281	222.0150	192.3588	261.8927

ცხრ. 4.6: მოდელის რისკით შეწონილი რისკი და მაქსიმალური რისკის ზომები.

განვიხილოთ მოდელის რისკით შეწონილი და მაქსიმალური რისკის ზომები. მაქსიმალური რისკის საზომი მნიშვნელოვნად აღემატება მოდელის რისკით შეწონილ რისკებს, თუმცა მათ შორის სხვაობა გაცილებით ნაკლებია, ვიდრე 4.1 თავში შესწავლილი მაგალითისთვის. აღნიშნული განსხვავება აიხსნება იმ ფაქტით, რომ 4.1 თავში განვიხილეთ ჩვეულებრივი საბაზრო რისკის ზომები, ხოლო ახლა ვსწავლობთ კუდის რისკებს. აღნიშნული შედეგი მნიშვნელოვანია კუდის რისკის და კუდის მოდელის რისკის მადის ფორმულირებისთვის.

განვიხილოთ სუპერპოზიციური რისკის ზომები, როდესაც ζ არის ღირებულება რისკის ქვეშ და მოსალოდნელი ჩავარდნა $\alpha \in [50\%, 99.9\%]$ ნდობის დონეებით. სურათი 4.10 და სურათები B.9, B.10, B.11 დანართში აღწერენ შედეგებს. შედეგები აჩვენებს რომ კუდის რისკის მოდელირებისას მოდელის რისკი იზრდება საბაზრო რისკის ნდობის ინტერვალთან ერთად. აღსანიშნავია, რომ სპექტრალური რისკის ოჯახი როგორც, საბაზრო რისკის ასევე მოდელის რისკის მიმართ ექსტრემალურ ავერსიას აჩვენებს.



სურ. 4.10: სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები DAX 30 საფონდო ინდექსისთვის.

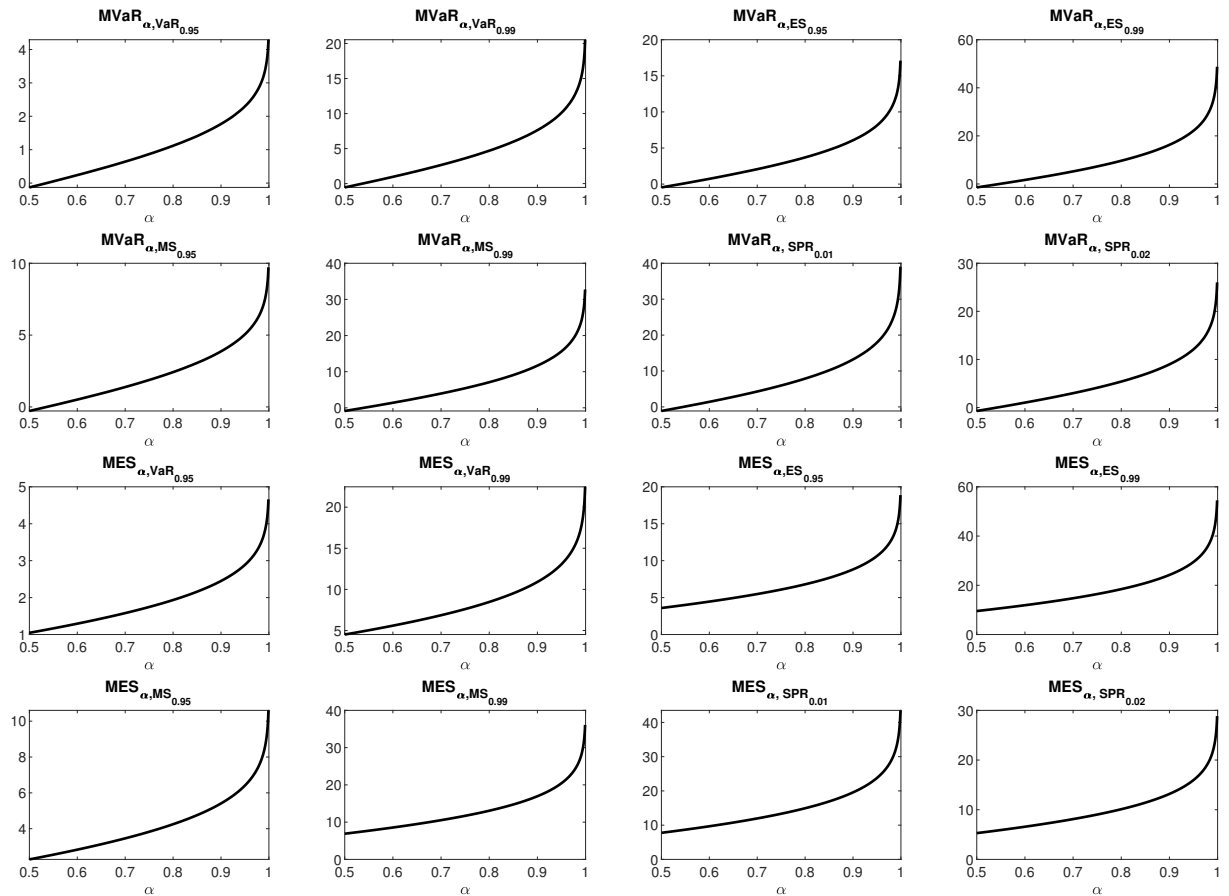
მოდელის რისკის ზომები

მაქსიმალური მოდელის რისკი კუდის რისკის მენეჯმენტში გადაჭარბებულად აფასებს მოდელის რისკს, იხ. ცხრილი 4.7 .

განვიხილოთ მოდელის სუპერპოზიციური რისკები, როდესაც ბენჩმარკ მოდელი არის მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკი, ხოლო ζ არის VaR ან ES. სურათი 4.11, და სურათი B.12, B.13, B.14 დანართში აჩვენებს შედეგებს. როგორც ვხედავთ, VaR რისკის ოჯახი წარმოადგენს კუდის მოდელის რისკის მიმართ ყველაზე რობასტული რისკის ოჯახს. ბაზელის საბანკო კომიტეტის მიერ შემოთავაზებული საბაზრო რისკის მენეჯმენტი ES ოჯახზე დაფუძნებით აჩვენებს მნიშვნელოვან მოდელის რისკს BIS, 2012.

	VaR_{95}	ES_{95}	MS_{95}	VaR_{99}	ES_{99}	MS_{99}	$\text{SPR}(\gamma = 0.02)$	$\text{SPR}(\gamma = 0.01)$
DAX 30	10.2503	39.243	22.7886	46.8075	113.7704	74.3498	58.9109	89.5478
S&P 500	10.4887	46.4406	25.0543	54.7925	134.7858	87.8406	70.006	104.6671
DJIA	10.3691	44.2726	23.8947	51.9617	138.8464	84.026	69.0611	107.2747
Nikkei 225	13.7589	66.7196	29.3696	68.2199	214.3744	117.7767	102.4452	159.4295

ცხრ. 4.7: მოდელის მაქსიმალური რისკის ზომა.



სურ. 4.11: სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები DAX 30 საფონდო ინდექსისთვის.

4.2.5 კუდის საბაზრო და მოდელის რისკის ეფექტური მართვა

კუდის რისკის ზომები, რომლებიც გამოითვლება EVT ჩარჩოს მიხედვით, მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ სტრესს ტესტირებაში, სცენარების ანალიზში და მოდელის ვალიდაციის პროცესში. თუმცა EVT-ს მოდელები შეიცავენ მნიშვნელოვან მოდელის რისკებს. ისევე როგორც, პორტფელის რისკის ყოველდღიური მენეჯმენტისას, კუდის რისკის მოდელირებისას საჭიროა დადგინდეს საბაზრო და მოდელის რისკების მადა.

სტატისტიკური პერსპექტივიდან EVT მოდელებისთვის მოდელის სივრცის შექმნა და აპოსტერიორული განაწილების მიღება მარტივია, რადგან მოდელები შეიცავენ 2 და

3 პარამეტრებს. შესაბამისად მისი დანერგვა მცირე ძალისხმევით არის შესაძლებელი და ხელმისაწვდომია შედარებით პატარა ფინანსური ინსტიტუტებისთვისაც.

EVT-ს კონტექსტში, რომ რისკების ოჯახის შერჩევა მნიშვნელოვან სტრატეგიულ კომპონენტს წარმოადგენს. სუპერპოზიციური საბაზრო და მოდელის რისკები წარმოადგენენ ბუნებრივ ინსტრუმენტს კუდის რისკის ოპტიმალური მართვისთვის. აღნიშნული მიდგომა შესაძლებლობას იძლევა ეფექტური და სტაბილური რისკების მენეჯმენტის ფუნქციის, ინდივიდუალური რისკის მადის გათვალისწინებით.

4.3 ფასის მოდელის რისკი ზოგიერთი ეგზოტიკური დერივატივისთვის

ეგზოტიკური წარმოებული ფასიანი კონტრაქტები გადამწყვეტ როლს თამაშობენ თანამედროვე ფინანსურ ბაზრებზე რამდენიმე მიზეზის გამო. პირველ რიგში, ისინი ინვესტორებისთვის წარმოადგენენ რისკის მართვის მოქნილ ინსტრუმენტებს, რაც მათ საშუალებას აძლევს მოარგონ თავიანთი პოზიციები კონკრეტულ საბაზრო პირობებსა და ინდივიდუალურ პრეფერენციებს. არაწრფივი ანაზღაურების სტრუქტურების მეშვეობით, როგორიცაა ბარიერები-, კვანტოები- ან აზიური ოფციონები, ეგზოტიკური დერივატივები გვთავაზობენ ჰეჯირების ეფექტურ შესაძლებლობებს, რომლებიც უმკლავდებიან კომპლექსურ საბაზრო რისკებს უკეთ, ვიდრე მათი სტანდარტული ევროპული და ამერიკული ანალოგები. შესაბამისად, პორტფელის ჰეჯირებისას მათი როლი უმნიშვნელოვანესია. მეორეს მხრივ, ეგზოტიკური დერივატივები ხელს უწყობს სპეკულაციისა და არბიტრაჟის შესაძლებლობებს ინსტიტუციური მოთამაშეებისთვის, ჰეჯფონდების ჩათვლით. ეგზოტიკური ოფციონები საშუალებას აძლევს ინვესტორებს ისარგებლონ ბაზრის არაეფექტურობით და გამოიყენონ ფასების ანომალიები, რაც პოტენციურად გამოიმუშავებს მნიშვნელოვან მოგებას.

მიუხედავად იმისა, რომ ეგზოტიკური ოფციონები გვთავაზობენ ეფექტური ჰეჯირების სტრატეგიებისა და პოტენციური სპეკულაციური მოგების შესაძლებლობებს, მათი ფასების და რისკის მართვა მოითხოვს მოდელის რისკის ფრთხილად განხილვას (Cont, 2006; Glonti et al., 2015). ამ თავში დეტალურად არის შესწავლილი ფასის მოდელის რისკი ზოგიერთი ეგზოტიკური ოფციონისთვის.

ეგზოტიკური ოფციონების ფასდადება წარმოადგენს მნიშვნელოვან მათემატიკურ გამოწვევას. ევროპული დერივატივებისგან განსხვავებით, რომლებიც აქტიურად ივაჭრება ბირჟაზე, ეგზოტიკური კონტრაქტები, როგორც წესი ივაჭრება ინდივიდუალურად და შესაბამისად არალიკვიდურია. ამასთან, მათი ფასდადება მოითხოვს მათემატიკური მოდელების გამოყენებას, რომლებიც კალიბრებულია ლიკვიდური პროდუქტების დაკვირვებადი ფასებით, როგორიცაა call/put ოფციები, ან caps და swaptions. ხოლო მსგავსი კალიბრაცია ყოველთვის შეიცავს მნიშვნელოვან მოდელის რისკს.

4.3.1 აქტივის ფასის მოდელი

დავუშვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$ წარმოადგენს ფილტრირებულ ალბათურ სივრცეს. განვიხილოთ რისკიანი აქცია S , რომლის ფასიც განისაზღვრება შემდეგი დიფუზიური სტოქასტური

პროცესით,

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t)dW_t, \quad (4.35)$$

სადაც r აღნიშნავს მუდმივ ურისკო საპროცენტო განაკვეთს, σ არის ვარიაციის დროზე დამოკიდებული ფუნქცია და W აღნიშნავს სტანდარტულ ვინერის პროცესს რისკ ნეიტრალური ზომის მიმართ⁶.

დავუშვათ, ბაზარზე არსებობს მხოლოდ ერთი მაღალლიკვიდური ევროპული ქოლ ოფციონი S - ისთვის, რომლის აღსრულების დროც არის T . როგორც წესი ოფციონები ივაჭრება ე.წ. ბლეკ-შოულსის ვარიაციის მიხედვით. დავუშვათ ეს ვარიაცია არის Σ .

(4.35) სტოქასტური მოდელის ეკონომეტრიკული შეფასება შესაძლებელია არსებული ქოლ ოფციონის ფასით. პარამეტრების შეფასების პრობლემა დაიყვანება:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t)^2 dt = \Sigma^2. \quad (4.36)$$

დავუშვათ, რომ $\sigma(t)$ მუდმივია $[0, T_1]$ და $[T_1, \infty)$ ინტერვალზე და $T_1 \in (0, T)$. ასეთ შემთხვევაში (4.36) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sigma_a(t) = a1_{[0, T_1]}(t) + \sqrt{\frac{T\Sigma^2 - T_1 a^2}{T - T_1}} 1_{(T_1, \infty]}(t), \quad (4.37)$$

სადაც,

$$a \in \Theta = \left(0, \sqrt{\frac{T}{T_1}} \Sigma\right). \quad (4.38)$$

განვიხილოთ რისკ ნეიტრალური ალბათური ზომა $\mathbb{Q}_a$ რომლისთვისაც ტოლობა (4.35) ჭეშმარიტია თუ $\sigma = \sigma_a$. აღნიშნული მაგალითისთვის განვსაზღვროთ მოდელის ზომადი სივრცე $(M, \mathcal{M})$

$$M = \{\mathbb{Q}_a : a \in \Theta\}. \quad (4.39)$$

$$\mathcal{M} = \{\{\mathbb{Q}_a : a \in D\}, D \in \mathcal{B}(\Theta)\}. \quad (4.40)$$

⁶აღსანიშნავია, რომ მოდელი შეიცავს რამდენიმე გამარტივებულ დაშვებას: 1. აქცია არ იხდის დივიდენდს. 2. ურისკო საპროცენტო განაკვეთი მუდმივია. 3. მოდელი საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ცვალებადი ვარიაცია, რისი არსებობაც ემპირიულად მტკიცდება, მაგრამ მოდელი ვერ ასახავს ნახტომებს 4. მოდელი ვერ ასახავს ავტოკორელაციას. პირველი ორის გამარტივება შესაძლებელია ადვილად განზოგადდეს. რაც შეეხება 3. და 4. დაშვებებს, მათი თავიდან აცილება შესაძლებელია, თუმცა სტოქასტური პროცესები საკმაოდ რთულ სახეს იღებს და შედეგების ინტერპრეტაცია ნაკლებად ინტუიციურია.

შესაბამისად, მოდელის რისკი დაიყვანება a პარამეტრის შეფასების რისკზე.

ამ თავში განხილული მაგალითებისთვის დავუშვათ, რომ $S_0 = 100$, $T = 1$, $T_1 = 0.5$, $\Sigma = 0.3$ და $r = 0.01$.

4.3.2 ბარიერული ოფციონების ფასის მოდელის რისკი

ბარიერული ოფციონები წარმოადგენენ ეგზოტიკურ დერივატივებს, რომელთა შემოსავლიანობის ფუნქცია დამოკიდებულია გარკვეულ ბარიერზე. თუ აქტივის ფასი მიაღწევს ბარიერს, მაშინ ოფციონი შეიძლება ან გააქტიურდეს ან გამოირთოს. აღნიშნული თვისება იძლევა უნიკალურ უპირატესობებს და მიმზიდველია სხვადასხვა ტიპის ინვესტორებისთვის. მაგალითად, ბარიერული ოფციონების შეძენა შესაძლებელია ინვესტს მიერ, რომელიც ცდილობს პორტფელის დაცვას ბაზრის მაქსიმალური უარყოფითი დინამიკისგან, ხოლო მცირე საბაზრო რხევები არ აინტერესებს. ბარიერის გარკვეულ დონეზე დაყენებით, ინვესტორებს შეუძლიათ დაიცვან თავი ზარალისგან, თუ ძირითადი აქტივი მიაღწევს ან გადააჭარბებს ბარიერს, რაც ეფექტურად ზღუდავს მათ მაქსიმალურ რისკს. გარდა ამისა, ბარიერის ოფციონები შეიძლება იყოს მომგებიანი სპეკულაციური ინვესტორებისთვის. მაგალითად, თუ ძირითადი აქტივი დარჩება წინასწარ განსაზღვრულ დიაპაზონში, ოფციონი გააქტიურდება, რაც გამოიწვევს ხელსაყრელ ანაზღაურებას. ამასთან, ბარიერული ოფციონები ხშირ შემთხვევაში გაცილებით იაფია ვიდრე კლასიკური ევროპული ან ამერიკული ოფციონები.

კონკრეტულად შევისწავლოთ ბარიერული ასვლის და გამოსვლის ქოლ ოფციონი (UOC), და ჩამოსვლის და გამოსვლის ფუტ ოფციონი (DOP). UOC წარმოადგენს ქოლ ოფციონს, რომელიც კარგავს ღირებულებას, თუ აქციის ფასი გაიზრდება და გადააჭარბებს წინასწარ განსაზღვრულ ბარიერს. UOC ოფციონის შემოსავლისნობის ფუნქცია მოცემულია

$$\max(S_T - K, 0)1_{\{S_t < B, t \in [0, T]\}},$$

სადაც B წარმოადგენს ფიქსირებულ ბარიერს. DOP წარმოადგენს ფუტ ოფციონს, რომელიც კარგავს ღირებულებას თუ აქციის ფასი შემცირდება და ჩამოსცდება წინასწარ განსაზღვრულ ბარიერს. DOP ოფციონის შემოსავლისნობის ფუნქცია მოცემულია

$$\max(K - S_T, 0)1_{\{S_t > B, t \in [0, T]\}}.$$

ბარიერული ოფციონის ფასის დასადგენად გამოვიყენებთ C. F. Lo et al., 2003 მიერ შე-

მოთავაზებულ მეთოდს. აღვნიშნოთ $x = \ln(S/B)$. ევროპული ტიპის ბარიერული UOC ოფციონის ფასი $U(x, t)$, სადაც t წარმოადგენს ოფციონის დარჩენილ ვადას აკმაყოფილებს ბლეკ-შოულსის ცნობილ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 U(S, t)}{\partial x^2} + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right]\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} - rU(x, t). \quad (4.41)$$

C.-F. Lo and Hui, 2001 და C. F. Lo et al., 2003 აჩვენებს რომ $U(x, t)$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$U(x, t) = U(x, 0) \exp(-rt) \exp\left(\left[rt - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(\tau)d\tau\right]\frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(\left[\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(\tau)d\tau\right]\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right), \quad (4.42)$$

სადაც, n პარამეტრისთვის ჭეშმარიტია:

$$\exp\left(n\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) = f(x + n) \quad (4.43)$$

$$\exp\left(n\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4n}\right]f(y). \quad (4.44)$$

(4.42) განტოლებში UOC ოფციონის შემოსავლიანობის ფუნქციის ჩასმით მიიღება:

$$\begin{aligned}
 U(x, t) = & S \left[\Phi \left(-\frac{\ln \left(\frac{S}{B} \right) + rt + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}} \right) - \Phi \left(-\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + rt + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}} \right) \right] \\
 & - K \exp(-rt) \left[\Phi \left(-\frac{\ln \left(\frac{S}{B} \right) + rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}} \right) - \Phi \left(-\frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}} \right) \right] \\
 & - B \exp \left[-rt + (\beta - 1) \left(\ln \left(\frac{S}{B} \right) + rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{2} (\beta - 1)^2 \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau \right] \\
 & \times \left[\Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{B} \right) + rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau + (\beta - 1) \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}} \right) \right. \\
 & \left. - \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{B} \right) + \ln \left(\frac{K}{B} \right) + rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau + (\beta - 1) \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}} \right) \right] \\
 & + K \exp \left[-rt + \beta \left(\ln \left(\frac{S}{B} \right) + rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{2} \beta^2 \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau \right] \\
 & \times \left[\Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{B} \right) + rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau + \beta \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}} \right) \right. \\
 & \left. - \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S}{B} \right) + \ln \left(\frac{K}{B} \right) + rt - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau + \beta \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau}} \right) \right],
 \end{aligned}$$

სადაც,

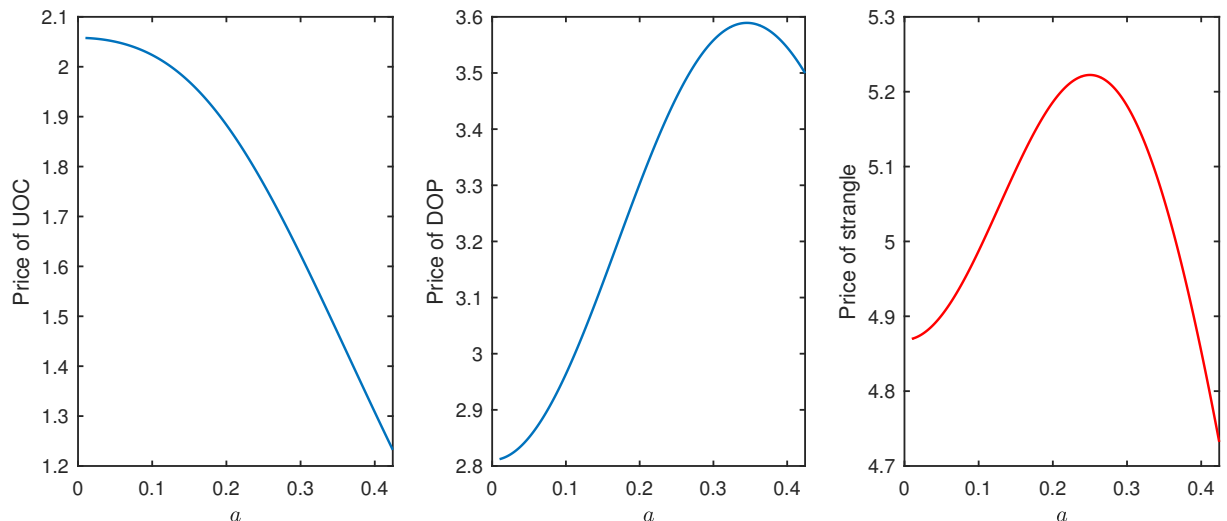
$$\beta = 1 - 2 \frac{\int_0^y rt \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau dt}{\int_0^y \left(\int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau \right)^2 dt}$$

ანალოგიურად გამოითვლება DOP ოფციონის ფასი.

შევისწავლოთ სხვადასხვა ბარიერული ოფციონების ფასების მოდელის რისკი თუ ოფციონის ვადა ნაკლებია ლიკვიდური ევროპული ქოლ ოფციონის ვადაზე. კერძოდ, განვიხილოთ ევროპული ტიპის ბარიერული ასვლის და გამოსვლის ქოლ ოფციონი (UOC) დაფარვის ვადით 0, 7, შეთანხმების ფასით 110 და ბარიერით 140 და ევროპული ტიპის ბარიერული ჩამოსვლის და გამოსვლის ფუთ ოფციონი (DOP) დაფარვის ვადით 0.7, შეთანხმების ფასით 90 და ბარიერით 60. რადგან ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრე აკვირდება საბაზრო ბლეკ-შოულსის ვარიაციას $\Sigma = 0.3$, დაასკვნის, რომ UOC ფასი არის 1.6235, ხოლო DOP ფასი არის 3.5619.

მარცხენა და შუა გრაფიკები სურათ 4.12 აჩვენებს ბარიერული ოფციონის ფასის დამოკიდებულებას a მოდელის პარამეტრის მიმართ. მარჯვენა გრაფიკი აჩვენებს ე.წ.

strangle პოზიციას UOC + DOP.



სურ. 4.12: ევროპული ტიპის ბარიერული ოფციონების ფასების დამოკიდებულება მოდელის პარამეტრზე. მარცხნივ: UOC ოფციონის ფასი, შუაში: DOP ოფციონის ფასი, მარჯვნივ: strangle პოზიცია UOC + DOP.

ცხრილი 4.8 აღწერს ფასების დიაპაზონს და რისკის პარამეტრებს მოდელის სიმრავლესთვის. შედეგები აჩვენებს, რომ ოფციონების ფასები ძალიან მგრძნობიარეა არჩეული მოდელის მიმართ. ჰეჯირების პარამეტრების ვარიაცია შეუძლებელს ხდის რაიმე დინამიური ჰეჯირების სტრატეგიის შემუშავებას. მაგალითად, დელტა UOC ოფციონისთვის მერყეობს [1%, 11%] ინტერვალში, ხოლო DOP ოფციონისთვის [−20%, −8%] ინტერვალში, რაც წარმოადგენს პრაქტიკული თვალსაზრისით უზარმაზარ დიაპაზონს. ხოლო, გამა და ვეგა პარამეტრებით ჰეჯირებისას DOP შემთხვევაში გაურკვეველია ლიკვიდური ქოლ ოფციონი უნდა ვიყიდოთ თუ გავყიდოთ!

	UOC	DOP
ფასი	[1.2324, 2.0577]	[2.8122, 3.5893]
დელტა	[0.0119, 0.1106]	[−0.2078, −0.0843]
გამა ⁷	[−0.0043, −0.0011]	[−0.0950, 0.1128]
ვეგა ⁸	[0.0592, 3.1901]	[−0.0357, 0.0219]
თეტა	[−0.0228, 2.3756]	[−0.3191, 9.6019]
რო	[1.5951, 7.6760]	[−16.7259, −9.8545]

ცხრ. 4.8: ფასების დიაპაზონი და რისკის პარამეტრები ევროპული ბარიერული ოფციონებისთვის.

განვიხილოთ დისკრეტული დროის დელტა- და დელტა-გამა ჰეჯირების სტრატეგიები. დელტა სტრატეგიის მიზანია რისკიანი აქტივით და ურისკო ლიკვიდური აქტივით

⁷ევროპული სტანდარტული ოფციონებისგან განსხვავებით ბარიერული ოფციონების გამა შეიძლება უარყოფითი იყოს.

⁸ვეგა აღნიშნულ ქეისზე წარმოადგენს ოფციონის ფასის სენსიტიურობას a -პარამეტრის მიმართ, $\frac{\partial \text{Price}}{\partial a}$.

შექმნას პორტფელი, რომელიც იმეორებს ოფციონის შემოსავლიანობას. შესაბამისად, რისკიანი აქტივის ცვალებადობით გამოწვეული მოგება ან ზარალი სრულად იქნება კომპენსირებული ოფციონის ფასის ცვლილებით⁹. მათემატიკურად დელტა სტრატეგია ითვალისწინებს ოფციონის პირველი რიგის წარმოებულს ფასის მიმართ (იხ. მაგ, Branger et al., 2012)

$$U = \omega_S \cdot S + \omega_M \cdot M, \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \omega_S \cdot \frac{\partial S}{\partial S} + \omega_M \cdot \frac{\partial M}{\partial S} = \omega_S, \quad (4.46)$$

სადაც, $\Delta_U = \frac{\partial U}{\partial S}$ წარმოადგენს ოფციონის დელტას, M აღნიშნავს ურისკო ლიკვიდურ აქტივს, ხოლო ω_S ასახავს ჰეჯირებისთვის საჭირო აქტივების რაოდენობას, ხოლო ω_M არის ურისკო ლიკვიდურ აქტივში ინვესტიციის მოცულობა¹⁰. დელტა-გამა სტრატეგია ითვალისწინებს ოფციონის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებს ფასის მიმართ. აღნიშნული სტრატეგიისთვის საჭიროა ლიკვიდური ე.წ. ბენჩმარკ ოფციონის არსებობა. როგორც წესი, დელტა-გამა სტრატეგია იძლევა უკეთეს ჰეჯირების შესაძლებლობას¹¹, თუმცა მისი იმპლემენტაცია უფრო რთულია და მისი დინამიური გამოყენება მოითხოვს მნიშვნელოვან ტრანზაქციის საკომისიოს. სტრატეგია განისაზღვრება შემდეგი სისტემის ამოხსნით იხ. მაგ, Branger et al., 2012

$$U = \omega_S \cdot S + \omega_M \cdot M + \omega_c \cdot C, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \omega_S \cdot \frac{\partial S}{\partial S} + \omega_M \cdot \frac{\partial M}{\partial S} + \omega_c \cdot \frac{\partial C}{\partial S} = \omega_S + \omega_c \cdot \Delta_C, \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \omega_S \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial S^2} + \omega_M \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial S^2} + \omega_c \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \omega_c \cdot \Gamma_C, \quad (4.49)$$

სადაც, C წარმოადგენს ბენჩმარკ ოფციონს, ხოლო Δ_C და Γ_C აღნიშნული ოფციონის დელტა და გამა პარამეტრებს აღნიშნავენ.

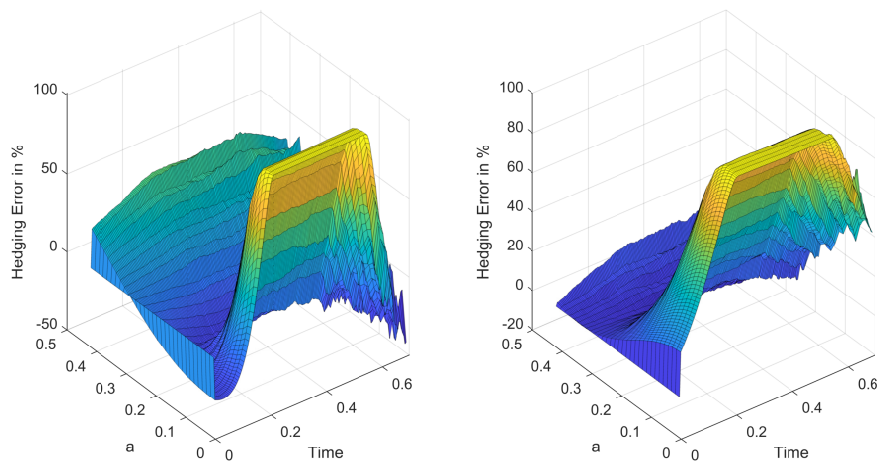
დისკრეტული დროის სტატიკური დელტა- და დელტა-გამა ჰეჯირების სტრატე-

⁹დელტა სტრატეგია ეფექტურია აქტივის ფასის მცირე მერყეობისას, როდესაც ფასი მოკლე პერიოდში ნახტომისებურად იცვლება დელტა ჰეჯირება ნაკლებადეფექტურია

¹⁰რადგან ურისკო აქტივის ფასი არ არის დამოკიდებული აქციის ცვალებადობაზე $\frac{\partial M}{\partial S} = 0$

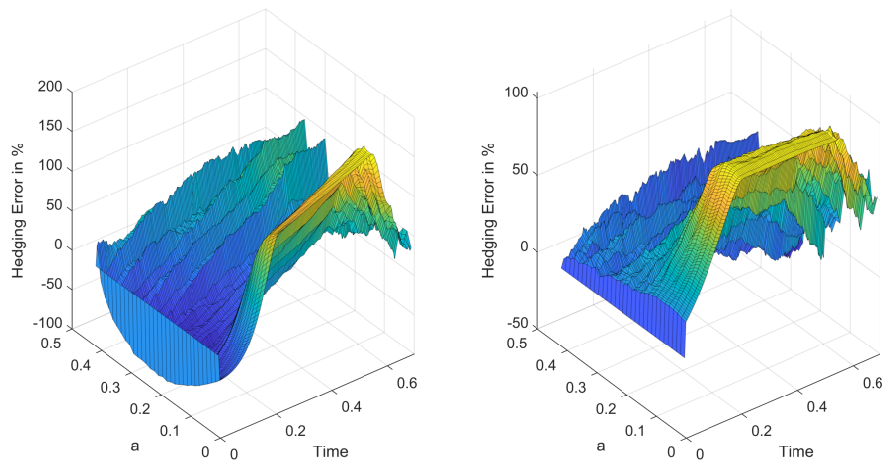
¹¹დელტა-გამა ჰეჯირება ითვალისწინებს ოფციონის ფასის ფუნქციის ამოხსნელობას. მაშასადამე დელტა სტრატეგიისგან განსხვავებით დელტა-გამა უზრუნველყოფს ეფექტურ ჰეჯირებას ფასის შედარებით დიდი ცვლილების დროსაც.

გით გამოვიანგარიშეთ დღიური მოგება-ზარალი სხვადასხვა a მოდელის პარამეტრის მნიშვნელობებისთვის¹². სურათი 4.13 ასახავს დელტა სტრატეგიის საშუალო მოგებასა და ზარალს პროცენტულად ოფციონის ფასთან მიმართებაში. ორივე ტიპის ოფციონისთვის ჰეჯირება არაეფექტურია. ჰეჯირების შეცდომა განსაკუთრებით იზრდება როდესაც a და Σ მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისგან. ასევე ჰეჯირების შეცდომა არის როგორც დადებითი ასევე უარყოფითი, შესაბამისად, როგორც მოკლე, ასევე გრძელი პოზიციები შეიცავენ მნიშვნელოვან მოდელის რისკს. მოგება-ზარალი უფრო დიდია დელტა-გამა სტრატეგიის შედეგად 4.14. აღნიშნული ამტკიცებს, რომ მიუხედავად თეორიული უპირატესობისა, მოდელის რისკის შემთხვევაში რთული ჰეჯირების სტრატეგიები უფრო მოწყვლადია.



სურ. 4.13: ევროპული ტიპის ბარიერული ოფციონების დელტა ჰეჯირება. მარცხნივ: UOC ოფციონი, მარჯვნივ: DOP ოფციონი.

¹²სტატისტიკური სტრატეგია გულისხმობს, რომ ჰეჯირება განხორციელდა ერთჯერადად და არ ხდება ჰეჯირების დღიური შეცვლა. აღნიშნული მეთოდი პრაქტიკაში დამკვიდრებულია, რადგან ჰეჯირების ხშირი ცვლილება დაკავშირებულია მნიშვნელოვან ტრანზაქციის დანახარჯთან და როგორც წესი არ არის ეფექტური.



სურ. 4.14: ევროპული ტიპის ბარიერული ოფციონების დელტა-გამა ჰეჯირება. მარცხნივ: UOC ოფციონი, მარჯვნივ: DOP ოფციონი.

მტკიცდება, რომ თუ არსებობს ლიკვიდური ევროპული ქოლ და ფუთ ოფციონები, რომელთა აღსრულების ვადაც ემთხვევა ბარიერული ოფციონის აღსრულების ვადას, მაშინ ბარიერული ოფციონები შეიძლება ეფექტურად იყოს ჰეჯირებული მოდელის გარეშე, სტატიკური ჰეჯირების სტრატეგიით (იხ. მაგ. Carr et al., 1998). ზემოთგანხილულ მაგალითში, არსებობს ქოლ ოფციონი, რომლის აღსრულების ვადაც არის ერთი წელი, და ცნობილია ბლეკ-შოულსის ვარიაცია Σ . აქედან გამომდინარე, არ არსებობს მოდელის რისკი ბარიერული ოფციონებისთვის, რომელთა აღსრულების ვადა არის ერთი წელიწადი. სწორედ ამიტომ, მოდელის რისკის საილუსტრაციოდ ჩვენ ავირჩიეთ აღსრულების ვადა 0.7 წელი.

გამოვიანგარიშეთ ფასის სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომის რამდენიმე წარმომადგენელი, რომლებიც მოცემულია 2.3.9 განსაზღვრებით. ცხადია, საჭიროა ალბათური განაწილების ფუნქცია მოდელის $(M, \mathcal{M})$ სივრცეზე. სიმარტივისთვის, დავუშვათ, რომ ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრეს არ გააჩნია დამატებითი ინფორმაცია მოდელის კალიბრაციისთვის და ყველა მოდელს აქვს ტოლი ალბათობა. ასეთ შემთხვევაში μ შეესაბამება თანაბარ განაწილებას $(0, \sqrt{\frac{T}{T_1}}\Sigma)$ ინტერვალზე. ცხადია, თუ დავუშვებთ, რომ ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრე აკვირდება ლიკვიდური ქოლ ოფციონის ფასის ევოლუციას გარკვეული დროის ინტერვალის განმავლობაში, მაშინ, μ -ს შეფასება შესაძლებელი იქნება არსებული დროითი მწკრივის გამოყენებით.

ასევე დავუშვათ, რომ ფასის ბენჩმარკული მოდელი ρ^0 არის მოდელით შეწონილი ფასი. ცხრილი 4.9 აჯამებს შედეგებს ჩვენი მაგალითისთვის. როგორც მოსალოდნელი იყო, მაქსიმალური მოდელის რისკის საზომი გადაჭარბებულად აფასებს მოდელის

რისკს. გარდა ამისა, strangle პოზიციის შედეგები აჩვენებს ფასების მოდელის რისკის სუბადიციურობის თვისებას თვისებას, იხილეთ განმარტება 2.3.6.

	UOC	DOP	Strangle
$P_{\rho, WC}^{price}$	0.8252	0.7771	0.4902
$EMR_{\rho, \rho^0, \mu}^{price}$	0.2249	0.2527	0.1173
$MVaR_{0.95, \rho, \rho^0, \mu}^{price}$	0.4754	0.4545	0.2161
$MES_{0.95, \rho, \rho^0, \mu}^{price}$	0.5206	0.4675	0.2883

ცხრ. 4.9: ფასის სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები ევროპული ტიპის ბარიერული ოფციონებისთვის

4.3.3 არითმეტიკული აზიური ოფციონების ფასის მოდელის რისკი

აზიური ოფციონი არის ეგზოტიკური დერივატივი, რომლის ანაზღაურება დამოკიდებულია ძირითადი აქტივის საშუალო ფასზე წინასწარ განსაზღვრულ პერიოდში და არა მის ფასზე დროის ერთ მომენტში. ეს ოფციონები განსაკუთრებით მიმზიდველია ჰეჯფონდების მენეჯერებისთვის, რომლებიც ცდილობენ შეამცირონ ფასების მოკლევადიანი რყევების გავლენა და ყურადღება გაამახვილონ პორტფელის საერთო ტენდენციაზე. აზიური ოფციონები უზრუნველყოფენ უფრო გლუვ და სტაბილურ ანაზღაურებას და ამცირებენ ბაზრის უეცარი მოძრაობების გავლენას.

დავუშვათ ფინანსური აქტივის ფასი აღწერილია (4.35) მოდელით. განვიხილოთ არითმეტიკული აზიური ქოლ და ფუთ ოფციონის ფასები, რომელთა აღსრულების ვადა არის 0.7 წელი. ქოლ ოფციონის შეთანხმების ფასი არის $K = 95$, ხოლო ფუთ ოფციონის შეთანხმების ფასია $K = 110$. დავუშვათ, $A(0, T)$ არის აქტივის არითმეტიკული საშუალო ფასი დროის $[0, T]$ ინტერვალზე. მაშინ არითმეტიკული აზიური ქოლ ოფციონის შემოსავლის სიზოზის ფუნქცია მოცემულია

$$\max(A(0, T) - K, 0).$$

ხოლო, არითმეტიკული აზიური ფუთ ოფციონის შემოსავლიანობის ფუნქცია არის

$$\max(K - A(0, T), 0).$$

რადგან ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრეს გააჩნია ინფორმაცია არსებული ევროპული ქოლ ოფციონის ბლეკ-შოულსის ვარიაციის $\Sigma = 0.3$, ის დაასკვნის რომ აზიური ქოლ

- და ფუტ ოფციონების ფასები არის 8.7421 და 12.0879 შესაბამისად¹³. (4.39) მოდელის მიხედვით აზიური ქოლ და ფუტ ოფციონის ფასები მერყეობს [8.8947, 13.0405] და [9.9181, 12.8994] ინტერვალში.

გამოვიანგარიშეთ ფასის სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები. კვლავ, დავუშვათ, რომ μ შეესაბამება თანაბარ განაწილებას $(0, \sqrt{\frac{T}{T_1}}\Sigma)$ ინტერვალზე. ამასთან, დავუშვათ, რომ ფასის ბენჩმარკული მოდელი ρ^0 არის ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრის მიერ შეფასებული ღირებულება, მოდელით შეწონილი ფასი. ცხრილი 4.10 ასახავს აზიური ოფციონების ფასის სუპერპოზიციურ მოდელის რისკებს. ცხადია, რომ თუნდაც ასეთ გამარტივებულ ექსპერიმენტში ოფციონების ფასები აჩვენებენ მნიშვნელოვან დამოკიდებულებას მოდელის რისკზე.

	აზიური ქოლ ოფციონი	აზიური ფუტ ოფციონი
$P_{\rho,WC}^{price}$	4.1457	2.9813
$EMR_{\rho,\rho^0,\mu}^{price}$	1.8197	1.5302
$MVaR_{0.95,\rho,\rho^0,\mu}^{price}$	3.9650	1.6195
$MES_{0.95,\rho,\rho^0,\mu}^{price}$	4.1332	2.4611

ცხრ. 4.10: ფასის სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები არითმეტიკული აზიური ოფციონებისთვის

¹³არითმეტიკული აზიური ოფციონის ანალიტიკური გამოსათვლელი ფორმულა არ არსებობს. ამ მაგალითში განხილული ყველა ფასი გამოანგარიშებულია მონტე კარლოს სიმულაციით 1,000,000 იტერაციით.

4.4 სიმულაცია: ლიკვიდური ევროპული ოფციონებით მოდელის განაწილების შეფასება

განვიხილოთ რისკიანი აქცია S , რომელიც არ იხდის დივიდენდებს. აქციის ფასი აკმაყოფილებს ჰესტონის პროცესს (Heston, 1993)

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= rdt + \sqrt{V}dW_S, \\ dV &= \kappa(\theta - V)dt + \sigma\sqrt{V}dW_V,\end{aligned}\tag{4.50}$$

სადაც, r არის ურისკო საპროცენტო განაკვეთი, V არის აქტივის ფასის პროცესის მყისიერი ვარიაცია. κ პარამეტრი განსაზღვრავს ვარიაციის საშუალო-შებრუნებულ სისწრაფეს. θ არის გრძელვადიანი საშუალო ვარიაცია, ხოლო σ განსაზღვრავს ვარიაციის პროცესის დისპერსიას. dW_S და dW_V წარმოადგენენ დამოკიდებელ ვინერის პროცესებს, $\text{cor}(dW_S, dW_V) = \rho$. როდესაც $\rho < 0$ ($\rho > 0$), აქციის ლოგარითმული შემოსავლიანობის განაწილება ხასიათდება უარყოფითი (დადებითი) ასიმეტრიით, ხოლო თუ $\rho = 0$ განაწილება სიმეტრიულია.

დავუშვათ, რომ S აქციისთვის არსებობს მაღალლიკვიდური ოფციონების ბაზარი, სადაც ივაჭრება ევროპული ქოლ ოფციონები სხვადასხვა შეთანხმების ფასებით და აღსრულების ვადებით. დავუშვათ ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრე აკვირდება 3 კალენდარული თვის მანძილზე აღნიშნული ოფციონების ფასებს და სურს შეაფასოს საბაზრო მოდელი. ცხადია ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრემ არ იცის, რომ ჭეშმარიტი მოდელი, ამიტომ ის განიხილავს მოდელების სიმრავლეს, რომელიც მოიცავს რამდენიმე პოპულარული მოდელის კლასს.

- M1: ბლეკ-შოულსის მოდელები უცნობი პარამეტრით σ იხ. Black and Scholes, 1973,
- M2: ჰესტონის მოდელები, უცნობი პარამეტრებით $V_0, \kappa, \theta, \sigma, \rho$ იხ. Heston, 1993
- M3: NIG მოდელები უცნობი პარამეტრებით α, β, δ იხ. O. E. Barndorff-Nielsen, 1997; Tankov, 2003
- M4: VG მოდელები უცნობი პარამეტრებით σ, ν, θ იხ. Madan et al., 1998; Tankov, 2003
- M5: NIG-OU მოდელები უცნობი პარამეტრებით $\alpha, \beta, \delta, \lambda, a, b$ იხ. Carr et al., 2003
- M6: NIG-CIR მოდელები უცნობი პარამეტრებით $\alpha, \beta, \delta, \lambda, \kappa, \eta$ იხ. Carr et al., 2003
- M7: VG-OU მოდელები უცნობი პარამეტრებით $\sigma, \nu, \theta, \lambda, a, b$ იხ. Carr et al., 2003

M8: VG-CIR მოდელები უცნობი პარამეტრებით $\sigma, \nu, \theta, \lambda, \kappa, \eta$ იხ. Carr et al., 2003

ფასიანი ქაღალდებით მოვაჭრის მოდელის სიმრავლე შეიცავს 8 განსხვავებულ სტოქასტური პროცესის კლასს.

$$M = \{M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7 \cup M_8\}. \quad (4.51)$$

4.4.1 ოფციონების ფასდადება

თავდაპირველად მოკლედ მიმოვიხილოთ ქოლ ოფციონის ფასდადება თითოეული მოდელის მიხედვით. ბლეკ-შოულსის მოდელისთვის (M1) არსებობს ე.წ. ჩაკეტილი ფორმის შედეგი. ქოლ ოფციონის ფასი გამოიანგარიშება, როგორც Black and Scholes, 1973,

$$\begin{aligned} C &= S_0 \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2), \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}, \end{aligned}$$

დანარჩენი მოდელებისთვის საჭიროა გამოყენებული იქნას სხვადასხვა სიმულაციის ტექნიკა. როგორც წესი, ფართოდ გავრცელებულია მონტე კარლოს სიმულაცია და ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა FFT (Fast Fourier Transform) მოდელები. რადგან მონტე კარლოს სიმულაცია მოითხოვს ინტენსიურ კომპიუტერულ გამოანგარიშებას, ფასდადებისთვის გამოყენებულია FFT.

Carr and Madan, 1999 ნაშრომში შესწავლილია ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა ოფციონების ფასდადებისთვის. განვიხილოთ სტანდარტული ევროპული ქოლ ოფციონი C , რომლის სტრაიკიც K ნაკლებია აქტივის ფასზე (in-the-money option, ITM)¹⁴. ოფციონის ფასი განისაზღვრება, როგორც¹⁵

$$C_T(k) = \exp(-rT) \int_k^{+\infty} [\exp(x) - \exp(k)] p(x) dx, \quad (4.52)$$

¹⁴როდესაც ოფციონის სტრაიკი აღემატება აქტივის მიმდინარე ფასს (out-of-the-money option, OTM) ოფციონის შინაგანი ღირებულება ნულის ტოლია და მისი ფასი უდრის დროით ღირებულებას. ასეთი შემთხვევისთვის, Carr and Madan, 1999 განიხილავს ფუთ ოფციონს და ქოლ-ფუთ პარიტეტით გამოიანგარიშებს ოფციონის ფასს. რადგან ფასდადების მეთოდები მსგავსია ამ პარაგრაფში განვიხილავთ მხოლოდ ITM ოფციონს.

¹⁵დაშვებულია მუდმივი ურისკო საპროცენტო განაკვეთი და აქცია დივიდენდის გარეშე, აღნიშნული დაშვებები შესაძლებელია განზოგადდეს. რადგან ქეისში განხილულია მუდმივი r და 0 დივიდენდი, მოყვანილია შესაბამისი FFT-ის გამარტივებული ფორმულირება.

სადაც, $x = \ln(S_T)$, $k = \ln(K)$ და $p(x)$ აღნიშნავს რისკის ნეიტრალურ ალბათურ სიმკვრივეს. C_T ფუნქცია არ არის კვადრატულად ინტეგრირებადი ფუნქცია და შესაბამისად მისთვის ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა არ განისაზღვრება. განვიხილოთ მოდიფიცირებული ფუნქცია $C'_T(k) = \exp(\alpha k)C_T(k)$, სადაც $\alpha > 0$. C'_T ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა განისაზღვრება,

$$\psi_{C'_T}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iuk) C'_T(k) dk. \quad (4.53)$$

შესაბამისად, ევროპული ქოლ ოფციონის ფასი განისაზღვრება შებრუნებული ფურიეს გარდაქმნით,

$$\begin{aligned} C_T(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iuk) \psi_{C'_T}(u) du \\ &= \frac{1}{\pi \exp(\alpha k)} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(\exp(-iuk) \psi_{C'_T}(u)) du. \end{aligned} \quad (4.54)$$

შევნიშნოთ, რომ $\operatorname{Re}(\exp(-iuk) \psi_{C'_T})$ არის ლუწი ფუნქცია. Carr and Madan, 1999 ნაჩვენებია, რომ

$$\begin{aligned} \psi_{C'_T}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iuk) \int_k^{+\infty} \exp(\alpha k - rT) (\exp(x) - \exp(k)) dx dk \\ &= \frac{\exp(-rT) \phi_T(u - (1 + \alpha)i)}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + i(2\alpha + 1)u}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

სადაც, $\phi_T(u)$ არის $p(x)$ სიმკვრივის მახასიათებელი ფუნქცია. (4.55) ფორმულა ამტკიცებს, რომ ევროპული ოფციონის ფასი გამოითვლება თუ მახასიათებელი ფუნქცია ცნობილია. (4.55) ფორმულის (4.54) ფორმულაში ჩასმით მიიღება,

$$C_T(k) = \frac{1}{\pi \exp(\alpha k)} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\exp(-iuk) \frac{\exp(-rT) \phi_T(u - (1 + \alpha)i)}{\alpha^2 + \alpha - u^2 + i(2\alpha + 1)u} \right) du. \quad (4.56)$$

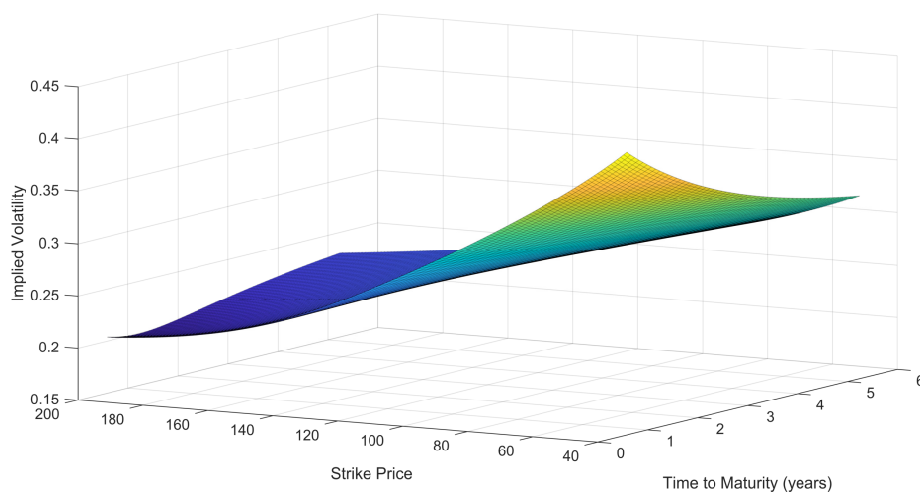
(4.56) ინტეგრალს არ გააჩნია ანალიზური ამონახსნი, ამიტომ პრაქტიკაში განიხილავენ რაიმე დიდ ზედა ზღვარს და რიცხვითი მეთოდებით ხდება ინტეგრალის მნიშვნელობის გამოთვლა. იმისათვის, რომ აღნიშნული ინტეგრალის შეფასება მოხდეს ეფექტურად Carr and Madan, 1999 შემოგვთავაზა ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა, რომელიც მონტე კარლო სიმულაციაზე მნიშვნელოვნად სწრაფ შედეგს იძლევა.

რიცხვითი სტაბილურობისა და სწრაფი გამოთვლების წყალობით FFT მეთოდი ევროპული ტიპის ოფციონების ფასდადების ყველაზე გავრცელებულ მეთოდს წარმოადგენს. მისი გამოყენებისთვის საკმარისია მხოლოდ მოდელის მახასიათებელი ფუნქციის არსებობა. ჩვენ მიერ შესწავლილ ქეისში წარმოდგენილი ყველა მოდელის კლასისთვის

ცნობილია მახასიათებელი ფუნქციები.

4.4.2 სიმულაციური მონაცემები

დავუშვათ, აქტივის საწყისი ფასია $S_0 = 100$, ხოლო ურისკო საპროცენტო განაკვეთია $r = 0.01$. დავუშვათ არსებობს ქოლ ოფციონები შემდეგი 161 განსხვავებული შეთანხმების ფასით 40-200, ერთი ერთეულის ბიჯით, და თითოეული შეთანხმების ფასისთვის არის შემდეგი 57 დაფარვის ვადები $t = 0$ დროს 4 თვიდან 60 თვის ჩათვლით ერთი თვის ბიჯით. განვიხილოთ ჰესტონის მოდელი პარამეტრებით: $V_0 = 0.1, \theta = 0.08, \kappa = 1.0, \sigma = 0.03, \rho = -0.8$. აღნიშნული პარამეტრების მიხედვით შეფასებული ზედაპირის ვოლატილობა ნაჩვენებია 4.15 სურათზე. ნათლად ჩანს Volatility ასიმეტრიულობა, მოკლევადიანი ოფციონებისთვის ბლეკის ვოლატილობა განსაკუთრებით დიდია. ასევე ITM ოფციონებს უფრო დიდი ვოლატილობა ახასიათებს, ვიდრე OTM ოფციონებს.



სურ. 4.15: Implied Volatility Surface ჰესტონის მოდელის მიხედვით.

სიმულაციით გენერირებულია 3 თვის მანძილზე (65 სავაჭრო დღე) საათობრივი აქტივისა და ოფციონების ფასები. აღნიშნული სიმულაციით ვიღებთ 4,772,040 მონაცემს¹⁶.

¹⁶ ოფციონებით ვაჭრობის პრაქტიკაში ხშირად არ არის შესაძლებელი ყველა სტრატეგიისთვის ლიკვიდური ოფციონის ფასის დაკვირვება. მეორეს მხრივ მოდელის განაწილების შესაფასებლად საჭიროა შედარებით დიდი მოცულობის დაკვირვებები. პრაქტიკაში გამოიყენება ე.წ. მაღალი სიხშირის მონაცემები (high frequency) HF და ულტრა მაღალი სიხშირის მონაცემები (ultra high frequency) UHF, რომლებიც აკვირდებიან ფასების ცვლილებას წუთობრივად ან წამობრივად (იხ. მაგ. Andersen, 2000; O. E. Barndorff-Nielsen and Shephard, 2005). აღნიშნული მიდგომა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ჰეჯფონდებისთვის. ხშირად დაკვირვებების რაოდენობა აღწევს ათეულობით მილიონს.

4.4.3 DREAM RJ MCMC პარამეტრიზაცია

მოდელის სიმრავლეზე აპოსტერიორული განაწილების საპოვნელად განვიხილოთ მოდელისა და სიმულაციური ოფციონების ფასების შეცდომის ფუნქცია¹⁷.

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_{m,i} - C_{sim,i})^2} \sim N(0, \sigma), \quad (4.57)$$

სადაც C_m აღნიშნავს მოდელით შეფასებულ ქოლ ოფციონის ფასს, ხოლო C_{sim} სიმულირებული ფასია. დავუშვათ, აღნიშნული შეცდომა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 0 და უცნობი პარამეტრით σ .

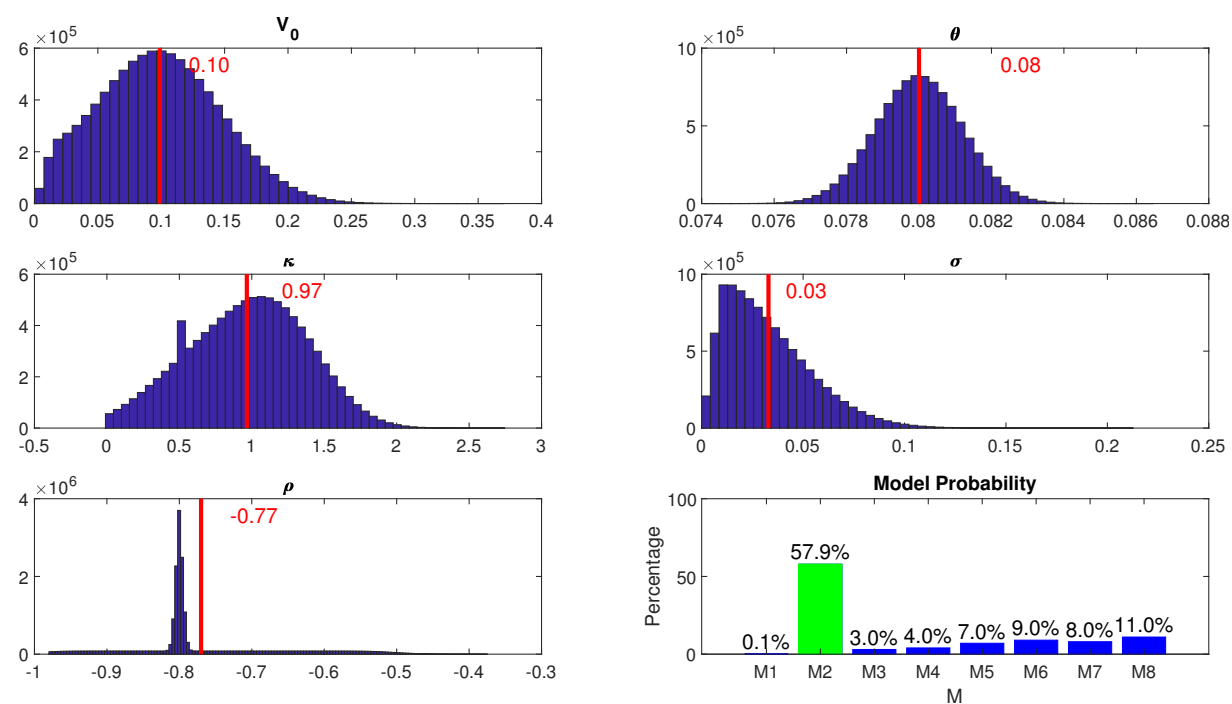
თითოეული მოდელის კლასის აპრიორული ალბათობა არის $1/8$. ყოველი მოდელის პარამეტრისთვის, რომელიც შეიძლება იყოს როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი, დაშვებულია თანაბარი აპრიორული განაწილება $U(-10, 10)$. თუ მოდელის პარამეტრი აუცილებლად დადებითი უნდა იყოს, მაშინ გამოყენებულია $U(0, 10)$ აპრიორული განაწილება. მოდელის შესაფასებლად გამოყენებულია DREAM RJ MCMC 100 პარალელური მარკოვის ჯაჭვით და თითოეული ჯაჭვისთვის 10,000,000 სიმულაციით¹⁸. ანალიზისთვის გამოყენებულია სიმულაციის მხოლოდ ბოლო 1%.

4.4.4 სიმულაციის შედეგები

სურათი 4.16 ასახავს შედეგებს. ჰესტონის მოდელი ყველაზე დიდი აპოსტერიორული ალბათობით გამოირჩევა. აღსანიშნავია რომ ლევის პროცესები სტოქასტური საათით $M5 - M8$ გაცილებით უკეთეს შედეგს აჩვენებენ, ვიდრე იგივე მოდელები სტოქასტური საათის გარეშე. ამასთან, ჰესტონის მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილების საშუალო მნიშვნელობები ძალიან ახლოს არიან ჭეშმარიტ მნიშვნელობებთან. იმავედროულად ყველა პარამეტრის აპოსტერიორული ვარიაცია საკმაოდ მცირეა. შედეგები ნათლად ადასტურებენ, რომ რეალობასთან მიახლოებულ კომპლექსური მოდელის სიმრავლის შემთხვევაშიც კი, DREAM RJ MCMC ეფექტურად ახდენს ჭეშმარიტი მოდელის იდენტიფიკაციას და პარამეტრების შეფასებას.

¹⁷ ოფციონების ფასდადების მოდელის კალიბრაციისას აღნიშნული შეცდომის ფუნქციის გამოყენება წარმოადგენს პრაქტიკაში დამკვიდრებულ მიდგომას (იხ. მაგ. Tankov, 2003 თავი 13)

¹⁸ რადგან, ჩვენი მაგალითისთვის ლოგარითმული დასაჯერობის ფუნქციის მნიშვნელობის სათვალელად საჭიროა მარკოვის ჯაჭვის თითოეული იტერაციისთვის $n = 4,772,040$ ოფციონის ფასის გამონაგარიშება. აღნიშნული მოცულობის გამონაგარიშება შესაძლებელია მხოლოდ FFT მეთოდით.



სურ. 4.16: ჰესტონის მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილება და მოდელის აპოსტერიორული ალბათობები.

4.5 პორტფელის ოპტიმიზაცია მოდელის რისკის გათვალისწინებით

XX საუკუნეში ფინანსური ბაზრების სწრაფმა განვითარებამ და კაპიტალის თავისუფალმა მოძრაობამ საჭირო გახადა პორტფელის შერჩევის მათემატიკური მიდგომის განვითარება. ჰარი მარკოვიტცის ინოვაციური ნაშრომების შემდეგ, პორტფელის ოპტიმიზაციის სისტემურ მიდგომას ჩაეყარა საფუძველი (Markowitz, 1959; Markowitz, 1952). ავტორმა მოახდინა რეკლუცია ინვესტიციისა და რისკების თეორიაში საშუალო-ვარიაციის თეორიის (Mean-Variance theory) შემუშავებით, რომელიც მიზნად ისახავდა ინვესტორის სასურველ ანაზღაურებასა და რისკის მადას შორის კავშირის დაფიქსირებას. პორტფელის შერჩევის თანამედროვე ლანდშაფტი ბევრად სცილდება ამ ტრადიციულ მიდგომას.

ფართომასშტაბიანმა ემპირიულმა კვლევებმა აჩვენა, რომ აქტივების ანაზღაურება არ აკმაყოფილებს ნორმალურ განაწილებას, რაც აქცევს ვარიაციას რისკის არაადეკვატურ ზომად (Cont, 2001; Sewell, 2011). ამ კვლევებმა ნათელი მოჰფინა საშუალო ვარიაციის თეორიის შეზღუდვებს და გზა გაუხსნა პორტფელის ოპტიმიზაციის ალტერნატიულ მიდგომებს. თანამედროვე პორტფელის შერჩევა მოიცავს არაგაუსური განაწილების დაშვებების ჩართვას, როგორებიცაა მძიმე კუდები ან ასიმეტრია. მკვლევრებმა შეიმუშავეს ინოვაციური ჩარჩოები, როგორებიცაა კოპულების გამოყენება, ფინანსური დროის სერიების მონაცემებში დაფიქსირებული დამოკიდებულების რთული სტრუქტურების მოდელირებისთვის (Boubaker and Sghaier, 2013; Kakouris and Rustem, 2014). ეს მეთოდები მიზნად ისახავს კუდის რისკისა და ექსტრემალური მოვლენების დაფიქსირებას, რომლებიც ხშირად შეუმჩნეველია ტრადიციული საშუალო-ვარიაციის ფარგლებში.

მოდელების გართულება გამოწვეულია არა მხოლოდ სტატისტიკური დაშვებებით არამედ ტრანზაქციის დანახარჯების, ლიკვიდობის შეზღუდვებისა და მარეგულირებელი მოთხოვნების გათვალისწინების გამოც. აღნიშნული ფაქტორები უგულებელყოფილი იყო კლასიკური ოპტიმიზაციის ამოცანებში. იმის გაცნობიერებით, რომ რეალურ სამყაროში საინვესტიციო გადაწყვეტილებები მოიცავს პრაქტიკულ შეზღუდვებს, მკვლევრებმა შეიმუშავეს დახვეწილი მოდელები, რომლებიც აერთიანებს ამ ფაქტორებს ოპტიმიზაციის პროცესში. ტრანზაქციის ხარჯებისა და აქტივების ლიკვიდურობის შეფასების გარეშე შეუძლებელია მაღალი სიხშირის ვაჭრობა (high frequency trading), რაც ბოლო ათწლეულში ჰეჯფონდების ყველაზე პოპულარულ სავაჭრო სტრატეგიას წარმოადგენს (Brogaard et al., 2014; Menkveld, 2013).

უფრო მეტიც, მანქანური სწავლისა და ხელოვნური ინტელექტის (AI) ბოლოდრო-

ინდელმა მიღწევებმა უფრო გაართულა პორტფელის ოპტიმიზაციაში გამოყენებული მოდელები. არაწრფივი ურთიერთობების შესწავლა შაბლონების იდენტიფიცირების (pattern recognition) მეთოდით და ღრმა სწავლა (deep learning), იძლევა შესაძლებლობას შემუშავდეს მრავალგანზომილებიანი სტრატეგია ინდივიდუალური რისკის მადის გათვალისწინებით (Gunjan and Bhattacharyya, 2023; Lima et al., 2020).

რადგან ფინანსური დროითი მწკრივების ჭეშმარიტი მოდელები წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეს, და თანამედროვე პორტფელის ოპტიმიზაციის ალგორითმები უფრო და უფრო მგრძნობიარეა პარამეტრების და მოდელის ტიპის შერჩევასთან იზრდება მოდელის რისკიც. ამ თავში შევისწავლეთ მოდელის რისკს საინვესტიციო გადაწყვეტილებების მიღების კუთხით. განვიხილავთ ქეისს მრავალგანზომილებიანი განზოგადებული ჰიპერბოლური განაწილებით (mGH) და ვაჩვენებთ პორტფელის ოპტიმიზაციის მოდელის რისკის ეფექტური მართვის მეთოდებს. mGH განაწილება შერჩეულია, რადგან ის აკმაყოფილებს პორტფელის შემოსავლის მრავალ ემპირიულ ფაქტს და მისი პოპულარობა განსაკუთრებით გაიზარდა XXI საუკუნეში (იხ. მაგ., Eberlein, 2001; Eberlein and Prause, 2002; Prause et al., 1999).

4.5.1 პორტფელის ოპტიმიზაციის მათემატიკური ფორმულირება

მათემატიკური მინიმიზაციის (ან მაქსიმიზაციის) ამოცანები მნიშვნელოვნად მარტივდება როდესაც ფუნქცია ამოზნექილია. ასეთ შემთხვევაში მტკიცდება, რომ ე.წ. ლოკალური ოპტიმუმი არის გლობალური ოპტიმუმი. შესაბამისად, პორტფელის ოპტიმიზაციის პრობლემისთვის ამოზნექილი რისკის ზომების გამოყენება კარგად არის ცნობილი ლიტერატურაში. იხილეთ მაგ.: Fischer, Roehrl, et al., 2005; Hellmich and Kassberger, 2011; Krokhmal et al., 2002. ჩვენ აქცენტს ვაკეთებთ პორტფელის ოპტიმიზაციის პრობლემებზე, რომლებიც შეიცავენ ამოზნექილ სუპერპოზიციურ რისკის ზომებს (იხ. თავი 2.2).

დავუშვათ, $\zeta \circ \rho$ არის სუპერპოზიციური რისკის საზომი და რისკის საზომი ζ და რისკის ოჯახი ρ არის ამოზნექილი. 2.2.2 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $\zeta \circ \rho$ ამოზნექილი რისკის ზომაა. აღვნიშნოთ $\mathcal{R} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ პორტფელის წრფივი შესწორებული შემოსავლიანობის ფუნქცია. როგორც წესი, $\mathcal{R}$ წარმოადგენს სხვაობას პორტფელის შემოსავლიანობასა და ურისკო აქტივის შემოსავლიანობას შორის. ინდივიდუალური საინვესტიციო მადის გათვალისწინებით შესაძლებელია ურისკო აქტივის მაგივრად გამოყენებული იყოს სხვა აქტივი, მაგალითად რომელიმე საფონდო ინდექსი.

არსებობს პორტფელის შერჩევის პრობლემების სხვადასხვა მათემატიკური ფორმუ-

ლირება, Fischer, Roehrl, et al., 2005; Krokhmal et al., 2002.

(P1)

$$\min_w \zeta \circ \rho(w) - \lambda \mathcal{R}(w), \text{ s.t. } \lambda \geq 0 \quad (4.58)$$

(P2)

$$\min_w \zeta \circ \rho(w), \text{ s.t. } \mathcal{R}(w) \geq c \quad (4.59)$$

(P3)

$$\max_w \mathcal{R}(w), \text{ s.t. } \zeta \circ \rho(w) \leq r. \quad (4.60)$$

(P4)

$$\max_w \frac{\mathcal{R}(w)}{\zeta \circ \rho(w)}, \text{ s.t. } \zeta \circ \rho(w) \leq r. \quad (4.61)$$

სადაც, $w \in \mathbb{R}^d$ არის პორტფელის ინსტრუმენტების წონების ვექტორი, და $\sum_{j=1}^d w_j = 1$ ¹⁹.

პორტფელის ოპტიმიზაციის პირველ პრობლემის (P1), მიზანია შეირჩეს პორტფელი, რომელიც აბალანსებს რისკსა და მოგებას. ინვესტორი მიზნად ისახავს მინიმუმამდე დაიყვანოს პორტფელის სუპერპოზიციური რისკისა და შეწონილი შემოსავლიანობის სხვაობა. λ პარამეტრის რეგულირებით, ინვესტორს შეუძლია გადაწყვიტოს, თუ რა წონა უნდა მიენიჭოს რისკის შემცირებას მოგების პოტენციალთან შედარებით. აღნიშნული მიდგომა მიზანშეწონილია ჰეჯფონდების მენეჯერებისთვის, რომელთაც გააჩნიათ შედარებით დიდი რისკის მადა.

პორტფელის ოპტიმიზაციის მეორე პრობლემაში (P2), ყურადღება გამახვილებულია რისკის მინიმიზაციაზე, მაგრამ უზრუნველყოფილია შემოსავლიანობის მინიმალური დონე. ინვესტორი ხასიათდება მაქსიმალური რისკ ავერსიანობით და ცდილობს შექმნას პორტფელი ყველაზე დაბალი შესაძლო რისკით. პორტფელის ოპტიმიზაციის აღნიშნული გაგება კლასიკური მაგალითია საპენსიო ფონდებისა და საშუალო ზომის ბანკებისთვის, რომლებიც ეძებენ მაქსიმალურად ურისკო პორტფელს.

მესამე პორტფელის ოპტიმიზაციის პრობლემა (P3) უპირატესობას ანიჭებს შემოსავლის მაქსიმიზაციას, თუმცა გათვალისწინებულია მაქსიმალური რისკი. ეს ფორ-

¹⁹მოკლე პოზიციები დაშვებულია, ე.ი. აქტივების წონები შეიძლება იყოს უარყოფითი. აღნიშნული დაშვება სამართლიანია დიდი საინვესტიციო ბანკებისთვის და ჰეჯფონდებისთვის.

მულირება საშუალებას აძლევს ინვესტორებს ფოკუსირება მოახდინონ პორტფელის დივერსიფიცირებაზე, რაც ითვალისწინებს მრავალი რისკიანი აქტივით მაღალი შემოსავლის მიღების პოტენციალის შექმნას. (P4) შინაარსობრივად არის (P3) პრობლემის მსგავსი. მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ ინვესტორი მიზნად ისახავს მაქსიმალურად გაზარდოს პორტფელის მოსალოდნელი უკუგების თანაფარდობა მის რისკთან. (P3) და (P4) ძირითადად გამოიყენება დიდი საინვესტიციო ბანკების მიერ.

აღსანიშნავია, რომ იდეალური ოპტიმიზაციის პირობებში ყველა ზემოთჩამოთვლილი პრობლემა გვაძლევს იდენტურ ეფექტურ საინვესტიციო საზღვარს (efficient frontier), სხვადასხვა λ, r, c პარამეტრების შერჩევით Hellmich and Kassberger, 2011. ამ თავში განხილულია P4 ტიპის პრობლემა.

4.5.2 მოდელის სიმრავლე

განვიხილოთ მრავალგანზომილებიანი განზოგადებული ჰიპერბოლური განაწილება, რომელიც პირველად აღწერილი იყო O. Barndorff-Nielsen, 1977 ნაშრომში.

მრავალგანზომილებიანი განზოგადებული ჰიპერბოლური განაწილება არის ძალიან მოქნილი განაწილება, რომელიც იძლევა მრავალი სტილიზებული სტატისტიკური ფაქტის მოდელირების საშუალებას. გარდა ამისა, მისი განაწილების ფუნქცია მათემატიკური თვალსაზრისით შედარებით მარტივია და იძლევა Metropolis-Hasting ალგორითმით პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილების ეფექტური სიმულაციის საშუალებას.

მრავალვარიანტული განზოგადებული ჰიპერბოლური განაწილება არის საშუალო-ვარიაციის ნარევი (mean-variance mixture), სადაც შერევის ცვლადი (mixing variable) განაწილებულია განზოგადებული შებრუნებული გაუსური (GIG) ალბათური კანონით. შემთხვევითი სიდიდე $Y \in \mathbb{R}_+$ განაწილებულია GIG კანონით, თუ მისი სიმკვრივე წარმოადგენს Deng and Yao, 2018

$$f_{\text{GIG}}(y|\lambda, \chi, \psi) = \begin{cases} \frac{(\chi\psi)^{\frac{\lambda}{2}} y^{\lambda-1}}{2\chi^{\lambda} K_{\lambda}(\sqrt{\chi\psi})} \exp\left\{-\frac{\psi y + \chi y^{-1}}{2}\right\}, & \text{if } y > 0 \\ 0, & \text{if } y \leq 0, \end{cases} \quad (4.62)$$

სადაც, K_{λ} არის მესამე რიგის მოდიფიცირებული ბესელის ფუნქცია (modified Bessel function) ინდექსით λ . ამასთან, პარამეტრები $\lambda \in \mathbb{R}, \chi \in \mathbb{R}_+, \psi \in \mathbb{R}_+$.

თუ $X \in \mathbb{R}^d$ განაწილებულია მრავალგანზომილებიანი განზოგადებული ჰიპერბო-

ლური კანონით, მაშინ,

$$X \stackrel{d}{=} \mu + Y\gamma + \sqrt{Y}AZ, \quad (4.63)$$

სადაც, $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\gamma \in \mathbb{R}^d$. ხოლო $Z \sim N(0, I_n)$ განაწილებულია n - განზომილებიანი სტანდარტული ნორმალური კანონით, და $Y \sim \text{GIG}(\lambda, \chi, \psi)$ და Z სტატისტიკურად დამოუკიდებელია. $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ მატრიცა დაკავშირებულია პორტფელის კოვარიაციასთან, $\Sigma = AA^T$. ცხადია, Σ არის დადებითად ნახევრადგანსაზღვრული სიმეტრიული მატრიცა.

d - განზომილებიანი mGH განაწილების სიმკვრივე მოცემულია,

$$f_{\text{mGH}}(x|\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma) = \frac{\psi^\lambda (\psi + \gamma^T \Sigma^{-1} \gamma)^{\frac{d-2\lambda}{2}} K_{\lambda-\frac{d}{2}}(\sqrt{z}) \exp[(x - \mu)^T \Sigma^{-1} \gamma]}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} (\chi\psi)^{\frac{\lambda}{2}} \det(\Sigma)^{\frac{1}{2}} K_\lambda(\sqrt{\chi\psi}) [z(\psi + \gamma^T \Sigma^{-1} \gamma)]^{\frac{d-2\lambda}{4}}} \quad (4.64)$$

$$z = \chi + (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu). \quad (4.65)$$

μ ვექტორი წარმოადგენს განაწილების ლოკაციის პარამეტრს. მატრიცა Σ ახდენს განაწილების სკალირებას. χ და ψ პარამეტრები განსაზღვრავენ განაწილების ფორმასა და კუდების სიმძიმეს. γ განსაზღვრავს განაწილების ასიმეტრიას. ხოლო, სხვადასხვა λ -ს მნიშვნელობებისთვის mGH დაიყვანება სხვადასხვა კერძო შემთხვევამდე. განვიხილოთ mGH განაწილების რამდენიმე კერძო შემთხვევა.

- (i) მრავალგანზომილებიანი ჰიპერბოლური განაწილება, როდესაც $\lambda = \frac{d+1}{2}$
- (ii) ოფციონების ფასდადების თეორიაში ფართოდ გამოყენებული, მრავალგანზომილებიანი ნორმალური შებრუნებული გაუსური (Normal Inverse Gaussian) განაწილება, როდესაც $\lambda = -\frac{1}{2}$
- (iii) ასევე ოფციონების ფასდადების თეორიაში ფართოდ გამოყენებული, მრავალგანზომილებიანი ვარიაციული გამა (Variance Gamma) განაწილება, როდესაც $\lambda > 0, \chi = 0$
- (iv) მრავალგანზომილებიანი სტიუდენტის t - ლოკაციისა და სკალირების პარამეტრებით, როდესაც $\lambda = -\frac{\chi}{2}, \psi = 0$.

mGH განაწილების კლასის და მისი ფინანსებში გამოყენების დეტალური მიმოხილვისთვის, იხილეთ Deng and Yao, 2018 და McNeil et al., 2005 თავი 3.

განვიხილოთ მოდელის სიმრავლე, რომელიც მოიცავს ყველა შესაძლო მრავალგანზომილებიან განზოგადებულ ჰიპერბოლურ განაწილებას ²⁰,

$$M = \{mGH_d(\lambda, \chi, \psi, \mu, \Sigma, \gamma) | \lambda \in \mathbb{R}, \chi \in \mathbb{R}_+, \psi \in \mathbb{R}_+, \mu \in \mathbb{R}^d, \Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}, \gamma \in \mathbb{R}^d\}. \quad (4.66)$$

4.5.3 ემპირიული მაგალითის ანალიზი

ჩვენ განვიხილავთ სამ ინდექსს: აქციების ფასის ინდექსი - DAX 30, სასაქონლო ინდექსი - S&P GSCI და ობლიგაციების ინდექსი - iBoxx Euro. ჩვენ განვიხილავთ ყოველდღიურ მონაცემებს 2010 წლის 04 იანვრიდან 2023 წლის 31 მაისამდე ²¹.

მოდელის აპოსტერიორული განაწილება

აღნიშნული ქეისში ჩვენ განვიხილეთ დიფერენციალური ევოლუციის ადაპტაციური Metropolis (DREAM) ალგორითმი, რომელიც აღწერილია Vrugt, 2016; Vrugt and Ter Braak, 2011; Vrugt et al., 2009 ნაშრომებში.

შემთხვევითი MCMC (random walk MCMC) კრებადობის სიჩქარე დიდად არის დამოკიდებული შემოთავაზების (proposal) განაწილების დისპერსიაზე. თუ შემოთავაზების განაწილების დისპერსია ძალიან მცირეა, სიმულაცია მოითხოვს ბევრ საფეხურს კრებადობისთვის. მეორეს მხრივ, თუ დისპერსია ძალიან დიდია, მეტროპოლის-ჰასტინგის ალგორითმის მოძრაობის სიჩქარე ძალიან შემცირდება (Brooks et al., 2011; Robert, 2007). მრავალგანზომილებიანი მოდელის შემთხვევაში რთულია თითოეული პარამეტრის შემოთავაზების (proposal) განაწილების ოპტიმალური შერჩევა. DREAM დაფუძნებულია გენეტიკურ ალგორითმზე და არ საჭიროებს შემოთავაზების განაწილების განსაზღვრას. მეთოდი ერთდროულად ქმნის რამდენიმე პარალელურ მარკოვის ჯაჭვს და ავტომატურად არეგულირებს შემოთავაზების განაწილებას. DREAM იმპლემენტირებულია R სისტემის, BayesianTools პაკეტში (Hartig et al., 2018). ჩვენ განვიხილავთ პარამეტრებისთვის შემდეგ აპრიორულ განაწილებებს,

$$\pi(\lambda) = U(-10, 10), \quad (4.67)$$

$$\pi(\chi) = U(0, 10), \quad (4.68)$$

²⁰შევნიშნავთ, რომ სიმარტივისთვის მოდელი შეიცავს სტაციონარულ განაწილებებს. ცხადია მოდელის სიმრავლის გაფართოება შეიძლება DCC-GARCH(p,q) მოდელის დანერგვით, რომლის ინოვაციებიც განაწილებულია mGH კანონით.

²¹წყარო Bloomberg.

$$\pi(\psi) = U(0, 10), \quad (4.69)$$

$$\pi(\mu) = U_3((-10, -10, -10), (10, 10, 10)), \quad (4.70)$$

$$\pi(\gamma) = U_3((-10, -10, -10), (10, 10, 10)), \quad (4.71)$$

$$\pi(\Sigma_{\text{DAX,GSCI}}) = \pi(\Sigma_{\text{DAX,iBoxx}}) = \pi(\Sigma_{\text{GSCI,iBoxx}}) = U(-2, 2), \quad (4.72)$$

$$\pi(\Sigma_{\text{DAX,DAX}}) = \pi(\Sigma_{\text{GSCI,GSCI}}) = \pi(\Sigma_{\text{iBoxx,iBoxx}}) = U(0, 2). \quad (4.73)$$

სადაც, $U(a, b)$ აღნიშნავს თანაბარ განაწილებას $[a, b]$ ინტერვალზე. იმავდროულად მოვითხოვთ, რომ მატრიცა Σ იყოს დადებითად ნახევრადგანსაზღვრული, ანუ $\min(\text{eig}(\Sigma)) \geq 0$ სადაც, eig არის მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობები.

ჩვენ განვიხილეთ 10 პარალელური ჯაჭვი, და თითოეული ჯაჭვისთვის 10,000,000 იტერაცია. სიმულაციის კრებადობის უზრუნველყოფისთვის ჩვენ განვიხილეთ მხოლოდ იტერაციების ბოლო 10%. ალგორითმის კრებადობის ტესტირების დეტალები მოცემულია 4.5.3 დანართში.

DREAM MCMC სიმულაციის შედეგები

4.5.3 დანართში წარმოდგენილია თითოეული პარამეტრის პოსტერიორული განაწილების ჰისტოგრამები და აღწერითი სტატისტიკა.

λ პარამეტრის აპოსტერიორული საშუალო არის -1.6363 , ხოლო χ და ψ დადებითია. ეს შედეგები მიუთითებს, რომ აქტივების ერთობლივი განაწილება მნიშვნელოვნად განსხვავდება 4.5.2 განხილული ოთხივე პოპულარული mGH ქვეკლასისგან. λ და χ გააჩნიათ მცირე ასიმეტრია და ნორმალურ განაწილებასთან მიახლოებული კუდები. ψ ხასიათდება დადებითი ასიმეტრიით და მძიმე კუდით. შედეგები მიუთითებს, რომ აქტივების ერთობლივ განაწილებას აქვს ზომიერად მძიმე კუდები. ასეთი შედეგი ლოგიკურია, რადგან სიმარტივისთვის განხილულია განსხვავებული ფინანსური პროდუქტის ინდექსები. ცნობილია, რომ ობლიგაციებისა და აქციების ბაზარი, როგორც წესი, ერთმანეთთან უარყოფით კორელაციაშია. ხოლო სასაქონლო ინდექსი სხვა ინდექსების ფასების ცვლილებებზე ნაკლებად რეაგირებს. შესაბამისად, სამივე აქტივის ვარიაციის

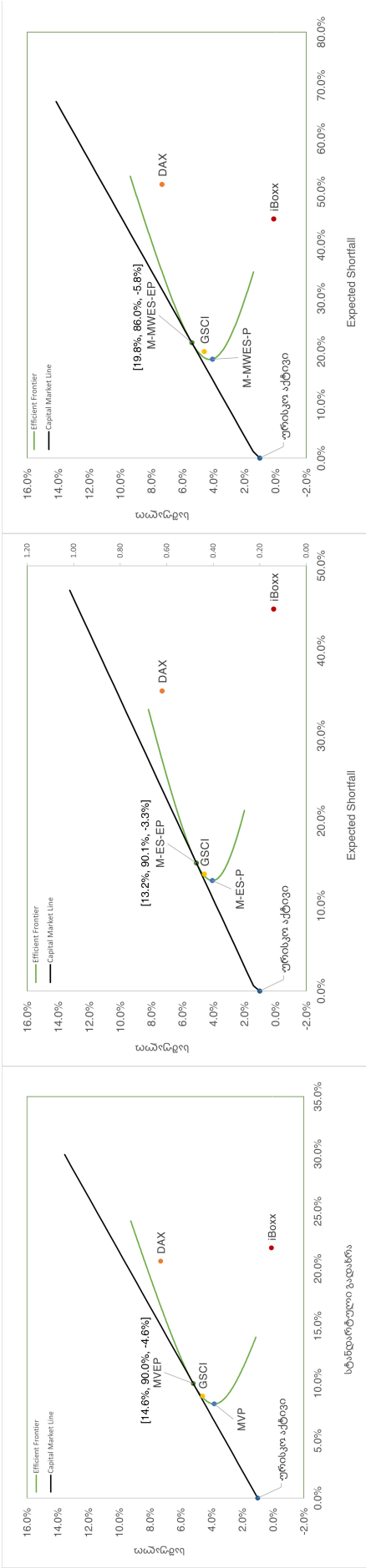
მიმართულება განსხვავებულია და ერთობლივი განაწილება ხასიათდება გაცილებით უფრო მსუბუქი კუდით, ვიდრე მარგინალური განაწილებები.

μ და γ ლოკაციისა და ასიმეტრიის პარამეტრები ხასიათდებიან სიმეტრიული განაწილებითა და მსუბუქი კუდებით. γ პარამეტრების უარყოფითი მნიშვნელობები ინტუიციურია, რაც მიუთითებს იმაზე, რომ ლოგარითმულ შემოსავლიანობებს ახასიათებს უარყოფითი ასიმეტრია.

პორტფელის ოპტიმიზაცია ამოხსნეილი სუპერპოზიციური რისკის ზომებით

განვიხილოთ პორტფელის ოპტიმიზაციის სამი მიდგომა:

- (i) კლასიკური შემთხვევა: რისკის საზომი არის პორტფელის სტანდარტული გადახრა. პორტფელის ეფექტიანი საზღვარი გამოანგარიშებულია Markowitz, 1952 მიხედვით იმ განსხვავებით, რომ ჩვენ გამოვიყენეთ განზოგადებული ჰიპერბოლური განაწილება, ხოლო მარკოვიტცის ოპტიმიზაციაში აქციების შემოსავლიანობა განაწილებულია ნორმალური კანონით. მოდელის პარამეტრები შეფასებულია მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდის საშუალებით. სურათი 4.17 მარცხენა გრაფიკი აჩვენებს ეფექტიან საზღვარს და ოპტიმალურ პორტფელს (MVEP), რომელიც მიიღება 14.6% ინვესტიციით DAX 30 ინდექსში, 90% ინვესტიციით GSCI ინდექსში და მოკლე პოზიციით -4.6% iBoxx ინდექსის გაყიდვით. მინიმალური ვარიაციის პორტფელის (MVP) მოსალოდნელი შემოსავლიანობა არის 5.18%, ხოლო სტანდარტული გადახრა შეადგენს 9.98%.
- (ii) პორტფელის შერჩევა ES რისკის ზომით: ES გამოანგარიშებულია მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით შეფასებული პარამეტრებით. 4.17 სურათის შუა გრაფიკი აღწერს ეფექტურ საზღვარსა და ოპტიმალურ პორტფელს (M-ES-EP), რომელიც მიიღება 13.2% ინვესტიციით DAX 30 ინდექსში, 90.1% ინვესტიციით GSCI ინდექსში და მოკლე პოზიციით -3.3% iBoxx ინდექსში. M-ES-EP პორტფელის მოსალოდნელი შემოსავლიანობა არის 5.1%, ხოლო ES 15.0%. აღსანიშნავია, რომ M-ES-EP მსგავსია MVEP პორტფელის.



სურ. 4.17: ეფექტიანი საზღვარი: მარჯვნივ საშუალო ვარიაცია, შუაში საშუალო ES, მარჯვნივ მოდელის რისკით შეწონილი ES.

(iii) პორტფელის შერჩევა მოდელის რისკით შეწონილი ES მიმართ: MCMC შერჩევით მიღებული აპოსტერიორული განაწილებით შეფასებულია მოდელის რისკით შეწონილი ES. სურათი 4.17 მარჯვენა დიაგრამა ასახავს შედეგებს. როგორც ვხედავთ ოპტიმალური პორტფელი (M-MWES-EP), რომელიც მიიღება 19.8% ინვესტიციით DAX 30 ინდექსში, 86% ინვესტიციით GSCI ინდექსში და მოკლე პოზიციით –5.8% iBoxx ინდექსში. M-MWES-EP პორტფელის მოსალოდნელი შემოსავლიანობა არის 5.4%, ხოლო მოდელის რისკით შეწონილი ES არის 21.6%. ოპტიმალური პორტფელი მნიშვნელოვნად განსხვავდება წინა 2 შემთხვევისგან.

სამივე მოდელი უპირატესობას ანიჭებს GSCI სასაქონლო ინდექსს, DAX 30 და iBoxx ინდექსებთან მიმართებაში. აღნიშნული შედეგი მოსალოდნელია, რადგან COVID-19, და 2022/23წწ გლობალურმა ენერგო კრიზისმა ყველაზე ნაკლები უარყოფითი გავლენა სწორედ სასაქონლო ინდექსზე იქონია. iBoxx ნაკლებად სასურველი ინვესტიციაა, რადგან 2022 წლის ფედერალური რეზერვის და ევროპის ცენტრალური ბანკის მიერ გაზრდილი საპროცენტო განაკვეთის შედეგად, ობლიგაციების ინდექსის ღირებულება მკვეთრად შემცირდა.

მიუხედავად იმისა, რომ სამივე მოდელი თანხმდება GSCI ინდექსის მიმზიდველობაზე, პორტფელის შერჩევა მოდელის რისკით შეწონილი ES მიმართ უფრო დაბალანსებულია, ვიდრე ტრადიციული მეთოდები. აღნიშნული შედეგი ინტუიციურია, რადგან მოდელების მთლიან (სიმულირებულ) სიმრავლეზე მოიძებნება ელემენტები, რომლებიც DAX 30 ინდექსს მეტ წონას ანიჭებენ.

ჩვენ მიგვაჩნია, რომ მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის საზომები პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანებში მნიშვნელოვნად უპირატესია. განსაკუთრებით აღსანიშნავია, რომ მოდელის რისკით შეწონილი მოსალოდნელი ჩავარდნა (MWES) ამოწმებული რისკის საზომია, რაც შესაძლებას იძლევა, რომ ოპტიმიზაციის ამოცანები თანამედროვე მათემატიკური მეთოდებით შედარებით ეფექტურად და სტაბილურად გადაწყდეს.

დასკვნა

მოდელის რისკი წარმოადგენს კომპლექსური ფინანსური ინსტიტუტების რისკ-მენეჯმენტის ერთ-ერთ მთავარ გამოწვევას. წინამდებარე ნაშრომში წარმოდგენილია მოდელის რისკების მრავლისმომცველი ანალიზი როგორც საბაზრო რისკის შეფასების ამოცანებში, ისე ფინანსური კონტრაქტების ფასდადებისა და პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანებში. ინოვაციური ეკონომეტრიკული მოდელებით წარმოდგენილია მოდელის რისკების შეფასების პრაქტიკული მეთოდები.

რისკის ზომებისა და ფასდადების მოდელების სიზუსტე დამოკიდებულია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონის სწორ შერჩევაზე და მისი პარამეტრების ზუსტ შეფასებაზე. ცხადია, მათემატიკური დაშვებები, რომლებიც მიზნად ისახავენ რთული ეკონომიკური მოვლენების გამარტივებულ ასახვას, მიდრეკილია მოდელის არასწორი იდენტიფიკაციისკენ, რაც წარმოქმნის მოდელის რისკს. მოდელის რისკი აღწერს პოტენციურ არასასურველ შედეგებს, რომლებიც წარმოიქმნება, როდესაც ფინანსურ მოდელში ჩადებული დაშვებები ზუსტად ვერ ასახავს რეალური სამყაროს დინამიკას, ან, როდესაც თავად მოდელი არ არის განკუთვნილი კონკრეტული ამოცანის გადასაჭრელად. ეს რისკი წარმოიქმნება მონაცემთა ხელმისაწვდომობის შეზღუდვის, მოდელირების მეთოდოლოგიის ხარვეზების, ბაზრის პირობების ცვლილების ან სხვა გაუთვალისწინებელი ფაქტორების გამო. შესაბამისად, მოდელის რისკმა შეიძლება გამოიწვიოს მნიშვნელოვანი შეუსაბამოები მოდელის პროგნოზსა და ფინანსურ ბაზრებზე დაფიქსირებულ რეალურ შედეგებს შორის.

მოდელის რისკმა შეიძლება ზიანი მიაყენოს რისკის მართვის პრაქტიკის ეფექტურობას. თუ მოდელი ზუსტად ვერ ასახავს ფინანსური პოზიციის ძირითად რისკებს, ამან შეიძლება გამოიწვიოს არაადეკვატური კაპიტალის განაწილება და მცდარი ეკონომიკური გადაწყვეტილებების მიღება. ანალოგიურად, როდესაც საქმე ეხება დერივატივების ფასდადებას, მოდელის რისკი გადამწყვეტ როლს თამაშობს. ეგზოტიკური ოფციონები ან სხვა წარმოებული ფასიანი ქაღალდები იღებენ თავიანთ ღირებულებას ძირითადი აქტივებიდან, რომელთა ფასის დინამიკაც სტოქასტურია. შესაბამისად, ფასდადების

მოდელები ეყრდნობა დაშვებებს ძირითადი აქტივების ქცევისა და ბაზრის პირობების შესახებ. მოდელის რისკი ამ კონტექსტში წარმოიქმნება მაშინ, როდესაც ეს დაშვებები შეიცავენ ხარვეზებს, რაც იწვევს არაზუსტ ფასებს და არასწორ ჰეჯირების პოზიციებს.

მოდელის რისკის მართვა მოითხოვს მრავალმხრივ მიდგომას. ფინანსურმა ინსტიტუტებმა უნდა დანერგონ მოდელის ვალიდაციის კოჰერენტული პროცესი, რათა შეფასდეს გამოყენებული მოდელების სიზუსტე და ცდომილების ალბათობა. მოდელის ვალიდაციის პროცესი მოიცავს პერიოდულ ტესტირებას (backtesting) ისტორიული მონაცემების მიმართ და სტრეს-ტესტირებას მოდელის სხვადასხვა პარამეტრის მიმართ.

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია მოდელის სივრცე M , რომელიც შეიცავს $(\Omega, \mathcal{F})$ სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომას $m \in M$. ნაშრომის მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს შემდეგში:

- ნაშრომში შესწავლილია სუპერპოზიციური რისკის საზომები, რომლებიც საბაზრო რისკის მოდელირებისას ეფექტურად ითვალისწინებენ მოდელის რისკს. ემპირიულმა კვლევებმა დაადასტურა, რომ სუპერპოზიციურ მიდგომას აქვს უნიკალური შესაძლებლობა, მოდელის რისკი გააერთიანოს საბაზრო რისკთან ისე, რომ მიიღოს სრულყოფილი რისკის საზომი.

მაქსიმალური რისკის საზომი და მოდელის რისკით შეწონილი საბაზრო რისკის საზომი წარმოადგენს სუპერპოზიციურ რისკის ზომების მარტივ მაგალითებს. სუპერპოზიციურ რისკის საზომები აერთიანებენ ყველა შესაძლო საბაზრო რისკის ზომას. აგრეთვე შევისწავლეთ სუპერპოზიციური რისკის ზომის რობასტული წარმოდგენა და სხვადასხვა ეკონომიკური თვისება.

- სუპერპოზიციური რისკის საზომი განიხილავს მოდელის რისკს საბაზრო რისკის შეფასებისას, მაგრამ ის თავად არ ზომავს მოდელის რისკს იზოლაციაში. მოდელის რისკის საზომმა რაოდენობრივად უნდა განსაზღვროს ρ_m -ის ცვალებადობა, რადგან m იცვლება მოდელის სიმრავლეში. ჩვენ ჩამოვაყალიბეთ აქსიომები მოდელის რისკის ზომებისთვის, სადაც განვასხვავებთ მოდელის რისკს წარმოებული ფასიანი ქაღალდის ფასდადების ამოცანებში და რისკების მენეჯმენტში.

სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის მსგავსად განმარტებულია მოდელის რისკის სუპერპოზიციური საზომები, რომლებიც რაოდენობრივად აფასებენ მოდელის რისკს (და ადეკვატური მოდელის რისკის კაპიტალის რაოდენობას) ბენჩმარკული რისკის საზომთან მიმართებით.

- სუპერპოზიციური რისკის ზომების მრავალი მნიშვნელოვანი წარმომადგენელი

მოითხოვს ალბათური განაწილების შეფასებას მოდელის სივრცეზე. ზაიესის ანალიზზე დაფუძნებული თანამედროვე ეკონომეტრიკული მოდელები წარმოადგენენ ბუნებრივ არჩევანს ასეთი განაწილების რაოდენობრივი შეფასებისთვის. ნაშრომში შესწავლილია, MCMC სიმულაციის მრავალი ვერსია, მათ შორის Metropolis-Hasting ალგორითმი, შექცევადი ნახტომის MCMC და DREAM MCMC ალგორითმები. მრავალი მაგალითის ანალიზით ნაჩვენებია, რომ აღნიშნული მეთოდების გამოყენებით შესაძლებელია მოდელის სივრცეზე არსებული უცნობი განაწილების ეფექტური ემპირიული შეფასება.

- ხუთი ძირითადი საფონდო და სასაქონლო ინდექსის მონაცემების გამოყენებით ნაჩვენებია სუპერპოზიციური საბაზრო და მოდელის რისკის ზომების პრაქტიკული გამოყენება რისკების მენეჯმენტში. კონკრეტულად განხილულია მოდელის სიმრავლე, რომელიც შედგება ყველა შესაძლო მრავალგანზომილებიანი დინამიური პირობითი კორელაციის DCC-GARCH(1,1) მოდელებისგან. შექცევადი ნახტომის MCMC სიმულაციით შეფასებულია განაწილება მოდელის სივრცეში. აღნიშნული პორტფელისთვის, გამოანგარიშებულია საბაზრო რისკის ზომები, რომლებიც ითვალისწინებს მოდელის რისკს და ასევე მოდელის რისკის ზომები. შესწავლილია VaR და ES საბაზრო რისკის ზომები და ნაჩვენებია, რომ ეს უკანასკნელი განსაკუთრებით მგრძნობიარეა მოდელის რისკის მიმართ.
- შედეგები აჩვენებს, რომ მოდელის რისკი მნიშვნელოვანი ფაქტორია საბაზრო რისკის საზომებისთვის, რომლებიც ითვალისწინებენ კუდის რისკს. ექსტრემალური ღირებულების თეორია არის გამორჩეული ინსტრუმენტი, როდესაც საჭიროა კუდის რისკის მოდელირება. ემპირიული მაგალითით ნაჩვენებია, რომ რისკის მოდელები, რომლებიც დაფუძნებულია პარამეტრიზებული ექსტრემალური ღირებულების თეორიაზე, განსაკუთრებით მგრძნობიარეა მოდელის რისკის მიმართ. შედეგები ადასტურებენ ჰიპოთეზას, რომ მაღალი ნდობის დონის გამოყენების შემთხვევაში ადგილი აქვს საბაზრო რისკის შემცირებას, თუმცა იზრდება მოდელის რისკი ე.ი. ხდება საბაზრო რისკის მოდელის რისკით ჩანაცვლება.
- დერივატივების ფასდადების თეორიაში მოდელის რისკი ილუსტრირებულია ეგზოტიკური ოფციონების მაგალითებით. ჩვენ განვიხილეთ ბარიერული ოფციონები და არითმეტიკული აზიური ოფციონები. შედეგები აჩვენებს, რომ მოდელის რისკი არსებითია, ფასები, რისკის პარამეტრები და შესაბამისი ჰეჯირების სტრატეგიები მოდელის შერჩევაზე დამოკიდებული.

- მონტე კარლოს სიმულაციაზე დაფუძნებული ქეისით შესწავლილია ევროპული ქოლ ოფციონისთვის მოდელისა და პარამეტრების ერთობლივი კალიბრაციის ამოცანა. შექცევადი ნახტომის MCMC სიმულაციამ აღმოაჩინა, როგორც ჭეშმარიტი მოდელის ტიპი ასევე სწორად შეაფასა მოდელის პარამეტრებიც.
- მოდელის რისკი შესწავლილია პორტფელის ოპტიმიზაციის ამოცანისთვის. ჩვენ განვიხილეთ მარტივი პორტფელის ოპტიმიზაცია სამი ფინანსური ინდექსით DAX 30, S&P GSCI და iBoxx EUR. შედეგები გვიჩვენებს, რომ ამ მარტივ შემთხვევაშიც კი მოდელის რისკი მნიშვნელოვან როლს თამაშობს. ვაჩვენეთ, რომ სუპერპოზიციური ამოზნექილი რისკის ზომები მოდელის რისკის გათვალისწინებით პორტფელის ოპტიმიზაციის შესაძლებლობას იძლევა.

ჩვენი შეფასებით, წინამდებარე ნაშრომი წარმოადგენს მოდელის რისკის ანალიზისა და შესწავლის ერთ-ერთ პირველ მნიშვნელოვან მცდელობას, რომელიც მიზნად ისახავს თეორიული ჩარჩოს ფორმულირებასა და პრაქტიკული ინსტრუმენტების შექმნას. ეს ჩარჩო ქმნის მყარ საფუძველს, რომელზეც ფინანსურ ინსტიტუტებს შეუძლიათ ააშენონ ეფექტური მოდელის რისკის მართვის სისტემა. თუმცა, მოდელის რისკის მრავალშრიანი და კომპლექსური ბუნების გათვალისწინებით, ცხადია, რომ ნაშრომი ვერ ისახავდა მიზნად თემის სრულად ამოწურვას, არამედ წარმოადგენს სტიმულს შემდგომი, კიდევ უფრო სიღრმისეული კვლევებისთვის.

დანართი A

თეორემა 2.2.4 დამტკიცება: ცხადია, რომ $\zeta \circ \rho$ არის ამოზნექილი რისკის ზომა, რომელიც აკმაყოფილებს ფატუს თვისებას. შესაბამისად $\zeta \circ \rho$ -ს გააჩნია რობასტული წარმოდგენა.

განვიხილოთ (2.22), (2.24),

$$\begin{aligned}\zeta \circ \rho(W) &= \sup_{\nu \in N_1(\mu)} \left(\int_M \rho_m(W) \nu(dm) - \beta^{\min}(\nu) \right) \\ &= \sup_{\nu \in N_1(\mu)} \left(\int_M \sup_{Q \in M_1(P)} \{ \mathbb{E}_Q(-W) - \alpha_m^{\min}(Q) \} \nu(dm) - \beta^{\min}(\nu) \right).\end{aligned}$$

იმისთვის, რომ გადავანაცვლოთ სუპრემუმის ოპერატორი და ინტეგრალი დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა.

ლემა 1. დავუშვათ $f(m, Q)$, $m \in M$, $Q \in M_1(P)$ არის შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია. მაშინ,

$$\sup_{Q: M \rightarrow M_1(P)} \int_M f(m, Q_m) \nu(dm) = \int_M \sup_{Q \in M_1(P)} f(m, Q) \nu(dm),$$

სადაც, ტოლობის მარცხენა მხარეს სუპრემუმი განსაზღვრულია ყველა ზომადი ფუნქციისთვის $Q. = (Q_m, m \in M)$, M -დან $M_1(P)$ -ზე.

დამტკიცება. ყოველი $m \in M$, $Q_m \in M_1(P)$, ცხადია

$$f(m, Q_m) \leq \sup_{Q \in M_1(P)} f(m, Q)$$

შესაბამისად,

$$\sup_{Q: M \rightarrow M_1(P)} \int_M f(m, Q_m) \nu(dm) \leq \int_M \sup_{Q \in M_1(P)} f(m, Q) \nu(dm).$$

მეორე მხრივ ყოველი $m \in M$, $\epsilon > 0$ არსებობს რაიმე $\tilde{Q}_m \in M_1(P)$, რომელიც აკმაყოფი-

ლებს

$$\sup_{Q \in M_1(P)} f(m, Q) - \epsilon \leq f(m, \tilde{Q}_m).$$

M მოდელის სივრცეზე ინტეგრირებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int_M \sup_{Q \in M_1(P)} f(m, Q) \nu(dm) - \epsilon &\leq \int_M f(m, \tilde{Q}_m) \nu(dm) \\ &\leq \sup_{Q: |M \rightarrow M_1(P)} \int_M f(m, Q_m) \nu(dm), \end{aligned}$$

რაც ამტკიცებს ლემას. □

2.2.4 თეორემის დასამტკიცებლად მოვიშველიოთ ლემა 1, სადაც $f(m, Q) = \mathbb{E}_Q(-W) - \alpha_m^{\min}(Q)$. შესაბამისად,

$$\zeta \circ \rho(W) = \sup_{\nu \in N_1(\mu)} \left(\sup_{Q: |M \rightarrow M_1(P)} \int_M \{ \mathbb{E}_{Q_m}(-W) - \alpha_m^{\min}(Q_m) \} \nu(dm) - \beta^{\min}(\nu) \right).$$

ყოველი $Q: |M \rightarrow M_1(P)$ ჰეშმარიტია $\int_M Q_m \nu(dm) \in M_1(P)$ და, პირიქით, რადგან $Q = \int_M Q \nu(dm)$, ყოველი $Q \in M_1(P)$ მოდელისთვის არსებობს აღნიშნული წარმოდგენა. მართლაც, ყოველი მოდელისთვის $Q \in M_1(P)$ განვსაზღვროთ შემდეგი საჯარიმო ფუნქცია

$$\alpha^\nu(Q) = \inf_{Q: |M \rightarrow M_1(P), \int_M Q_m \nu(dm) = Q} \int_M \alpha_m^{\min}(Q_m) \nu(dm).$$

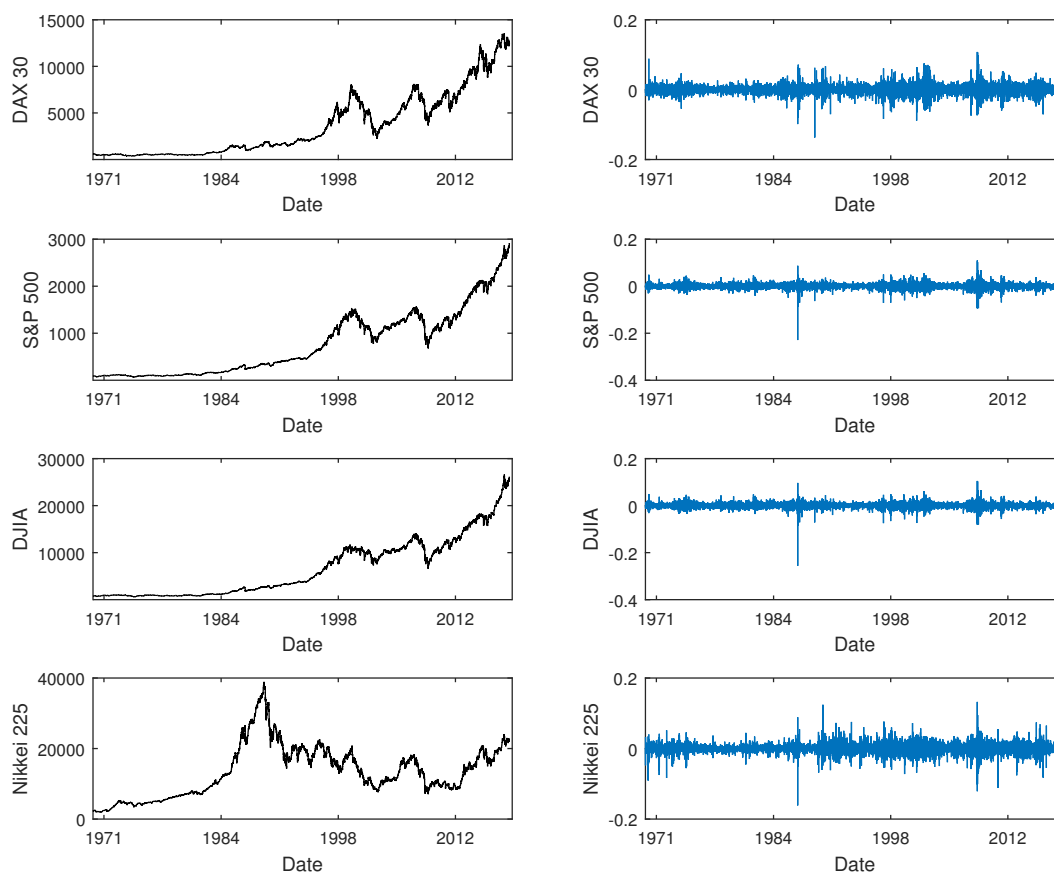
ცხადია, ვიღებთ სუპერპოზიციური რისკის რობასტულ წარმოდგენას

$$\begin{aligned} \zeta \circ \rho(W) &= \sup_{\nu \in N_1(\mu)} \left(\sup_{Q \in M_1(P)} (\mathbb{E}_Q(-W) - \alpha^\nu(Q)) - \beta^{\min}(\nu) \right) \\ &= \sup_{Q \in M_1(P)} \left(\mathbb{E}_Q(-W) - \inf_{\nu \in N_1(\mu)} (\alpha^\nu(Q) + \beta^{\min}(\nu)) \right), \end{aligned}$$

რაც ასრულებს თეორემის დამტკიცებას.

დანართი B

საფონდო ინდექსების დროითი მწკრივები და აღწერითი სტატისტიკა



სურ. B.1: DAX 30, S&P 500, DJIA და Nikkei 225 საფონდო ინდექსების 02.01.1970-31.08.2018.

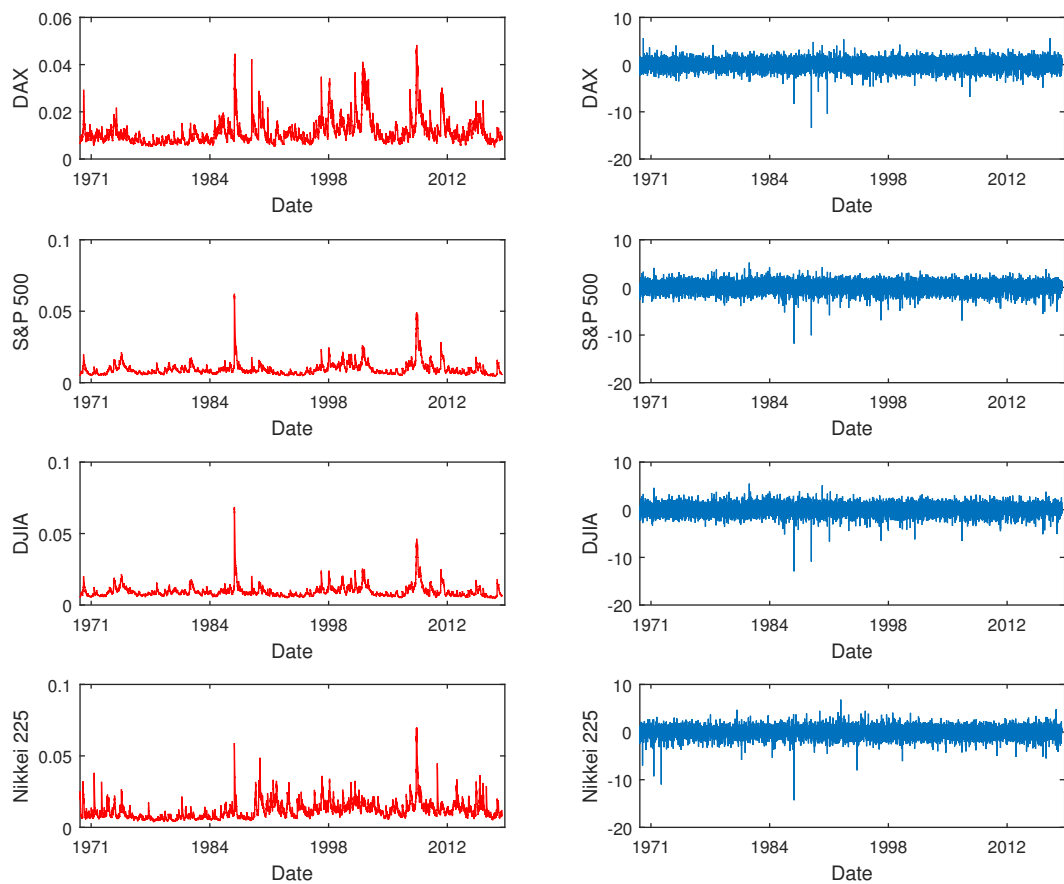
	DAX 30	S&P 500	DJIA	Nikkei 225
საშუალო	0.0002	0.0003	0.0003	0.0002
მედიანა	0.0006	0.0004	0.0004	0.0005
სტანდარტული გადახრა	0.0126	0.0106	0.0105	0.0130
ასიმეტრია	-0.2518	-1.0137	-1.2564	-0.4145
ექსცესი	9.7986	28.5924	38.3509	12.4547
მაქსიმუმი	0.1080	0.1096	0.1051	0.1323
მინიმუმი	-0.1371	-0.2290	-0.2563	-0.1614
შერჩევის ზომა	12253	12279	12292	11997

ცხრ. B.1: საფონდო ინდექსების დღიური ლოგარითმული შემოსავლიანობის აღწერითი სტატისტიკა.

GARCH ფილტრი

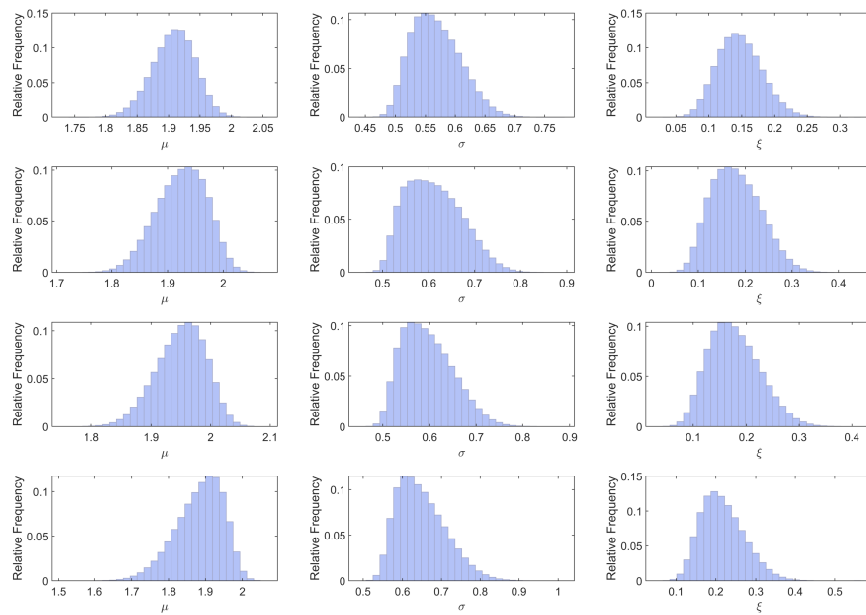
	DAX 30	S&P 500	DJIA	Nikkei 225
Constant	$1.3748e - 06^{***}$ ($2.0547e - 07$)	$7.5572e - 07^{***}$ ($1.2188e - 07$)	$9.1456e - 07^{***}$ ($1.4185e - 07$)	$1.0873e - 06^{***}$ 1.6747
ARCH	0.0809^{***} (0.0051)	0.0644^{***} (0.0043)	0.0638^{***} (0.0043)	0.1086^{***} (0.0061)
GARCH	0.911^{***} (0.0054)	0.9291^{***} (0.0045)	0.9278^{***} (0.0047)	0.8821^{***} (0.0055)
Degree of freedom	9.6191^{***} (0.5225)	7.1223^{***} (0.3887)	7.1311^{***} (0.3801)	6.3196^{***} (0.3033)
Log likelihood	38455.28	40937.69	40827.28	37792.61
AIC	-6.2762	-6.6673	-6.6423	-6.2997
SC	-6.2738	-6.6649	-6.6398	-6.2972

ცხრ. B.2: GARCH(1,1) მოდელი სტიუდენტის t – განაწილებით DAX 30, S&P 500, DJIA და Nikkei 225 ლოგარითმული შემოსავლიანობისთვის. * * * სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი 99% ნდობის დონით.

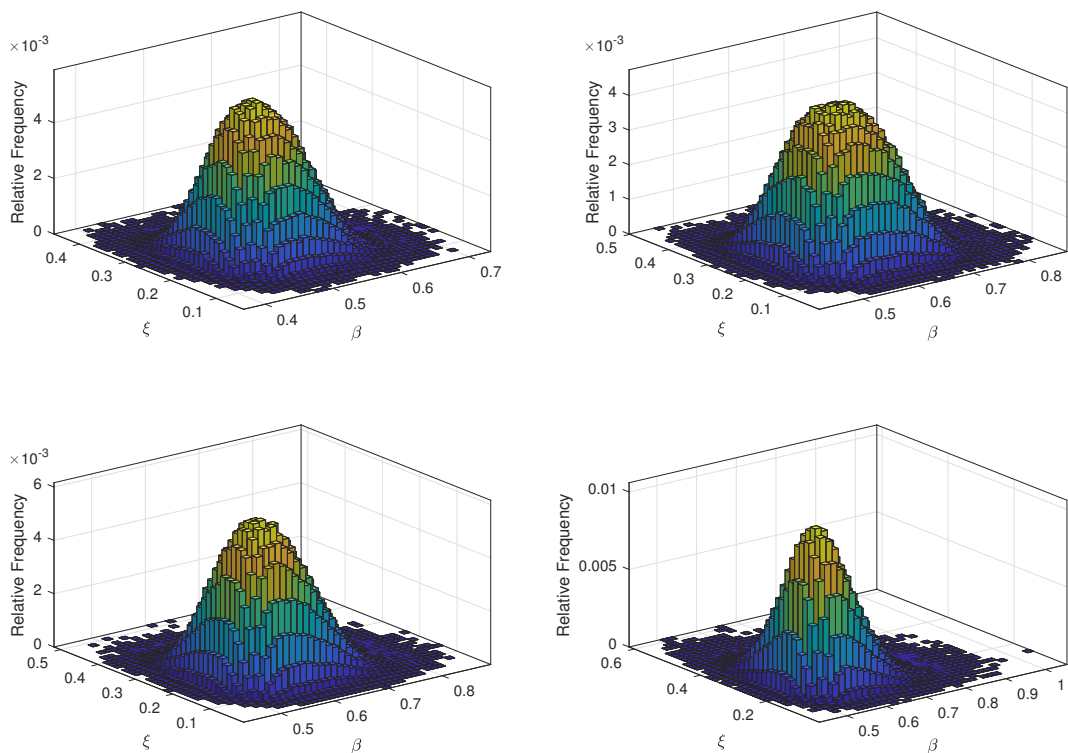


სურ. B.2: საფონდო ინდექსების პირობითი სტანდარტული გადახრები(მარცხნივ) და სტანდარტიზებული ლოგარითმული შემოსავლიანობა(მარჯვნივ) GARCH(1,1) მოდელის მიხედვით.

სურათები B.3 და B.4 წარმოადგენს GEV და GP მოდელების პარამეტრების აპოსტერიორულ განაწილებას.



სურ. B.3: GEV მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილება. პირველი რიგი DAX 30. მეორე რიგი S&P 500. მესამე რიგი DJIA. მეოთხე რიგი Nikkei 225.



სურ. B.4: GP მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილება. მარცხენა ზემოთ DAX 30. მარჯვენა ზემოთ S&P 500. მარცხენა ქვემოთ DJIA. მარჯვენა ქვემოთ Nikkei 225.

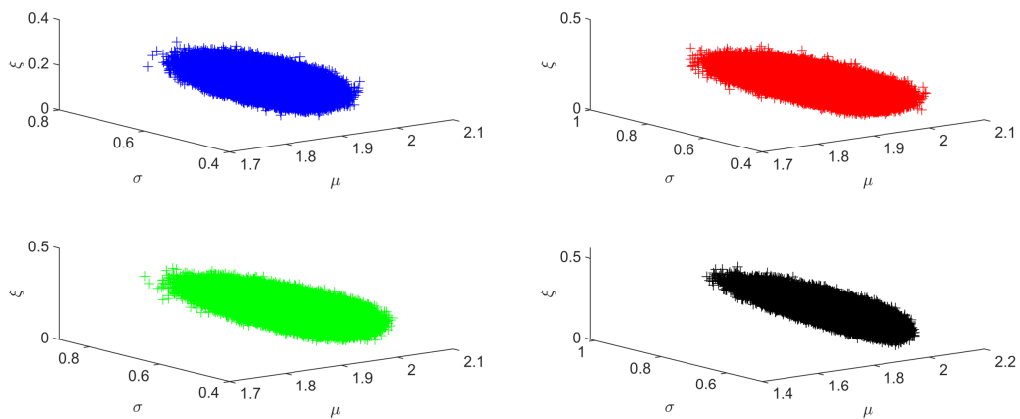
სურათები B.5 და B.6 ასახავენ GEV და GP პარამეტრების აპოსტერიულ შერჩევას. სურათებიდან ჩანს, რომ ორივე მოდელისთვის ჯაჭვები მოძრაობდა საკმარისი ვარიაციით.

სურათები B.7 და B.8 აჩვენებს ავტოკორელაციის ფუნქციას GEV და GP პარამეტრების ჯაჭვების ავტოკორელაცია დაბალია 15-20 ჩამორჩენის შემდეგ, რაც მიუთითებს სწრაფ კრებადობაზე.

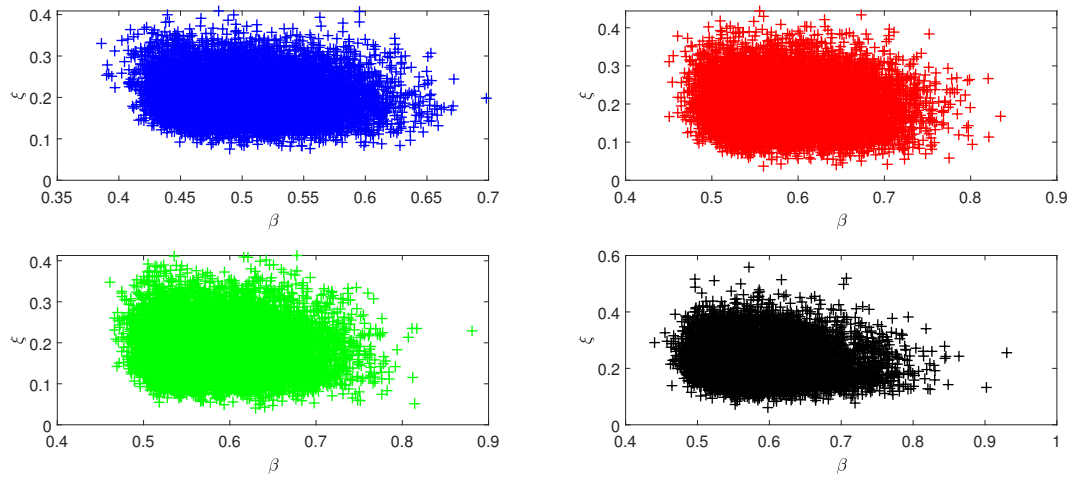
ასევე განვიხილეთ Geweke z – სტატისტიკა და Heidel p – მნიშვნელობა MCMC შედეგებისთვის (იხ. Geweke, 1992, Heidelberger and Welch, 1983). ორივე სტატისტიკა მიუთითებს ჯაჭვების კრებადობას. იხ. ცხრილი B.3.

	Geweke z – სტატისტიკა				Heidel p – მნიშვნელობა			
	DAX 30	S&P 500	DJIA	Nikkei 225	DAX 30	S&P 500	DJIA	Nikkei 225
საშუალო	-0.0671	0.0371	0.0691	-0.1037	0.0827	0.0968	0.1016	0.1564
მედიანა	-0.0592	0.0309	0.0642	-1.0091	0.0693	0.0891	0.0962	0.1428
სტანდარტული გადახრა	0.112	0.1461	0.098	0.1296	0.1662	0.1986	0.1729	0.236
ასიმეტრია	0.9819	0.4356	0.7834	-0.004	0.797	1.7413	0.6754	1.003
ექსცესი	4.1657	2.3376	3.4123	3.891	3.9472	3.7988	3.5671	3.3947
მაქსიმუმი	0.3019	0.7221	0.6202	0.3512	0.6101	0.8512	0.6981	0.8761
მინიმუმი	-0.7135	-0.3971	-0.4063	-0.7905	-0.4138	-0.3405	-0.3471	-0.5336

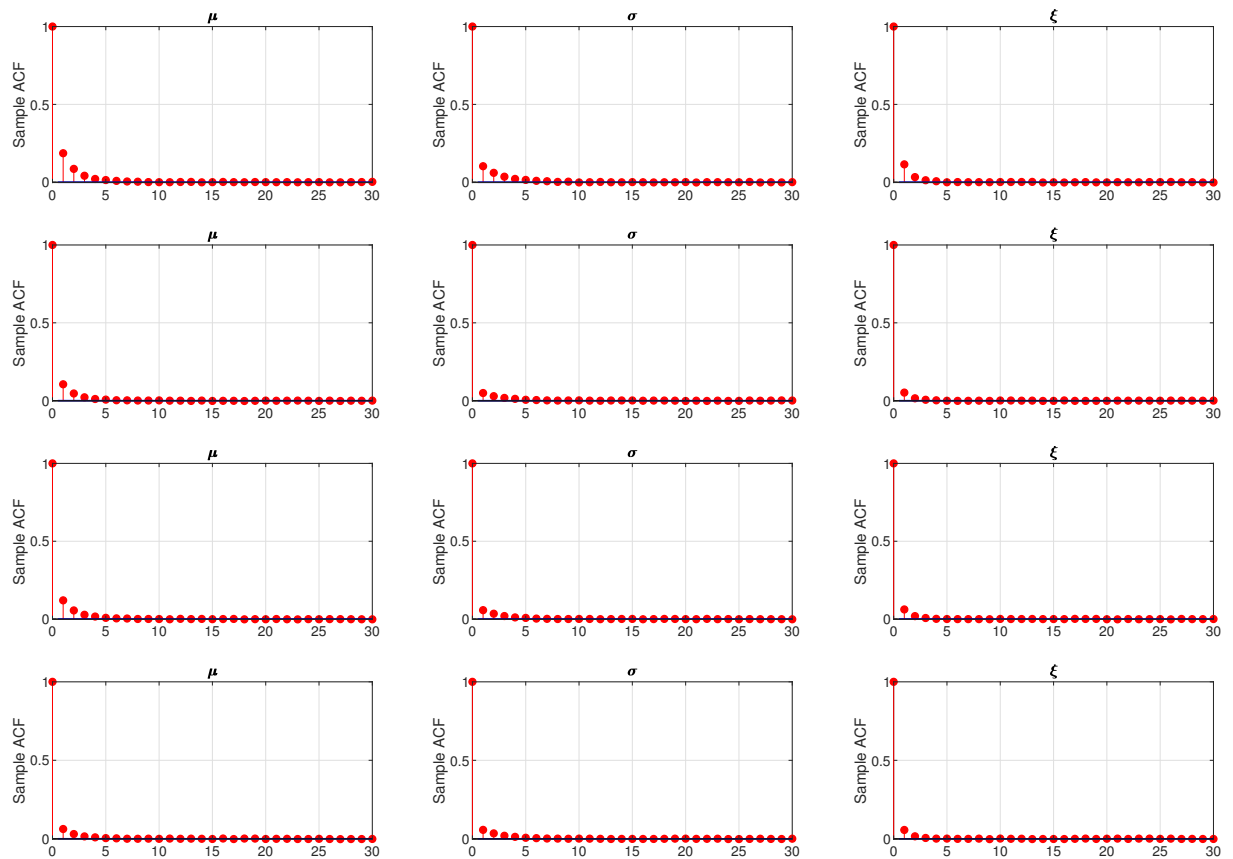
ცხრ. B.3: MCMC ალგორითმის კრებადობის შეფასება.



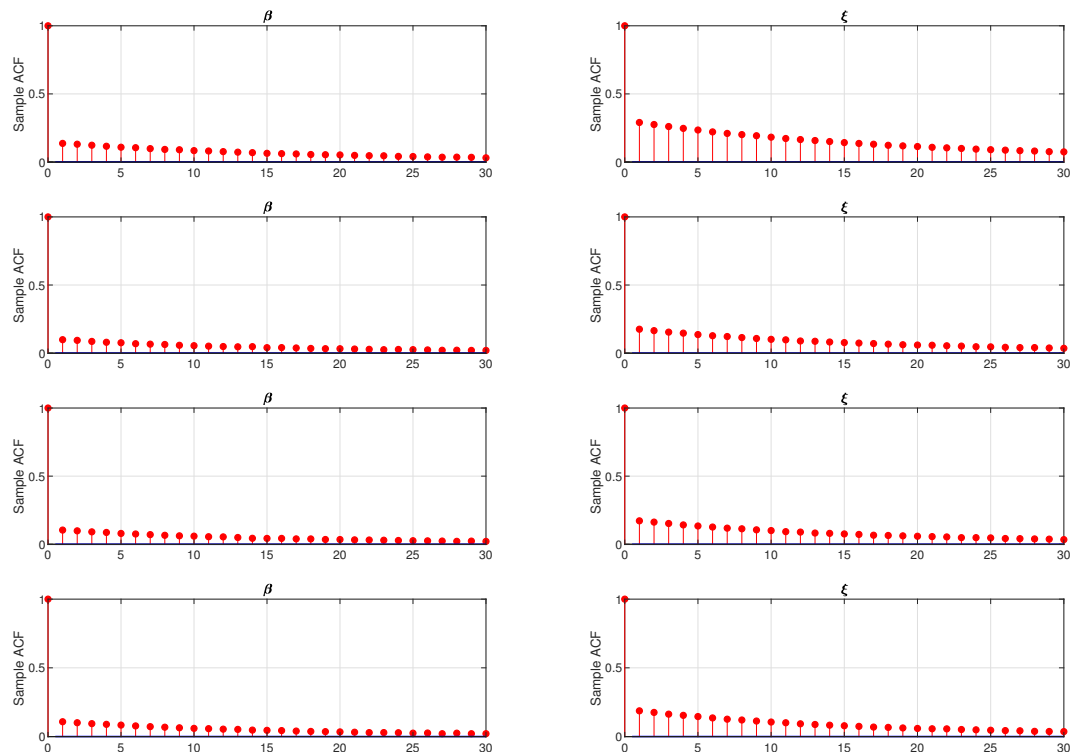
სურ. B.5: GEV მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული შერჩევა. მარცხნივ ზემოთ DAX 30. მარჯვნივ ზემოთ S&P 500. მარცხნივ ქვემოთ DJIA. მარჯვნივ ქვემოთ Nikkei 225.



სურ. B.6: GP მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული შერჩევა. მარცხნივ ზემოთ DAX 30. მარჯვნივ ზემოთ S&P 500. მარცხნივ ქვემოთ DJIA. მარჯვნივ ქვემოთ Nikkei 225.



სურ. B.7: GEV მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილების ავტოკორელაციის ფუნქცია (SAF). პირველი რიგი DAX 30. მეორე რიგი S&P 500. მესამე რიგი DJIA. მეოთხე რიგი Nikkei 225.



სურ. B.8: GP მოდელის პარამეტრების აპოსტერიორული განაწილების ავტოკორელაციის ფუნქცია (SAF). პირველი რიგი DAX 30. მეორე რიგი S&P 500. მესამე რიგი DJIA. მეოთხე რიგი Nikkei 225.

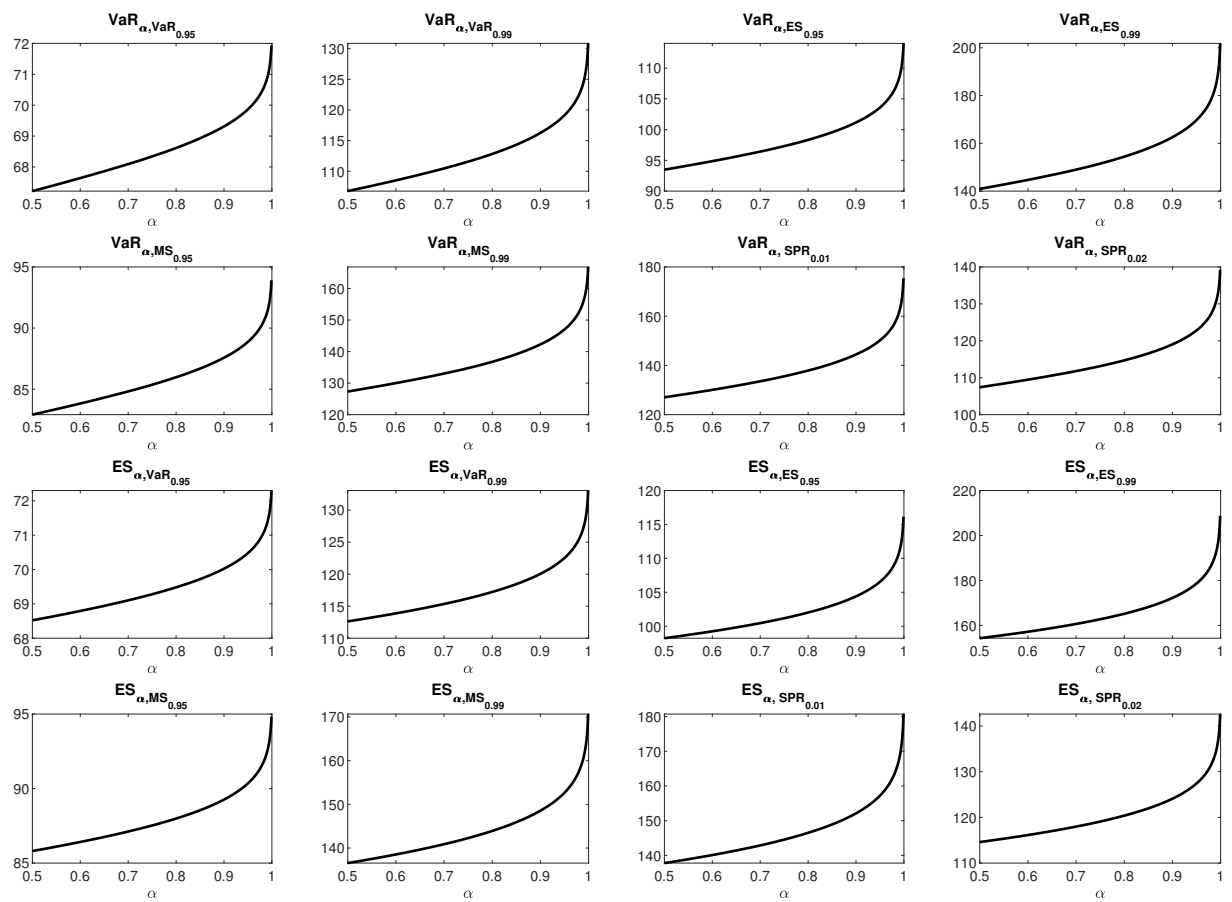
საბაზრო რისკის ზომების აპოსტერიორული განაწილება

[B.4](#) ცხრილი აჩვენებს საფონდო ინდექსების რისკების ზომების აღწერით სტატისტიკას.

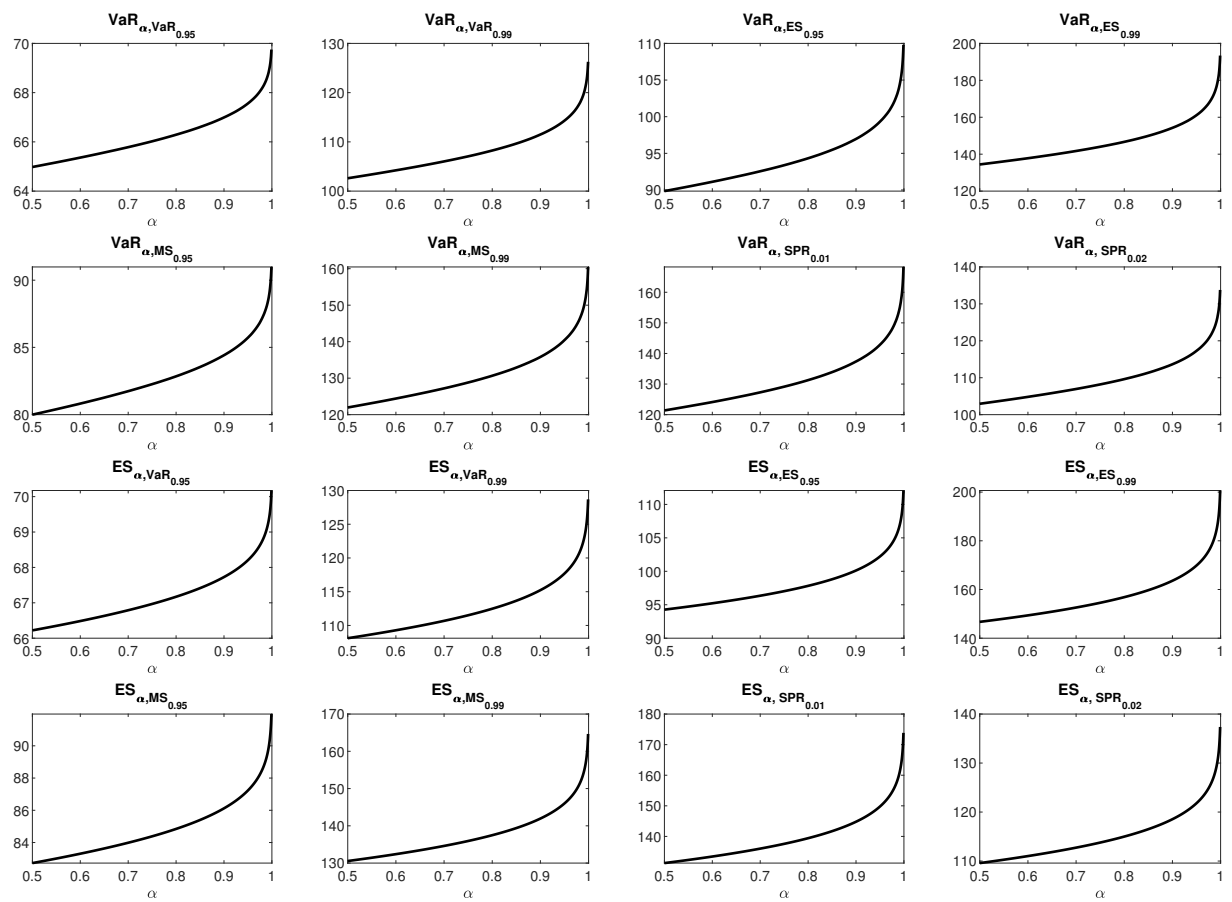
კუდის საბაზრო რისკის სუპერპოზიციური ზომები

		VaR ₉₅	ES ₉₅	MS ₉₅	VaR ₉₉	ES ₉₉	MS ₉₉	SPR($\gamma = 0.02$)	SPR($\gamma = 0.01$)
DAX 30	საშუალო	78.5712	105.9722	94.7815	119.6032	156.2704	141.2746	120.6966	141.4696
	მედიანა	78.4411	105.5122	94.5006	119.0570	154.8259	140.4021	119.9765	140.3390
	სტანდარტული გადახრა	1.2857	4.5082	2.8257	5.6361	12.1140	8.6684	6.6774	9.8369
	ასიმეტრია	0.4639	0.5811	0.4796	0.5233	0.7036	0.5764	0.6313	0.6747
	ექსცესი	2.7989	3.2794	2.8955	3.1105	3.6241	3.2831	3.4290	3.5444
	მინიმუმი	75.0773	94.2782	87.1771	104.5981	126.1468	118.9789	103.8870	116.8814
	მაქსიმუმი	85.3276	133.5212	109.9657	151.4056	239.9172	193.3287	162.7979	206.4292
S&P 500	საშუალო	67.3402	94.0216	83.1954	107.3630	142.8567	128.3900	108.3260	128.5124
	მედიანა	67.2187	93.4847	82.9187	106.7619	140.9334	127.3254	107.4219	127.0352
	სტანდარტული გადახრა	1.4368	5.2911	3.2107	6.5673	14.5544	10.2641	7.9274	11.7713
	ასიმეტრია	0.3922	0.5933	0.4246	0.5083	0.7547	0.5895	0.6623	0.7180
	ექსცესი	2.6273	3.2905	2.7813	3.0659	3.6788	3.2666	3.4557	3.5822
	მინიმუმი	63.4210	81.1175	74.5270	90.8442	109.8585	103.4875	89.6224	101.4188
	მაქსიმუმი	73.9097	127.5581	99.5813	145.6367	244.6444	191.3280	159.6284	206.0859
DJIA	საშუალო	65.1373	90.4344	80.3288	103.2890	136.3857	123.1046	103.8951	122.8897
	მედიანა	64.9791	89.8488	79.9914	102.6114	134.4373	121.9589	102.9510	121.3780
	სტანდარტული გადახრა	1.3387	4.8536	2.9784	6.0585	13.2730	9.4330	7.2512	10.7473
	ასიმეტრია	0.5371	0.7012	0.5537	0.6196	0.8708	0.6980	0.7714	0.8312
	ექსცესი	2.9073	3.5648	3.0395	3.3143	4.0553	3.5419	3.7657	3.9309
	მინიმუმი	61.6394	79.0390	72.7795	88.5718	107.2303	100.9698	87.3245	98.9513
	მაქსიმუმი	72.0086	123.3116	96.6742	140.5334	246.0768	184.9958	156.3856	206.2260
Nikkei 225	საშუალო	66.3152	94.1171	82.4188	107.5016	146.0945	129.7828	109.3030	130.7835
	მედიანა	66.0735	93.2016	81.9087	106.4799	143.1184	128.0684	107.8481	128.4795
	სტანდარტული გადახრა	1.4555	5.6863	3.2875	6.8583	16.1847	10.9138	8.6203	12.9514
	ასიმეტრია	0.8104	1.0029	0.8076	0.8617	1.2284	0.9539	1.0796	1.1567
	ექსცესი	3.5928	4.5937	3.6811	3.9868	5.5760	4.3511	4.8958	5.2146
	მინიმუმი	62.8383	81.0258	74.6136	91.0351	111.4537	104.2383	89.9137	102.4632
	მაქსიმუმი	76.5972	147.7455	103.9832	159.2550	325.8281	222.0150	192.3588	261.8927

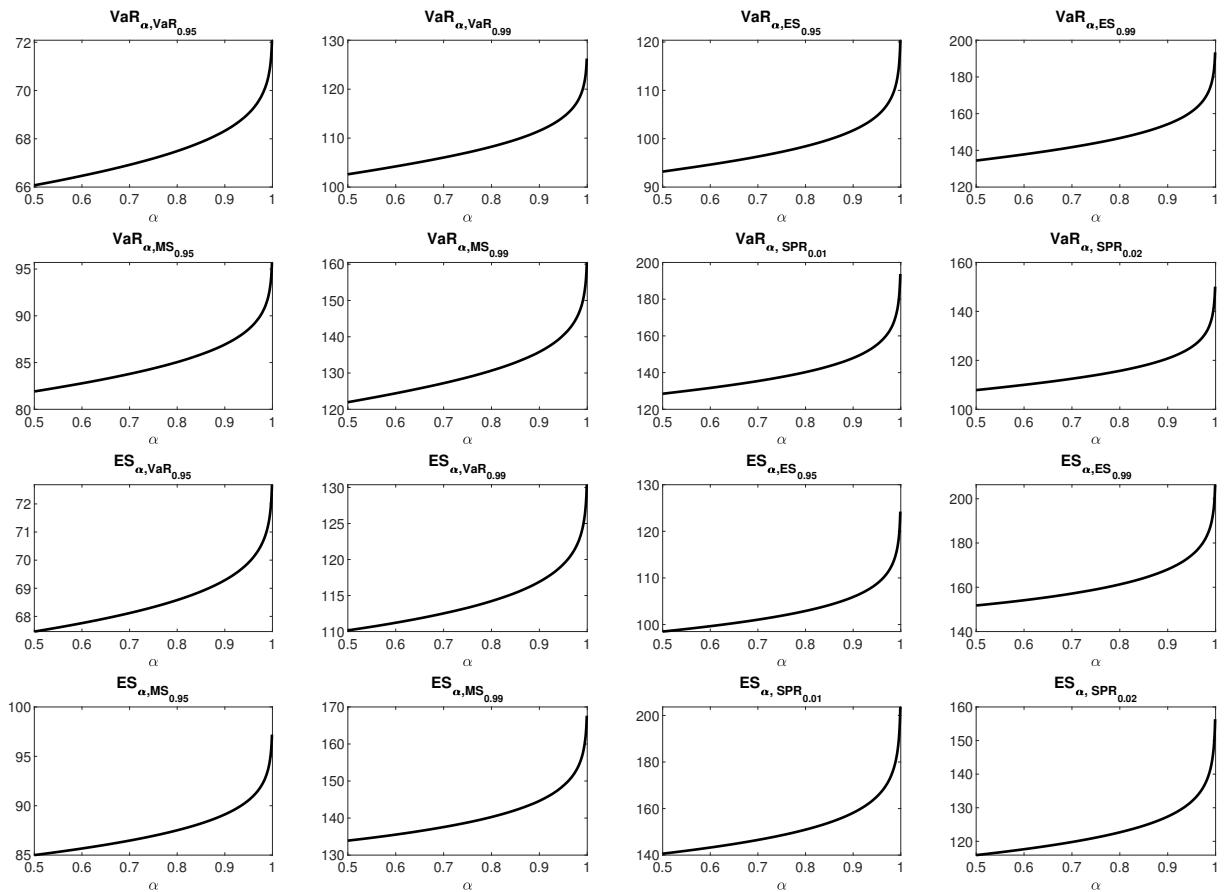
ცხრ. B.4: საბაზრო რისკის ზომების აპოსტერიორული აღწერითი სტატისტიკა



სურ. B.9: სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები S&P 500 საფონდო ინდექსისთვის.

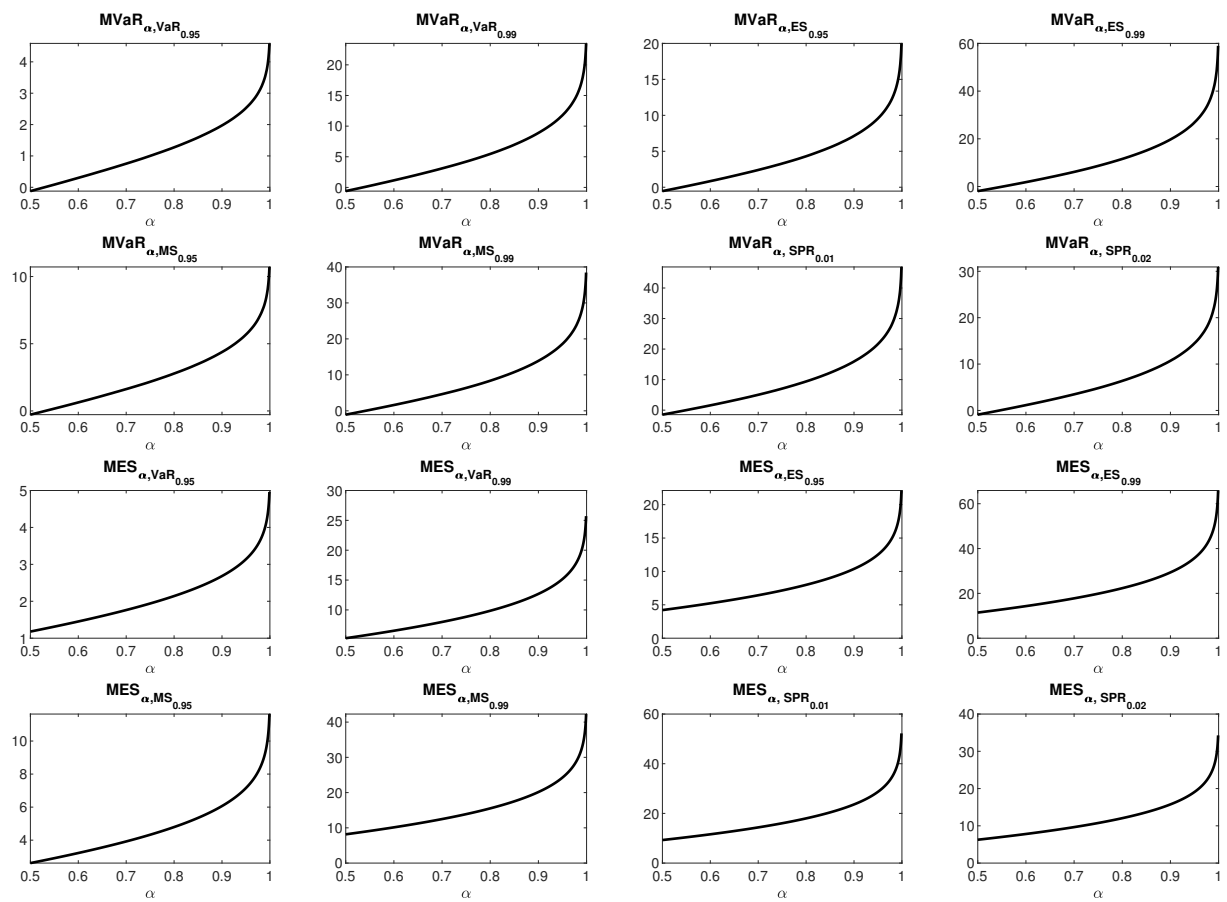


სურ. B.10: სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები DJIA საფონდო ინდექსისთვის.

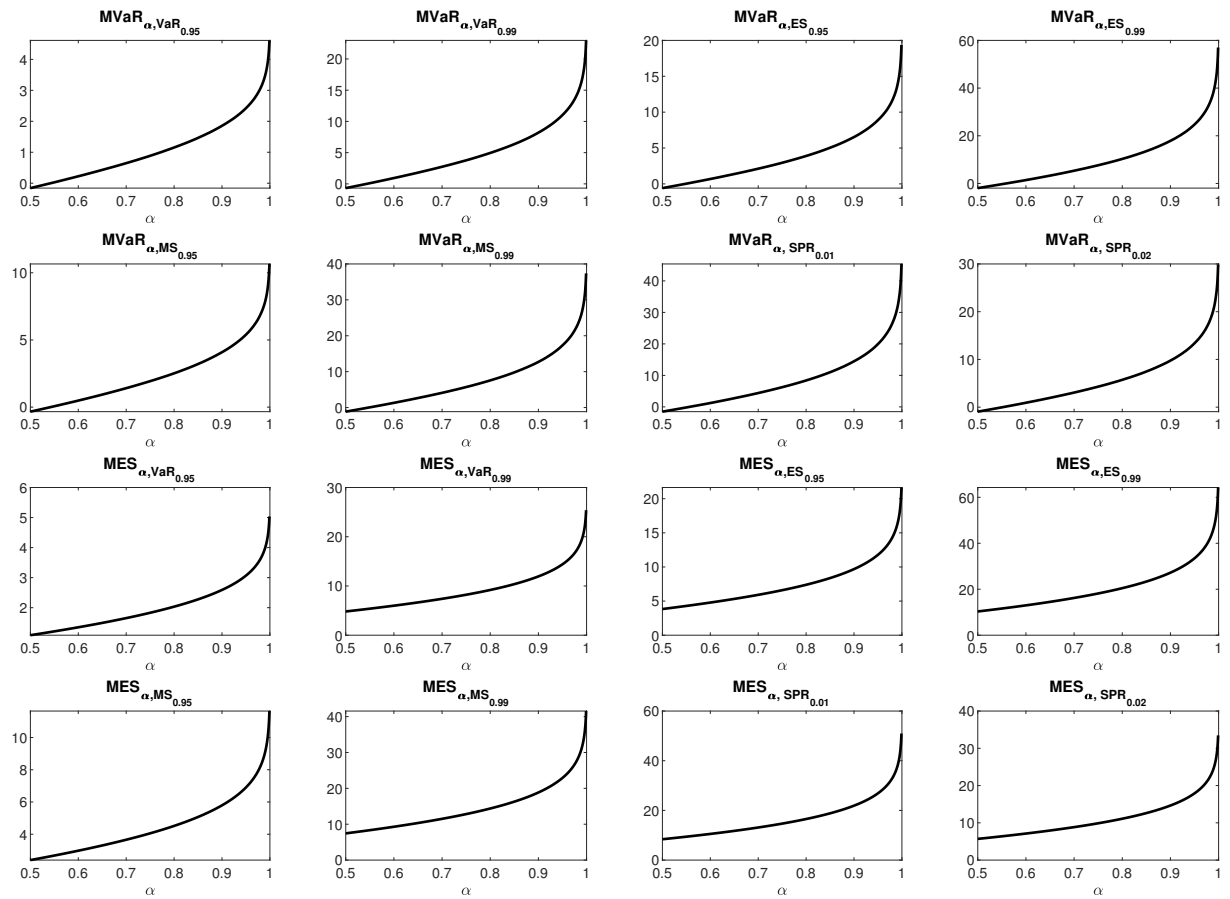


სურ. B.11: სუპერპოზიციური საბაზრო რისკის ზომები Nikkei 225 საფონდო ინდექსის-თვის.

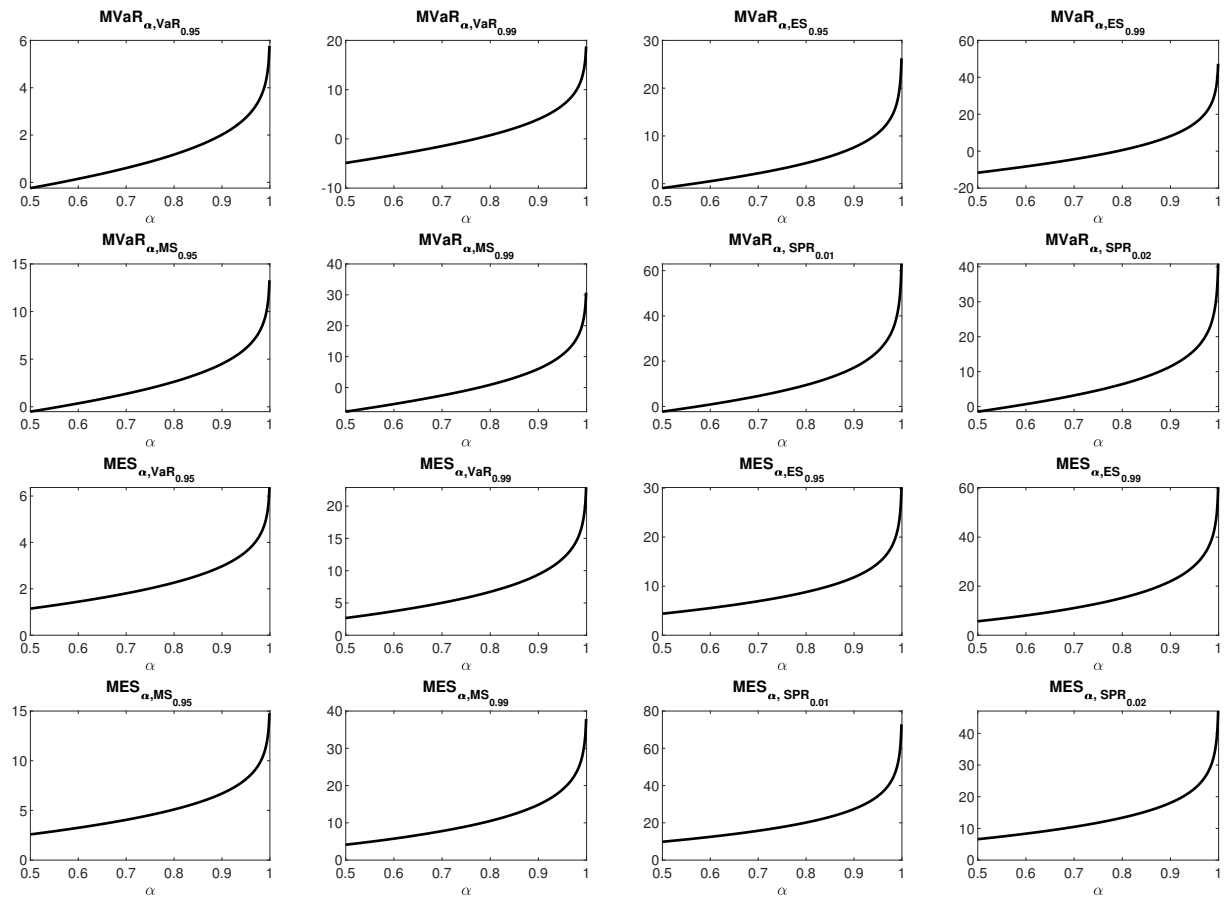
კუდის რისკის მოდელის სუპერპოზიციური ზომები



სურ. B.12: სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები S&P 500 საფონდო ინდექსის-თვის.



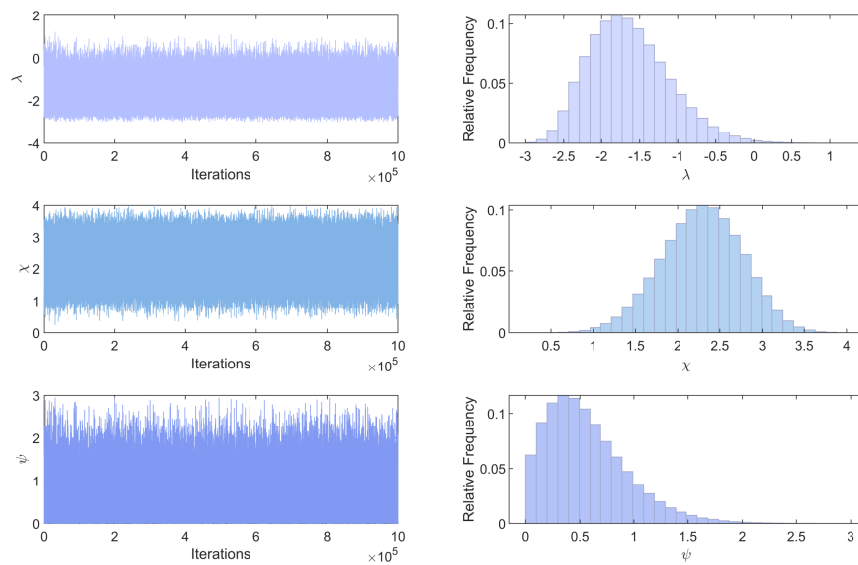
სურ. B.13: სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები DJIA საფონდო ინდექსისთვის.



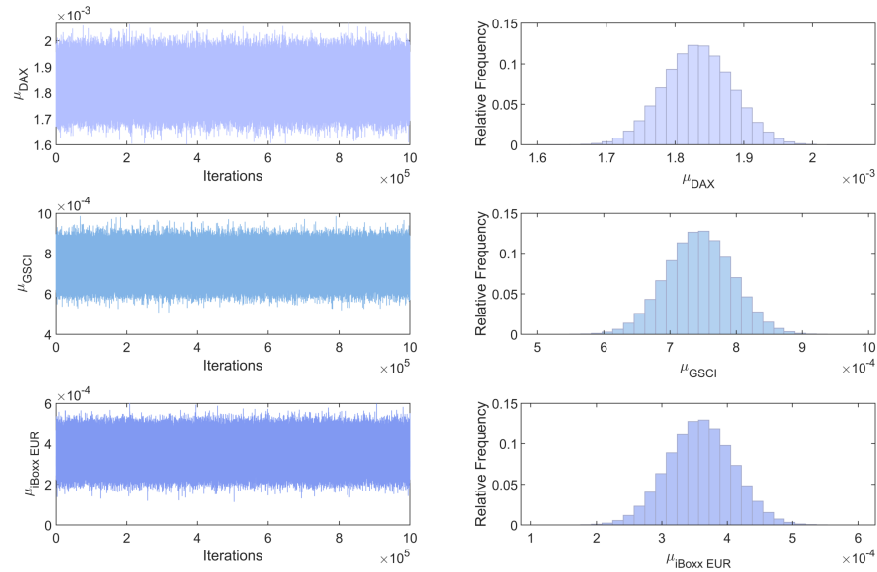
სურ. B.14: სუპერპოზიციური მოდელის რისკის ზომები Nikkei 225 საფონდო ინდექსის-თვის.

დანართი C

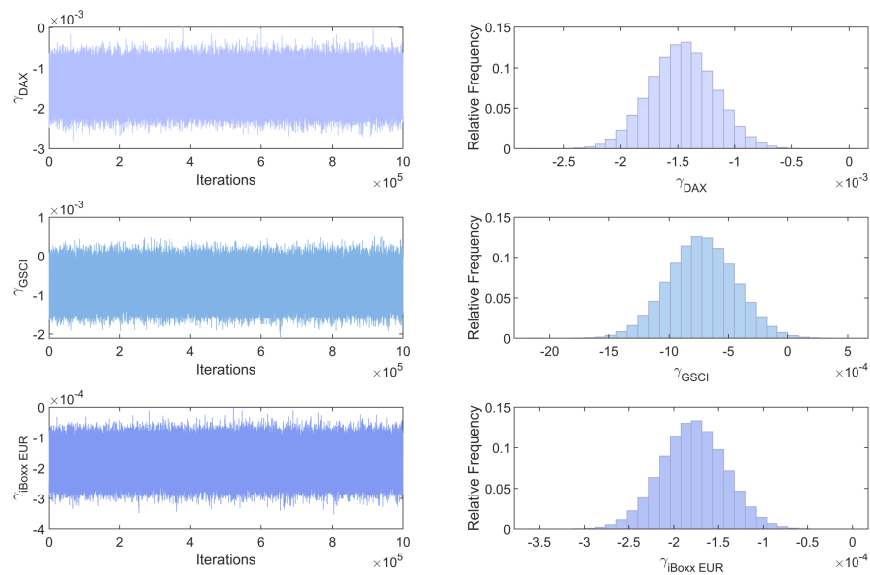
სურათი C.1 აჩვენებს λ , χ , და ψ პარამეტრების შერჩევას და აპოსტერიორულ განაწილებას. სურათები C.2 და C.3 აღწერენ ლოკაციისა და ასიმეტრიის პარამეტრების განაწილებას.



სურ. C.1: mGH განაწილების λ , χ , ψ პარამეტრების შერჩევა და აპოსტერიორული ჰისტოგრამა.

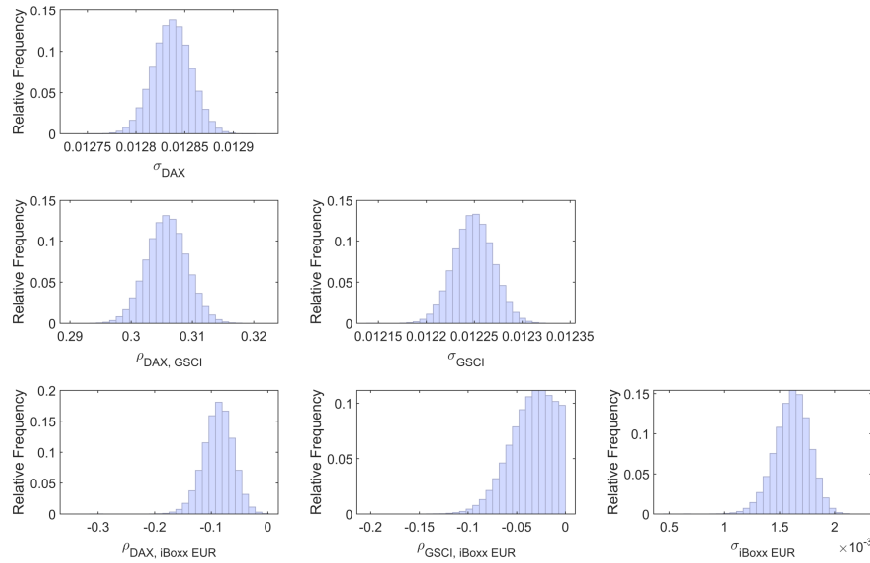


სურ. C.2: mGH განაწილების μ პარამეტრების შერჩევა და აპოსტერიორული ჰისტოგრამა.



სურ. C.3: mGH განაწილების γ პარამეტრების შერჩევა და აპოსტერიორული ჰისტოგრამა.

სურათი C.4 გვიჩვენებს სტანდარტული გადახრების კორელაციების აპოსტერიორულ განაწილებას. აღვნიშნავთ, რომ შედეგები ახლოსაა ისტორიულ მნიშვნელობებთან და განაწილებების დისპერსია მცირეა.



სურ. C.4: ლოგარითმული შემოსავლის სტანდარტული გადახრისა (დიაგონალური ელემენტები) და კორელაციის აპოსტერიორული ჰისტოგრამები.

როგორც ჩანს ყველა MCMC ჯაჭვი კარგად არის შერეული. C.1 ცხრილში შეჯამებულია პარამეტრების აღწერით სტატისტიკა. აპოსტერიორული განაწილებების დისპერცია გაცილებით ნაკლებია ვიდრე შესაბამისი აპრიორული განაწილებების დისპერსია, რაც მიაწინებს ალგორითმის კრებადობაზე. MCMC სიმულაციის უარყოფის კოეფიციენტი არის 0.8147, რაც კარგ შედეგს წარმოადგენს 15– განზომილებიანი პრობლემისთვის. ასევე განხილულია Gelman-Rubin ტესტი MCMC ალგორითმის კრებადობის შესამოწმებლად, იხილეთ მაგ., Gelman et al., 2013; Vrugt et al., 2009. ცხრილი C.2 აღწერს PSRF ფაქტორებს და მათ ზედა 95% ნდობის საზღვრებს. მრავალვარიანტული PSRF არის 1, 0003. PSRF და PSRF-ის ნდობის ზედა საზღვარი ახლოს არის 1-თან, რაც მიუთითებს იმაზე, რომ MCMC ალგორითმი კრებადია.

პარამეტრი	საშუალო	სტანდარტული გადახრა	ასიმეტრია	ექსცესი
λ	-1.6363	0.5279	0.5368	3.2480
χ	2.2851	0.4778	-0.1174	2.8867
ψ	0.5663	0.3743	1.0362	4.4047
μ_{DAX}	0.0018	0.0003	0.0014	2.8918
μ_{GSCI}	0.0007	0.0003	-0.0016	2.6971
μ_{iBoxx}	0.0004	0.0001	-0.0042	3.4169
$\Sigma_{DAX,DAX}$	0.1648e-3	0.8147e-4	-0.0512	2.7923
$\Sigma_{GSCI,GSCI}$	0.1501e-3	0.9058e-4	-0.3941	2.8387
$\Sigma_{iBoxx,iBoxx}$	0.0026e-3	0.1270e-4	0.0718	2.9811
$\Sigma_{DAX,GSCI}$	0.0481e-3	0.9134e-4	-0.0084	3.0285
$\Sigma_{DAX,iBoxx}$	-0.0018e-3	0.6324e-4	0.0267	3.2966
$\Sigma_{GSCI,iBoxx}$	-0.0007e-3	0.1975e-4	0.0866	3.1033
γ_{DAX}	-0.0015	0.0003	-0.0028	3.0283
γ_{GSCI}	-0.0007	0.0003	-0.0057	3.0244
γ_{iBoxx}	-0.0002	0.0001	-0.0049	3.0201

ცხრ. C.1: mGH განაწილების λ, χ, ψ პარამეტრების აპოსტერიორული სტატისტიკა.

პარამეტრი	PSRF	95% PSRF
λ	1.0003	1.0004
χ	1.0002	1.0004
ψ	1.0003	1.0005
μ_{DAX}	1.0002	1.0004
μ_{GSCI}	1.0001	1.0001
μ_{iBoxx}	1.0002	1.0003
$\Sigma_{DAX,DAX}$	1.0001	1.0002
$\Sigma_{GSCI,GSCI}$	1.0001	1.0002
$\Sigma_{iBoxx,iBoxx}$	1.0002	1.0003
$\Sigma_{DAX,GSCI}$	1.0001	1.0001
$\Sigma_{DAX,iBoxx}$	1.0001	1.0004
$\Sigma_{GSCI,iBoxx}$	1.0001	1.0003
γ_{DAX}	1.0001	1.0003
γ_{GSCI}	1.0003	1.0004
γ_{iBoxx}	1.0002	1.0003

ცხრ. C.2: Gelman-Rubin ტესტი mGH პარამეტრებისთვის. PSRF სტატისტიკა და მისი 95% ნდობის ზედა საზღვარი.

ლიტერატურა

- Acerbi, C. (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1505–1518.
- Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1487–1503.
- Aggarwal, A., Beck, M. B., Cann, M., Ford, T., Georgescu, D., Morjaria, N., Smith, A., Taylor, Y., Tsanakas, A., Witts, L., & et al. (2016). Model risk--daring to open up the black box. *British Actuarial Journal*, 21(2), 229–296.
- Alexander, C. (2009). *Market Risk Analysis, Value at Risk Models* (Vol. 4). John Wiley & Sons.
- Alexander, C., & Lazar, E. (2006). Normal mixture GARCH (1, 1): Applications to exchange rate modelling. *Journal of Applied Econometrics*, 21(3), 307–336.
- Alexander, C., & Sarabia, J. M. (2012). Quantile Uncertainty and Value-at-Risk Model Risk. *Risk Analysis*, 32(8), 1293–1308.
- Alexander, C., & Sheedy, E. (2008). Developing a stress testing framework based on market risk models. *Journal of Banking & Finance*, 32(10), 2220–2236.
- An, Y., Assaf, A., & Yang, J. (2007). Hedging volatility risk: the effectiveness of volatility options. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 10(03), 517–534.
- Andersen, T. G. (2000). Some reflections on analysis of high-frequency data. *Journal of Business & Economic Statistics*, 18(2), 146–153.
- Ardia, D., et al. (2008). Financial risk management with Bayesian estimation of GARCH models. *Lecture notes in economics and mathematical systems*, 612.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Balkema, A. A., & de Haan, L. (1974). Residual Life Time at Great Age. *The Annals of Probability*, 2(5), 792–804.
- Bannör, K. F., & Scherer, M. (2013). Capturing parameter risk with convex risk measures. *European Actuarial Journal*, 3(1), 97–132.

- Barndorff-Nielsen, O. (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 353(1674), 401–419.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1997). Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance and stochastics*, 2(1), 41–68.
- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2005). Variation, jumps, market frictions and high frequency data in financial econometrics.
- Barrieu, P., & Scandolo, G. (2015). Assessing financial model risk. *European Journal of Operational Research*, 242(2), 546–556.
- Bauwens, L., & bastien Laurent, S. (2005). A New Class of Multivariate Skew Densities, With Application to Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 23(3), 346–354.
- Bauwens, L., Laurent, S. b., & Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21(1), 79–109.
- Bawa, V. S. (1975). Optimal rules for ordering uncertain prospects. *Journal of Financial Economics*, 2(1), 95–121.
- Bayraktar, E., & Zhou, Z. (2017). Super-hedging american options with semi-static trading strategies under model uncertainty. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 20(06), 1750036.
- Bernard, C., & Tang, J. (2016). Simplified hedge for path-dependent derivatives. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 19(07), 1650045.
- Bernard, C., & Vanduffel, S. (2015). A new approach to assessing model risk in high dimensions. *Journal of Banking & Finance*, 58, 166–178.
- Bervas, A., et al. (2006). Market liquidity and its incorporation into risk management. *Financial Stability Review*, 8(5), 63–79.
- Betz, W., Papaioannou, I., & Straub, D. (2016). Transitional Markov Chain Monte Carlo: Observations and Improvements. *Journal of Engineering Mechanics*, 142(5), 04016016.
- BIS. (2010). Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. Basel Committee on Banking Supervision, Basel.
- BIS. (2011). Revisions to the Basel II market risk framework. Basel Committee on Banking Supervision, Basel.
- BIS. (2012). Fundamental Review of Trading Book. Basel Committee on Banking Supervision, Basel.
- BIS. (2016a). Interest rate risk in the banking book. Basel Committee on Banking Supervision, Basel.

- BIS. (2016b). Minimum capital requirements for market risk. Basel Committee on Banking Supervision, Basel.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637–654.
- Bogle, J. C. (2008). Black Monday and Black Swans. *Financial Analysts Journal*, 64(2), 30–40.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307–327.
- Bollerslev, T., Engle, R. F., & Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of political Economy*, 96(1), 116–131.
- Boubaker, H., & Sghaier, N. (2013). Portfolio optimization in the presence of dependent financial returns with long memory: A copula based approach. *Journal of Banking & Finance*, 37(2), 361–377.
- Boucher, C. M., Daníelsson, J., Kouontchou, P. S., & Maillet, B. B. (2014). Risk models-at-risk. *Journal of Banking & Finance*, 44, 72–92.
- Branger, N., Krauthaim, E., Schlag, C., & Seeger, N. (2012). Hedging under model misspecification: All risk factors are equal, but some are more equal than others... *Journal of Futures Markets*, 32(5), 397–430.
- Breuer, T., & Csiszár, I. (2013). Systematic stress tests with entropic plausibility constraints. *Journal of Banking & Finance*, 37(5), 1552–1559.
- Breuer, T., & Csiszár, I. (2016). Measuring distribution model risk. *Mathematical Finance*, 26(2), 395–411.
- Brogaard, J., Hendershott, T., Hunt, S., & Ysusi, C. (2014). High-frequency trading and the execution costs of institutional investors. *Financial Review*, 49(2), 345–369.
- Brooks, S., Gelman, A., Jones, G., & Meng, X.-L. (2011). *Handbook of Markov chain Monte Carlo*. CRC press.
- Carr, P., Ellis, K., & Gupta, V. (1998). Static Hedging of Exotic Options. *The Journal of Finance*, 53(3), 1165–1190.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., & Yor, M. (2003). Stochastic volatility for Lévy processes. *Mathematical finance*, 13(3), 345–382.
- Carr, P., & Madan, D. (1999). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of computational finance*, 2(4), 61–73.
- Castelloe, J. M., & Zimmerman, D. L. (2002). Convergence assessment for reversible jump MCMC samplers. Department of Statistics and Actuarial Science, University of Iowa, Technical Report, 313.

- Chib, S., & Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. *The American Statistician*, 49(4), 327–335.
- Ching, J., & Chen, Y.-C. (2007). Transitional Markov Chain Monte Carlo Method for Bayesian Model Updating, Model Class Selection, and Model Averaging. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(7), 816–832.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.
- Cont, R. (2006). Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments. *Mathematical Finance*, 16(3), 519–547.
- Coqueret, G., & Tavin, B. (2016). An investigation of model risk in a market with jumps and stochastic volatility. *European Journal of Operational Research*, 253(3), 648–658.
- Cornwell, N., Bilson, C., Gepp, A., Stern, S., & Vanstone, B. J. (2023). The role of data analytics within operational risk management: A systematic review from the financial services and energy sectors. *Journal of the Operational Research Society*, 74(1), 374–402.
- Cowles, M. K., & Carlin, B. P. (1996). Markov Chain Monte Carlo Convergence Diagnostics: A Comparative Review. *Journal of the American Statistical Association*, 91(434), 883–904.
- Crespo, I., Kumar, P., & Noteboom, P. (2017). The evolution of model risk management (tech. rep.). McKinsey Global Institute.
- De Haan, L., & Ferreira, A. (2007). *Extreme value theory: an introduction*. Springer Science & Business Media.
- Deng, X., & Yao, J. (2018). On the property of multivariate generalized hyperbolic distribution and the Stein-type inequality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 47(21), 5346–5356.
- Denneberg, D. (1994). *Non-additive measure and integral* (Vol. 27). Springer Science & Business Media.
- Derman, E. (1996). *Model Risk Quantitative Strategies Research Notes* (April ed.): Goldman Sachs & Co.
- Detering, N., & Packham, N. (2015). Model Risk in Incomplete Markets with Jumps. In K. Glau, M. Scherer, & R. Zagst (Eds.), *Innovations in Quantitative Risk Management* (pp. 39–56). Springer International Publishing.
- Detering, N., & Packham, N. (2016). Model risk of contingent claims. *Quantitative Finance*, 16(9), 1357–1374.
- Diana, C. I. (2015). Fair Value measurement under IFRS 13. *Annals of Constantin Brancusi University of Targu-Jiu. Economy Series*, (3).

- Dicuonzo, G., Galeone, G., Zappimbulso, E., Dell'Atti, V., et al. (2019). Risk management 4.0: The role of big data analytics in the bank sector. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 9(6), 40–47.
- do Nascimento, F. F., & Moura e Silva, W. V. (2016). MCMC4Extremes: Posterior Distribution of Extreme Value Models in R [R package version 1.1].
- Dong, X., Feng, S., & Sadka, R. (2019). Liquidity risk and mutual fund performance. *Management Science*, 65(3), 1020–1041.
- Dooley, M. P., Folkerts-Landau, D., & Garber, P. (2004). The revived Bretton Woods system. *International Journal of Finance & Economics*, 9(4), 307–313.
- Dowd, K. (2007). *Measuring market risk*. John Wiley & Sons.
- Dudley, R. M. (2018). *Real analysis and probability*. Chapman; Hall/CRC.
- Dvorski Lacković, I., Kovšca, V., & Lacković Vincek, Z. (2016). Framework for big data usage in risk management process in banking institutions. *Central European Conference on Information and Intelligent Systems*, 2016, 49–54.
- Eberlein, E. (2001). Application of generalized hyperbolic Lévy motions to finance. In *Lévy processes* (pp. 319–336). Springer.
- Eberlein, E., & Prause, K. (2002). The generalized hyperbolic model: financial derivatives and risk measures. *Mathematical Finance -- Bachelier Congress 2000*, 245–267.
- Edward, F. R. (1999). Hedge Funds and the Collapse of Long-Term Capital Management. *Journal of Economic Perspectives*, 13(2), 189–210.
- Engle, R. (2001). GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics. *Journal of economic perspectives*, 15(4), 157–168.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 987–1007.
- Engle, R. F., & Sheppard, K. (2001). Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH (tech. rep.). National Bureau of Economic Research.
- European Central Bank. (2019). ECB guide to internal Models. Retrieved, 1, 2022.
- Federal Reserve. (2011). Supervisory guidance on model risk management. Board of Governors of the Federal Reserve System, Office of the Comptroller of the Currency, SR Letter, 11–7.
- Ferreira, A., & De Haan, L. (2015). On the block maxima method in extreme value theory: PWM estimators.

- Fioruci, J. A., Ehlers, R. S., & Louzada, F. (2014). BayesDccGarch-An Implementation of Multivariate GARCH DCC Models. arXiv preprint arXiv:1412.2967.
- Fischer, T., Roehrl, A., et al. (2005). Optimization of performance measures based on expected shortfall (tech. rep.). Working paper.
- Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24(2), 180–190.
- Föllmer, H., & Knispel, T. (2011). Entropic risk measures: Coherence vs. convexity, model ambiguity and robust large deviations. *Stochastics and Dynamics*, 11(02n03), 333–351.
- Föllmer, H., & Schied, A. (2016). *Stochastic finance: an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter.
- Fontana, R., Luciano, E., & Semeraro, P. (2021). Model risk in credit risk. *Mathematical Finance*, 31(1), 176–202.
- Gamerman, D., & Lopes, H. F. (2006). *Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. Chapman; Hall/CRC.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2014). *Bayesian data analysis (Vol. 2)*. CRC press Boca Raton, FL.
- Gelman, A., & Rubin, D. B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical science*, 7(4), 457–472.
- Gelman, A., Stern, H. S., Carlin, J. B., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2013). *Bayesian data analysis*. Chapman; Hall/CRC.
- Geweke, J. (1992). Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments. *Bayesian Statistics*, 4, 169–193.
- Geweke, J. (1999). Using simulation methods for Bayesian econometric models: inference, development, and communication. *Econometric Reviews*, 18(1), 1–73.
- Geweke, J. (2005). *Contemporary Bayesian econometrics and statistics (Vol. 537)*. John Wiley & Sons.
- Gilks, W. R. (2005). Markov chain Monte Carlo. *Encyclopedia of Biostatistics*.
- Gilli, M., & kellezi, E. (2006). An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. *Computational Economics*, 27(2), 207–228.
- Glasserman, P., & Xu, X. (2014). Robust risk measurement and model risk. *Quantitative Finance*, 14(1), 29–58.
- Glonti, O., Jaoshvili, V., & Purtukhia, O. (2015). Hedging of European option of exotic type. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*, 168, 25–40.

- Gnedenko, B. (1943). Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire. *Annals of Mathematics*, 44(3), 423–453.
- Green, P. L., & Worden, K. (2015). Bayesian and Markov chain Monte Carlo methods for identifying nonlinear systems in the presence of uncertainty. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 373(2051).
- Green, P. J. (1995). Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination. *Biometrika*, 82(4), 711–732.
- Green, P. J., & Hastie, D. I. (2009). Reversible jump MCMC. Technical Report.
- Green, T. C., & Figlewski, S. (1999). Market Risk and Model Risk for a Financial Institution Writing Options. *The Journal of Finance*, 54(4), 1465–1499.
- Gunjan, A., & Bhattacharyya, S. (2023). A brief review of portfolio optimization techniques. *Artificial Intelligence Review*, 56(5), 3847–3886.
- Haario, H., Laine, M., Mira, A., & Saksman, E. (2006). DRAM: Efficient adaptive MCMC. *Statistics and Computing*, 16(4), 339–354.
- Haario, H., Saksman, E., & Tamminen, J. (1999). Adaptive proposal distribution for random walk Metropolis algorithm. *Computational Statistics*, 14(3), 375–395.
- Haario, H., Saksman, E., & Tamminen, J. (2001). An adaptive Metropolis algorithm. *Bernoulli*, 7(2), 223–242.
- Harlow, W. (1991). Asset Allocation in a Downside-Risk Framework. *Financial Analysts Journal*, 47(5), 28–40.
- Hartig, F., Minunno, F., & Paul, S. (2018). BayesianTools: General-Purpose MCMC and SMC Samplers and Tools for Bayesian Statistics [R package version 0.1.5].
- Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1), 97–109.
- Heidelberger, P., & Welch, P. D. (1983). Simulation run length control in the presence of an initial transient. *Operations Research*, 31(6), 1109–1144.
- Heitfield, E. (2009). Parameter uncertainty and the credit risk of collateralized debt obligations. Available at SSRN 1190362.
- Hellmich, M., & Kassberger, S. (2011). Efficient and robust portfolio optimization in the multivariate generalized hyperbolic framework. *Quantitative Finance*, 11(10), 1503–1516.

- Hellmich, M., Kassberger, S., & Schmidt, W. M. (2013). Credit Modeling Under Jump Diffusions With Exponentially Distributed Jumps--Stable Calibration, Dynamics And Gap Risk. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 16(04), 1350021.
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The review of financial studies*, 6(2), 327–343.
- Hill, J. R. (2019). The top 14 challenges for today's model risk managers: Has the time come to think about going beyond SR11-7? *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, 12(2), 145–167.
- Hull, J., & Suo, W. (2002). A Methodology for Assessing Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37(2), 297–318.
- Jalal, A., & Rockinger, M. (2008). Predicting tail-related risk measures: The consequences of using GARCH filters for non-GARCH data. *Journal of Empirical Finance*, 15(5), 868–877.
- Jokhadze, V., & Purtukhia, O. (2024). Enhancing Tail Risk Measurement: A Practical Approach to Managing Model Risk of Tail Risk. *Bulletin of TICMI*, 28(2), 65–71.
- Jokhadze, V., & Schmidt, W. M. (2020). Measuring model risk in financial risk management and pricing. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 23(02), 2050012.
- Jorion, P. (2009). Risk Management Lessons from the Credit Crisis. *European Financial Management*, 15(5), 923–933.
- Kakouris, I., & Rustem, B. (2014). Robust portfolio optimization with copulas. *European Journal of Operational Research*, 235(1), 28–37.
- Kerkhof, J., Melenberg, B., & Schumacher, H. (2010). Model risk and capital reserves. *Journal of Banking & Finance*, 34(1), 267–279.
- Krokhmal, P., Palmquist, J., & Uryasev, S. (2002). Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *Journal of risk*, 4, 43–68.
- Lagat, F. K., & Tenai, J. (2017). Effect of risk identification on performance of financial institutions. *International Journal of Business Strategies*, 2(1), 75–87.
- Lazar, E., Qi, S., & Tunaru, R. (2024). Measures of model risk for continuous-time finance models. *Journal of Financial Econometrics*, 22(5), 1456–1481.
- Lima, M. A. F., Carvalho, P. C., Fernández-Ramírez, L. M., & Braga, A. P. (2020). Improving solar forecasting using Deep Learning and Portfolio Theory integration. *Energy*, 195, 117016.
- Lo, C. F., Lee, H. C., & Hui, C. H. (2003). A simple approach for pricing barrier options with time-dependent parameters. *Quantitative Finance*, 3(2), 98–107.

- Lo, C.-F., & Hui, C.-H. (2001). Valuation of financial derivatives with time-dependent parameters: Lie-algebraic approach.
- Madan, D. B., Carr, P. P., & Chang, E. C. (1998). The variance gamma process and option pricing. *Review of Finance*, 2(1), 79–105.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Matulich, S., & Currie, D. M. (2008). *Handbook of Frauds, Scams, and Swindles: Failures of Ethics in Leadership*. CRC Press.
- McNeil, A. J. (1999). Extreme value theory for risk managers. Departement Mathematik ETH Zentrum.
- McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach [Special issue on Risk Management]. *Journal of Empirical Finance*, 7(3), 271–300.
- McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P., et al. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools (Vol. 3)*. Princeton university press Princeton.
- Menkveld, A. J. (2013). High frequency trading and the new market makers. *Journal of financial Markets*, 16(4), 712–740.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6), 1087–1092.
- Morini, M. (2011). *Understanding and Managing Model Risk: A practical guide for quants, traders and validators*. John Wiley & Sons.
- Pickands III, J. (1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *Ann. Statist.*, 3(1), 119–131.
- Prause, K., et al. (1999). The generalized hyperbolic model: Estimation, financial derivatives and risk measures [Doctoral dissertation].
- Robert, C. (2007). *The Bayesian choice: from decision-theoretic foundations to computational implementation*. Springer Science & Business Media.
- Roberts, G. O., Rosenthal, J. S., et al. (2004). General state space Markov chains and MCMC algorithms. *Probability Surveys*, 1, 20–71.
- Rocco, M. (2014). EXTREME VALUE THEORY IN FINANCE: A SURVEY. *Journal of Economic Surveys*, 28(1), 82–108.
- Ruozzi, R., Ferrari, P., Ruozzi, R., & Ferrari, P. (2013). *Liquidity risk management in banks: economic and regulatory issues*. Springer.

- Schoutens, W., Simons, E., & Tistaert, J. (2004). A perfect calibration! Now what? *Wilmott Magazine*, 66–78.
- Sewell, M. (2011). Characterization of financial time series. Research Note RN/11/01, Department of Computer Science, UCL, London.
- Sibbertsen, P., Stahl, G., & Luedtke, C. (2008). Measuring model risk (tech. rep.). Diskussionsbeitrag.
- Smith, A. F., & Roberts, G. O. (1993). Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 3–23.
- Souza, C. (2023). AI model risk: What the current model risk management framework can teach us about managing the risks of AI models. *Journal of Financial Compliance*, 6(2), 103–112.
- Sriboonchita, S., Wong, W.-K., Dhompongsa, S., & Nguyen, H. T. (2009). Stochastic dominance and applications to finance, risk and economics. CRC Press.
- Tankov, P. (2003). Financial modelling with jump processes. CRC press.
- Tarashev, N. (2010). Measuring portfolio credit risk correctly: Why parameter uncertainty matters. *Journal of Banking & Finance*, 34(9), 2065–2076.
- Tchankova, L. (2002). Risk identification--basic stage in risk management. *Environmental management and health*, 13(3), 290–297.
- ter Braak, C. J. F. (2006). A Markov Chain Monte Carlo version of the genetic algorithm Differential Evolution: easy Bayesian computing for real parameter spaces. *Statistics and Computing*, 16(3), 239–249.
- ter Braak, C. J. F., & Vrugt, J. A. (2008). Differential Evolution Markov Chain with snooker updater and fewer chains. *Statistics and Computing*, 18(4), 435–446.
- Tertre, M. G. (2023). Structural changes in energy markets and price implications: effects of the recent energy crisis and perspectives of the green transition. *ECB Central Banking Forum*, 27.
- Tierney, L. (1994). Markov Chains for Exploring Posterior Distributions. *The Annals of Statistics*, 22(4), 1701–1728.
- Trebbi, F., & Xiao, K. (2019). Regulation and market liquidity. *Management Science*, 65(5), 1949–1968.
- Turfus, C. (2018). Quantifying correlation uncertainty risk in credit derivatives pricing. *International Journal of Financial Studies*, 6(2), 39.

- Vrugt, J. A. (2016). Markov chain Monte Carlo simulation using the DREAM software package: Theory, concepts, and MATLAB implementation. *Environmental Modelling & Software*, 75, 273–316.
- Vrugt, J. A., ter Braak, C. J. F., Diks, C., Robinson, B. A., Hyman, J. M., & Higdon, D. (2009). Accelerating Markov chain Monte Carlo simulation by differential evolution with self-adaptive randomized subspace sampling. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(3), 273–290.
- Vrugt, J. A., & Ter Braak, C. J. (2011). DREAM (D): an adaptive Markov Chain Monte Carlo simulation algorithm to solve discrete, noncontinuous, and combinatorial posterior parameter estimation problems. *Hydrology and Earth System Sciences*, 15(12), 3701–3713.
- Wade, R. (1998). The Asian debt-and-development crisis of 1997-?: Causes and consequences. *World Development*, 26(8), 1535–1553.
- Wasserman, L. (2000). Bayesian Model Selection and Model Averaging. *Journal of Mathematical Psychology*, 44(1), 92–107.