ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ფსიქოლოგიისა და განათლების მეცნიერებათა ფაკულტეტი

განათლების მეცნიერებების სადოქტორო პროგრამა

დავითი წამალაშვილი

ფუნქციის სწავლების საკითხები ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საბაზო და საშუალო საფეხურზე

განათლების მეცნიერებათა დოქტორის (PH.D) აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თეიმურაზ ვეფხვაძე
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თბილისი
2019

ანოტაცია

წინამდებარე კვლევის მიზანს წარმოადგენს ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში ფუნქციის საკითხების სწავლების მეთოდიკური ხედვების შემუშავება. სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი ძირითადი თავის, დასკვნებისა და რეკომენდაციებისგან.

პირველი თავი ეთმობა ფუნქციის რაობას ისტორიულ კონტექსტში, მისი დაფუძნების საკითხებს სასკოლო ლიტერატურაში და ფუნქციის ადგილსა და დანიშნულებას მათემატიკის სწავლებისას.

მეორე თავში ძირითადად მიმოხილულია ფუნქციის თვისებებისა და მასთან დაკავშირებული თემების სწავლების მომენტები, საგაკვეთილო კაზუსები. განხილულია საგაკვეთილო პროცესში წამოჭრილი პრობლემები, და მასთან გამკლავების გზები.

ბოლო, მესამე თავში განხილულია კვლევის მეორე ეტაპის, განათლების ექსპერტებთან და მასწავლებლებთან სიღრმისეული ინტერვიუს, შედეგები. ბოლოს კი, შეჯამებულია კვლევითი ნაშრომის შედეგები, ასევე, წარმოდგენილია დასკვნები და რეკომენდაციები. დისერტაციას თან ერთვის გამოყენებული ლიტერატურის სია.

ვფიქრობთ, აღნიშნულ შრომაში განხილული საგაკვეთილო სიტუაციები, რომლებმაც ნებისმიერ დროს შეიძლება იჩინოს თავი, წაადგებათ მათემატიკის მასწავლებლებს საკუთარ პრაქტიკულ საქმიანობაში.

Annotation

The purpose of this research study is to develop methodological approaches of teaching function issues in Secondary schools - what the teacher should emphasize in the process of teaching function to make knowledge dynamic and what means will contribute to the development of such knowledge.

The Dissertation includes an introduction, three main chapters, conclusions and recommendations.

The first chapter deals with the concept of a function in historical context, its introduction into school literature, and the position and role of a function in the teaching of mathematics.

The second chapter mainly overviews the properties of a function and teaching moments of the related issues. It discusses the problems encountered in the teaching process and the ways of how to deal with them.

The last, third chapter focuses on the results of the second phase of the research study, namely the in-depth interviews with education experts and teachers. Finally, the results of the research paper are summarized. There are also conclusions and recommendations presented. A list of used literature is attached to the dissertation.

We believe that the lesson situations discussed in this study, which may arise at any time, will contribute to mathematics teachers in their practical work.

შინაარსი

შესავალი

მათემატიკის საკითხების მრავალფეროვნებაში ფუნქცია წარმოადგენს იმ ძირითად თემას, რომელიც ზოგადსაგანმანათლებლო თუ უმაღლესი სკოლის მათემატიკის შესწავლის მთავარი საკითხია. არაფერს ვამბობთ იმ გარემოებაზე, რომ ფუნქციის შესწავლამ, მისი იდეის გაფართოებამ მათემატიკაში, ერთი შეხედვით, სრულიად განსხვავებულ მიმართულებებზე, მაგალითად, ალგებრასა და გეომეტრიაზე, ერთიანი ხედვა ჩამოაყალიბა. შესაბამისად, მათი შესწავლის ერთიანი აპარატი შეიქმნა. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მათემატიკა „ერთი მეცნიერება გახდა" და მისი დაყოფა მხოლოდ ფორმალურ ხასიათს ატარებს და არა - კონცეპტუალურს. მეცნიერების მონაპოვარი, დროთა განმავლობაში, ისე უნდა მუშავდებოდეს, რომ შესაძლებელი იყოს მისი სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში. რა თქმა უნდა, ყველა საკითხის სწავლება სასკოლო საფეხურზე შეუძლებელია, წარმოუდგენელია და არცაა მიზანშეწონილი, თუმცა ამას ვერ ვიტყვით ფუნქციაზე. მისი შესწავლა იმ დროს გვაქვს უკვე დაწყებული, რომ მათემატიკის შესახებაც შეიძლება არაფერი ვიცოდეთ. რა გასაკვირია, რომ ჩვენი ყოველდღიურობა თავის თავში მოიცავს ფუნქციის არსს და, ვფიქრობთ, ადამიანი სანამ ცაში დაიწყებდეს ყურებას და, დავუშვათ, გალაქტიკის შესწავლას, ჯერ საკუთარი თავის შემეცნებით უნდა დაიწყოს. ფილოსოფიის ისტორია ამისი დასტურია. სასკოლო საფეხურზე ფუნქციის შესწავლა პირველივე კლასიდან იწყება, თუმცა ტერმინოლოგიის გარეშე. აქ მისი შესწავლა პროპედევტიკულ ხასიათს ატარებს. ის იმდენად ნათლად შემოდის მათემატიკის კურსში, იმდენად ორგანულია მოსწავლისათვის, რომ ჩნდება კითხვა, თითქოს მათემატიკის აბსტრაქტული ბუნების გამო რამდენადაა მათემატიკის შესწავლის საგანი.

სამყაროში ყველაფერი რაღაცასთან მიმართებაშია, რაღაც შესაბამისობაშია, ფუნქციონალურად დამოკიდებულია ერთმანეთზე. წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის ავტორისთვის სამეცნიერო ხარისხის მინიჭებაც თვით შესრულებული სადისერტაციო ნაშრომის ხარისხის ფუნქციაა. ზედმეტმა ლირიკულობამ, რომ ხარისხის შესუსტება არ გამოიწვიოს, ვიტყვით მხოლოდ იმას, რომ რაოდენ მნიშვნელოვანია საკითხის შესწავლა და მისი სწავლების საკითხებზე კიდევ ერთხელ

დაფიქრება. თვითონ ფუნქციის ცნება, მისი სასკოლო ლიტერატურაში დაფუძნების საკითხი და ადგილი არაერთი მათემატიკოსის შესწავლის საკითხი გამხდარა, რაზეც ვრცლად შემდგომ ვისაუბრებთ, აქ კი ყურადღება გვინდა გავამახვილოთ ერთ საინტერესოზე ფაქტზე: 1908 წელს, რომში გამართულ მათემატიკის საერთაშორისო კონგრესზე ფელიქს კლაინმა ჩამოაყალიბა ძირითადი პრინციპები, თუ რა როლი და ადგილი უკავია ფუნქციას სასკოლო (ელემენტარულ) მათემატიკაში: „ჩვენ მივილტვით, რომ მათემატიკის სწავლებაში ბაზისი გახდეს ფუნქცია, იმიტომ რომ ეს არის ცნება, რომელმაც ბოლო ორასი წლის მანძილზე დაიკავა ცენტრალური ადგილი ყველგან, სადაც კი შევხვდებით მათემატიკას. ჩვენი მიზანია ამ ცნების გამომუშავება იმდენად ადრე, როგორც კი ეს იქნება შესაძლებელი, სადაც ყოველთვის გამოვიყენებთ თითოეული დამოკიდებულების გრაფიკულ გამოსახვას xOy მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში, რომელიც მათემატიკის ყველა პრაქტიკულ ასპექტში გამოიყენება“... ასევე, კლაინს სურდა რომ ფუნქციონალური დამოკიდებულება შემოვიტანოთ არა აბსტრაქტული ცნებით, არამედ კონკრეტული მაგალითებით (ამ იდეას ავითრებს ანდრეი კოლმოგოროვიც თავის შესანიშნავ სტატიაში “რა არის ფუნქცია”, და ამბობს „ფუნქცია უნდა გახდეს მოსწავლეთათვის კუთვნილება, ამ ცნებამ ფერმენტივით უნდა შეაღწიოს ელემენტარული მათემატიკის სწავლებაში“.

ვფიქრობთ, ნებისმიერი საკითხის შესწავლა ნებისმიერ მეცნიერებაში ყოველთვის აქტუალურია, თუნდაც იმისთვის, რომ ავტორისეულ ხედვებს გავეცნოთ. მაგრამ უფრო მნიშვნელოვანია და აქტუალურია ისეთი საკითხების შესწავლა, რომელიც სადავო მომენტებს შეიცავს გარკვეული თვალსაზრისით, რომლის სწავლების შესახებაც დღემდე აზრთა დიდი სხვადასხვაობაა, რომელიც მსოფლიოს მასშტაბით განსჯის საგანს წარმოადგენს, საკითხი, რომელიც მათემატიკოსთა ყველა კონგრესის მთავარ საკვლევ თემატიკაშია, რომლის შესწავლაც იწვევდა სახელმძღვანელოების ცვლილებას დროის ძალიან მცირე ინტერვალებში, საკითხი, რომლის რაობაზეც სხვადასხვა ლიტერატურაში განსხვავებული თვალსაზრისი შეგვხვდება, საკითხი, რომელიც მოსწავლეებში დიდ დაბნეულობას იწვევს, საკითხი, რომელიც მოსწავლეთა მთელი მათემატიკური ცოდნის გააქტიურებას უწყობს ხელს და

საკითხი, რომელიც არა მხოლოდ მაღალი სააზროვნო უნარების განვითარებაში ეხმარება მათ, არამედ პრაქტიკული და ცხოვრებისეული ამოცანების გადაჭრის საშუალებას აძლევს. საკითხი, რომელიც ცოდნის სამივე კატეგორიის - დეკლარატიული, პროცედურული და პირობისეული - შეძენას უწყობს ხელს, ჩვენი მხრიდან მისი სწავლების საკითხების შესწავლა ნამდვილად **აქტუალურია**.

ბოლო რამდენიმე ათეული წელია (საბჭოთა კავშირის დაშლის შემდგომ), საქართველო საკუთარი ქართული სახელმძღვანელოების შექმნას იწყებს და საქართველოში მათემატიკის სწავლება სრულიად სხვა საფეხურზე გადადის და „ღალატობს" წლების მიერ აპრობირებულ პროგრამებსა და სწავლების მეთოდებს. ქვეყანამ, რომელსაც განათლების კუთხით სურს, რომ ევროპულ ქვეყანათა ოჯახის სრულუფლებიანი წევრი გახდეს, ბევრ გამოწვევას უნდა გაუძლოს. ამ წლების განმავლობაში სასკოლო მათემატიკაში ტრადიციული საკითხების გვერდით შემოდის ისეთი თემების სწავლება, რომლებიც უჩვეულო იყო მასწავლებლებისთვის, და შესაბამისად, მოსწავლეთათვისაც. ასევე, ყველა საერთაშორისო კვლევა [PISA, 2009., TEDS-M, 2010., TIMSS, 2011., TALIS, 2015., სახელმწიფო შეფასება, მათემატიკა - IX კლასი, 2016] მხოლოდ და მხოლოდ იმას უსვამს ხაზს, რომ საქართველო უბრალოდ ვერ იქნება განათლების კუთხით არათუ ლიდერ ქვეყნებში, არამედ ძალიან დიდი გზა აქვს გასავლელი საშუალო ნიშნულამდეც კი. სწორედ ამ ფაქტორების გამო, ვფიქრობთ, მეთოდიკური ხასიათის ნაშრომები ძალიან წაადგება საქართველოში მოღვაწე მოქმედ თუ დამწყებ მასწავლებლებს. წინამდებარე ნაშრომის **სიახლეს** ზუსტად ეს ასპექტები წარმოადგენს.

კვლევის მიზანია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში ფუნქციის საკითხების სწავლების მეთოდიკური ხედვების შემუშავება.

კვლევის ამოცანებია:

- მეორადი ინფორმაციის შესწავლა:
    - ✓ შევისწავლოთ ფუნქციის დაფუძნების საკითხი ისტორიულად და, კონკრეტულად, ფუნქციის დაფუძნების საკითხი სასკოლო სახელმძღვანელოებში;

- ✓ საკითხთან დაკავშირებული კვლევების შესწავლა; საერთაშორისოდ აღიარებული მეთოდიკური ლიტერატურისა და ეროვნული სასწავლო გეგმის მათემატიკის სტანდარტის შესწავლა;
- ✓ მათემატიკის სტანდარტის, სკოლის საბაზო და საშუალო საფეხურის გრიფმინიჭებული სასკოლო სახელმძღვანელოების, მასწავლებელთა გამოცდილებებისა და ერთიანი ეროვნული გამოცდების მათემატიკის ტესტების ანალიზი.

- ემპირიული კვლევის ჩატერება - საქართველოში მოქმედ მათემატიკის მასწავლებელთა და დარგის ექსპერტთა მოსაზრებების შესწავლა და გაანალიზება - ჩაღრმავებული ინტერვიუ.
- კვლევის შედეგების ანალიზი და რეკომენდაციების შემუშავება

ნაშრომის კვლევის საგანია ფუნქციის სწავლების საკითხები ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საბაზო და საშუალო საფეხურზე, შესაბამისად, **კვლევის ობიექტს** წარმოადგენს ფუნქციის სწავლების პროცესი ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საბაზო და საშუალო საფეხურზე.

კვლევის მეთოდები: თვისებრივი კვლევა – სამაგიდე კვლევა /მეორადი ინფორმაცია/, სიღრმისეული ინტერვიუ - ნახევრად სტრუქტურირებული.

რესპოდენტთა შერჩევა: საქართველოს განათლების სფეროში მოღვაწე ექსპერტები, მეცნიერები და მათემატიკის მასწავლებლები.

კვლევის შედეგები გაწერილია ნაშრომის კვლევით ნაწილში.

კვლევის შედეგების პრაქტიკული და თეორიული ღირებულება: კვლევაში წარმოდგენილი და შესწავლილი მასალის ანალიზი, დასკვნები და რეკომენდაციები ხელს შეუწყობს მათემატიკის უკვე მოქმედ და დამწყებ მასწავლებლებს, რათა ფუნქციის სწავლებისას საკუთარი გაკვეთილი გახადონ უფრო საინტერესო, მოტივაცია აუმაღლონ მოსწავლეებს და თვითონ, როგორც განათლების სფეროს მუშაკები, კიდევ ერთხელ დაფიქრდნენ სწავლა-სწავლების თავისებურებებზე. შესაბამისად, კვლევა, რომელიც ეხება ფუნქციის სწავლებას, შეიძლება გახდეს, მათი მხრიდან, მათემატიკაში შესასწავლი სხვა საკითხების მეთოდიკური თვალსაზრისით დანახვის ერთგვარ გზამკვლევი. ფუნქციისა და ფუნქციის სწავლების ისტორიულ

ჭრილში განხილვის მცდელობა, რეფორმის უპირატესობები და თანმხლები პრობლემები, დღევანდელი გარემოება ფუნქციის სწავლების თვალსაზრისით და მოქმედი სახელმძღვანელოების ანალიზი განათლების სფეროში მოღვაწე ნებისმიერი პირისთვის დამაფიქრებელ გარემოებად გამოდგება. ეს კი, თითოეული ნაბიჯის სწორად გააზრებას შეუწყობს ხელს, რაც, ვფიქრობთ, კვლევის მთავარი ნიშა იქნება.

თავი I. ფუნქციის რაობა, ისტორიული კონტექსტი და სასკოლო ლიტერატურაში დაფუძნების საკითხები

§1.1. ფუნქციის ცნების ფორმირების ისტორიის საკითხები

ფუნქცია XVII საუკუნიდან მათემატიკაში გვევლინება უძირითადეს ცნებად და შეიძლება ითქვას კიდეც, რომ მას მერე მათემატიკის ისტორია თავის თავში გულისხმობს ფუნქციის ისტორიას, რამეთუ ფუნქცია შეიჭრა არამარტო მათემატიკის სხვადასხვა დარგში და უამრავი ახალი დისციპლინა და დარგი ჩამოაყალიბა, არამედ ფუნქცია მათემატიკის გარდა სხვა დისციპლინების შესწავლის საგანიც გახდა. ცხადია, ფუნქციის ცნების წარმოშობის, ჩამოყალიბების, განვითარებისა და თანამედროვე ტენდენციების გაცნობა ყოველი მათემატიკოსისათვის საინტერესო და აუცილებელი უნდა იყოს. მათემატიკის მასწავლებელი მოვალეა იცოდეს ცნებათა ჩამოყალიბების ისტორიული რაკურსი, რომ არაფერი ვთქვათ, ცნების სკოლაში სწავლების მეცნიერულ საფუძვლებზე.

ფუნქციონალური დამოკიდებულება მატემატიკის, როგორც მეცნიერების ჩახასხვის პერიოდშიც კი გვხვდება. „ფუნქციის ცნება თავისი ფესვებით იმ უძველეს ეპოქას ეკუთვნის, როდესაც ადამიანები პირველად მიხვდნენ, რომ მათი გარემომცველი მოვლენები ურთიერთდამოკიდებულია“ [Виленкин, 1985]. ყველაფერი მათემატიკაში ხომ ცხოვრებისეული სიტუაციების „დაკვეთით შემოდის“, შემდგომ შესწავლის საგნად იქცევა, ვითარდება და ფუძნდება მეცნიერებაში. დაახლოებით ხუთი ათასი წლის წინ ბაბილონელები თვლიდნენ, რომ წრის ფართობი არის მისი რადიუსის ფუნქცია. ანუ, უფრო კარგად რომ ჩამოვაყალიბოთ, წრის ფართობი დამოკიდებულია რადიუსის სიგრძეზე - თუ ვიცით რადიუსი, გვეცოდინება ფართობიც. ისინი, წრის ფართობს უხეშად ითვლიდნენ ფორმულით: $S = 3\,r^2$. ელემენტარული ფიგურების ფართობებისა და მოცულობების გამოთვლა შეგვიძლია ჩავთვალოთ ფუნქციონალური დამოკიდებულების საწყისად, თუმცა ამ პროცესის ფესვები უფრო ადრეა საძებნი, მაგალითად რიცხვებზე მოქმედებების შესახებ პირველსავე წესებში.

ძველი ბერძენი ისტორიკოსი ჰეროდოტე წერდა, რომ ეგვიპტელი მეფეები, რომლებმაც გაუნაწილეს მიწები ეგვიპტელებს, მათგან გადასახადებს იღებდნენ

ყოველწლიურად, რომელიც მიწის ნაკვეთის პროპორციული იყო. რა თქმა უნდა, არც ეგვიპტელ მეფეთაგან, არც მიწის მესაკუთრეთაგან, არც თვით ჰეროდოტეს ტერმინი „ფუნქცია" არ წარმოუთქვამთ, მაგრამ საქმე გვაქვს დამოკიდებულებასთან, როდესაც მიწის გარკვეულ ნაკვეთს შეესაბამება გადასახადის გარკვეული რაოდენობა. რაც შეეხება სიდიდეთა კავშირების გრაფიკულ წარმოდგენებს, უკვე გვხვდება ალექსანდრიის სკოლის მათემატიკოსებთან.

სკოლის სახელმძღვანელოებში ფუნქციის მოცემის სამ ძირითად საშუალებას გვთავაზობენ ხოლმე: ფორმულის, ცხრილისა და გრაფიკის სახით. ჩვენ უკვე მოვიყვანეთ ფუნქციის მოცემის მაგალითი ფორმულით. რაც შეეხება, ფუნქციის ცხრილის სახით მოცემას, ამის მაგალითად შეგვიძლია მივიჩნიოთ ბაბილონელების, ძველი ბერძნებისა და ინდოელების ასტრონომიული ცხრილები, ხოლო ფუნქციის სიტყვიერად მოცემის მაგალითად კი შეიძლება ჩაითვალოს თეორემა წრის ფართობის მისსავე დიამეტრთან დამოკიდებულებაზე. ამ პერიოდს ფუნქციის ცნების ისტორიაში პროპდევტიკულ პერიოდად მოიხსენებენ ხოლმე და გრძელდება XVII საუკუნემდე. როგორც ჩანს, საკმაოდ დიდი პერიოდი განვლო ფუნქციის ცნების ისტორიამ, სანამ ახალ საფეხურზე გადავიდოდა. შემდგომი პერიოდები კი უფრო მეტი სისწრაფით ცვლის ფუნქციის იდეას.

XVII საუკუნიდან მოყოლებული, ფუნქციის ცნების შემოტანა ხდება მისი მექანიკური და გეომეტრიული წარმოდგენებით. ამ პერიოდში ცვლადი სიდიდეების „შემოჭრამ" მათემატიკაში, შეცვალა ფუნქციაზე მათემატიკოსთა წარმოდგენები. ფუნქციის ახლებურად გააზრების მესვეურებად ითვლებიან ფრანგი მატემატიკოსები ფრანსუა ვიეტი და რენე დეკარტი. ეს ის დიდი მათემატიკოსები არიან, ვინც მათემატიკაში ასოითი აღნიშვნები შემოიტანეს და რომელმაც საყოველთაო აღიარება მოიპოვა. ისინი ცვლადებს აღნიშნავდნენ ლათინური ანბანის ბოლო ასოებით : x, y და z, ხოლო მუდმივებს - პირველი ასოებით : a, b და c. თითოეული ასო მათთვის არ წარმოადგენდა კონკრეტულ მონაცემს, ამიტომაც მათემატიკაში შემოდის ცვლილების იდეა და რამაც შესაძლებელი გახადა ზოგადი ფორმულების ჩაწერა.

1637 წელს გამოცემულ „გეომეტრიაში" დეკარტე უკვე გვაძლევს ფუნქციის განმარტებას, როგორც წერტილის ორდინატის ცვლილებას მისსავე აბსცისის

ცვლილებასთან დამოკიდებულებაში. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სახელმძღვანელოებში, მართალია, დეკარტეს სახელს ატარებს, თუმცა მის შემოტანაში უდიდესი წვლილი მიუძღვის ასევე ფრანგ მათემატიკოსს, პიერ ფერმას. დეკარტე საკუთარ შრომებში მხოლოდ ისეთ წირებს განიხილავდა, რომლებიც ალგებრული განტოლებით შეიძლებოდა რომ ჩაწერილიყო. ეს ხომ უკვე იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის მოცემა ამ პერიოდში შესაძლებელი იყო ანალიზურად.

1671 წელს უკვე ისააკ ნიუტონი ფუნქციას იაზრებს, როგორც ცვლად სიდიდეს, რომელიც იცვლება დროის ცვლასთან ერთად და მას „ფლუენტებს" უწოდებს. ამ პერიოდში ფუნქციის იდეას ჰქონდა მხოლოდ ინტუიციური ხასიათი და გეომეტრიულ და მექანიკურ წარმოდგენებთან იყო დაკავშირებული. ზოგადად, ტერმინი „ფუნქცია" (ლათინურად functio - მოხდენა, შესრულება) პირველად გამოიყენა გერმანელმა მათემატიკოსმა გოტფრიდ ვილჰელმ ლაიბნიცმა 1673 წელს ჰიუგენსისადმი მიწერილ წერილში, სადაც მას ფუნქცია გაგებული ჰქონდა როგორც მონაკვეთი, რომლის სიგრძეც გარკვეული კანონით იცვლება, რომელიც გამოქვეყნდა 1694 წელს. 1698 წლიდან მოყოლებული ლაიბნიცს შემოაქვს ტერმინები „ცვლადი" და „მუდმივა".

XVIII საუკინიდან ფუნქციის გააზრება ხდება, როგორც ფორმულის, რომელიც ერთ ცვლადს აკავშირებს მეორე ცვლადთან. ესაა ზუსტად ფუნქციის გაგების ანალიზური ხედვა. 1718 წელს ასეთ განსაზღვრებას გვთავაზობს შვეიცარიელი მათემატიკოსი იოჰან ბერნული: „ცვლადი სიდიდის ფუნქციას უწოდებენ ანალიზურ გამოსახულებას, რომელიც წარმოიქმნება ცვლადი სიდიდეების და მუდმივების ურთიერთკავშირის რაიმე წესით". ფუნქციას ის აღნიშნავდა J(x) სიმბოლოთი. ლაიბნიცი იყენებდა x_1 და x_2 სიმბოლოებს, თანამედროვე გაგებით $f_1(x)$ და $f_2(x)$ -ის მაგიერ. ეილერი აღნიშნავდა ასე: $f:y$ ან $f:(x+y)$ რაც თანემდროვე სიმბოლიკით ასე ჩაიწერებოდა $f(x)$ ან $f(x+y)$. თანამედროვე ჩაწერის მსგავსია დალამბერის მიერ შემოთავაზებული სიმბოლიკაც. საბოლოოდ ფუნქციის ანალიზური განმარტება 1748 წელს მოგვცა ლეონარდ ეილერმა თავის „უსასრულოდ მცირეთა ანალიზში": „ცვლადი რაოდენობის ფუნქცია არის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც შედგენილია რაიმე წესით ცვლადებით და მუდმივებით".

ასეთი განმარტება არსებობდა თითქმის მთელი XVIII საუკუნის განმავლობაში. ასე ესმოდათ ფუნქცია დალამბერს, ლაგრანჟსა და ფურიეს, ასევე ბევრს სხვა გამოჩენილ მათემატიკოსს. მიუხედავად ეილერის განმარტებისა, თვით ეილერის შრომებში ფუნქცია უკვე განიცდის შემდგომ ცვლილებებს მათემატიკური ანალიზის განვითარებასთან ერთად. 1755 წელს გამოცემულ „დიფერენციალურ აღრიცხვაში" ეილერი იძლევა ფუნქციის ზოგად განმარტებას: „როდესაც რაღაც სიდიდეები ერთმანეთზე დამოკიდებულნი არიან ისეთნაირად, რომ მეორეების ცვლილებით, თავდაპირველნიც იცვლებიან, მაშინ პირველებს ეწოდებათ მეორეების ფუნქცია. ამ სახელდებას გააჩნია დიდი მნიშვნელობა, რამეთუ იგი მოიცავს ყველა იმ ხერხს, რომლითაც ერთი სიდიდე განიმარტება მეორეთი". ამ პერიოდს, ანუ XVII-XIX საუკუნეები ფუნქციას განსაზღვრავს ანალიზურად.

დროის სვლა ცვლიდა ფუნქციაზე წარმოდგენებსაც, იცვლებოდა შეხედულებები და პრობლემური საკითხებიც მეტად იჭრებოდა მათემატიკოსთა საქმიანობაშიც. ერთი ასეთი საკითხი იყო, ის თუ რამდენად შესაძლებელი იყო ერთი ფუნქციის მოცემა რამდენიმე ანალიზური გამოსახულებით. XVIII საუკუნის ბევრ სხვა მათემატიკოსთან ეილერის, დალამბერისა და ბერნულის კამათის გადაწყვეტაში დიდი წვლილი შეიტანა ფრანგმა მათემატიკოსმა ჯან ბატისტ ჟოზეფ ფურიემ, რომლის მოღვაწეობის სფერო ძირითადად მათემატიკური ფიზიკა იყო. მან პარიზის მეცნიერებათა აკადემიას 1807-1811 წლებში წარუდგინა „მყარ სხეულებში სითბოს გავრცელების თეორიის მემუარები", რომელშიც მან პირველად მოიყვანა ისეთი ფუნქციის მაგალითები, სადაც სხვადასხვა ნაწილში სხვადასხვა ანალიზური გამოსახულება გააჩნია. მისი შრომებიდან აშკარად ჩანდა, რომ ნებისმიერი ფუნქცია, როგორადაც არ უნდა იყოს ის მოცემული, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ერთიანი ანალიზური გამოსახულებით და რომ, ასევე, არსებობენ წყვეტილი წირებიც. ფრანგმა მათემატიკოსმა კოშიმ 1721 წელს გამოქვეყნებულ „ალგებრული ანილიზის კურსში" დაასაბუთა ფურიეს ნათქვამი. ამრიგად, ფიზიკისა და მათემატიკის განვითარების გარკვეულ ეტაპზე საჭირო გახდა ისეთი ფუნქციების გამოყენება, რომლის წარმოდგენაც შეუძლებელი იყო მხოლოდ ერთი რომელიმე ფორმულით.

1834 წელს ლობაჩევსკი იყენებს 1755 წლის ფუნქციის ეილერისეულ განსაზღვრებას. იგი წერს: „ზოგადი გაგება გვაიძულებს , რომ x-ის ფუნქცია ვუწოდოთ რიცხვს, რომელიც მოიცემა ნებისმიერი x-თვის და მასთან ერთად მუდმივად იცვლება. ფუნქციის მნიშვნელობა შეიძლება მოიცეს ანალიზურადაც, ან პირობით, რომელიც გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ ჩავსვათ ყველა რიცხვი და მათგან ამოვირჩიოთ ერთ-ერთი. ანდა, საბოლოოდ შესაბამისობა შეიძლება არსებობდეს და დარჩეს უცნობად. ზოგადი შეხედულება თეორიისა შესაბამისობის არსებობას უშვებს მხოლოდ იმ აზრით, რომ რიცხვები, რომლებიც ერთმანეთთან არიან კავშირში, მივიღოთ როგორც ერთდროულად მოცემულები“.

ჩეხი მათემატიკოსი ბოლცანოც ასეთ განმარტებას გვთავაზობდა ლობაჩევსკიმდე. ზოგადად, ფუნქციის ისეთნაირად გაგებას და განმარტებას, სადაც არ ფიგურირებს ანალუზურად მოცემის ცნება, მიაწერენ ხოლმე დირიხლეს, თუმცა მანამდე ბევრი მატემატიკოსის მიერ იყო შემოტანილი. 1837 წელს დირიხლე ფუნქციის შემდეგნაირ განმარტებას გვთავაზობს: „y ცვლადი არის x ცვლადის ფუნქცია $a < x < b$ მონაკვეთზე, თუ ამ მონაკვეთიდან ყოველ x-ს შეესაბამება სავსებით განსაზღვრული y, თანაც არა აქვს მნიშვნელობა, როგორ არის ეს შესაბამისობა დამყარებული - ანალიზური ფორმულით, გრაფიკით, ცხრილით, თუ, უბრალოდ, სიტყვებით. ფუნქციის ასეთი ზოგადი განმარტების მაგალითად გვევლინება თვით დირიხლეს ფუნქცია. ყველასათვის ნაცნობი ეს ფუნქცია მოცემულია ორი ფორმულით და სიტყვიერადაც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ანალიზში. ასეთნაირად, XIX საუკუნის შუაში, მათემატიკოსების აზრთა ჭიდილში, ფუნქციის ცნება გათავისუფლდა ანალიზური წარმოდგენის ჩარჩოებისგან, მისი ყოვლისშემძლეობისაგან. აქ ძირითადი ყურადღებია გადატანილია შესაბამისობის ცნებაზე. XIX საუკუნის მეორე ნახევრიდან, რაც სიმრავლეთა თეორია შეიქმნა, ფუნქციის განმარტებაში შესაბამისობის ცნებასთან ერთად ჩაერთო სიმრავლის ცნებაც. ვფიქრობთ, XX საუკენე ფუნქციის სასკოლო მათემატიკაში დაფუძნების საკმაოდ დიდ მასალას გვაწვდის და სიმრავლურად განმარტება ფუნქციისა ცალკე განხილვის საგნად შეგვიძლია ვაქციოთ, თავისი დადებითი და უარყოფითი მხარეებით. ზოგადად, თუ A სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეესაბამება B

სიმრავლის განსაზღვრული y ელემენტი, მაშინ A სიმრავლეზე მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია, ან კიდევ, A სიმრავლე აისახება B სიმრავლეში. პირველ შემთხვევაში A სიმრავლის x ელემენტებს უწოდებენ არგუმენტის მნიშვნელობებს, ხოლო B სიმრავლის ელემენტებს - ფუნქციის მნიშვნელობებს. ხოლო მეორე შემთხვევაში x წინასახეა, y - სახე. ფუნქციის ეს უკანასკნელი განმარტება მხოლოდ რიცხვებსა და სიდიდეებს როდი მიესადაგება, არამედ მათემატიკის სხვა ობოექტებსაც, მაგალითად გეომეტრიულ ფიგურებს. ნებისმიერი გეომეტრიული გარდაქმნისას საქმე გვაქვს ფუნქციასთან.

XX საუკუნის დასაწყისიდანვე დირიხლეს მიერ შემოტანილ ფუნქციის განმარტებას ეჭვის თვალით დაუწყო ყურება ზოგმა მათემატიკოსმა. მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა ფიზიკოსების კრიტიკა, რომელმაც ბიძგი მისცა ისეთ მოვლენას, რომელმაც საჭირო გახადა ფიზიკისათვის უფრო ფართოდ შეგვეხედა, ანუ ფუნქციის ცნების გაფართოების აუცილებლობა დღის წესრიგში მაშინ დადგა, როდესაც 1930 წელს გამოიცა ცნობილი ინგლისელი ფიზიკოსის პოლ დირაკის „კვანტური მექანიკის საწყისები“. დირაკმა შემოიტანა ე.წ. „დელტა ფუნქცია“, რომელიც სცილდებოდა ფუნქციის კლასიკური განმარტების ჩარჩოებს, ამასთან, საბჭოთა მათემატიკოსებმა XX საუკუნის 30-იან 40-იან წლებში გამოაქვეყნეს შრომები, სადაც ფუნქციები არიან არა ფუნქციის წერტილები, არამედ „ფუნქციის არეები“, რომელიც ფიზიკის არსს უფრო ესადაგება. ასე მაგალითად, სხეულის ტემპერატურა წერტილში ვერ განისაზღვრება, ამ დროს კი, ტემპერატურას სხეულის გარკვეულ არეში გააჩნია კონკრეტული ფიზიკური აზრი. ზოგადი სახით განზოგადებული ფუნქციის შემოტანა მოხდა ფრანგი ლორან შვარცის მიერ. 1936 წელს 28 წლის საბჭოთა მათემატიკოსმა სერგეი სობოლევმა, პირველმა განიხილა განზოგადებული ფუნქციის კერძო სახე, რომელიც მოიცავდა დელტა ფუნქციასაც და მიღებული თეორიის გამოყენებით შეძლო მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოხსნა. განზოგადებული ფუნქციების თეორიაში დიდი წვლილი შეიტანეს შვარცის მიმდევრებმა და მოწაფეებმა ი. გელფანდმა და გ. შილოვმა.

ეს მოკლედ ჩამოყალიბებული ფუნქციის შემოტანის გზები არ გვაძლევს ფუნქციაზე სრული აზრის ჩამოყალიბების საშუალებას, თუმცა საკმარისად მიგვაჩნია

იმისათვის, რომ დავინახოთ, თუ რაოდენ დიდი გზა განვლო მატემატიკის უძირითადესმა ცნებამ, რასაც ფუნქცია ჰქვია. გარდა ამისა, ფუნქციის სასკოლო ლიტერატურაში დაფუძნების საკითხის ისტორიაც საკმაოდ საინტერესოა და აზრთა სხვადასხვაობას იწვევს.

§1.2. ფუნქციის რაობის შესახებ

მატემატიკის სასკოლო კურსს მეთოდური მიმართულებები გააჩნია. მათემატიკაში რაოდენ დიდი როლი აკისრია ფუნქციის სწავლებას, ამაზე ჩვენ უკვე ვისაუბრეთ, შესაბამისად, ბევრი მეცნიერის, მეთოდისტის თუ სკოლის მასწავლებლის შესწავლის საგანი გახდა ფუნქცია. XX საუკუნეში განსაკუთრებით და ახლაც განსაკუთრებით იდგა ფუნქციის ცნების დამკვიდრების პრობლემა სასკოლო ლიტერატურაში, მათემატიკოსები მასზე წერენ ჩვენშიც და საზღვარგარეთაც. სანამ კონკრეტული პიროვნებების ნააზრევზე გადავიდოთ, მანამდე შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის ცნების შემოტანისას მათემატიკოსები პირობითად ოთხ ნაწილად იყოფიან. [Шиханович, 1965]

პირველ და მეორე კატეგორიაში ერთიანდებიან ის მათემატიკოსები თუ მეთოდისტები, რომლებიც ფუნქციას განმარტავენ როგორც „სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებას“, ხოლო მესამე და მეოთხე კატეგორიის მათემატიკოსები, ფუნქციას ამკვიდრებენ სიმრავლულ-თეორიული კონცეფციის მიხედვით. სანამ ამ კატეგორიების დეტალურად შესწავლას შევუდგებოდეთ, აღვნიშნოთ რომ ტერმინი „სიმრავლურ-თეორიული“ - რუსულიდან კალკირებულად მიგვაჩნია, ამის არგუმენტად ისიც საკმარისია, რომ ქართულად ტერმინს ინვერსიული წყობა აქვს, რადგანაც ქართულად გვაქვს „სიმრავლეთა თეორია“, ხოლო რუსულად “Теória mnóжеств“. ეს ყველაფერი ცოტა დაბნეულობას უნდა იწვევდეს, თითქოს არსებობს მაგალითად „სიმრავლურ-პრაქტიკული“ მიდგომაც ანდა აღნიშნული მიდგომა „თეორიულია“, ხოლო სხვა მიდგომით „პრაქტიკულად“ შემოდის ფუნქციის ცნება. ყველამ ვიცით „სიმრავლეთა თეორია“, თუმცა ტერმინი „თეორია“ „სიმრავლურ-თეორიულ“ კონცეფციაში არ ჩანს როგორც „მოძღვრება“. ცნების უკეთ გაგებისათვის უნდა გვეთქვა „სიმრავლეთა თეორიული“ ან „სიმრავლეთა თეორიის მიხედვით“

ფუნქციის ცნების შემოტანის კონცეფცია, თუმცა არც აღნიშნული ტერმინები ჟღერს გამართული ქართულით. სიმარტივისათვის ჯობს ტერმინი ფუნქციის ცნების შემოტანის „სიმრავლური“ კონცეფცია ან ფუნქციის, როგორც „სიმრავლის“ შემოტანის კონცეფცია. აღნიშნულიდან ჩანს, რომ ეს კონცეფცია აუცილებლად დაფუძნებული იქნება სიმრავლეთა თეორიაზე.

ფუნქცია, როგორც მათემატიკური ობიექტი, თავდაპირველად, ალგებრის კურსში ისწავლება, შესაბამისად, მისი შესწავლა ხდება ალგებრისა და მათემატიკური ანალიზის საშუალებებით [Покровский, 2014], ამიტომ, რა გასაკვირია, რომ ფუნქციის განმარტებებსაც შესაბამის წიგნებში შევხვდებით. დავუბრუნდეთ ფუნქციის განმარტების საკითხებს. პირველი განმარტების მიხედვით „ცვლად სიდიდე y-ს ეწოდება x ცვლადი სიდიდის ფუნქცია, თუ x-ის თითოეულ მნიშვნელობას შეესაბამება y სიდიდის ერთადერთი განსაზღვრული მნიშვნელობა“ ანდა კიდევ „ის ცვლადი სიდიდე, რომლის რიცხვითი მნიშვნელობები იცვლებიან სხვა რიცხვით მნიშვნელობებთან დამოკიდებულებაში, არის დამოკიდებული ცვლადი ან მეორე ცვლადის ფუნქცია“ [Кисельов, 1964]. ამ იდეის გამტარებლები ძირითადად XX საუკუნემდე მოღვაწე მათემატიკოსები არიან და არც XX საუკუნეში არ აკლია მომხრეები. მაგალითად ფიხტენგოლცი, ლუზინი, ხინჩინი, კისელიოვი და ბევრი სხვა. ამათგან ლუზინი, მართალია, სიმრავლეებს ახსენებს, თუმცა ფუნქციად მაინც ცვლადი სიდიდე მიაჩნია : „y სიდიდეს ეწოდება M სიმრავლეზე განსაზღვრული x სიდიდის ფუნქცია, თუ x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y სიდიდის ერთადერთი მნიშვნელობა [Лузин, 1958]. ასეთსავე განმარტებას გვაძლევს ფიხტენგოლცი : „ცვლად y-ს ეწოდება ცვლად x-ის ფუნქცია მისი ცვლილების X არეში, თუ რაიმე წესით ან კანონით ნებისმიერ x-ს X-დან შეესაბამება ერთადერთი განსაზღვრული y” [Фихтенгольц, 1968]. ამ აზრს იზიარებს მეთოდისტი ნაგიბინი სტატიაში [Нагибин, журнал “математика в школе”, N1954(4)]. ასევე, [Харди, 1949], [Ильин, Садовничий, Сендов, 1985], [გოკიელი, 1957]. „ფუნქცია მატემატიკაში ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა, რომელიც გამოხატავს ცვლადი სიდიდეების ერთმანეთზე დამოკიდებულებას“ [Натансон, 1956]. ამ ციტატაში კიდევ უფრო გავრცობილია ფუნქციის მნიშვნელობა და განმარტებისას შექცეულ ასახვაზეც შეგვიძლია საუბარი.

მეორე განმარტების მიხედვით ფუნქციის შემოტანის განმარტება თითქოს არ იცვლება, სინამდვილეში კი ფუნქციას უწოდებენ წესს, რომლის მიხედვითაც x-ს შეესაბამება y, და არა თვით y-ს. „წესს, რომლითაც დამოკიდებული ცვლადის მნიშვნელობებს შეესაბამებიან დამოკიდებული ცვლადის მნიშვნელობები, ეწოდება ფუნქცია“ [Мышкис, 2007]. ხშირ შემთხვევაში, ფუნქციის განმარტებები იწყება სიტყვებით : „ვიტყვით, რომ მოცემულია ფუნქცია, თუ...“ სრულდება გარკვეული პირობები. ზემოთ მოყვანილ განმარტებებში რამდენიმე პრობლემა იკვეთება, რაზედაც აპელირებენ ის მათემატიკოსები, რომლებსაც „ცვლადი სიდიდით“ ფუნქციის შემოტანას არ ეთანხმებიან (ამ მათემატიკოსებს მესამე და მეოთხე კატეგორიაში განვიხილავთ). პირველ რიგში, პრობლემას ხედავენ განუმარტავ ცნებებში „ცვლადი სიდიდე“ , „კანონი“, „წესი“, „დამოკიდებულება“, „შესაბამისობა“, ხშირ შემთხვევაში, საერთოდ ფუნქციაც კი არაა განმარტებული და უბრალოდ საუბარია იმაზე, რომ გარკვეულ პირობათა შესრულების შედეგად, ვიტყვით, რომ მოცემულია ფუნქციაო და არაა განმარტებული თვითონ ფუნქცია რას წარმოადგენს. მიუხედავად აღნიშნული მიდგომით ფუნქციის შემოტანის კრიტიკისა, უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეს ისტორიულად განპირობებული კატეგორია იყო და ამას მათემატიკა გვერდს ვერ აუვლიდა. აღნიშნული მიდგომა შეიძლება არ ტოვებდეს ფუნქციის ცნების შემოტანისათვის და ფუნქციის არსის გაგებისათვის საუკეთესო განმარტების შთაბეჭდილებას, თუმცა ბევრი მათემატიკოსის აზრით სრულიად მისაღებია და სასკოლო ლიტერატურაში ფუნქციის ცნების შემოტანისას აღნიშნული მიდგომით სარგებლობს. დოროფეევის მიერ „ზებურბაკისტულ“ დონეზე დამუშავებულ და გაცხადებულ ფუნქციის შემოტანის გააზრებისის შემდეგ [Дорофеев, журнал “математика в школе” 1978(2)], სადაც სიმრავლეთა თეორიის მიხედვით ხდება ფუნქციის დამკვიდრება, ის ძალიან აკრიტიკებს აღნიშნულ მიდგომას და უკვე 2016 წელს მისი ავტორობით გამოცემულ სასკოლო სახემძღვანელოში ფუნქციას განმარტავს შემდეგნაირად : „y ცვლადს უწოდებენ x ცვლადის ფუნქციას, თუ რაიმე რიცხვითი სიმრავლის x მნიშვნელობებს შეესაბამება ერთადერთი განსაზღვრული y ცვლადის მნიშვნელობა“ [Дорофеев, Cуворова, 2016]. მიუხედავად იმისა, რომ ფუნქცია განმარტებული არაა როგორს სიმრავლე, ზემოთ

მოყვანილ განმარტებებში „სიმრავლე“ ნახსენებია, რაც უკვე იმის მანიშნებელია, რომ „სიმრავლეს“ გვერდს ვერ აუვლის მათემატიკოსი.

მესამე განმარტების მიხედვით, ფუნქცია განმარტებულიაან მოცემულად ითვლება, თუ ორ სიმრავლეს შორის მოქმედებს გარკვეული წესი [Шварц, 1972], [Александров, 1948], [Севбо, журнал “математика в школе” 1953(4)], [ჭელიძე, წითლანაძე, 1989], [გოგინავა, 2007] და არა როგორც ერთი ცვლადი სიდიდის მეორეზე დამოკიდებულება ან წესი. ტერმინი „შესაბამისობა“ სხვა განმარტებებშიც უკვე ვნახეთ, მაგრამ ფუნქციად იქ მიჩნეულია y სიდიდე, ან წესი/კანონი. „$X \subset R$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფუნქცია f, თუ $x \in X$ ყოველ ელემენტს შეესაბამება განსაზღვრული $y = f(x)$ რიცხვი” [Колмогоров, Фомин, 1976, 2004] და შემდეგ დასძენს, რომ თუ X განსაზღვრის არესა და Y მნიშვნელობათა სიმრავლეს ნებისმიერი ბუნების სიმრავლეებად ავიღებთ, მაშინ მიიღება ფუნქციის ზოგადი განმარტება. რიცხვითი სიმრავლეები, ზოგადად, ანალიზის შესწავლის საგანს წარმოადგენს და ანალიზის ძალიან ბევრი სახელმძღვანელოს ავტორი აღარც კი აკეთებს ფუნქციის ზოგად განმარტებას და იფარგლება მხოლოდ რიცხვითი სიმრავლეებით. „შესაბამისობა“ ერთადერთ განუმარტავ ცნებად რჩება აღნიშნულ განსაზღვრებაში და ცხადად ჩანს, რომ „ფუნქცია სპეციალური სახის შესაბამისობაა, მაგრამ რა არის შესაბამისობა ამაზე საშუალო სკოლის წიგნებში არაფერია ნათქვამი“ [გეგელია, 1985]. ფუნქციას თ.გეგელია ზუსტად ასევე განმარტავს და იქვე კი ფუნქცია განმარტებულია როგორც წყვილების სიმრავლე $(x; y) \in f$ ან კიდევ $f = \{(x;\, f(x)) \big|\, x \in X\}$ [გეგელია, 1985], ხოლო „ლოგიკურად გამართულ წიგნებიდან“ გამომდინარე ფუნქცია გადმოცემულია, როგორც სამეული (G, A, B), სადაც $G \subset A \times B$ და ეს უკვე გახლავთ ფუნქციის მეოთხე განმარტება. საინტერსესოდ გვეჩვენება. ლ. გოკიელის წიგნი „მათემატიკის საფუძვლები“, სადაც ავტორი ფუნქციას განმარტავს, როგორც ცვლად სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებას და შემდგომ ყურადღებას ამახვილებს, რომ $(x; y)$ წყვილი ფუნქციას განმარტავს [გოკიელი, 1957], ანუ წყვილების სახით შესაძლებელია მოიცეს ნებისმიერი ფუნქცია, როგორადაც არ უნდა იყოს ჩამოყალიბებული და კიდევ უფრო საინტერესოა ის გარემოება, რომ შექცეული ფუნქციის შემოტანისას, აუცილებლად თვლის სიმრავლეების შემოტანას [გოკიელი,

1957]. ეს, კიდევ ერთხელ ასხავს სიმრავლეთა თეორიის წიქვილზე წყალს. ყურადღება გვინდა გავამახვილოთ იმ გარემოებაზეც, რომ „დეკარტული ნამრავლი“ აპრიორულად გულისხმობს დეკარტეს მართკუთხა კორდინატთა სისტემაში ფუნქციის გრაფიკის არსებობას, მაგრამ ფუნქციის თანამედროვე გაგებით ნებისმიერი ბუნების სიმრავლეებს შორის შეიძლება დამყარდეს შესაბამისობა, ანუ ნებსიმიერი ფუნქციის გრაფიკი შეიძლება არ გამოისახოს დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში - შესაბამისად, აჯობებდა გვეთქვა „ორი სიმრავლის ნამრავლი“ და არა „ორი სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი“. ფუნქციის დალაგებულ წყვილებად წარმოდგენის მომხრეა ზორიჩი [Зорич, 2002], კუდრიავცევი [Кудрявцев, 2015], კოლმოგოროვი [Колмогоров , журнал “математика в школе” 1978(2)], ვილენკინი [Виленкин, 1980], ბუტუზოვი [Бутузов, 2012]. ზოგადად, სიმრავლურად ფუნქციის მოცემის მომხრენი არიან შილოვი [Шилов, 1969], ლიაშკო და ბოიარჩუკი და სხვ. [Ляшко, Боярчук, 2001]. ფუნქციის დალაგებულ წყვილებად სკოლაში სწავლების არაპრობლემატულ და მარტივ სახეს ვხვდებით სახელმძღვანელოში College Algebra and trigonometry [Kelly, Anderson, Balomenos, 1992]. ასევე, ფუნქციის ჩაწერის ტრადიცულ ხერხებთან ერთად, წყვილებად გვევლინება ფუნქცია ბევრ ავტორთან [Stitz, Zeager, 2011], [Larson, Favlo, 2012]. ფუნქციის ზოგად განმარტებას ნებისმიერი ბუნების ობიექტებისათვის ვხვდებით ნოვოსელოვთან [Новоселов, 1962] და მარკუშევიჩთან [Маркушевич, журнал “математика в школе” 1947(4)]. სიმრავლურად რიცხვით ფუნქციებს განმარტავს ნიკოლსკი [Никольский, 1983]. საგულისხმოა კუდრიავცევის მათემატიკური ანალიზის სახელმძღვანელო [Кудрявцев, 2015], სადაც ფუნქციის შემოტანისას მაგალითების განხილვას იწყებს ფორმულებით და ცვლადი სიდიდის შემოტანით, საუბრობს ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულებაზე და დასძენს, რომ ცვლადი სიდიდე მაინცდამაინც დროსთან და სივრცესთან არის დაკავშირებული და რომ „სიდიდე“ განუმარტავი ცნებაა და ამის მერე გვთავაზობს ცალსახა ფუნქციის სიმრავლურ განმარტებას. ფუნქციას განმარტავს როგორც სამეულს და მის ტოლძალოვან ცნებად მოიაზრებს ასახვას და შესაბამისობასაც. ავტორის სახელმძღვანელოების შემდეგი წლების გამოშვებებში აღარსადაა ფუნქციის სიმრავლურად შემოტანის აუცილებლობის დასაბუთება და პირდაპირ ფუნქციას

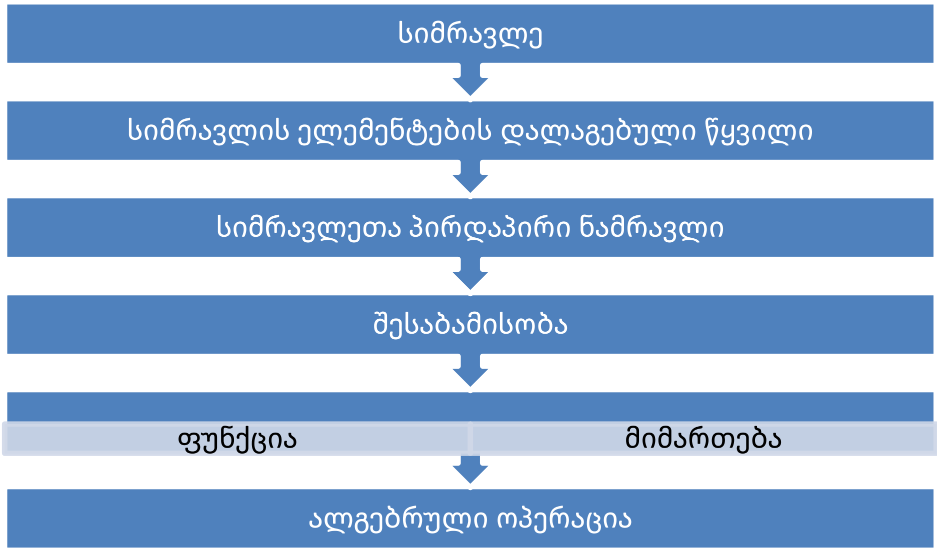
იხილავს, როგორც დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეს. ასევე, ფუნქციის სინონიმებად იხილავს შესაბამისობას, მორფიზმს და გარდაქმნას. [Кудрявцев, 2015]. ფუნქციის სამეულად წარმოდგენის მომხრენი ძირითადად ბურბაკისტები არიან და რომელიც დაფუძნებულია ფუნქციის ცნების შემოტანის სიმრავლეთა „ძალიან მკაცრი“ თეორიის საფუძველზე, ეს მიდგომა დიდ პრობლემებს წააწყდა, სადაც ნამდვილად ფორმალიზებულია მათემატიკისა და კონკრეტულად, ფუნქციის შინაარსი. ასეთი მიდგომით სასკოლო სახელმძღვანელოებში ფუნქციის შეტანის მოწინააღმდეგეა თვითონ ა. კოლმოგოროვიც, რომელიც ერთ-ერთი მოწინავეა იმ ადამიანთაგან, ვინც ფუნქციის ცნების დაფუძნებას სიმრავლურ საფუძველზე ითხოვს [Колмогоров, журнал “математика в школе” 1978(2)]. აღნიშნული მიდგომით ფუნქციის ცნების შემოტანის პროპაგანდაში ადანაშაულებს გ. დოროფეევს და მაგალითად მოყავს მისი სტატია დაბეჭდილი ჟურნალის იმავე ნომერში [Дорофеев, журнал “математика в школе” 1978(2)], თვითონ კოლმოგოროვი მომხრეა ფუნქციის ცნების „მიამიტურ“ სიმრავლეთა თეორიაზე დაფუძნებით [Колмогоров, журнал “математика в школе” 1978(2)] , [Колмогоров, журнал „Квант“ 1970(1)]. საგულისხმოა ის ფაქტი, რომ „მკაცრი“ სიმრავლური მიდგომით დოროფეევს ფუნქცია უფრო მრავლისმომცველ ცნებად აქვს წარმოდგენილი, ვიდრე ასახვა [Дорофеев, журнал “математика в школе” 1978(2)], ხოლო „მიამიტური“ სიმრავლეთა თეორიის მიხედვით ფუნქცია და ასხვა სინონიმებია. თუმცა ფუნქცია უფრო ანალიზის ტერმინია, ხოლო ასახვა ანალიზშიც გვხდება და გეომეტრიაშიც.

სანამ უფრო დაწვრილებით დავახასიათებთ აღნიშნულ მიდგომებს და ფუნქციის ცნების დაფუძნების საკითხებს, ყურადღება გავამახვილოთ იმ ფაქტზე, რომ ზოგიერთი მათემატიკოსისათვის ფუნქცია გაგებული როგორც „სამეული“ ორნაირად გვესმის. ზოგიერთი მათემატიკოსისათვის სამეული (G, A, B) არის ფუნქცია, სადაც $G \subset A \times B$ ანუ G არის ფუნქციონალური გრაფიკი [გოგინავა, 2007]. შიხანოვიჩი ამ სამეულს ვექტორს უწოდებს, ხან კორტეჟს [Шиханович, 1965], ხოლო ზოგიერთი მათემატიკოსისათვის კი სამეული (X, f, Y) გაგებულია, როგორც X - განსაზღვრის არე, f - წესი და Y - მნიშვნელობათა სიმრავლე, ანუ ფუნქცია მხოლოდ მაშინ ითვლება მოცემულად, თუ ვიცით ამ სამი კომპონენტიდან ყველა

[Болтянский,Сидоров, Шабунин, 1972], [Стюарт, 1980], [Зорич, 2002] [ახოზაძე, მათ. ანალიზი: ლექციათა კურსი]. პირველი გაგებით სამეული (G, A, B) არის ფუნქცია, სადაც $G \subset A \times B$, თავის თავში მოიცავს ფუნქციის მოცემას წყვილების სახით და ფუნქციის გრაფიკი გაიგივებულია ფუნქციის ცნებასთან. ეს კიდევ ერთი არგუმენტია იმის, რომ ფუნქციის გრაფიკი გავიგოთ არა, როგორც ფუნქციის მოცემის ხერხი, არამედ როგორც თვითონ ფუნქციის თვალსაჩინო გამოხატულება. თვალსაჩინოება, რომელიც სწავლების დაწყებით საფეხურზე თუ აუცილებელი მეთოდია სწავლებაში, საბაზო და საშუალო საფეხურზე ოდნავადაც არ კარგავს მნიშვნელობას სწავლებასას. შესაბამისად, ფუნქცია მოცემულად ითვლება თუ ვიცით განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე და ამ ფუნქციის გრაფიკი, ანუ დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე. ზემოთთქმულიდან ნათლად ჩანს, რომ სიმრავლური მიდგომით ფუნქციის შემოტანისას თვით ფუნქცია წარმოგვიდგება სიმრავლედ. სიმრავლე კი მათემატიკაში საწყის ცნებადაა მიჩნეული, შესაბამისად საწყისი ცნება უნდა იყოს თვით ფუნქციაც. ალბათ ამას გულისხმობდა ფ. ჰაუზდორფი: „ფუნქციის ცნება ისეთივე საწყისია, როგორც სიმრავლის ცნება“ [Хаусдорф, 1937]. ასევე, კოლმოგორვიც თვლიდა, რომ ფუნქცია საწყისი ცნება უნდა ყოფილიყო [Колмогоров, журнал „Квант“ 1970(1)]. ამავე აზრისაა მორდკოვიჩი, რომელიც მასწავლებლისათვის განკუთვნილ სახელმძღვანელოში ფუნქციის ცნების შემოტანისას, საწყისში, ეწინააღმდეგება ფორმალურ განმარტებას და თვლის, რომ ფუნქციონალური სიტუაციის მხოლოდ „გარკვევა“ უნდა მოხდეს [Мордкович, 2000].

პოკროვსკი ფუნქციის შემოტანისას ორ ვარიანტს გვთავაზობს: კლასიკურ განმარტებას და თანამედროვე განმარტებას, აქვე დასძენს რომ ამ ორი განმარტების გარდა, არსებობს კიდევ ერთი განმარტება, რომლებიც იწყება სიტყვებით : “ამბობენ, რომ სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფუნქცია“ - და ამას ორივე ვარიანტის დამოუკიდებლად გვთავაზობს [Покровский, 2014].

კოლიაგინი და სხვები, მატემატიკის სწავლების მეთოდიკის სახელმძღვანელოში იხილავენ ფუნქციის ცნების შემოტანის უკვე დამკვიდრებულ ვარიანტებს [Колягин 1977] და გვთავაზობენ, ამავე ცნების შემოტანის ლოგიკურ სქემას:



მეთოდისტი სარანცევი გვთავაზობს მათემატიკური ცნების ფორმირების ეტაპებს:

1. ცნების შემოტანის მოტივაცია;
2. ცნების არსებითი თვისებების გამოყოფა;
3. გამოყოფილი თვისებების სინთეზი და ახალი ცნების ფორმულირება;
4. ცნების განმარტებაში გამოყენებული სიტყვების გაგება;
5. ცნების განსაზღვერბაში ლოგიკური სტრუქტურის შეთვისება;
6. ცნების განსაზღვერბის დამახსოვრება;
7. ცნების გამოყენება;
8. შესასწავლი ცნების სხვა ცნებებთან კავშირის დადგენა [Саранцев, 2002],

   ხოლო კულდრაიხან ვოკაზე თავის სტატიაში [Воказе, 2008] იხილავს ფუნქციის ცნების შემოტანის შემდეგ მიმდევრობას:

მიმდინარეობს შემამზადებელი მუშაობა ფუნქციი ცნების შემოტანისათვის	•ვიმეორებთ სიმრავლის "განმარტებას", სიმრავლის ელემენტების, ელემენტების სიმრავლისათვის მიკუთვნებულობას
განიხილება მაგალითები, რომლებსაც ახალი ცნების ფრორმირებამდე მივყავართ	•კვადრატის ფართობის გამოთვლა, თანაბარი მოძრაობისას განვლილი მანძილის გამოთვლა
ხდება ფუნქციის ცნების ფორმულირება	•ვუთითებთ ფუნქციის მოცემის ხერხებს: სიტყვიერს, ცხრილურს, ფორმულით
ახალ განსაზღვრებაში გამოიყოფა მთავარი ცნებები და განიხილება თითოეული მათგანი	•მთავარი ცნებები: წესი, კანონი, ალგორითმი, არგუმენტი, ფუნქციის მნიშვნელობა, განსაზღვრის არე, დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე
თითოეული მთავარი ცნების დასახასიათებლად (რომლებიც გამოვიყენეთ ფუნქციის განმარტებისას) ვიხილავთ მაგალითებს	•ჩავწეროთ სიტყვიაერად მოცემული ფუნქცია ფორმულით ან პირიქით
ფუნქციის გააზრებისათვის ვიხილავთ მაგალითებს	•მოცემულია წესი, იქნება კი ის ფუნქცია? რა ცვლილების შედეგად გახდება იგი ფუნქცია?
ვიხილავთ მაგალითებს ახალი ცნების გამოყენებაზე	•მაგალითები ფიზიკიდან, გეომეტრიიდან და ა.შ.

ზემოთგანხილული საკითხებიდან ნათლად იკვეთება, რომ ფართო დაყოფით, ფუნქციის ცნების შემოტანის ორგვარი გაგება არსებობს, მიუხედავად იმისა, რომ ოთხნაირად განვმარტეთ და კიდევ უფრო მეტადაც შეიძლებოდა, თითოეული ავტორის მიერ შემოტანილი ცნება ცალკე განხილვის საგანს შეადგენს და მხოლოდ ამის შემდეგაა შესაძლებელი მკაცრად დახარისხება ფუნქციის განმარტებებისა, თუმცა ეს ჩვენს მიზანს არ წარმოადგენს - ჩვენი მიზანია იმის ჩვენება, რომ ფუნქციის დაფუძნებაში მეთოდური ხაზის ძიებამ ბევრი პრობლემა წარმოშვა აღნიშნული საკითხის სასკოლო სახელმძღვანელოებში ჩატანის კუთხით.

პირველი მიდგომის მომხრე მათემატიკოსები საკუთარი არგუმენტებით გამოირჩევიან:

- „ფუნქციის ცნება და ამ ცნების ღირებულება შეიძლება მხოლოდ წაგებული დარჩეს მისი თუნდაც იმ დამახინჯებით, რომელიც მდგომარეობს მისთვის საყოველთაო ხასიათის მიცემაში“ [გოკიელი, 1957];
- სიმრავლური მიდგომით ფუნქციის განმარტებისას ფორმალიზმი შემოდის მათემატიკაში;

- მოსწავლეებს უჭირთ მკაცრი განმარტებების გაგება და მათთვის ზოგჯერ აუცილებელია ინტუიციური მიდგომა ცნებებისადმი;
- თვითონ მათემატიკოსებიც კი მხოლოდ „დასამშვიდებლად“ [Дорофеев, журнал “математика в школе”, 1978(2)] სჭირდებათ ფუნქციის გაგება სიმრავლურად. ამის არგუმენტად დოროფეევს მოაქვს, რომ ფუნქციის „მკაცრი“ სიმრავლეთა თეორიის მიხედვით განმარტების შემდეგ, თვით ბურბაკი საკუთარი სახელმძღვანელოს დასკვნებში ფუნქციას განმარტავს, როგორც ოპერაციას, რომლის მიხედვითაც ერთი სიმრავლის ელემენტებს შეუსაბამებს მეორე სიმრავლის ელემენტებს;
- სიმრავლურადაც რომ საუკეთესოდ განვმარტოთ ფუნქცია, კონკრეტული ამოცანების ამოხსნისას მაინც არავის აღარ აინტერესებს ასეთი განმარტება და შესაბამისად, მოსწავლეთა მეხსიერებიდან ავტომატურად ქრება და მაღალ კლასებში უკვე საკმაოდ დავიწყებული აქვთ სიმრავლური მიდგომა;
- მიუხედავად იმისა, რომ დოროფეევს ძალიან კარგად ესმის სიმრავლეთა თეორიის მიხედვით ფუნქციის მოცემის ოპტიმალური სახეა წყვილებად მოცემა $(x;\, y) € f$, აღნიშნავს, ასეთი ჩანაწერი თითქმის არცერთ სახელმძღვანელოში არ გვხვდება და უბრუნდებიან ისევ სტანდარტულ ჩანაწერებსო: $f : x \to y$ ან $x \xrightarrow{f} y$ ანდა $y = f\,(x)$
[Дорофеев, журнал “математика в школе”, 1978(2)];
- მასწავლებელთა პრაქტიკამ აჩვენა, სიმრავლის გარეშე ფუნქციის შემოტანის მისაწვდომობა მოსწავლეთათვის შესწავლის საწყის საფეხურზე და მით უფრო, მაღალ კლასებში [Нагибин, журнал “математика в школе” 1954(4)];
- ცვლადი სიდიდის შემოტანით იგრძნობა ფუნქციის დინამიურობა, ხოლო სიმრავლურად მხოლოდ ხელოვნურობა ჩანს და „აკვდინებს რეალურ ცხოვრებას“ [Нагибин, журнал “математика в школе”, 1954(4)] და კიდევ ბევრი მიზეზი, თუმცა აღნიშნულიდანაც კარგად ჩანს, რომ ბევრი მათემატიკოსი ვერ ელევა „ცვლად სიდიდეებს“ და კი ხვდება სიმრავლეთა

თეორიის უპირატესობას ცნების ცალსახად განმარტებისას, უბრალოდ, არ მიაჩნიათ სკოლისათვის შეუფერებლად აღნიშნული კუთხით ფუნქციის განმარტება და თვლის, რომ მხოლოდ უმაღლეს სკოლაში შეიძლება აღნიშნული განმარტების მიცემა. ბევრისთვის კი კატეგორიულად მიუღებელია სიმრავლეთა თეორია და არც სკოლაში და არც უმაღლეს სასწავლებლებში მისი შეტანის მოწინააღმდეგენი არიან.

ფუნქციის პირველი განმარტება (ცვლადი სიდიდეებით) უფრო ფიზიკოსებისთვისაა და მეორე (სიმრავლურად), უფრო მათემატიკოსებისთვისო - ამბობს ვ. უსპენსკი შიხანოვიჩის წიგნის შესავალში [Шиханович, 1965].

განსაკუთრებულია როლი ამ საქმეში უკავიათ იმ მათემატიკოსებს, რომლებიც არა მარტო სკოლის ცხოვრებით არიან დაკავებულები, არამედ მეცნიერების კუთხით უყურებენ ამ ყველაფერს.

§1.3. სასკოლო ლიტერატურაში ფუნქციის ცნების დაფუძნების ისტორიისათვის

ნებისმიერი მეცნიერება დროთა განმავლობაში აგროვებს უამრავ ფაქტს და თვითონაც განიცდის ცვლილებას. შესაბამისად, მეცნიერების მონაპოვარი სულ უფრო და უფრო ფართოვდება. დროდადრო საჭირო ხდება ამ მონაპოვრის სასკოლო სახელმძღვანელოებში შეტანა და მოსწავლეთათვის გასაგები ენით გადაცემა. სასკოლო სახელმძღვანელოები ხშირად „მოძველდება“ ხოლმე იმ გაგებით, რომ არსებობს „დროში ჩავრდნა“ მეცნიერების მონაპოვარსა და მოსწავლეთათვის მათი სწავლება. მაგალითად გვინდა მოვიყვანოთ, ქართული ენისა და ლიტერატურის სახელმძღვანელოები, ანდა ისტორიის სახელმძღვანელოები და შევაპირისპიროთ მატემატიკის სახელმძღვანელოებთან. ეს შეპირისპირება, რა თქმა უნდა, ატარებს მხოლოდ გარეგნულ ხასიათს. იმისათვის, რომ უფრო ნათელი გავხადოთ კავშირი მეცნიერების მონაპოვარსა და სახელმძღვანელოებს შორის კავშირი, მაგალითისათვის მოვიყვანოთ ის ფაქტი, რომ ისტორიის სახელმძღვანელოები ძალიან ხშირად „განახლდება“ ხოლმე. ემატება უახლესი ისტორიის საკითხები და ძველ საკითხებში რაღაც კიდეც შეიძლება სხვა თვალსაზრისით იყოს დანახული. რა თქმა უნდა, ცოტა

წარმოუდგენლად ძღერს ისტორიის, როგორც მეცნიერების, შესწავლა სკოლაში, როდესაც სხვა მეცნიერების საფუძვლები გვაქვს კიდევ შესასწავლი, მაგრამ თუნდაც „კონსპექტური“ ზომით მოწოდებული მასალა „საკმარისია“ მოსწავლისათვის თვალი ადევნოს ისტორიულად განვლილი ცხოვრების ყველა ეპოქას - დაწყებული უძველესიდან, დამთავრებული - დღევანდელობით. შესაბამისად, თუ მოსწავლე გამოიჩენს ამ სასწავლო დისციპლინისადმი დიდ ინტერესს და თავის სამომავლო პროფესიად ისტორიას აირჩევს, მას ექნება მცირე წარმოდგენა ყველა ეპოქაზე და შესაბამისად, ისღა დარჩენია, გაიღრმავოს ცოდნა კონკრეტულ საკითხებსა თუ კონკრეტულ ეპოქებზე. ასევე, შეგვიძლია მაგალითად მოვიყვანოთ ქართული ენისა და ლიტერატურის სწავლებაც, ისტორიული მომენტი აქაც გვაქვს და გათვალისწინებულია. ლიტერატურაში ისწავლება ყველა ეპოქა და ამ ეპოქის გამორჩეული წარმომადგენლები თანამედროვე კლასიკოსების ჩათვლით, მაგალითად გურამ დოჩანაშვილის, ჭაბუა ამირეჯიბის, ჯემალ ქარჩხაძის, ნუგზარ შატაიძის თუ სხვათა შემოქმედება. ასევე, გრამატიკაში, თანამედროვე ნორმებს ასწავლიან და არა - საუკუნეების წინ დამკვიდრებულს. აღარ შევჩერდებით სკოლის სხვა სასწავლო დისციპლინებზე, ესეც საკმარისად მიგვაცნია იმის სათქმელად, რომ მოსწავლეს ყველა ეპოქის მონაპოვარი უნდა ვასწავლოთ სკოლაში, რაღა თქმა უნდა, დოზირებულად. განსაკუთრებული ყურადღება კი უნდა გამახვილდეს თანამედროვე მიღწევებზე. რა საჭიროა ისეთი განათლება, რომელიც ვერ მოგვცემს იმ ცოდნას და ვერ აღჭურვავს მოსწავლეებს ისეთი უნარ-ჩვევებით, რომელიც თანამედროვე ახალგაზრდას დასჭირდება. ამ ყველაფრის გათვალისინებით, საჭირო ხდება ხოლმე სახელმძღვანელოების გადახედვა დროთა განმავლობაში და მასში თანამედროვე ელემენტების ჩატანა. ეს საქმე მეტად სარისკო და ძნელია. ერთია მეცნიერება და მეორეა სასკოლო განათლება, სადაც დიდი სიფრთხილეა ხოლმე საჭირო ახალი საკითხვის დაფუძნებასთან დაკავშირებით. ეს ყველაფერი განსჯის საგანი ხდება ხოლმე სამეცნიერო წრეებსა და საზოგადოებაშიც. საზოგადოების დიდი ნაწილი კონსერვატორული იდეებით გამოირჩევა ხოლმე და ის მეთოდი თუ საკითხი ჰგონიათ მეტად მისაღებად სასკოლო განათლებისათვის, როგორადაც თვითონ უსწავლიათ, ან რაც უსწავლიათ. ჩვენს ყოფაში თითოეული მოქალაქე სასკოლო

„განათლების ექსპერტად“ გვევლინება, თუმცა, უმაღლეს განათლებაზე ხშირად არაფერს ამბობენ, ეს ალბათ იმიტომ, რომ სკოლაში ყველას უსწავლია, ხოლო უმაღლესი განათლებით ბევრი ვერ იკვეხნის. სამეცნიერო წრეებში აზრთა შეჯერების საფუძველზე კონკრეტული საკითხი დოზირებულად „ჩადის“ სასკოლო საგნობრივ პროგრამებსა და სახელმძღვანელოებში. ამ ყველაფრის მაღალ დონეზე განსახორციელებლად საგნის პროგრამა გარკვეული დროით უნდა ჩამორჩებოდეს კიდეც მეცნიერების მიღწევებს, მაგრამ არა - რამდენიმე საუკუნით, როგორც ეს მათემატიკაში მოხდა XX საუკუნეში. „ალბათ არ არის საგანი - წერდა ფელიქს კლაინი - რომლის სწავლებაში მეფობდეს ისეთი მდგომარეობა, როგორიც მატემატიკის სწავლებაშია. ელემენტარული მათემატიკის კურსი ჩამოყალიბდა გარკვეულ ჩარჩოებში და გაიყინა ერთხელ და სამუდამოდ დადგენილ საზღვრებში. დრო და დრო რაიმე მიზეზით ერთი ამოცანა ცვლის მეორეს, მაგრამ სასკოლო მათემატიკის მთელ მასალაზე ეს არსებითად არ ახდენს გავლენას. შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რომ მათემატიკა მკვდარი მეცნიერებაა, რომ მასში არაფერი იცვლება, რომ მეცნიერების ამ დარგში არ არის ახალი იდეები, ყოველ შემთხვევაში ისეთები, რომლებიც შეიძლება საერთო განათლების საგანი გახდეს“ [იმერლიშვილი, 2001].

სანამ ზემოთაღნიშნულ ფაქტზე ვისაუბრებდეთ. მანამდე, კიდევ ერთხელ დავახასიათოთ და ჩამოვაყალიბოთ ის გზები, რომელიც უნდა განვლოს კონკრეტულმა საკითხმა, სანამ ის სკოლის სახელმძღვანელოებში მოხვდება. საქმე არც ისე მარტივია, როგორადაც ხშირად სკოლის მოსწავლეებსათუ მათ მშობლებს წარმოუდგენიათ და არც ისე სახელდახელო, როგორადაც ხშირად თვით სახელმძღვანელოების ავტორებს ახასიათებთ. ზოგადად, „როცა რომელიმე აღმოჩენა მიიღებს მოქალაქეობრივ უფლებას მეცნიერებაში და დამკვიდრდება იქ, მხოლოდ ამის შემდეგ შეძლება დადგეს საკითხი მისი სწავლების შესახებ, ე.ი. გადაწყდეს შემდეგი სახის ამოცანა - რა მოცულობითა და რა შინაარსით შეიძლება მისი მოსწავლისათვის მიცემა და როგორ?“ [იმერლიშვილი, 2001].

ფუნქციამ დიდი გზა განვლო, სანამ ის სკოლის სახლემძღვანელოებში მოხვდებოდა. უპირველეს ყოვლისა, ეს საკითხი უკავშირდება რეფორმათა ციკლს მათემატიკურ განათლებაში, რომელიც დროული აღმოჩნდა XIX საუკუნის ბოლოს და

XX საუკუნის დასწაყისში და რომელიც დღემდე მიმიდინარეობს - ერთ საუკუნეზე მეტი ხნის წინ დაწყებული საქმე, დიდი მცდელობის მიუხედავად, დღემდე ბოლომდე არაა მიყვანილი. ამას სახელმძღვანელოთა და ეროვნული სასწავლო გეგმის ანალიზიც მოწმობს. როგორც ელენე იმერლიშვილი აღნიშნავს : „არცერთ სასკოლო დსიციპლინას არ ახასიათებდა მისი თანამედროვე დონისაგან განსხვავება, როგორც მათემატიკას. ეს განსხვავება გამოიხატებოდა განვითარების დონეთა დიდ სხვაობაში, მკვეთრად დაშორებულ მიმართულებებში, ღრმა პრინციპულ საფუძვლებში, მთლიან სისტემაში. ასეთი ვითარება მათემატიკას სულ უფრო და უფრო მზარდი ფართო გამოყენების ფონზე, რაც მეტად დამახასიათებელია ჩვენი დროისათვის, ქმნიდა დიდ სიძნელეებს მათემატიკის სასკოლო კურსის აგების ძირითადი იდეების შემუშავებაში. უნდა შექმნილიყო კურსი, რომელიც, გამომდინარე საშუალო სკოლის პროგრამების შედგენის ზოგადი პრინციპებიდან, შესაბამისობაში იქნებოდა მათემატიკური მეცნიერების თანამედროვე მიმართულებებთან, ამავე დროს, შექმიდა მნიშვნელოვან ბაზას მათემატიკური ცოდნის პრაქტიკაში გამოსაყენებლად და, რაც მთავარია, მისაწვდომი იქნებოდა მოსწავლეებისათვის“ [იმერლიშვილი, 1984].

XX საუკუნის დასაწყისისათვის სასკოლო მათემატიკა ძალიან ჩამორჩება მეცნიერების მონაპოვარს მათემატიკაში. ეს განსხვავება თითქმის სამსაუკუნოვანია. სასკოლო პროგრამა და სახელმძღვანელოები, ძირითადად, იფარგლება მე-17 საუკუნემდე მათემატიკის მონაპოვარით, ხოლო უმაღლესი სასწავლებლები კი შემდგომი დროის მათემატიკით. რა თქმა უნდა, ეს ძალიან დიდ პრობლემას უქმნიდა იმ პირებს, ვინც მოისურვებდა მათემატიკის კუთხით გაეგრძელებინა უნივერსიტეტში სწავლა და მით უფრო მათთვის, თუ შემდგომში ეს პირები გადაწყვეტდნენ მათემატიკის მასწავლებლობას. გარკვეულწილად, ამაზე ზემოთაც ვისაუბრეთ. მით უმეტეს, თუ საშუალო სკოლა და უმაღლესი სასწავლებლები ე.წ. სხვადასხვა მათემატიკურ ენებზე ისაუბრებდნენ. ფელიქს კლაინი ამას „დავიწყების ორმაგ სისტემას“ უწოდებს და მისი არსი იმაში მდგომარეობს, რომ უნივერსიტეტებში სწავლისას სტუდენტებს საშუალო სკოლის მათემატიკა

ავიწყდებოდათ და სკოლაში მასწავლებლად დაბრუნებისას კი უმაღლესი მათემატიკა.

XVII საუკინის შემდეგ მათემატიკაში საკმაოდ დიდი ძვრები შეინიშნება და მათემატიკა განვითარების სრულიად ახალ საფეხურზე გადადის. შესაბამისად ე.წ. „ჩავარდნა“ საკმაოდ დიდია. რაც დღის წესრიგში აყენებს სასკოლო მათემატიკის სწავლებასა და მათემატიკური განათლებისათვის მოძრაობას. ამ მოძრაობის ინიციატორად XIX საუკინის 90-იან წლებში სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებელი გეორგ კანტორი გვევლინება. 1897 წელს კი, შვეიცარიაში ქალაქ ციურიხში შედგება მათემატიკოსთა პირველი კონგრესი, სადაც ბევრ საორგანიზაციო საკითხთან ერთად მსჯელობის საგნად იქცა მათემატიკური განათლება. მის შესახებ მოხსენებას ფელიქს კლაინი აკეთებს და დიდი გამოხმაურებაც მოჰყვება. შესაბამისად, „რეფორმისტული მოძრაობის“ მეთაურად ფელიქს კლაინი გვევლინება. რეფორმისტული მოძრაობის შესწავლის ფარგლებში ჩვენს მიზანს შეადგენს ის საკითხი, თუ რა როლი აკისრია ფუნქციას. შეძლებისდაგვარად, გადმოვცემთ ამ საკითხებს და მასთან უშუალოდ დაკავშირებულ თემებს. ეს საკითხები ძირითადად დამუშავებულია ელენე იმერლიშვილის ზემოთხსენებულ სახელმძღვანელოდან „მათემატიკის სწავლების ზოგადი მეთოდიკა“, რომელიც თბილისის უნივერსიტეტმა გამოსცა 2001 წელს და თეიმურაზ ვეფხვაძის 1997 წელს გამოცემულ ლექციათა კურსში „მათემატიკის რჩეული თავები“, ასევე, გ. გორგოძეს და მ. ჯიქიას 2003 წელს გამოცემულ „მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის ზოგადი კურსიდან“.

კლაინის მოთხოვნებს შეადგენს, „მათემატიკის ცალკეულ დისციპლინათა შორის საზღვრების მოხსნა და მათემატიკის ერთი მთლიანი კურსის შექმნა ახალი შინაარსით, რომელიც ძირითადად აგებული უნდა ყოფილიყო ფუნქციის საფუძველზე. სასკოლო მათემატიკის კურსში შეტანილი უნდა ყოფილიყო ანალიზური გეომეტრიისა და მათემატიკური ანალიზის ელემენტები...ნაჩვენები უნდა ყოფილიყო მათემატიკის გამოყენება ფიზიკასა და ტექნიკაში“ [იმერლიშვილი, 2001]. ეს მოთხოვნები ამოსავალ წერტილად იქცა, შემდგომში, ბურბაკისტებისათვის. კლაინის სიტყვებია: „რომელი ცნება დომინირებს თანამედროვე მათემატიკაში? ეს ფუნქციის ცნებაა. ფუნქციიის სწავლება, შეიძლება ითქვას, მთელი უმაღლესი

მათემატიკის საგანია“ ან კიდევ: „ფუნქციის ცნება უნდა თამაშობდეს ძირითად და ხელმძღვანელ როლს საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში. ეს ცნება მოსწავლეთათვიუს განმარტებული უნდა იყოს, რაც შეიძლება ადრეულად და უნდა განმსჭვალოს ამ ცნებამ მთელი ალგებრისა და გეომეტრიის სწავლება“, ხოლო „ფუნქციის ცნების გეომეტრიული ფორმა, საერთოდ, „სული და გული“ უნდა გახდეს სასკოლო მათემატიკურ განათლებაში“ [Колягин, 1977].

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ მაშინდელი რუსეთი და შემდგომ მთელი საბჭოთა კავშირი, რომლის შემადგენლობაშიც შედიოდა საქართველოც, თავიდანვე ჩაერთნენ საერთაშორისო მათემატიკურ კონგრესებში. საქართველო მსოფლიო მათემატიკური კავშირის წევრი გახდა 1924 წლიდან, მას შემდეგ, რაც 1924 წელს წელს კანადაში, ქალაქ ტორონტოში საერთაშორისო კონგრესზე მოხსენება წაიკითხა ანდრია რაზმაძემ და რის შემდეგაც საქართველოს განათლების კომისარიატს ატყობინებდა: „მე ყველგან ჩაწერილი ვარ, როგორც საქართველოს დელეგატი. მე ყველაფერი გავაკეთე იმისათვის, რომ ჩვენი ქვეყანა წარმომედგინა მეცნიერების მხრივ.“ მიუხედავად საბჭოთა კავშირის კარჩაკეტილი ცხოვრებისა, რომლის მონაპოვარით და განათლების სისტემითაც წლების განმავლობაში საზრდოობდა საქართველო, მაინც შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მათემატიკის განათლების კუთხით „აჰყვა ევროპის განათლების ფეხის ხმას“. ჩვენ აღარ შევჩერდებით მიზანმიმართულად გამოშვებულ ჟურნალებზე, რომელიც იხილავდა მათემატიკური განათლების საკითხს და არც ბევრ საერთაშორისო მოძრაობაზე, რომელიც აღნიშნული საკითხებით იყვნენ დაკავებულნი. უბრალოდ, ყურადღებას გავამახვილებთ, ისევ და ისევ, ფუნქციასა და მის სწავლებაზე.

მეოთხე საერთაშორისო კონგრესზე ისევ მოითხოვენ მათემატიკოსები, რომ სასკოლო პროგრამებში აუცილებლად შევიდეს ახალი სპეციალური ხასიათის თემები და ცნებები, როგორიცაა, ფუნქცია, ჯგუფი და სიმრავლე. კომისია საჭირო მინიმუმის დადგენას შეეცადა. მათთვისაც ვინ აგრძელებდა უნივერსიტეტში სწავლას, და მათთვისაც, ვინ უბრალოდ წარმოებაში მუშაობას შეუდგებოდა.

1914 წელს კონგრესზე მოხსენებას აკეთებს პროფესორი ემილ ბორელი - „საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლების შეხამება სამეცნიერო პროგრესთან“. იგი

იმ მათემატიკოსთა რიცხვს ეკუთვნის, ვინ სამეცნიერო მუშაობასთან ერთად დიდადაა დაკავებული მათემატიკის შემოქმედებითად სწავლებითაც. მან ბევრი სასკოლო სახელმძღვანელოც გამოსცა, რომლებიც აგებულია რეფორმისტული მოძრაობის იდეების გათვალისწინებით, ფუნქციონალური დამოკიდებულების იდეის სისტემატურად განვითარება ფუნქციებისა და მათი გრაფიკების შესწავლის გზით, უმაღლესი მათემატიკის ელემენტების შეტანით სკოლაში და გარკვეული საკითხების ამოღებით ამ პროგრამიდან. როგორც ჩანს, რეფორმისტული მოძრაობა თავის შედეგებს ნელ-ნელა მაინც იღებს.

1930-იანი წლებიდან ისევ წინა პლანზე გამოდის სასკოლო მათემატიკური განათლება და მისი განვითარება ერთი რომელიმე პიროვნების მეთაურობით კი არ მიმდინარეობს, არამედ ამ საქმეში ჩართულები არიან მათემატიკოსთა ასოციაციები, პროფესორთა ჯგუფები და სკოლის მასწავლებლები. საბოლოოდ UNESCO-ს შემადგენლობაში შესულს და 1925 წელს დაარსებულ განათლების საერთაშორისო ბიუროს ერთ-ერთ კონფერენციაზე სასკოლო მათემატიკის ძირითად მიმართულებად დასახულია „საერთო პროგრესული მიმართულება“, რომელიც გულისხმობს სიმრავლურ კონცეფციას. 1954 წელს მე-12 კონგრესზე ჯ. კუპერამ ჩამოაყალიბა მათემატიკის მოდერნიზაციის პრინციპები. რა თქმა უნდა, მისთვის ძირითადი ცნებებია სიმრავლე, გარდაქმნა და სტრუქტურა [ვეფხვაძე, 1997].

XX საუკუნის 60-იანი წლებიდან მსოფლიოში არსებითად ახალ სახელმძღვანელოებზე გადასვლა ხდება. აღსანიშნავია ფრანგული და ბელგური სასკოლო სახელმძღვანელოები ლუსიენ ფელიქსის „ელემენტარული მათემატიკა თანამედროვე გადმოცემით“ და ჟორჟ პაპის „თანამედროვე მათემატიკა“. აქ დარღვეულია მათემატიკის ცალკე საგნებად დაყოფის იდეა და ორივე სიმრავლეთა თეორიის კონცეფციაზეა აგებული. პაპის თქმით „სკოლა უნდა აძლევდეს მოსწავლეებს წარმოდგენას მათემატიკაზე მის მთლიანობაში, რასაც მნიშვნელოვნად უშლის ხელს „ჩინური კედლები“ მის ცალკეულ საგნებს შორის“ [იმერლიშვილი, 2001].

პოლონური სახელმძღვანელოებიდან აღნიშვნის ღირსია ცნობილი პედაგოგის და პროფესორის კრიგოვსკაიას წიგნი „გეომეტრია“, რომელშიც სრული

თანმიმდევრობით არის გატარებული სიმრავლის სიმრავლეზე ასახვის იდეა გეომეტრიაში, საიდანაც, როგორც კერძო შემთხვევას, ვღებულობთ გარდაქმნას - ფუნქციას. გარდაქმნა მიჩნეულია ფუნდამნეტურ ცნებად, ხოლო აქედან გახსნილია კონგრუენტულობისა და იზომეტრიის ცნებები. აღნიშნულ სახელმძღვანელოში ფიგურათა ყველა გარდაქმნა ფიგურათა სიმეტრიიდან გამომდინარეობს. [იმერლიშვილი, 2001]

მსოფლიოში ყველაზე კონსერვატიულ ქვეყნად ინგლისი ითვლება, თუმცა მათაც კი მიიჩნიეს სასკოლო მატემატიკური რეფორმა აუცილებლად. ისინი თვლიდნენ რომ სკოლაში მოსწავლეებს უნდა ესწავლათ თანამედროვე ცხოვრებაში რთულ სიტუაციებთან გამკლავება. სახელმძღვანელოებში ძირითად საკითხებად შეტანილია გეომეტრიული გარდაქმნები, სიმრავლეთა თეორია და ფუნქცია. 1964 წელს ყალიბდება ე.წ. „ნაფილდის“ კომისია. რომელიც იხილავს ორ „რევოლუციას“ - რევოლუცია „რა“ და რევოლუცია „როგორ“. დაწყებითი სკოლის მასწავლებელთა აზრით მათემატიკის სწავლებამ „სიტყვითა და ცარცით“ უსუსურობა გამოავლინა და დაწყებითი კლასებიდანვე დაწყებული ვარჯიშითა და თამაშით უნდა ისწავლებოდეს მატემატიკა - რევოლუცია „როგორ“, ხოლო მაღალ კლასებში ტრადიციული მასალის გარკვეული ნაწილის მაგიერ უნდა შემოდიოდეს წარმოდგენები სიმრავლეთა თეორიაზე და მეტი ყურადღება ეთმობოდეს ლოგიკური აზროვნების განვითარებას.

ამერიკის შეერთებულ შტატებში შეიქმნა სასკოლო მათემატიკის საკითხების გადასინჯვის კომიტეტი, რომელმაც შეადგინა პროგრამა და სახელმძღვანელოები, სადაც ძირითად ცნებად მიჩნეულია სიმრავლე და ფუნქცია, ხოლო სწავლების ძირითად მეთოდად - „აღმოჩენის“ მეთოდი. იაპონიაში მათემატიკურ რეფორმას საფუძვლად უდევს სიმრავლური მიდგომა. გეომეტრიული ფიგურაც წერტილთა სიმრავლედ იწოდება. გეომეტრიაში გეომეტრიული გარდაქმნები მოცემულია, როგორც სიმრავლის ასახვა თავის თავზე. საერთაშორისო კონგრესი მსოფლიოს ქვეყნებს მოიცავს უკვე, რაც კიდევ ერთხელ ცხადად აჩვენებს მათემატიკური რეფორმის საჭიროებას.

და მაინც, 1962 წელს UNESCOS-ს მიერ ჩატარებულ სიმპოზიუმზე უნგრელი ტ. ვარგა აღნიშნავს: „ყველასათვის ცხადი გახდა, რომ მათემატიკა ადამიანის ხელში ხდება სულ უფრო და უფრო ძლიერი იარაღი. ამავე დროს, ყველა ქვეყნის სასკოლო პროგრამებს მათემატიკაში ძალიან ცოტა აქვს საერთო ამ ძლიერ იარაღთან, ჩამორჩებიან მათემატიკის განვითარებას 200-300 წლით“ [იმერლიშვილი, 2001]. სიმპოზიუმის მუშაობამ აჩვენა მათემატიკოსების, ფსიქოლოგების და პედაგოგების თანამშრომლობის განსაკუთრებული მნიშვნელობა.

1963 წელს ათენში კონფერენციაზე იხილავენ სკანდინავიის ქვეყნების რეფორმის შედეგებს, საიდანაც ირკვევა, რომ ამ ქვეყნებში გამოცემულია ახალი სახელმძღვანელოები და სადაც სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები შეტანილია მთელ კურსში, თანდათანობით. გეომეტრია დაფუძნებულია გეომეტრიულ გარდაქმნებზე - სიმეტრია, მობრუნება, გადატანა, მიმართება და ფუნქცია განიხილება, როგორც დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე. მთელი კურსის ძირითად ცნებებად ითვლება სიმრავლე, მიმართება და ფუნქცია. აღსანიშნავია ფინელი მატემატიკოსის რალფ ნევანლინას სტატია “რეფორმა მათემატიკის სწავლებაში“, სადაც ამბობს, რომ ალგებრის შესწავლა უნდა იწყებოდეს უფრო ადრე, ვიდრე ეს ახლაა მიღებული. პროგრამაში უნდა შემჭიდროვდეს არითმეტიკის სწავლება და ამოვიდეს უსარგებლო თემები და სავარჯიშოები. მათ მაგივრად წინა პლანზე უნდა გამოვიდეს ალგებრული სავარჯიშოები და ფუნქციის ცნება და გეომეტრია. შესაბამისად, აუცილებელი ხდება სიმრავლური და ლოგიკური სიმბოლიკის ფლობა. [Неванлинна, 1968].

ამერიკის შეერთებულ შტატებში, ნიუ იორკში, 1958 წელს იქმნება ე.წ. „9 პუნქტის პროგრამა“. მისი მესვეურები გონიერი თანაფარდობის დამყარებას ცდილობენ კლასიკურ და თანამედროვე მათემატიკას შორის. მოითხოვება ალგებრისა და გეომეტრიის გამაერთიანებელი იდეების - სიმრავლე, მიმართება, ფუნქცია - გონიერი გამოყენება.

1966 წელს ფრანგი რენე ტომი თავის გამოსვლაში, სათაურით „თანამედროვე მათემატიკა - არსებობს კი ის?“ - აღნიშნავს, რომ ყველაფერი, რაც მოდერნისტულმა მოძრაობამ მოიტანა არ უნდა წაიშალოს და „უკან დაბრუნება შეუძლებელია. ახალ

მიმდინარეობაში არის დადებითი მომენტები, რომელიც უნდა შევინარჩუნოთ. წინათ საშუალო და უმაღლეს სკოლას შორის არსებობდა უფსკრული, რომელსაც ძლივს გადალახავდნენ ხოლმე ახალგაზრდები. სიმრავლური თეორიის ელემენტების (რომლებსაც ვაძლევთ ყოველგვარი თეორიის გარეშე) და და წრფივი ალგებრის საფუძვლების შემოტანა ამ უფსკრულის გადალახვას უწყობს ხელს" [იმერლიშვილი, 2001].

ძალიან მნიშვნელოვანია იმის განხილვა, თუ როგორ მიმდინარეობდა ფუნქციის ცნების შემოტანა და დამკვიდრება ჩვენს რეალობაში და რამდენად განხორციელდა მსოფლიოში დაწყებული რეფორმა საბჭოთა კავშირში და, შესაბამისად, საქართველოშიც. რეფორმის კულმინაციური ხანა XX საუკუნის 60-70-იანი წლებია, თუმცა რეფორმა უფრო ადრე დაიწყო. სასკოლო მათემატიკის რეფორმა ძირითადად ასოცირდება ხოლმე მხოლოდ კოლმოგოროვის სახელთან, თუმცა მის უკან იდგნენ ისეთი გამოჩენილი მათემატიკოსები, როგორებიც არიან: ლუზინი, კრილოვი, ჩაპლიგინი, ჩებოტარევი, შმიდტი, ლუსტერნიკი, სობოლევი, შნირელმანი, ალექსანდროვი, მარკუშევიჩი, ფიხტენგოლცი, ხინჩინი, გელფონდი და ჩვენი თანამემაულეები: ნ. მუსხელიშვილი და ვ. კუპრაძე. როგორც ჩანს მათემატიკოსთა ის ნაკადი, რომელიც რევოლუციის მომხრეა მათემატიკის დაფუძნებაში, მაშინდელი მათემატიკური ელიტის კორიფეები არიან და მათი აზრი ანგარიშგასაწევია. თავიანთ სამოქმედო არეალად მათ შექმნეს ჟურნალი "математика в школе", სადაც დღევანდელ დღემდე მიმდინარეობს მათემატიკის დაფუძნებისადმი მიძღვნილი სტატიების გამოქვეყნება. ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებით კი ძალიან ბევრი სტატია იბეჭდება 40-50-იან წლებში, შემდგომ კი 70-იან წლებში. ამ მათემატიკოსთა მთავარი იდეები შეიძლება რამდენიმე პუნქტად ჩამოვაყალიბოთ:

- სასკოლო მათემატიკის შესაბამისობა მეცნიერების თანამედროვე მიღწევებთან;
- მათემატიკური ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენება;
- მისაწვდომობა მოსწავლეთათვის.

ამ იდეების განხორციელება შესაძლებელი იქნებოდა შემდეგი პრინციპებით:

- სასკოლო მათემატიკის კურსი უნდა ყოფილიყო ერთი მთლიანი, მოხსნილიყო ხელოვნური საგნობრივი დაყოფა. მას უნდა ჰქონოდა ერთი შესასწავლი ობიექტი და შესწავლის ერთიანი აპარატი-მეთოდი;
- მათემატიკის სასკოლო კურსი უნდა აგებული ყოფილიყო სიმრავლური კონცეფციის მიხედვით. ამასთან, კურსში სიმრავლეთა თეორიიდან შეტანილი იქნებოდა მხოლოდ ელემენტარული ცნებები და მიმართებები. მათი სიმბოლიკის სისტემატური, თუმცა ზომიერი გამოყენებით;
- უნდა დაზუსტებულიყო მათემატიკური ენა, აღნიშვნები, ტერმინოლოგია და ბევრი სხვა,

შესაბამისად, წინა პლანზე გამოდიოდა სიმრავლე, სიმრავლეზე განსაზღვრული მიმართებები და ფუნქციები. გეომეტრიის სასკოლო კურსიც აგებული უნდა ყოფილიყო სიმრავლისა და ფუნქციის ცნებებზე დაყრდნობით. „კომისია ამოდიოდა მათემატიკის, როგორც ერთიანი მეცნიერების, თანამედროვე გაგებიდან. ამ ფონზე აღარ შეიძლებოდა სასკოლო მატემატიკის სხვადასხვა დამოუკიდებელი საგნის სახით წარმოდგენა, მით უმეტეს, რომ ეს დაყოფა მხოლოდ ხელოვნური სახის მატარებელი იყო. ცხადია, არც გაერთიანება არ უნდა ყოფილიყო ფორმალური. სასკოლლო მათემატიკას უნდა ჰქონოდა ერთი შესასწავლი ობიექტი და კვლევის შესწავლის საერთო მეთოდი“ [ვეფხვაძე, 1997],[იმერლიშვილი, 2001].

აკადემიკოს ა. კოლმოგოროვის მთავარი მოსაზრება იმას გულისხმობდა, რომ ალგებრასაც და გეომეტრიასაც უნდა ჰქონოდა შესწავლის ერთიანი საგანი და ეს საგანი იყო „სიმრავლე“. ალგებრა განიხილავდა რიცხვთა სიმრავლეებს, ხოლო გეომეტრია წერტილთა სიმრავლეებს. სივრცე - ეს ყველა წერტილთა სიმრავლეა. აქ მთავარი ისაა, რომ სიმრავლეების განხილვისას არავითარი მნიშვნელობა არ ექნებოდა ელემენტების ბუნებას, რაც იმის საშუალებას მისცემდა მათემატიკოსებს, რომ ალგებრას და გეომეტრიას ექნებოდათ ერთიანი აპარატი „ფუნქცია“, თუმცა ჩვენ გეომეტრიაში უფრო მეტად ვიყენებთ ტერმინებს „ასახვას“. ჟ. ლაგრანჟი ბრძანებს: „სანამ ალგებრა და გეომეტრია ვითარდებოდნენ ცალ-ცალკე, მათი პროგრესი იყო ნელი - შეზღუდული; როცა კი ეს ორი მიმართულება შეერთდა, მათ ერთმანეთის დახმარება დაიწყეს და სწრაფი ნაბიჯით იწყეს სვლა სრულყოფილებისკენ“. აქვე

გვინდა მოვიყვანოთ შემდეგი სიტყვებიც: "უნდა აღვნიშნოთ, რომ სასკოლო მათემატიკაში სიმრავლეთა თეორიის როლი დაიყვანება ამ თეორიის „ენის" გამოყენებაზე, და არა იმაზე, რომ მთელი სასკოლო მათემატიკა დავაფუძნოთ მასზე, - სიმრავლეთა თეორიის ზედმეტად პედანტურმა გამოყენებამ სასკოლო მათემატიკაში, შეიძლება ძალიან აბსტრაქტული და გაუგებარი გახადოს ზოგიერთი მიმართულება" [Виленкин, 1980]. „უნდა ითქვას, რომ სიმრავლეთა თეორია შესანიშნავია არა მარტო თავისი ზოგადფილოსოფიური მნიშვნელობით, არამედ განსაცვიფრებელი სიმარტივითაც. მისი ძირითადი დებულებების შესასწავლად თითქმის არავითარი წინასწარი ცოდნა საჭირო არ არის. ამიტომ მათი დიდი ნაწილი სრულად მისაწვდომია საშუალო სკოლის მასწავლებელთათვის" [ხარშილაძე, 1963].

მიუხედავად დიდი ხნის მცდელობისა, თუ როგორ გარდაექმნათ სასკოლო პროგრამები ზემოთ აღნიშნულ მატემატიკოსებს, მაინც ბევრი სიძნელე შეხვდათ მათ და 70-იანი წლებიდან ბევრი მოწინააღმდეგეც გამოუჩნდათ. სიმრავლური მეთოდებით ფუნქციის ცნების შემოტანას ეწინააღმდეგებოდნენ ისეთი გამოჩენილი მათემატიკოსები, როგორებიც იყვნენ: ვლადიმიროვი, პონტრიაგინი, ტიხონოვი, კოლიაგინი, ვინოგრადოვი, პოგორელოვი და ბევრი სხვა. „უკანასკნელ ხანს თეორიულ-სიმრავლური იდეოლოგია საშუალო სკოლის სახელმძღვანელოებსა და პროგრამებში ინერგება. ამ დანერგვის ავტორები ამტკიცებენ, რომ სიმრავლეთა თეორია მნიშვნელოვანია სამეცნიერო ტექნიკური რევოლუციისათვის და არის მათემატიკის უდიდესი მიღწევა. სინამდვილეში, სიმრავლეთა თეორიას არა აქვს კავშირი სამეცნიერო ტექნიკურ რევოლუციასთან და არ არის მათემატიკის უახლესი მიღწევა" [Понтрягин, 1969]. ისინი საკუთარ თავს ანტირეფორმისტებს უწოდებდნენ. მათი მთავარი გზავნილი ის გახლდათ, რომ ისინი რეფორმეტორ მათემატიკოსებს ადანაშაულებდნენ მატემატიკის მეთოდიკის არცოდნასა და ფსიქოლოგიური მომენტების ყურადღების არ მიქცევაში. გამოქვეყნდა პონტრიაგინის წერილი „ეთიკა და არითმეტიკა", სადაც მკაცრად ილაშქრებდა სიმრავლეთა თეორიაზე მათემატიკის სასკოლო კურსის დაფუძნებაზე. აღნიშნული სტატიის ქართული თარგმანის ვარიანტს დართული ჰქონდა აკადემიკოს ვიქტორ კუპრაძის მინაწერი, რომელიც იზიარებდა პონტრიაგინის აზრს. არადა, რეფორმის

დასაწყისში იგი „რეფორმატორად“ გვევლინება. ასევე, მოითხოვდენ, რომ კისელიოვის სახელმძღვანელო, რომელიც გამოყენებიდან ამოვიდა 1956 წლიდან, დაბრუნებულიყო მოსწავლეთა მერხებზე. ამის საპირისპირო არგუმენტად მოყავთ ხოლმე ის, რომ არც ანტირეფორმატორი მათემატიკოსები იყვნენ მეთოდისტები და მეორე ის, რომ რეფორმეტორებს თავიდანვე გვერდით ედგათ ისეთი მეთოდისტი მათემატიკოსები, როგორებიც არიან მაგალითად: ნეშკოვი, სემუშინი, ფეტისოვი, ბოლტიანსკი და ა.შ.

კოლომოგოროვის კრიტიკა იქიდან დაიწყო, რომ მან გეომეტრიაში ფიგურათა ტოლობის მაგიერ შემოიტანა ფიგურათა კონგრუენტულობის ცნება. ანტირეფორმისტები ამბობდნენ, რომ მოსწავლეებს ენის გასატეხად ჰქონდათ ქცეული აღნიშნული ტერმინი და თანაც ტოლობის ცნება როდესაც არსებობდა, რა საჭირო იყო ახალი ტერმინის შემოტანა. პირველ რიგში აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ არნიშნულ ტერმინს იყენებს თვით დ. ჰილბერტი და მეორე ის, რომ სიმრავლეთა თეორიის თვალსაზრისით, ძალიან კარგად ვიცით, რომ ეს ორი ცნება სინონიმი არ არის. თუ კრიტიკაზე მიდგება საქმე, მაშინ აკრიტიკებენ თვით პონტრიაგინსაც, რომელიც თავის ერთერთ სახელმძღვანელოში აღნიშნავს, რომ თუ რომელიმე ფუნქციის წარმოებული 0-ის ტოლია, მაშინ ის ფუნქცია არ გახლავთო. აშკარაა, ავტორი მუდმივ სიდიდეებს ფუნქციებად არ აღიქვამს. არადა, მათი ამოსავალი წერტილი ხომ სწორედ ის გახლდათ, რომ ფუნქციის სნება სასკოლო ლიტერატურაში შემოტანილი ყოფილიყო ცვლადი სიდიდის საშუალებით და თუ ცვლადი სიდიდე უნდა განვიხილოთ, აქვე მოსწავლეთათვის აუცილებელი ხდება მუდმივი სიდიდის ცნების შემოტანაც.

ანტირეფორმისტები ძალიან აკრიტიკებდნენ რეფორმისტების მიერ დაწერილ სახელმძღვანელოებს და ფუნქციის შემოტანის მათეულ ვარიანტს, ისინი მოითხოვდნენ კისელიოვის წიგნების დაბრუნებას სასკოლო პრაქტიკაში. სხვათაშორის, ეს იდეა დღესაც შენარჩუნებულია გამოჩენილი მათემატიკოსების მოხსენებებში და დღესაც მოუწოდებენ მათემატიკოსთა სიმპოზიუმბეზე, რათა დაბრუნდეს „რევოლუციამდელი“ მიდგომები ფუნქციის შესწავლასთან დაკავშირებით. ერთ-ერთი გახლავთ რუსი მათემატიკოსი ვ. არნოლდი, რომელმაც

დუბნაში კონფერენციაზე განაცხადა: „მე კი დავუბრუნდებოდი კისელიოვს“ [ი.კოსტენკო - სასკოლო მათემატიკის რეფორმა 1970-1980 წწ.]. ანტირეფორმატორებს არგუმენტად მოყავთ მათემატიკის მასწავლებელთა „ჩივილები“ ახალი სახელმძღვანელოების თაობაზე და მათი ბევრჯერ შეცვლით გამოწვეულ პრობლემებზე. პირველ რიგში, აღვნიშნოთ ის ფაქტი, რომ ნებისმიერი სახელმძღვანელოს პირველივე გამოცემა სასურველ შედეგებს ვერ აღწევს და აუცილებელია მისი დახვეწა, მეორე ის, რომ დახვეწას დრო სჭირდება და ეს დრო ამ სახელმძღვანელოების გამოყენების კვალდაკვალ მიედინება. მიუხედავად მასწავლებელთა დიდი კოლექტივის პრეტენზიებისა, რომლებმაც სიმრავლეთა თეორიას ეჭვის თვალით დაუწყეს ყურება, სკოლის სახელმძღვანელოებს თან მოყვებოდა მასწავლებელთა დამხმარე სახელმძღვანელოები, რაც ხარვეზის არმოფხვრაში უნდა დახმარებოდათ, უბრალოდ ბევრი ადამიანისთვის დღესაც სიახლეები მიუღებელია. საყურადღებოა ჩარლზ დარვინის გამონათქვამი: „გადარჩებიან არა ყველაზე ძლიერი, თუ ყველაზე ჭკვიანი სახეობები, არამედ ისინი, რომლებიც ყველაზე სწრაფად ახერხებენ ცვლილებებზე რეაგირებას“. რეფორმისტებიც ხომ ცვლილებებზე რეაგირებას ითხოვდნენ მასწავლებლებისგან . ზოგადად კი, ბორელისა არ იყოს, ყოველ ცვლილებას პროგრამებში, პირველ ყოვლისა, რაღაც ზიანი მოაქვს და მასთან შეგუების პირველ პერიოდში მეტია დაბნეულობა, ვიდრე სარგებლობა. სწავლების ყოველ მომენტში მასწავლებელი ხელმძღვანელობს მრავალი თაობის გამოცდილებით, ხოლო სიახლისათვის მთელი ტრადიციის ახლად შექმნა გვიხდება. ასე, თუ ისე, არსებითად სიახლეების პირობებში სწავლების სრულყოფას შეიძლება მივაღწიოთ „სულ ცოტა ერთი თაობის შემდეგ“. [ბორელი - 1958]. დღესაც მიმდინარეობს საქართველოში სასკოლო სახელმძღვანელოების დახვეწის პროცესი, და შესაბამისად, ხარვეზებისაგან ვერ ვიქნებით დაზღვეულნი. ყველა სახელმძღვანელოს დრო გამოსცდის. გვინდა ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ წინა საუკუნის 80-იანი წლების შემდგომ საქართველო მეტ-ნაკლებად ისევ დაწყებული რეფორმის გზაზე დგას და აგრძელებს სახელმძღვანელოების გამოცემას მათემატიკის ერთიანობის იდეაზე დაყრდნობით, თუმცა ბევრი ავტორი ვერ ღალატობს ფუნქციის გადმოცემის ტრადიციულ

მეთოდებს და, ხშირ შემთხვევაში, მათემატიკის ერთიანობის იდეას ფასადური ხასიათი აქვს. ქართული კულტურა სულდგმულობდა რუსული სულით, თუმცა მათემატიკის განვითარებზე ამან ძირეული გავლენა ვერ მოახდინა. 1990-იანი წლებიდან შედარებით ნაკლებად და მანამდე უფრო მეტად, გამოჩენილი ქართველი მათემატიკოსები რეფორმის სათავეებთან იდგნენ. ერთ-ერთი გახლდათ ავთანდილ ბენდუქიძე, რომელმაც შესანიშნავად თარგმნა კოლმოგოროვისეული პრინციპები და 1980 წლეს დაწერა კიდეც ორიგინალური ნაშრომი „მიმართება და ფუნქცია" სკოლის მასწავლებელთათვის განათლების სამინისტროს დავალებით. იგი სავსებით იზიარებდა რეფორმატორთა შეხედულებებს. სახელმძღვანელოთა პრობლემებს და ზოგადად, სწავლების პრობლემებს ეხმიანება იოსებ ავალიშვილი 1917 წელს გამოცემული „მათემატიკური ტერმინების" წინასიტყვაობაში: „მე მგონი არ არის ისეთი კუთხე ქვეყნისა, სადაც კმაყოფილნი იყვნენ საგნების სწავლების კარგად დაყენებისა. ეს უკმაყოფილება გამოწვეულია იმით, რომ ყველგან ცხოვრების ევოლუციამ უსწრო პედაგოგიის ევოლუციას. ამ მხრივ ჩვენში უარესი მდგომარეობაა, რადგან ჩვენ იმის უფლებაც არ გვქონდა, რომ საგნები ქართულ ენაზე გვესწავლებინა. თითქმის სულ ახლათ უნდა დავამუშავოთ - შევქმნათ სახელმძღვანელოები, სასწავლო წიგნები, თვალსაჩინო ხელსწაყოები და სხვა. დამუშავება-შეთხვზა წიგნებისა უქმად ჩაივლის, თუ საჭირო ტერმინები ეხლავე არ დავამუშავეთ. ტერმინების დამუშავება გაგვიადვილდება, თუ წარსულს არ დავივიწყებთ". ერთი საუკუნის წინათ დაწერილი ეს სიტყვები დღესაც არ კარგავს აქტუალობას და ალბათ ამითაა გამოწვეული სახელმძღავნელოთა ხშირად ცვლალებადობა საქართველოს რეალობაში. მთავარი კი მაინც ისაა, რომ სახელმძღვანელოების შინაარსობრივი კუთხით ნელ-ნელა ვუახლოვდებით დიდი ხნის წინ დაწყებული მათემატიკური რეფორმის სათავეებს. რა თქმა უნდა, აქ სახელმძღავნელოები შევაფასეთ მხოლოდ ზედაპირულად და „ერთ შეხედვით", მათი ანალიზი კვლევის საგანს შეადგენს.

ანტირეფორმატორები კოლმოგოროვს უფრო შემწყნარებლურად უყურებენ და მარკუშევიჩს თვლიან იურიდიულად და მორალურად პასუხისმგებელს რეფორმატორულ იდეებთან დაკავშირებით. მათი აზრით, რეფორმამ სკოლიდან გააქრო მეთოდიკა და პედაგოგიკა და სიტუაციის გამოსწორების ერთადერთ

საშუალებად ესახებად „უკან, კისელიოვისკენ!“. ამის კიდევ ერთ მაგალითად ისინი ასახელებდნენ, რომ მოსწავლეთა „გაორება” ხდებოდა მათემატიკისა და ფიზიკის გაკვეთილებზე - მათემატიკის გაკვეთილზე ფუნქცია, როგორც შესაბამისობა ესმოდათ, ხოლო ფიზიკის გაკვეთილზე კი, როგორც ცვლადი სიდიდე და დამოკიდებულება და ეს „გაორება“ მხოლოდ ამით არ შემოიფრგლებოდა. თუმცა ვიცით, რომ ანტირეფორმისტული მოძრაობის დაწყება მხოლოდ პოლიტიკურ საქმეს წარმოადგენდა - ეს გახლდათ „ბოლშევიკების“ ცუდად ჩარევა მათემატიკის სწავლების პროცესში, რომელიც დღემდე გრძელდება რუსეთში და სამწუხაროდ, ჩვენი მათდამი „გატირების“ გამო ვერ ველევით ზოგიერთ საკითხს მათემატიკის კურსიდან და გვსურს ხოლმე დავუბრუნდეთ წარსულს ანალიზის გარეშე. რაღა თქმა უნდა, იმის თქმა, რომ ესა თუ ის აზრი ცალსახად კარგია ან ცუდი, არ შეიძლება, მაგრამ არსებობს მეტად ანგარიშგასაწევი მოსაზრებები და - ნაკლებად. ჩვენ აღარ შევჩერდებით უფრო დაწვრილებით აღნიშნულ საკითხზე. თუმცა დიდძალი მასალა საშუალებას იძლევა დაწვრილებით განვიხილოთ აღნიშნული საკითხი. მხოლოდ შევეცდებით მცირე დასკვნების გაკეთებას:

- საერთაშორისო რეფორმის დაწყება დროული და შეძლება თქვას დაგვიანებულიც იყო მაშინდელ მათემატიკურ რეალობაში;
- გარდა იმისა, თუ რა უნდა ისწავლებოდეს სკოლაში (ვგულისხმოთ სიმრავლეს, ფუნქციას...) აუცილებლად დაისმებოდა კიდეც საკითხი, როგორ უნდა ისწავლებოდეს იგი. მეოცე საუკუნის მათემატიკის ისტორიას კი შეიძლება ვუწოდოთ ფუნქციის დაფუძნების ისტორია არამარტო სასკოლო ლიტერატურაში, არამედ უმაღლესი სკოლის სახელმძღვანელოებშიც;
- მიუხედავად აზრთა სხვადასხვაობისა რეფორმა აუცილებელი იყო და ე.წ. „რეფორმატორების“ და „ანტირეფორმატორების“ იდეების გათვალისწინებაა შესაძლებელი, თუ საკითხის შესწავლის ისტორიულ გზას შევთავაზებთ მოსწავლეებს;
- ზემოთ მოყვანილი მცირედი ანალიზი გვაძლევს იმის თქმის საშუალებას, რომ ფუნქციის დაფუძნებისა და სწავლების პრობლემები დიდი ხნის განმავლობაში იქნება სამეცნიერო წრეებში განხილვისა და დავის საგანი.

განვიხილეთ ეროვნული სასწავლო გეგმის მათემატიკის სტანდარტიც. ახალი სტანდარტის (2018-2014) მიხედვით სწავლება ხორციელდება I-VI კლასებში, სექტემბრიდან VII კლასშიც, ხოლო VIII-XII კლასებში ძველი სტანდარტი მოქმედებს. რამდენადაც ახალი სტანდარტი „მესამე თაობის“ სტანდარტად მოიხსენიება ხოლმე და ჯერ დანერგილი არ არის საბაზო და საშუალო საფეხურზე, შესაბამისად, ჩვენ ვერ დავიწყებთ მისი ეფექტიანობის შეფასებას. ერთი კი იკვეთება, რომ სრულიად ახალ საფეხურზე გადადის საგანთა სწავლება. აქვე გვინდა ვთქვათ, რომ განათლებისა, სპორტისა და კულტურის სამინისტროს მიერ დაანონსებულია ის გარემოება, რომ X კლასი „მიუერთდეს“ საბაზო საფეხურს, რაც, სავარაუდოდ, გამოიწვევს სტანდარტის ცვლილებასაც - რაზეც დღეს საუბარი, ჩვენი მხრიდან, არაზუსტი იქნება. ემილ ბორელის აზრია, რომ „ყოველ ცვლილებებს პროგრამებში, პირველ ყოვლისა, რაღაც ზიანი მოაქვს და მასთან შეგუების პირველ პერიოდში, მეტია დაბნეულობა, ვიდრე - სარგებლობა“, თუმცა ცვლილებებზე საუბარი და საბაზო და საშუალო საფეხურის მატემატიკის სტანდარტში ფუნქციის საკითხების „გადანაწილებაზე“ მსჯელობა აუცილებლად დადგება დღის წესრიგში. ყველაზე მთავარი მაინც ისაა, რომ

- საქართველო რეფორმისტების გზას ადგას და ეროვნული სასწავლო გეგმის მათემატიკის სტანდარტის შედგენისას საუკუნეზე მეტი ხნის წინ დაწყებული რეფორმისტული მოძრაობის იდეებით სარგებლობენ;
- მათემატიკის სტანდარტთან შესაბამისობაში - სახელძღვანელოების ბევრი ავტორი სწორად ატარებს აღნიშნულ იდეებს, ბევრისთვის მხოლოდ ალგებრისა და გეომეტრიის ერთ წიგნად აკინძვის საბაბი გახდა.
- მათემატიკის ერთიანობის იდეა ჩანს მათემატიკის სტანდარტში და ამ ერთიანობის განმახორციელებელი სხვა რაა, თუ არა - „სიმრავლე“ და „ფუნქცია“. ამ საკითხში ნამდვილად სახელმძღვანელოს ავტორთა პროფესიონალიზმი და სწორი ხედვაა აუცილებელი, რათა ფუნქცია და გეომეტრიული გარდაქმნები, აღარაფერს ვამბობთ სხვა საკითხებზე, ერთიანად აღიქვას მოსწავლემ და მასწავლებლებმაც და ეს დამკვიდრებული ხელოვნურად შექმნილი ბარიერები სახელმძღვანელოებში აღმოიფხვრას.

მათემატიკის სტანდარტის განხილვისას გამოიკვეთა ის, რომ სტანდარტს ნამდვილად ეტყობა „დიდი ფიქრი“ და დიდი შრომა, ასევე შეიმჩნევა ისიც, რომ ყოველი ახალი სტანდარტის დაწერისას გარკვეული საკითხები სხვა კუთხითაა დანახული და შეფასებული. თუმცა, შედეგები და ინდიკატორები მაინც ტოვებს ზოგად ხასიათს, სანამ ფუნქციის საკითხებზე არ ჩავუღრმავდებოდით ხოლმე შინაარსს. თითქოს აქ ყველაფერი კარგად უნდა იყოს, მაგრამ უბრალოდ ჩამოწერა საკითხების არ აძლევს სახელმძღვანელოს ავტორს და მასწავლებელს დასახოს ზუსტად რომელ საკითხს რა დრო უნდა ეთმობოდეს სწავლებისას, რადგანაც მათემატიკის მასწავლებელი მოკლებულია მეთოდიკურ ლიტერატურას, შესაბამისად, მათთვის მხოლოდ სახელმძღვანელოა წარმმართველი ხაზი და მეთოდიკური ორიენტირიც. ხოლო სახელმძღვანელოთა გრიფირებას რამდენად მეტოდისტი მათემატიკოსები ახდენენ, ეს ცოტა ბუნდოვანი რჩება ზოგიერთი სახელმძღვანელოს ერთი თვალის გადავლებითაც. ალბათ, ამ უზუსტობის აღმოფხვრას უნდა ემსახურებოდეს 2013 წელს მასწავლებელთა სახლის მიერ გამოშვებული 2011-2016 წლების ეროვნული სასწავლო გეგმის გზამკვლევი მასწავლებელთათვის, სადაც ფუნქციის სწავლებას ერთი თავი აქვს მიძღვნილი და ავტორს კარგად აქვს დანახული ის სიძნელეები, რაც ფუნქციის სწავლებისას წამოიჭრება ხოლმე. ავტორი დასძენს: „გარდა იმისა, რომ მასწავლებელს, სრულყოფილად უნდა ჰქონდეს გააზრებული ფუნქციის ყველა შესაძლო განმარტება და მათ შორის კავშირი, მან ამ თემაზე საუბრისას, მთელი თავისი ოსტატობა უნდა ჩააქსოვოს, რომ მოახერხოს და თითოეული მოსწავლისათვის გასაგებად ჩამოაყალიბოს ეს განსაზღვრება. იგულისხმება, რომ კლასში ყველა მოსწავლე ვერ ჩასწვდება ფუნქციის ცნების აბსტრაქტულ განსაზღვრებას, მაგრამ ყველა მოსწავლეს უნდა შეექმნას „საკუთარი სწორი განმარტება“ ფუნქციის შესახებ“. აქ კიდევ ერთხელ იკვეთება ის აზრი, თუ როგორი სიფრთხილე სჭირდება ფუნქციის ცნების შემოტანას და რაოდენ დიდია მასწავლებლის როლი ზოგადად და კონკრეტულად ამ საკითხის სწავლებისას.

მათემატიკის სტანდარტი იხილავს ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის თითოეული საფეხურის მისიას, რაც ვფიქრობთ ფუნქციის სწავლების დროს სასკოლო სახელმძღვანელოებში მეტ-ნაკლებად ასახულია.

დაწყებით საფეხურზე მიმართულების - ალგებრა და კანონზომიერებების - მიზანია „მარტივი კანონზომიერებებისა და სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების ამოცნობის უნარის განვითარება" [მათემატიკის სტანდარტი, 2018-2024]. მიუხედავად იმისა, რომ დაწყებითი საფეხურის შესწავლა კვლევის საგანს არ წარმოადგენს, სამაგიდე კვლევის ფარგლებში გადავწყვიტეთ, გაგვერკვია ეცნობიან თუ არა მოსწავლეები ცნებას „ფუნქცია" სხვა საგნებში მანამ, სანამ მათემატიკაში დაიწყებოდეს მისი შესწავლა და თუ ეცნობიან, როგორ? ძიებისას ტერმინებს მივაგენით ბუნებისმეტყველების გრიფმინიჭებულ სახელმძღვანელოებში. მოვიყვანთ რამდენიმე ციტატას:

„ხორთუმი ყნოსვის ორგანოს გარდა ასრულებს შეხებისა და საკვების მოპოვების ფუნქციას" [ქანთარია, ჩიჩუა, 2018 – V კლასი].

„ხეების დარგვით ტყე ახალ სიცოცხლეს იძენს. ათეული წლებია საჭირო, რომ დარგვის შემდეგ ტყემ თავისი ფუნქცია აღიდგინოს" [ქანთარია, ჩიჩუა, 2018 – V კლასი].

„აორთქლების სისწრაფე დამოკიდებულია ტემპერატურაზე" [ქანთარია, ჩიჩუა, 2018 – VI კლასი].

"ნივთიერების თვისებებზეა დამოკიდებული მათი გამოყენება ყოფა-ცხოვრებაში" [ქანთარია, ჩიჩუა, 2018 – VI კლასი].

„კვლევის დროს საქმე გვექნება დამოკიდებულ და დამოუკიდებელ ცვლადებთან. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილ ცდაში, მცენარის მიერ გამოღებული ფოთლების რაოდენობა დამოკიდებულია წყლის რაოდენობაზე" [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„ვერტიკალურ ღერძებზე დაიტანენ დამოკიდებულ ცვლადს - იმ დროის მაჩვენებელს, რა დროც დასჭირდა მარილის წყალში გახსნას, ხოლო ჰორიზონტალურ ღერძზე აღნიშნავენ დამოუკიდებელ ცვლადებს" [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„სიმკვრივის სიდიდე დამოკიდებულია ნივთიერების მასაზე და იმ მოცულობაზე, რომელიც ამ მასას უკავია“ [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„ხილისა და ბოსტნეულის წვენში წყალი დაახლოებით 96 %-ია და მათი გემო დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა ნივთიერებაა წყალში გახსნილი“ [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„ტემპერატურის გაზრდით აირების ხსნადობა მცირდება და პირიქით, რაც ნაკლებია წყლის ტემპერატურა, მით უფრო მეტი ჟანგბადია მასში გახსნილი. წნევის გაზრდით კი აირის ხსნადობა იზრდება და პირიქით“ [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„კუნთის უჯრედები არამარტო ქმნიან კუნთს, არამედ განაპირობებენ მის ფუნქციას“ [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„სასქესო უჯრედები უზრუნველყოფენ გამრავლების ფუნქციას“ [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„ბუშტის პერიოდულად გაბერვა და აირისაგან დაცლა ხელს უწყობს თევს წყლის ფენებში ტივტივს“ [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„საკვების სიმცირე უარყოფითად მოქმედებს გამრავლებაზე. მაგალთად, საკვების სიმცირის შემთხვევაში მგელი ნაკლებ ლეკვს ყრის“ [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„ცოცხალი ორგანიზმების რაოდენობის შემცირების მიზეზია ადამიანის მიერ გარემოს დაბინძურება“ [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

„მიზიდვის ძალის სიდიდე დამოკიდებულია თვით სხეულის მასაზე: რაც მეტია მასა, მით მეტი ძალით იზიდავს მას დედამიწა. დადგენილია, რომ m მასის მქონე სხეულზე მოქმედი ძალა დედამიწაზე ტოლია $F = mg$” [მაყაშვილი, ქუთელია და სხვ. 2012 – VII კლასი].

წიგნს ბოლოში მოყვანილი აქვს ლექსიკონი, სადაც ვერ შეხვდებით ტერმინების განმარტებას, როგორებიცაა „დამოკიდებული ცვლადი“, დამოუკიდებელი ცვლადი“, „ფუნქცია“, „მიზეზი“, „იწვევს“. ამის გარდა, ბოლო ციტატის საპირისპიროდ, ვ. ქელბაქიანი კი გვეუბნება „ $a = \frac{F}{m}$; $m = const$ ფუნქციონალური დამოკიდებულება

ნამდვილად ასახავს მიზეზ-შედეგობრივ კავშირს, სადაც ძალა გვევლინება აჩქარების მიზეზად“ [ქელბაქიანი, 1987].

აქვე მოვიყვანთ მისსავე სიტყვებს „მათემატიკის სწავლების პროცესში მოსწავლეთა ყურადღება უნდა გავამახვილოთ იმაზე, რომ მათემატიკა არის ფიზიკური ცნებების და კანონების განზოგადების მძლავრი აპარატი, ...მათემატიკაში ფუნქციები გვესმის, როგორც აბსტრაქტული მათემატიკური ობიექტები, ხოლო ფიზიკაში ფუნქციის საშუალებით შეგვიძლია შევისწავლოთ კონკრეტული ურთიერთდაკავშირებული მოვლენები“ [ქელბაქიანი, 1987].

ვფიქრობთ, მათემატიკის შესწავლის დროს გასათვალისწინებელია ის გარემოება, თუ რა იციან მოსწავლეებმა უკვე ფუნქციების შესახებ და აუცილებლად შესათანხმებელია საგნობრივი სტანდარტები შემდგენლების მიერ. მათემატიკაში პირველად IX კლასში შემოდის ფუნქცია, ვფიქრობთ, ინტეგრირებული გაკვეთილების ხარჯზე, უფრო ადრეც გაგვეცნო მოსწავლეებისთვის ეს ტერმინი და მისი რაობა. თანაც ინტეგრირებული გაკვეთილების მიზანი კონკრეტული ტერმინის ან თემის შესწავლა კი არ უნდა იყოს, არამედ მისი დანახვება სხვადასხვა კუთხით და თვალსაწიერის გაფართოვება, რაც ტრანსფერის უნარის გამომუშავებას შეუწყობს ხელს. „სკოლა ვალდებულია უზრუნველყოს სიღრმისეული სწავლება: სასწავლო მასალის ეტაპობრივად და მრავალმხრივად მიწოდება, ახალი საკითხების ცნებების საფუძვლიანად დაგანსხვავებულ კონტექსტში განხილვა, საგანთაშორისი კავშირების გამოვლენა და საერთო ასპექტების დამუშავება“ [ეროვნული სასწავლო გეგმა, მუხლი 12].

II. ფუნქციის ზოგიერთი საკითხის სწავლების თავისებურებანი და ადგილი სასკოლო მათემატიკაში

აღნიშნული თავი წარმოადგენს ფუნქციათა თვისებებისა და მათი სწავლების შესახებ საკითხების მიმოხილვას, ე.წ. პრობლემური სიტუაციების განხილვის გზებს, რომლებიც თავს იჩენენ უშუალოდ სწავლების (საგაკვეთილო პროცესის) დროს. რა თქმა უნდა, ერთი შეხედვით, შეიძლება არასერიოზულიც კი აღმოჩნდეს ზოგიერთ მომენტზე ყურადღების გამახვილება ჩვენი მხრიდან, თუმცა პრაქტიკოსი მასწავლებლის მიერ დანახულს უფრო მეტი „ძალა" აქვს, რამეთუ მას უშუალოდ უწევს ამ პრობლემებთან გამკლავება და მეცნიერების მიერ ჩაფიქრებულ იდეებს, სიტყვებს მასწავლებლები აქცევენ საქმედ. ვფიქრობთ, რომ „გაკვეთილი ისე უნდა იყოს ორგანიზებული, რომ ყველა მოსწავლე აქტიური იყოს, ყველასათვის გასაგები იყოს ერთი ნაბიჯიდან მეორეზე გადასვლა. გაკვეთილის ორგანიზებულად დაგეგმვისა დაჩატარებისთვის აუცილებელია, რომ მასწავლებელი კარგად ფლობდეს მასალას, შემუშავებული ჰქონდეს ყოველი შემდგომი კითხვის მეთოდიკა. ითვალისწინებდეს მოსწავლეთა ინდივიდუალურ თვისებებს. ეს ყველაფერი გულისხმობს, რომ გაკვეთილი წინასწარ ყველა დეტალში კარგად არის მოფიქრებული" [ვეფხვაძე, 1997]. რა თქმა უნდა, ჩვენ არ გვაქვს პრეტენზია, რომ ამოვწურავთ ფუნქციის შესახებ საკითხებს და სწავლებისას წამოჭრილ პრობლემებსა თუ მათი შესაძლო გადაჭრის გზებს (ნებისმიერი კვლევის ფარგლებში ეს შეუძლებელი იქნებოდა), თუმცა დამწყები მასწავლებლებისათვის ერთგვარი გზამკვლევიც შეიძლება აღმოჩნდეს და სწავლებაზე დამაფიქრებელიც ქვემოთ მოყვანილი ამოცანები თუ საგაკვეთილო კაზუსები. „თუ გინდათ იყოთ სპეციალისტი, ამ სიტყვის სრული აზრით, რა დარგშიც არ უნდა იყოს ეს, აუცილებელია (დაიხსომეთ!), ყოველდღიურად იმუშავოთ თქვენს თავზე არანაკლებ 2-3 საათისა. იკითხოთ ლიტერატურა თქვენს დარგში. არაფერი უნდა დარჩეს თქვენი ყურადღების მიღმა თქვენს სპეციალობაში, ყოველი გამოტოვებული დღე რამდენიმე თვით ჩამორჩენას უდრის" [იმერლიშვილი, 1979].

ამ თავის ქვეთავებად დაყოფა, რა თქმა უნდა, ფორმალურ ხასიათს ატარებს, იმიტომ რომ ამოცანებში ფუნქციათა რამოდენიმე თვისების ერთდროულად გამოყენება გარდაუვალია ხოლმე.

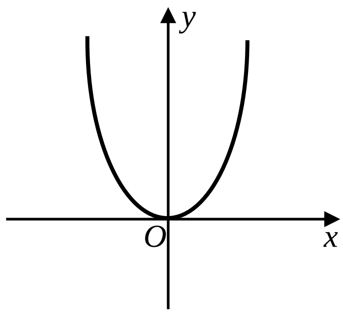
§2.1 ფუნქციის მონოტონურობის სწავლების შესახებ

f ფუნქციას მონოტონურობის შუალედები გულისხმობს: ფუნქციის ზრდადობის, კლებადობის და მუდმივობის შუალედებს.

f ფუნქციას რაიმე M სიმრავლეზე ეწოდება ზრდადი, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x_1 და x_2 წერტილებისათვის, $x_2 > x_1$ პირობიდან გამომდინარეობს $f\ (x_2) > f\ (x_1)$.

f ფუნქციას რაიმე M სიმრავლეზე ეწოდება კლებადი, თუ ამ სიმრავლის ყოველი x_1 და x_2 წერტილებისათვის, $x_2 > x_1$ პირობიდან გამომდინარეობს $f\ (x_2) < f\ (x_1)$.

f ფუნქციას რაიმე M სიმრავლეზე ეწოდება მუდმივი, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x_1 და x_2 წერტილებისათვის $f\ (x_1) = f\ (x_2)$.



ნახ. 1

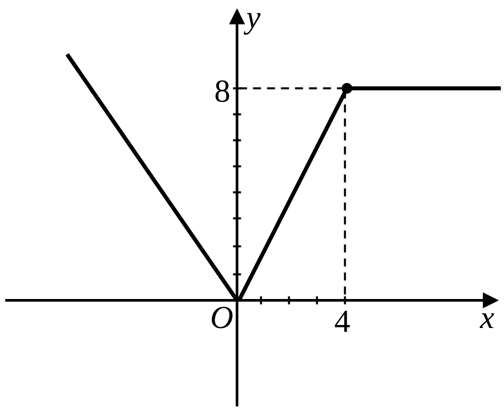
მაგ.: მოცემულია $f\ (x)\ =\ x^2$ კვადრატული ფუნქცია, მისი გრაფიკიდან “კარგად ჩანს”, რომ $(-\infty; 0]$ შუალედში ფუნქცია კლებადია, ხოლო $[0; +\infty)$ შუალედში კი - ზრდადია.

“კარგად ჩანს” – იმიტომ ვწერთ, რომ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედის დადგენა, როდესაც ფუნქცია გრაფიკულადაა წარმოდგენილი, ძალიან ადვილია. რა თქმა უნდა, ზრდადობის ან კლებადობის შუალედის დადგენა გრაფიკის გარეშე ძალიან ძნელდება სკოლის პროგრამით. თუმცა დამტკიცება იმისა, რომ ნამდვილად აღნიშნული შუალედი წარმოადგენს თუ არა ზრდადობის, კლებადობის ან

მუდმივობის შუალედს მოცემული ფუნქციისთვის, ადვილია. ზემოთმოყვანილი განმარტებების თანახმად, აქვე გვინდა აღვნიშნოთ ის ფაქტი, რომ ნებისმიერ x_1 და x_2-თვის ვერ მოხერხდება შემოწმება და ამიტომ, საბოლოოდ ისევ ვიზუალურ წყაროს ვეყრდნობით. ხშირ შემთხვევაში, მოსწავლეებიც განმარტების გარეშე აკეთებენ დასკვნებს, მხოლოდ გრაფიკზე დაყრდნობით.

აღნიშვნის ღირსია ის ფაქტიც, რომ (0; 0) წერტილი ჩვენ შევიყვანეთ როგორც კლებადობის, ასევე, ზრდადობის შუალედში. მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც კარგად გვაჩვენებს ვიზუალურად მოტონურობის შუალედებს.

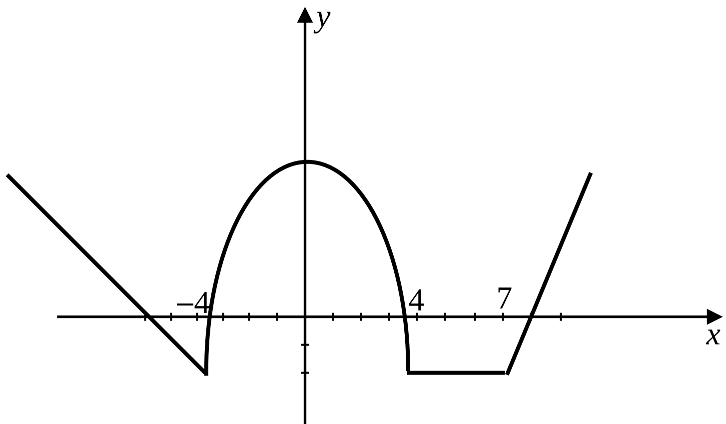
$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ თუ } x < 0 \\ 2x, \text{ თუ } 0 \le x \le 4 \\ 8, \text{ თუ } x > 4 \end{cases}$$



ნახ. 2

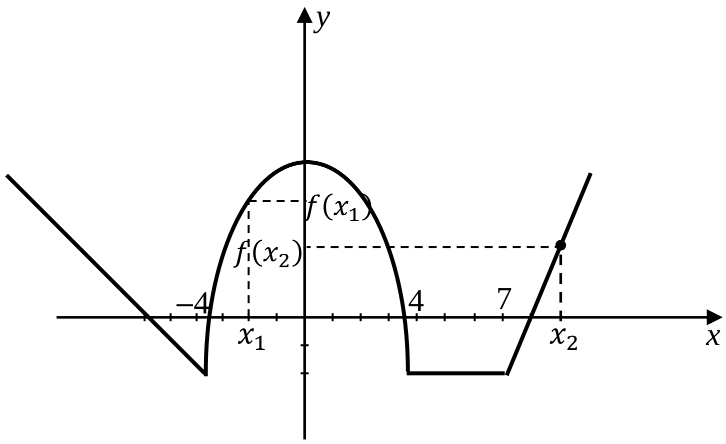
ფუნქცია კლებადია (-∞; 0]– შუალედზე, ზრდადობის შუალედია–[0; 4], ხოლო მუდმივია [4; +∞) შუალედზე.

ყურადღება გავამახვილოთ ერთ გარემოებაზეც - მოცემულია ფუნქცია გრაფიკულად:



ნახ. 3

შევჩერდეთ მხოლოდ ფუნქციის ზრდადობაზე. მოცემული ფუნცქიის ზრდადობის შუალედებია [–4; 0] და [7; +∞) შუალედები. მოსწავლეებში ყოველთვის ჩნდება კითხვა, თუ რატომ ვწერთ რომ აღნიშნულ შუალედებზე რატომაა ზრდადი და არა ამ შუალედების გაერთიანებაზე?! ისინი მიჩვეულნი არიან, რომ მაგალითად, ნიშან–მუდმივობის შუალედების დადგენისას ყოველთვის წერენ „გაერთიანებას“. მოცემულ შემთხვევაში აუცილებელია მასწავლებელმა მოსწავლეებს ადეკვატურად აუხსნას ამის მიზეზი. ვთქვათ, შესაძლებელია რომ დაიწეროს გაერთიანების ნიშანი აღნიშნულ შუალედებში $[-4;\ 0] \cup [7;\ +\infty)$, მიუხედავად იმისა, რომ ცალკე [–4; 0] და ცალკე [7; +∞) შუალედი ვიზუალურადაც ჩანს და განმარტების ძალითაც შეგვიძლია დავამტკიცოთ ფუნქციის ზრდადობა, მაგრამ თუ ერთი შუალედიდან ავიღებთ x_1 წერტილს და მეორე შუალედიდან x_2 წერტილს (შუალედების გაერთიანება გვაძლევს ამის უფლებას), მაშინ $x_2 > x_1$ პირობიდან გამომდინარეობს $f(x_2) < f(x_1)$ და არა $f(x_2) > f(x_1)$, რაც ეწინააღმდეგება ზრდადობის განმარტებას. შესაბამისად, შუალედების გაერთიანება არ შეიძლება.



ნახ. 3

გარდა იმისა, რომ მოსწავლე თვითონვე მიიღებს პასუხს თავისსავე შეკითხვაზე, არამედ დაეჩვევა მტკიცების ხერხების გამოყენებას და დაადგენს, რომ მიღებული აღნიშვნები მათემატიკაში ყოველთვის “რაღაც ლოგიკას” ექვემდებარება. აღნიშნულის სწავლებისას მასწავლებელს მხოლოდ ფასილიტატორის როლი უნდა ეკისრებოდეს, სწავლება მიმდინარეობდეს აღმოჩენებით (ხელახალი აღმოჩენებით), მოსწავლეებმა თავად აღმოაჩინონ ჭეშმარიტებები, რაც მათ გრძელვადიან

მეხსიერებაში გადატანას შეუწყობს ხელს და ჩამოუყალიბებს მკვიდრ წარმოდგენებს აღნიშნულ საკითხთან დაკავშირებით. ზრდადობა-კლებადობის იდეას ფუნქციის წარმოებულის ცნებასთან მივყავართ, ეს კი სასკოლო და საუნივერსიტეტო მათემატიკის ბმის საკითხია, შესაბამისად მისი სწავლება არასწორად ყოვლად დაუშვებელია. ერთ-ერთ სახელმძღვანელოში [წილოსანი, წულაია, ჯაფარიძე: X კლასი, 2012] ვაწყდებით პრობლემას განმარტებასთან დაკავშირებით: „$y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი განსაზღვრის არის რაიმე $(a;b)$ შუალედში, თუ ნებისმიერი x_1 ; x_2 $\in$ $(a;b)-$ თვის $x_1 < x_2$, მაშინ $f(x_1) < f(x_2)$". მსგავსად განმარტავს ფუნქციის კლებადობასაც. იქვე კი უწერია, $x \in [a;b]$-ზე ფუნქცია ზრდადია, $x \in [b;c]$-ზე კი ფუნქცია კლებადია. რამდენიმე წინანადადებაშივე არის აღრეული ტერმინოლოგია. მოსწავლე ვერაფრით ვერ ადგენს „შუალედს ჩაკეტვა სჭირდება, თუ - არა". გვ. 49-ზე კიდევ იჩენს თავს პრობლემა: „დახაზეთ ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც ზრდადია $(-\infty; -3]$ შუალედში, $(-3; 2]$ შუალედში კლებადია, ხოლო $(2; +\infty)$ შუალედში კი ისევ ზრდადია..." აღნიშნული გარემოება, რომ გაუგებრობას არ იწვევდეს, საჭიროა, სახემძღვანელოების ავტორებმა ფუნქციათა ზრდადობა და კლებადობა განსაზღვრონ არა რიცხვით შუალედებზე (თუნდაც „ღია" შუალდეზე და თუნდაც „ჩაკეტილ" შუალედზე), არამედ განსაზღვრონ სიმრავლეზე, რაც თავის თავში გულისხმობს ისეთ რიცხვით შუალედს, რომელზეც ფუნქციის ზრდადობასა თუ კლებადობაზე შეიძლება საუბარი.

გვინდა განვიხილოთ საინტერესო ამოცანა, რომელიც აბიტურიენტებს მიეცათ 2018 წელს ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე მათემატიკაში:

„$f(x) = x^2 + px + q$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა არის -10. ამასთან, ცნობილია, რომ ამ ფუნქციის კლებადობის ინტერვალი მოიცავს $(-\infty; -7)$ შუალედს, ხოლო ზრდადობის ინტერვალი მოიცავს $\left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$ შუალედს. ამ პირობების დამაკმაყოფილებელი ყველა p და q პარამეტრებისათვის იპოვეთ $p + q$ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა".

ვპოულობთ $x_0 = -\frac{p}{2}$ და ვწერთ: $-7 \leq -\frac{p}{2} \leq -\frac{3}{4}$

$$-14 \leq -p \leq -\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \leq p \leq 14 \quad \text{ანუ} \quad p_{min} = \frac{3}{2}$$

ამ ყველაფრის შემდეგ, $y_0 = -\frac{D}{4a} = -10$, ანუ

$$\frac{p^2-4q}{4a} = 10, \text{ საიდანაც } q = \frac{p^2-40}{4} = \frac{1}{4}p^2 - 10.$$

ვწერთ, $p + q = \frac{1}{4}p^2 + p - 10$ (1).

(1)-ის უმცირესი მნიშვნელობის საპოვნელად $p \in [\frac{3}{2}; 14]$ შუალედზე, ვპოულობთ პარაბოლის წვეროს აბსცისას, რომელიც $(-2) -$ ის ტოლია. ე.ი. $[-2; +\infty)$ შუალედზე ფუნქცია ზრდადია და შესაბამისად, თუ $p \in [\frac{3}{2}; 14]$-ს, მაშინ (1) უმცირეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა $p = \frac{3}{2}$.

საბოლოოდ, $\min\{p+q\} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) - 10 = -\frac{127}{16}$.

ძალიან მნიშვნელოვანია, რომ მოსწავლეებს შევთავაზოთ ასეთი ამოცანა, რომ არსებობს თუ არა ისეთი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრის არეში საერთოდ არ იქნება მონოტონური. შეიძლება ზოგიერთმა მოსწავლემ შეძლოს კიდეც საკუთარი მაგალითის მოყვანა, მაგალითად ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ რიცხვი კენტია} \\ 2, & \text{თუ რიცხვი ლუწია} \end{cases}$$

მასწავლებელმა კი მიაწოდოს მოსწავლეებს ასეთი ფუნცქიების კლასიკური მაგალითები და მოსწავლეები მსჯელობით დარწმუნდნენ, რომ დირიხლეს ფუნქცია

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ} \quad x \in Q \\ 0, & \text{თუ} \quad x \in I \end{cases}$$

ნამდვილად ასეთი ფუნქციის მაგალითია.

მონოტონურ ფუნცქიების „ქცევის“ შესწავლა ძალიან გვიადგვილებს ხშირად ამოცანების ამოხსნას და უფრო თვალნათელს ხდის ხოლმე მათ. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

ამოსახსნელია განტოლება $3^x + 7^x = 10^x$ (1). მოცემული განტოლების ამოხსნისას ბევრი მოსწავლე თავიდანვე მიხვდება, რომ ამონახსნი უნდა იყოს 1–ის ტოლი, მაგრამ მათემატიკაში ამოხსნილად ვერ ჩაივლება განტოლება, თუ მისი ყველა ამონახსნი არ ვიპოვეთ, ან თუ არ დავადგინეთ, რომ ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელია. დავადგინოთ არის თუ არა $x = 1$ ერთადერთი ამონახსნი?

(1) ორივე მხარე გავყოთ 10^x–ზე, მივიღებთ:

$$\left(\frac{3}{10}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1$$

ამ უკანასკნელში მარცხენა მხარე მკაცრად კლებადი ფუნქციაა, მარჯვენა მხარე კი მუდმივია, შესაბამისად, ასეთ ფუნქციებს ექნებათ ერთადერთი გადაკვეთის წერტილი. ანუ $x = 1$ განტოლების ერთადერთი ფესვია.

საჭიროდ ჩავთვალეთ მოგვეყვანა ერთი ამოცანა, რომელიც ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე ბოლო ამოცანად შეხვდათ აბიტურიენტებს 2011 წელს:

„იპოვეთ a პარამეტრის ყველა მთელი მნიშვნელობა, რომელთაგან თითოეულისათვის $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-2a)$ და $y = \log_3(x-2a^3-3a^2)$ ფუნქციათა გრაფიკები გადაიკვეთებიან წერტილებში, რომელთა კოორდინატები მთელი რიცხვებია“.

აღნიშნული ამოცანის ამოხსნის ბევრ გზას შევხვედრივარ სხვადასხვა მოსწავლის თუ მასწავლებლის მიერ ამოხსნილს. შემოგთავაზებთ ჩვენეულ გზას, რომელიც ფუნქციის მონოტონურობის საკითხს ეხება.

$y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-2a)$ კლებადი ფუნქციაა, ხოლო $y = \log_3(x-2a^3-3a^2)$ კი ზრდადია. აღნიშნული ფუნქციები თუ უნდა გავუტოლოთ ერთმანეთს, მაშინ ეს მოხდება ერთადერთ წერტილში. თუ გავიხსენებთ იმ ფაქტს, რომ $\log_a 1 = 0$, მაშინ

$x-2a^3 = 1$ და $x-2a^3-3a^2 = 1$

და, შესაბამისად, ორივე შემთხვევაში $y = 0$. ამ შემთხვევებში გაუტოლდებიან ერთმანეთს აღნიშნულიდან გამომდინარე

$$x-2a^3 = x-2a^3-3a^2$$

$$2a^3+3a^2-2a = 0$$

$$a(2a^2+3a-2) = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \text{ან}$$

$$2a^2+3a-2 = 0$$

$$D = 9+16 = 25$$

$$a_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{-3-5}{4} = -2$$

და რადგანაც $a \in Z$, მაშინ $a \in \{0; -2\}$.

მონოტონურობაზე თუ არ ვისაუბრებთ და ჩვეულებრივი ალგებრული გზით ამოვხსნიდით, მაშინ გვექნებოდა:

$y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x - 2a) = \log_3(x - 2a)^{-2}$ და $y = \log_3(x - 2a^3 - 3a^2)$

ამავდროულად, $x - 2a > 0$ და $x - 2a^3 - 3a^2 > 0$

$$\log_3(x - 2a)^{-2} = log_3(x - 2a^3 - 3a^2)$$

$$(x - 2a)^{-2} = x - 2a^3 - 3a^2$$

$$\frac{1}{(x - 2a)^2} = x - 2a^3 - 3a^2$$

$$(x - 2a^3 - 3a^2)(x - 2a)^2 = 1$$

იმის გამო, რომ ორივე თანამამრავლი უნდა იყოს (გამოდის) მთელი რიცხვი, თანაც დადებითი, ამიტომ:

$$\begin{cases} x - 2a^3 - 3a^2 = 1 \\ x - 2a = 1 \end{cases}$$

$-2a^3 - 3a^2 + 2a = 0$

$-a\,(2a^2 + 3a - 2) = 0$

$a_1 = 0;\ \ a_2 = -3;\ \ a_3 = \frac{1}{2}$. საიდანაც, პირობის თანახნად, $a \in \{0; -2\}$.

საინტერესო ამოცანად მიგვაჩნია შემდეგი: შევადაროთ ერთმანეთს $\arccos\frac{1}{3}$ და 1. თუ გავიხსენებთ, რომ $y = \arccos x$ ფუნქცია კლებადია და ავიღებთ არგუმენტის ორ მნიშვნელობას, მაგალითად, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, მაშინ $\arccos\frac{1}{3} > \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} > 1$. „ზოგიერთს მათემატიკა წარმოუდგენია, როგორც დამახსოვრება ხელოვნური რეცეპტებისა და წესებისა, საიდანაც, ღმერთმა უწყის, როგორ მიიღება სასურველი შედეგები. სინამდვილეში, მათემატიკა იმაზე მარტივია, ვიდრე ფიქრობენ... შეეცადეთ დამახსოვრება გაგებით შეცვალოთ“ - ა. კოლმოგოროვი.

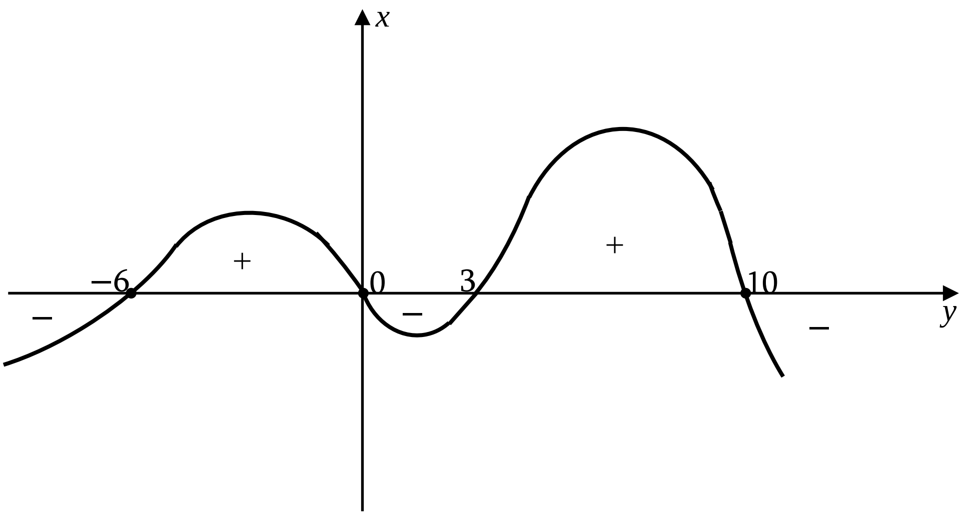
§2.2 ფუნქციის ნულებისა და ნიშანმუდმივობის სწავლების შესახებ

შემდეგი საკითხი, რაც შედარებით ნაკლებად პრობლემურია, ესაა ფუნქციის ნულებისა და ნიშანმუდმივობის შუალედების დადგენა.

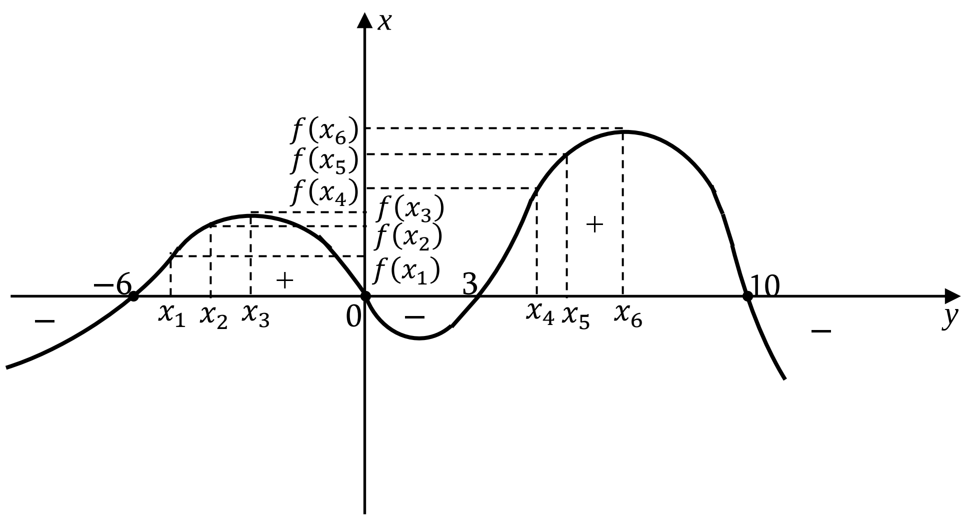
რაიმე f ფუნქციის ნულები $f\,(x) = 0$ განტოლების ფესვებია, ხოლო $f(x) > 0$ უტოლობის ამონახსნები ფუნქციის დადებითობის შუალედს დაგვადგენინებს, $f\,(x) < 0$ კი - ფუნქციის უარყოფითობის შუალედს.

შესაბამისად, $f\ (x)\ \geq 0$ ფუნქციის არაუარყოფითობის შუალედს მოგვცემს, ხოლო $f\ (x)\ \leq\ 0$ ფუნქციის არადადებითობის შუალედს.

აღარ შევჩერდებით იმის განხილვაზე, თუ რაოდენ კარგად უნდა ერკვეოდნენ მოსწავლეები განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნაში და რაოდენ დიდ როლს ასრულებს განტოლება და უტოლობა ფუნქციის გამოკვლევაში. აქ ერთადერთ პრობლემად შეგვიძლია დავასახელოთ ის გარემოება, რომ მოსწავლეები სწორად ვერ უთითებენ შუალედს, ანუ ვერ ხვდებიან, თუ რატომაა დადებითი ფუნქცია $(-6;\ 0)\ \cup\ (3;\ 10)$ შუალედში.



ნახ. 4



ნახ. 5

მათ ე.წ. Ox ღერძის კოორდინატებით ოპერირება უჭირთ მასწავლებლის მოვალეობაა დაანახოს, რომ აღნიშნული შუალედის ნებისმიერი წერტილის ჩასმით

არგუმენტის მნიშვნელობად ფუნქცია მიიღებს დადებით მნიშვნელობებს, ხოლო თუ ფუნქცია გრაფიკულად იქნება მოცემული, მაშინ ვიზუალურად ვაჩვენოთ. მართალია, "ყველა წერტილისათვის" ჩასმას ვერ მოვახერხებთ, მაგრამ მოსწავლეთა ინტერესებს დავაკმაყოფილებთ და უპასუხოდ არ დავტოვებთ. ნებისმიერი წერტილის ჩასმით $x_1 \ldots x_6$ ფუნქციის მნიშვნელობები $f\,(x_1)\ \ldots . f\,(x_6)$ "განთავსდებიან" Oy ღერძის დადებით კოორდინატებში ე.ი.

$f\,(x_1)\ >\ 0\ \ldots\ldots\ f\,(x_6)\ >\ 0,$ ანუ ფუნქცია დადებითია.

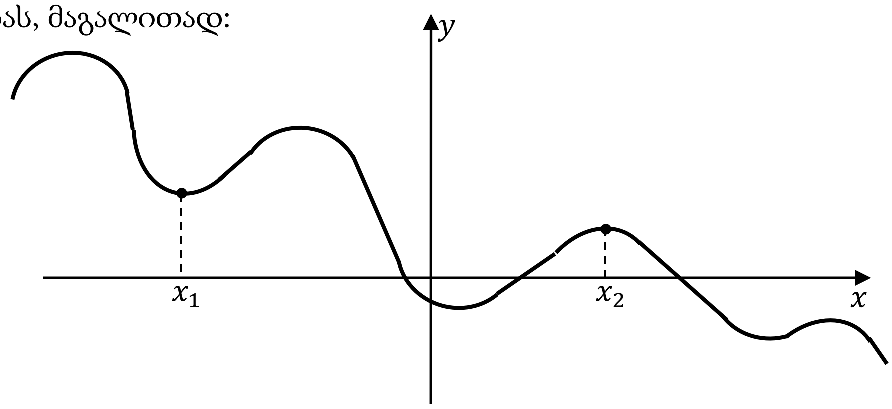
§2.3. ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების სწავლების შესახებ

შევჩერდეთ ფუნცქიის ექსტრემუმის წერტილების განხილვაზე. ფუნქციის ექსტრემუმი თავის თავში გულისხმობს მინიმუმს და მაქსიმუმს.

x_0–ს რაიმე f ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი ეწოდება, თუ ნებისმიერი x–თვის x_0–ის რაიმე მიდამოდან $f\,(x)\ \leq\ f\,(x_0)$ და x_0–ს რაიმე f ფუნქციის მინიმუმის წერტილი ეწოდება, თუ ნებისმიერი x–თვის x_0–ის რაიმე მიდამოდან $f\,(x)\ \geq\ f\,(x_0)$.

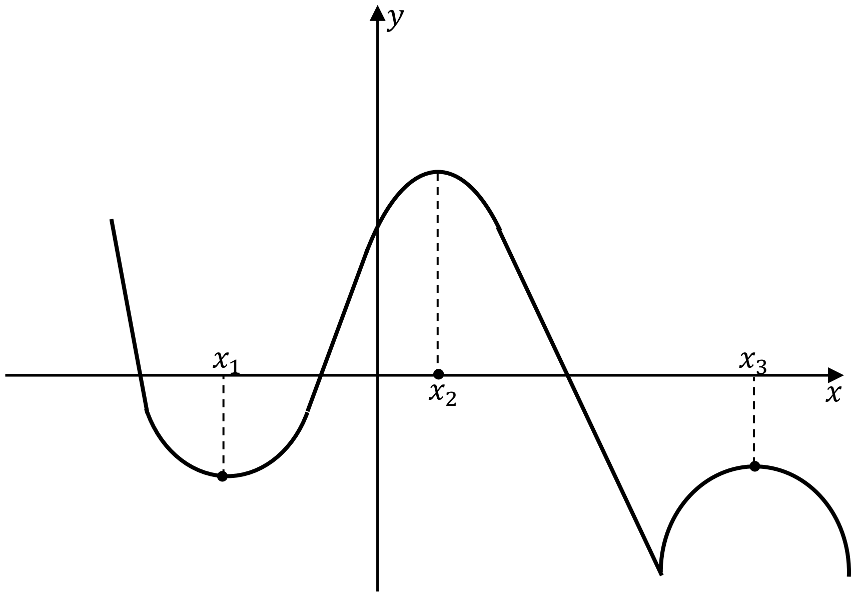
აქ აუცილებლად გასარკვევია მოსწავლეთათვის რას ეწოდება x_0–ის "რაიმე მიდამო" და "რამხელაა" ზოგადად ეს მიდამო. ეს მოსწავლეთათვის ინტუიციურად მოსაწოდებელი ტერმინია.

ფუნქციის მინიმუმის და მაქსიმუმის წერტილების პოვნისას, აუცილებელია გავითვალისწინოთ რამდენიმე მომენტი: ფუნცქიის მინიმუმის (ან მაქსიმუმის) წერტილში შეიძლება ფუნქცია არ ღებულობდეს მინიმუმალური (მაქსიმალური) მნიშვნელობას, მაგალითად:



ნახ. 6

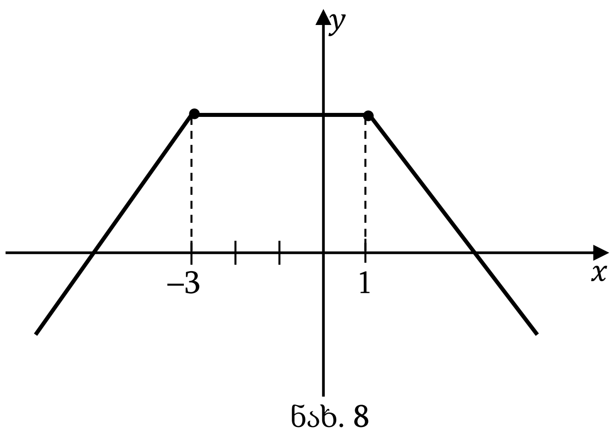
$f\,(x_1) >\ f\,(x_2).$ არადა, x_1 მინიმუმის წერტილია, x_2 – მაქსიმუმის.



ნახ. 7

x_2 და x_3 მაქსიმუმის წერტილებია განმარტების თანახმად, თუმცა $f\,(x_1)\ >\ f\,(x_3)$, რაც მეტყველებს აღნიშნულზე.

ასევე, მნიშვნელოვანია ერთი ფაქტიც, მაგალითად, ქვემოთ მოცემული გრაფიკიდან ვხედავთ, რომ (–3; 1) შუალედის ყოველი წერტილი არის როგორც მინიმუმის, ასევე მაქსიმუმის წერტილიც. რა თქმა უნდა, მოსწავლეთათვის ეს ადვილი შესამოწმებელია, თუ განმარტებას გამოიყენებენ, ანუ ამ შუალედის ნებისმიერი x_0 წერტილისათვის, $f\,(x_0)\ \geq\ f\,(x)$ და $f\,(x_0)\ \leq\ f\,(x)$.



ნახ. 8

ვთვლით, ეს “მომენტები” ყურადსაღებია მასწავლებელთათვის, რათა მოსწავლეებს არ გამორჩეთ მხედველობიდან სწავლა-სწავლების პროცესში. გარდა ამისა, ასეთი თეორიული თუ პრაქტიკული საკითხების განხილვა გაკვეთილზე ძალიან მნიშვნელოვანია, არა მარტო ცოდნის თვალსაზრისით, არამედ მოტივაციისა

და ინტერესის ამაღლების მიზნით. "სწავლის უნარი თავისთვად არ ჩნდება, ის მასწავლებელთა და მოსწავლეთა საგანგებო აღზრდას, ყურადღებასა და სერიოზულ ძალისხმევას მოითხოვს. დარწმუნებული ვარ, მოსწავლეთა ჩავარდნები მათემატიკის კურსისის (და არა მხოლოდ მათემატიკის) შესწავლისას იმას უკავშირდება, რომ სკოლაში არ ვასწავლით სწავლის ხელოვნებას" - დავით გონდაური.

§2.4. ფუნქციის გამოყენებითი ხასიათის ამოცანების სწავლების შესახებ

ძალიან ხშირად საუბრობენ მასწავლებლები XXI საუკუნის მოსწავლეებზე, ხშირად მათ პრაგმატიკოსებად მოიხსენიებენ ხოლმე. მათი ამოსავალი წერტილია კითხვა, თუ რაში დასჭირდებათ სამომავლოდ ამ თუ იმ საკითხის შესწავლა. ჩვენ აღარ დავიწყებთ იმაზე საუბარს, თუ რამდენად საინტერესო საყოფაცხოვრებო ამოცანაა მოყვანილი გრიფმინიჭებულ სკოლის სახელმძღვანელოებში მოსწავლეთა ინტერესის გასაზრდელად და ფუნქციის საჭიროების დასანახად. მოვიყვანოთ მაგალითად თ. ვეფხვაძის რედაქტორობით გამოცემული სასკოლო სახელმძღვანელოები:

VIII კლასი - გვ.76 N6; გვ.86. N12; გვ. 81 თეორიული მასალის მაგალითი;

IX კლასი - გვ.85 თეორიული მასალის მაგალითი 1; გვ.87 თეორიული მასალის მაგალითი 5 და 6. გვ. 92 თეორიული მასალის მაგალითი; გვ. 93 თეორიული მასალის მაგალითი 2. გვ. 97 N16, გვ.98 N20, გვ.110 - პროექტი, გვ.111 ნაშთთა არითმეტიკა.

X კლასი - გვ.51 თეორიული მასალის მაგალითი , გვ. 54 N-N 11,12,13,19, გვ.59 პროექტი. გვ. 60 თეორია, გვ. 62 - თეორია, გვ. 64 N9. გვ 65 N12 და N 13, გვ.77 N24, გვ. 78 N-N 25, 26, 27. გვ. 79 - ჯგუფური მუშაობა, გვ.81 თეორიული მასალის მაგალითი, გვ. 86. N3

XI კლასი - გვ. 35 თეორიული მასალა, გვ.50, გვ.231 მაჩვენებლიანი ფუნქცია - პროცენტის მარტივ და რთულ დარიცხვასთან დაკავშირებით, გვ. 239 - პროექტი მოსახლეობის ზრდასთან დაკავშირებით, გვ. 263 - ბაქტერიების ზრდასთან დაკავშირებით, გვ. 263 - ინფორმაციის ლოგარითმული ზომა, გვ.266 N-N 9, 10, 11,

გვ.267 N-N 12, 13, 14, 15, 16, გვ.268 N-N 17, 18, 19, 20, გვ. 269 N-N 22,23,24, გვ. 270 ჯგუფური სამუშაო ნამარხებში აღმოჩენილი მასალის დათარიღებასთან დაკავშირებით, გვ. 271 - პროექტი საბანკო სისტემასთან დაკავშირებით, გვ.272 - თეორიული მასალა და სრული პარაგრაფი წრფივი დაპროგრამების ამოცანებთან დაკავშირებით, გვ.277 N 12, გვ. 278 N15, გვ. 279 N18, გვ. 321-325 § 6.6 სრულად ნაშთთა არითმეტიკის გამოყენებებზე.

XII კლასი - გვ.152 N-N 31,32,33,34, 37,38, გვ. 163 N 16, გვ.164 N-N 24,25,26, გვ.165-170 წრფივი ფუნქცია, წრფივი ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე, რომელსაც მივყავართ წარმოებულის ცნებამდე. გვ.177 N-N10,11, გვ. 181 თეორიული მასალის მაგალითი 2, გვ.186-199 § 4.6 –„მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების გამოყენების მაგალითები“.

და ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობის მიერ გამოცემული სახელმძღვანელოში (ავტორები: ჯაფარიძე ნ., წილოსანი მ., წულაია ნ.)

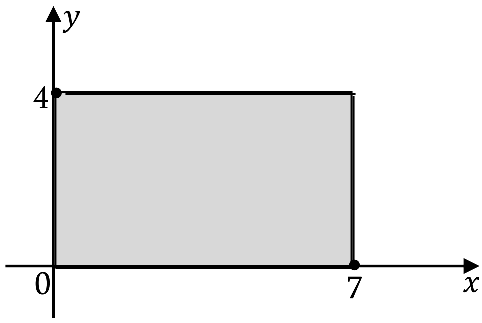
VIII კლასი - გვ. 189 თეორიული მასალის N 2 ამოცანა, გვ.193 N7;8;9;10, გვ.210 N24;25;27, გვ.218 რუბრიკა „ეს საინტერესოა“

IX კლასი - გვ.13 N10, გვ. 19 N6;9, გვ.20 პროექტი, გვ.80 N2, გვ. 96 N7;8;9, გვ.97 N12, გვ.103 N8, გვ. 104 N10;16, გვ.107 რუბრიკა „ეს საინტერესოა“, გვ. **112 N10.**

X კლასი - გვ.36 N10;11;12

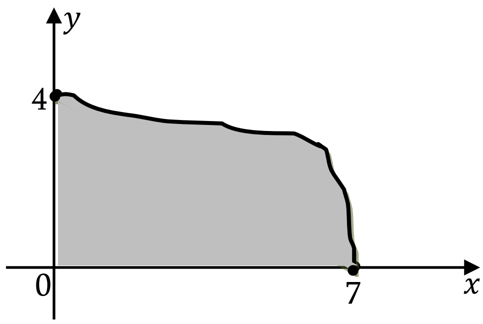
XI კლასი - გვ.80 N24;25;26.

არ ვლაპარაკობთ მარტო საყოფაცხოვრებო ამოცანებზე, ბევრი ამოცანა მომიჯნავე დიციპლინებიდანაა მოტანილი, სადაც ბევრი საინტერესო თემის განხილვასაც ფუნქციის თვისებების ცოდნა და გამოიყენებაა საჭირო. რა თქმა უნდა, ეს ამოცანები ძალიან საინტერესოა მასწავლებელთათვის, თუმცა ხშირად მათი განხილვისგან თავს ვიკავებთ, პირად საუბრებში მასწავლებლები ხან საათების ნაკლებობას ასახელებენ ამის მიზეზად, ხან კლასის მზაობას. არიან ისეთი მოსწავლეებიც, რომლებიც მაღალ სააზროვნო უნარებზე გადიან ხოლმე. ისინი ინტუიციურად ხშირად მიდიან ინტეგრალის ცნებამდე. მოტივაციის ასამაღლებლად ვიყენებ ხოლმე ასეთ მაგალითს, ხშირად მოსწავლეებს ვეკითხები, შეუძლიათ თუ არა ნახაზზე მოცემული მართკუთხედის ფართობის გამოთვლა.



ნახ. 9

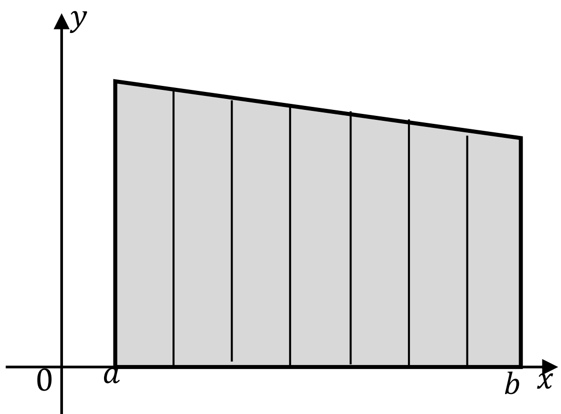
რა თქმა უნდა, კლასის გაოცებას და ღიმილს იწვევს ხოლმე ასეთი შეკითხვა, თანაც თუ საშუალო საფეხურის მოსწავლეები არიან უკვე, ხოლო როდესაც მე მათ ვთავაზობ შემდეგ ამოცანას, შეუძლიათ თუ არა მოცემული ფიგურის ფართობის გამოთვლა,



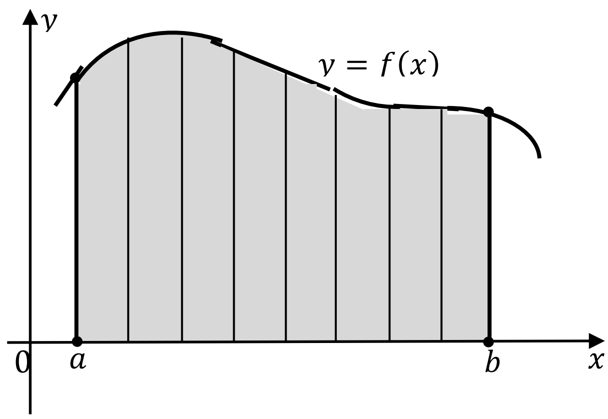
ნახ. 10

მაშინ უბრალოდ კითხვის არსს ხვდებიან და რამდენიმე მათგანი თუ წამოიყვირებს, რომ გამოთვლას შეძლებს მიახლოებით.

ამ ყველაფრის შემდეგ გაკვეთილი მიმდინარეობს დასახული მიზნის მიხედვით, შემოგვაქვს მრუდწირული ტრაპეციის ცნება.



ნახ.11



ნახ.12

მოსწავლეები მასწავლებლის დახმარებით აყალიბებენ პირობებს, თუ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს დასახელებული ფიგურა. ჯერ რწმუნდებიან იმაში, რომ მარცხენა ფიგურა ნამდვილად ტრაპეციაა და ამის შემდგომ ამბობენ, რომ მრუდწირული ტრაპეცია ისეთი ფიგურაა, რომელიც შემოსაზღვრულია $[a;b]$ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციით და ფუნქცია არ იცვლის ნიშანს, ასევე თვითონ $[a;b]$ მონაკვეთით, რომელიც Ox ღერძზე მდებარეობს $x = a$ და $x = b$ წრფეებით. შემდგომ მოსწავლეები იხსენებენ იდეას, რომ მოცემული ფიგურის დაყოფით და ფართობთა შეკრებით თავდაპირველი ფიგურის ფართობს ვიღებთ. ამ ყველაფრის გადამოწმება ხდება მარცხენა ნახაზზე მოცემული ფიგურით, რის შემდეგაც მარჯვენა ნახაზზე მოცემული ფუნქციაზეც იგივეს იყენებენ და რწმუნდებიან იმაში, რომ რაც უფრო პატარა “მართკუთხედებად” დაიყოფა მრუდწირული ტრაპეცია, მით უფრო ახლოს იქნება ფართობთა ჯამი საძიებელ ფართობთან. სკოლის მასალიდან და ცოდნიდან გამომდინარე, ზღვარზე გადასვლა ვერ ხერხდება აღნიშნულ გაკვეთილზე, მაგრამ იმას ნამდვილად ხედავენ მოსწავლეები, რომ აქ ფუნქცია “რაღაც შუაშია” და უმაღლესი მათემატიკის პროპედევტიკასთანაც გვაქვს საქმე. რა თქმა უნდა, ბოლომდე ახსნა ვერ ხერხდება ამ საკითხის, თუმცა მცირე “ინტრიგა” ჩნდება მოსწავლეებში, საშუალო საფეხური ხომ მოსამზადებელი ეტაპია საბაკალავრო სწავლებისათვის. ასეთი ტიპის ამოცანა ზოგადსაგანმანათლებლო ტიპის სკოლის მოსწავლეებს ამ დოზით შეიძლება მიეწოდოთ, ხოლო ფიზიკა–მათემატიკურ სკოლებში იდეა ბოლომდე მიჰყავთ მასწავლებლებს. „მთავარი აღმზრდელობითი ამოცანაა ისეთი ამოცანების შერჩევა, რომლებიც აღძრავს ინტერესს საგნისადმი. გაკვეთილზე შესწავლილი ფაქტები დროთა განმავლობაში შეიძლება დაავიწყდეს კიდეც მოსწავლეს, მაგრამ ყველა ამ ფაქტის შესწავლამ უნდა დატოვოს გარკვეული კვალი ადამიანის მიერ ახალი ფაქტების აღმოჩენისა და მის წინ მდგომი ამოცანების გადაწყვეტის პროცესის გაგების თვალსაზრისით“ [ვეფხვაძე, 1997].

§2.5. ფუნქციათა პერიოდულობის სწავლების შესახებ

გვინდა ვისაუბროთ პერიოდულ ფუნქციებზეც. როდესაც საუბარს ვიწყებთ მოსწავლეებთან და ვეკითხებით, დაასახელონ რამდენიმე პერიოდული ფუნქცია. მოსწავლეთა სრული უმრავლესობა ძირითად ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს გვისახელებს. თითქოს სკოლის სახელმძღვანელოებში პერიოდულობა იმიტომ ისწავლება, რომ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებში დაგვჭირდება. სკოლის სახელმძღვანელოებში გვხვდება შემდეგი სახის ფუნქციებიც: $y = \{x\}$ ან $y = [x]$ ან/და სულაც $y = 0$. მოვიყვანოთ პერიოდული ფუნქციის განმარტება: მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია $D(f)$ განსაზღვრის არით $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ ყოველი x–სთვის განსაზღვრის არიდან არსებობს ისეთი $T > 0$ რიცხვი, რომ სრულდება პირობები

ა) $x + T \epsilon D(f)$;

ბ) $x- T \epsilon D(f)$;

გ) $f\ (x + T)\ =\ f\ (x)$.

ასეთი ჩანაწერი მისაღებია იმ შემთხვევებში, რომ თუ ამ სამი პირობიდან რომელიმე მაინც არ სრულდება, ავტომატურად ვიღებთ არაპერიოდულ ფუნქციას, რამეთუ ხშირად დასამტკიცებელი გვაქვს ხოლმე ფუნქციის არაპერიოდულობა.

ასევე, T რიცხვს ვუწოდოთ რიცხვითი D სიმრავლის პერიოდი, თუ D სიმრავლე გარდა x–ისა, შეიცავს $x- T$ და $x + T$ რიცხვებსაც, რიცხვ T–ს ეწოდება f ფუნქციის პერიოდი, თუ D არის f ფუნქციის განსაზღვრის არე და

ა) T არის D სიმრავლის პერიოდი;

ბ) ნებისმიერი $x \epsilon D$–სთვის $f\ (x + T)\ =\ f\ (x)$.

ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, თუ მას გააჩნია თუნდაც ერთი ნულისაგან განსხვავებული პერიოდი.

აღნიშვნის ღირსია ის ფაქტი, რომ რიცხვით ღერძზე განსაზღვრული ფუნქციისათვის, საკმარისია ვიპოვოთ $T \neq 0$ ისეთი, რომ $f(x + T) = f(x)$ ნებისმიერი x–თვის. ზოგიერთი სახელმძღვანელო კი [წილოსანი, წულაია, ჯაფარიძე, 2012] გვთავაზობს განმარტებას, სადაც ფუნქციის პერიოდულობის დასადასტურებლად გვთავაზობს შესრულდეს პირობა: $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

არადა, $f(x) = f(x - T)$ ჩვენება ზედმეტია, ის პირდაპირ გამომდინარეობს განმარტებიდან: $f(x+T) = f\big((x-T)+T\big) = f(x-T+T) = f(x)$. ხოლო X კლასის სახელმძღვანელოში გვ. 228-ზე მაგალითების საშუალებით მოსწავლეებს ეუბნებიან, რომ „ადვილი მისახვედრია, რომ სინუს და კოსინუს ფუნქციები პერიოდულია, სადაც $T_0 = 360^0$" – დამტკიცების გარეშე. ხოლო იგივე ავტორები XI კლასის სახელმძღვანელოში $f(x) = \sin(3x)$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდის საპოვნელად იყინებს მხოლოდ შემდეგ პირობას $f(x) = f(x + T_0)$. იგივენაირად იქცევიან $f(x) = tg(5x)$ უმცირესი დადებითი პერიოდის საპოვნელად.

პერიოდული პროცესების შესწავლა პირველივე კლასიდანვე მიმდინარეობს და დაწყებით საფეხურზე ხშირად გვხვდება ე.წ. პარკეტები, ორნამენტები. ძალიან მნიშვნელოვანია, რომ $y = \{x\}$, სადაც $y = [x]$ ფუნქციები საბაზო საფეხურზე აქტიურად განიხილებოდეს. ასევე, მუდმივი ფუნქციებიც, რათა მოსწავლეთათვის მხოლოდ XI კლასში არ დადგეს დღის წესრიგში მათი გააზრება, თანაც რიცხვის მთელი და წილადურ ნაწილზე მაგალითების განხილვით მოსწავლე მივიყვანოთ აღნიშნულ იდეამდე. მოცემული ფუნქციები თავისი არსით არ წარმოადგენენ ძნელად აღსაქმელ ფუნქციებს, რაც კიდევ ერთხელ გვარწმუნებს მათი შესწავლის მიზანშეწონილებაზე სკოლის საბაზო საფეხურზე. ასევე, მეტად გააზრებისათვის ძალიან მნიშვნელოვანი იქნება განტოლებების განხილვაც, რიცხვის მთელ და წილადურ ნაწილებზე.

როდესაც სხვადასხვა ტიპის ფუნქციას ვიხილავთ ხოლმე, რა თქმა უნდა, ვსაუბრობთ ისეთ თვისებებზე, რომელიც მათ ახასიათებთ ხოლმე. მაგალითად, გვინდა მოვიყვანოთ $y = a^x$, სადაც $a > 0$; $a \neq 1$, მაჩვენებლიანი ფუნქცია, სახელმძღვანელოებში განხილულია და ნაჩვენებია მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობითი სიმრავლე, ნიშან–მუდმივობის და მონოტონურობის საკითხი, თუმცა არაა ნახსენები პერიოდულობის შესახებ და მხოლოდ ერთი სახელმძღვანელო (თ. ვეფხვაძის რედაქტორობით) გვთავაზობს ამოცანის სახით ინტუიციურად მოსწავლეები ხვდებიან (შეიძლება მასწავლებელმაც არ მიაქციოს ყურადღება), რომ მოცემული ფუნქცია არაპერიოდულია, თუმცა ამას დასაბუთება სჭირდება. რა თქმა უნდა, ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში

ყველაფრის დასაბუთება ვერ მოხერხდება, თანაც იმ აპარატით და საათების იმ მოცულობით, რასაც ეროვნული სასწავლო გეგმა გვთავაზობს, მაგრამ აღნიშნული საკითხი მარტივი გადასაწყვეტია, თუ მოსწავლეებს ავუხსნით, რომ მკაცრად, მონოტონური ფუნქცია არ შეიძლება იყოს პერიოდული. აღნიშნულიდან ცხადად ჩანს, რომ $y = a^x, (a > 0;\ a \neq 1)$ ფუნქცია ვერ იქნება პერიოდული. იგივე შეიძლება ითქვას $y = log_a x\ (a > 0;\ a \neq 1)$ ლოგარითმული ფუნქციის პერიოდულობის შესახებ, თუნდაც წრფივ ფუნქციაზე.

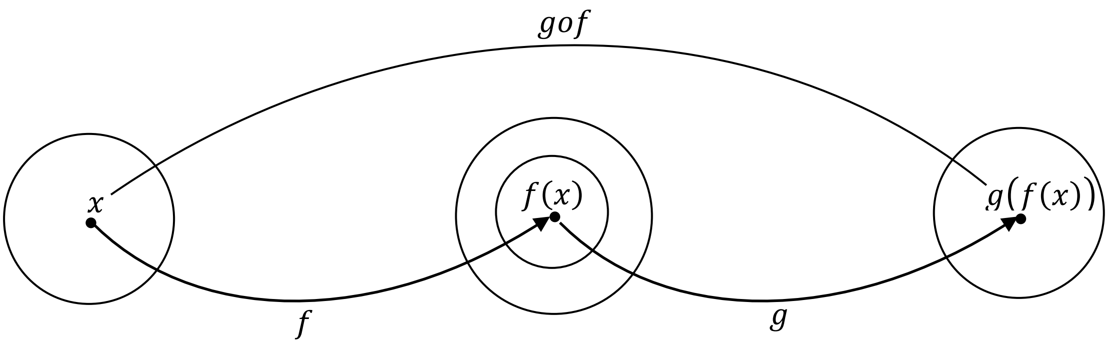
ძალიან საინტერესოდ მიგვაჩნია ის ამოცანები, რომლებსაც ავტორები გვთავაზობენ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებიდან მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციის გამოყენებაზე. მოცემულ ამოცანებში ხშირად ფიგურირებს e – ნეპერის რიცხვი, რომელიც ზოგიერთი სასკოლო სახელმძღვანელოს ახალ რედაქციებში „შემოდის“ განმარტების გარეშე, რამეთუ ესგ–თი ამოღებულია მიმდევრობის ზღვრის ცნება და მხოლოდ უსასრულოდ დიდ და უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებს ვიხილავთ. კარგი იქნებოდა, ნეპერის რიცხვის უკეთ გააზრებისათვის რამდენადმე დახვეწილიყო პროგრამა, რათა მოსწავლეებს არ გაუჩნდეთ მისი შემოტანის „აბსურდულობის“ იდეა. კარგია თუ მოსწავლეები იმსჯელებენ შემდეგ საკითხებზე: არის თუა არა ორი პერიოდული ფუნქციის ჯამი და ნამრავლი პერიოდული ფუნქცია, მოიყვანონ სათანადო მაგალითები.

§2.6. ფუნქციათა კომპოზიციის სწავლების შესახებ

სულ რამდენიმე წელია, რაც სასკოლო სახელმძღვანელოებში, ეროვნულ სასწავლო გეგმასა და შესაბამისად და ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე ფუნქციათა კომპოზიციასთან გვაქვს შეხება. იდეურად, აღნიშნული საკითხის არსი, ძალიან მარტივია. თუ მოსწავლეებს ავუხსნით კომპოზიციის არსს. მოსწავლეთათვის უფრო პრობლემური ხდება ამოცანის ამოხსნა აღნიშნულ საკითხზე, რამეთუ, ხშირად ერევათ შესრულების რიგითობა. ასევე, მოცემული საკითხის შესწავლა ძალიან მნიშვნელოვანია გეომეტრიული გარდაქმნების შესწავლის დროს და პირიქით, გეომეტრიული გარდაქმნების კომპოზიციების შესწავლა ძალიან გვეხმარება ზოგადად, კომპოზიციის არსის გაგებაში. IX კლასში სტანდარტის მიხედვით ჯერ

გეომეტრიული გარდაქმნების კომპოზიციებს ვსწავლობთ და შემდეგ ვსწავლობთ რიცხვით ფუნქციათა კომპოზიციებს. კომპოზიციათა შესწავლის დროს მნიშვნელოვანია მოსწავლეთა ყურადღება გავამახვილოთ შემდეგ გარემოებებზე, თუ მოცემულია g და f ფუნქციები და $E(f)\subset D(g)$, მაშინ g და f ფუნქციების კომპოზიცია არის ფუნქცია, რომელსაც ასე ჩავწერთ $(g\ o\ f)\ (x)\ =\ g\ (f\ (x))$, სადაც $x \epsilon D(f)$. (f ფუნქციის კომპოზიციას ამავე ფუნქციასთან იტერაცია ეწოდება).

ძალიან მნიშვნელოვანია ეს ყველაფერი მოსწავლეებს ვაჩვენოთ სიმრავლეებით.



ნახ. 13

ანუ ვიზუალურად უფრო ცხადი ხდება, რომ $E(f)\subset D(g)$ და ამ პირობის გარეშე არ იარსებებდა მოცემული ფუნქციების კომპოზიცია. ასევე, მოსწავლეებს უნდა ავუხსნათ, ყურადღება გავუმახვილოთ შემდეგ გარემოებაც, რომ მართალია, ჩანაწერში $(g\ o\ f)(x)\ =\ g(f(x))$ – მაგრამ, ასე ვთქვათ, "პირველი სრულდება f ფუნქცია, ხოლო შემდგომ g ფუნქცია". იმავე პრინციპით შეგვიძლია განვმარტოთ სამი ან მეტი ფუნქციის კომპოზიციაც. სკოლის სახელმძღვანელოებში განხილულია უამრავი მაგალითი ფუნქციათა კომპოზიციის შესახებ, მათ შორის საყოფაცხოვრებო ხასიათის მაგალითები, რათა მოსწავლეები დარწმუნდნენ მისი შესწავლის მიზნობრიობაში, ასევე, ძალიან მნიშვნელოვანია, რომ მოსწავლეებს ეძლევათ ისეთი ამოცანები, სადაც ხვდებიან, რომ ზოგადად $(g\ o\ f)(x) \neq (f\ o\ g)(x)$, თუმცა ხვდებათ ისეთი მაგალითებიც, სადაც ისინი უტოლდებიან ერთმანეთს. სკოლის სახელმძღვანელოებში არსად არაა მოყვანილი ისეთი მაგალითები, სადაც ფუნქციათა კომპოზიცია არ სრულდება, ყურადღება გამახვილებულია მხოლოდ ისეთებზე, სადაც შესრულებადია კომპოზიცია. სასურველია, ასეთი ამოცანებიც მივაწოდოთ მოსწავლეებს.

მაგალითად, თუ ჩვენ მოსწავლეებს შევთავაზებთ შემდეგ ამოცანას, რომ მოცემულია ორი ფუნქცია $f(x) = log(x-2)$ და $g(x) = cos\, x$ და მათ ვეტყვით, იპოვონ $f(g(x))$ ან $g(f(x))$ და შეადარონ ერთმანეთს, საშუალო საფეხურის ზოგიერთი მოსწავლე ალბათ მარტივად შეძლებს ამის გაკეთებას, თუმცა ესაც საეჭვოა, რადგანაც მასწავლებლები პირად საუბრებში ამბობენ, რომ თუ მოსწავლეებს შევთავაზებთ შემდეგ ამოცანას $f(x) = x^2 + 3x - 5$ და ვთხოვთ გამოთვალონ $f(4)$, ისინი ადვილად ახერხებენ, ხოლო როგორც კი შევთავაზებთ რომ გამოთვალონ $f\,(t^2 + 3t - 5)$, მაშინ ბევრი მოსწავლე ვეღარართმევს თავს მოცემულ ამოცანას.

ის მოსწავლეები, რომლებიც ადვილად ახერხებენ კომპოზიციის პოვნას, დაწერენ

$f\,(g(x)) = f\,(cos\,x) = log\,(cos\,x - 2)$ (1)

$g\,(f(x)) = g\,(log\,(x-2)) = cos\;log(x-2)$ (2)

ასეთი საკითხის დასმით მოსწავლეებში აღმოვაჩენთ ყველაზე “დაკვირვებულს”, რომლისთვისაც მნიშვნელოვანი აღმოჩნდება კომპოზიციის არსებობის საკითხი. (1) შემთხვევაში $f\,(g(x))$ კარგავს აზრს, რამეთუ $cosx - 2 > 0$ ანუ $cosx > 2$ რაც შეუძლებელია, თუმცა ამის გადამოწმება თავიდანვეც შეეძლოთ მოსწავლეებს, პირობის თანახმად $E(g) = [-1;\, 1]$ და $D(f) = (2; +\infty)$. შესაბამისად, $E(g)$ არ არის ქვესიმრავლე $D(f)$–ის ანუ არ არსებობს $f(g(x))$ ფუნქციათა კომპოზიცია. (2) შემთხვევაში ყველაფერი წესრიგშია, რამეთუ, $E(f)$ რა სიმრავლეც არ უნდა იყოს ის იქნება ქვესიმრავლე $D(g) = R$–ის.

მიუხედავად იმ გარემოებისა, რომ ფუნქციათა (ასახვათა) კომპოზიციები ქართულ სახელმძღვანელოებში შედარებით ახალი საკითხია, მაინც გვხვდება ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე მათ შესახებ სტანდარტული ამოცანები, რომლებიც მოსწავლეების ცოდნის და ყურადღების დიდ კონცენტრაციას არ საჭიროებს ზოგადი უნარ–ჩვევების მათემატიკურ ნაწილში პროგრამულად ნახსენებია ფუნქცია, თუმცა ძალიან იშვიათად შეგვხვედრია ფუნქციის შესახებ ამოცანები. აღნიშვნის ღირსია, რომ ე.წ. “ახალი ოპერაციები” ხშირად ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლას ემსახურება ცვლადის კონკრეტულ მნიშვნელობისათვის. მაგალითად, ახალი ოპერაცია „$\tilde{}$ “ განვმარტოთ შემდეგნაირად, $\tilde{x} = 2x - 3$, მაშინ თუ მოსწავლეს მოვთხოვთ, გამოთვალოს $\tilde{7}$, ეს ანალოგიურია შემდეგი ამოცანისა, მოცემულია $f(x) =$

$2x-3$ და გამოთვალოს $f(7)$. ასევე, ახალი ოპერაციები შეგვიძლია “აღვიქვათ” ფუნქციათა კომპოზიციად, მაგალითად, განმარტებული იყოს ორი ახალი მოქმედება:

$x^{\#} = 2x$, *ხოლო* $x^{*} = x^2 - 3$, თუ მოსწავლეებს მოვთხოვთ იპოვოს $(4^{\#})^{*}$, მაშინ

$$4^{\#} = 2 \cdot 4 = 8, \qquad \textit{ხოლო}\ 8^{*} = 8^2 - 3 = 61$$

თუ ზოგადად მოვითხოვთ $(a^{\#})^{*}$, მაშინ მივიღებდით

$(a^{\#})^{*} = (2a)^{*} = (2a)^2 - 3 = 4a^2 - 3$ ან პირიქით,

$(a^{*})^{\#} = (a^2-3)^{\#} = 2(a^2-3) = 2a^2 - 6$

შესაბამისად, $(a^{\#})^{*} \neq (a^{*})^{\#}$. აღარ ჩავწერთ აღნიშნულს ფუნქციების გამოყენებით, თუმცა, ვხედავთ, რომ ფუნქციათა კომპოზიციასთან გვაქვს საქმე. ასეთი ტიპის ამოცანები მრავლადაა ზოგადი უნარ–ჩვევების ტესტის ამოცანებში.

ფუნქციათა კომპოზიციების შესწავლა ძალიან მნიშვნელოვანია პერიოდულობის შესწავლისთვისაც. მაგალითად, ბევრ პერიოდულ ფუნქციას მივიღებთ, თუ $f(g(x))$ კომპოზიციით, როდესაც g – პერიოდულია, ხოლო f ნებისმიერია. მაგალითად,

$g(x) = \cos x$ და $f(x) = |x|$; $f\left(g(x)\right) = f(\cos 3x) = |\cos 3x|$ ანდა

$g(x) = \sin 6x$ და $f(x) = logx$,   საიდანაც

$f\left(g(x)\right) = f(sin\, 6x) = log\,(sin\, 6x)$.

მიუხედავად იმისა, რომ ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის კურსში ვერ მოხერხდება ფუნქციონალური განტოლებების და მათი ამოხსნის გზების სრულყოფილი შესწავლა, მაინც მნიშვნელოვნად მივიჩნიეთ აუცილებელი სახით რამდენიმე ფუნქციონალური განტოლების ამოხსნა. ეს აუცილებელიცაა, თუნდაც იმის გამო, რომ მოსწავლეთა თვალსაწიერი რამდენადმე გავაფართოვოთ და დავანახოთ, ის რომ უცნობად მათემატიკაში მხოლოდ „დაფარული რიცხვები“ კი არ გვევლინებიან, არამედ, შეიძლება საძიებელი იყოს თვითონ ფუნქცია.

მოვიყვანოთ ერთი საინტერესო მაგალითი:

თუ მოცემულია ორი ფუნქცია $f(x) = 3x - 2$ *და* $g(x) = x^2 - 3$. იმ შემთხვევაში, თუ მოსწავლეებს მოვთხოვთ $f(g(x))$ ან $g\,(f\,(x))$ კომპოზიციების პოვნას, მაშინ დაწერენ

$f\,(g(x)) = f\,(x^2 - 3) = 3\,(x^2 - 3) - 2 = 3x^2 - 11$

$g(f\,(x)) = g\,(3x - 2) = (3 + 2)^2 - 3 = 9x^2 - 12x + 4 - 3 = 9x^2 - 12x + 1.$

ახლა შემდეგნაირად დავსვათ საკითხი. მოცემულია

$$f\ (x) =\ 3x - 2\ და\ f\ (g(x))\ = 3x^2 - 11$$

ფუნქციები. იპოვეთ $g(x)$. აშკარაა, საქმე ფუნქციონალურ განტოლებასთან გვაქვს, რადგანაც

$f\ (g(x))\ =\ 3x^2 - 11$

$3g(x) - 2\ =\ 3x^2 - 11$

$3g(x)\ =\ 3x^2 - 9$

$g(x)\ =\ x^2 - 3$

ანდა პირიქით, მოცემული გვაქვს $g(x) = x^2 - 3$ და $f(g(x)) = 3x^2 - 11$ ფუნქციები. იპოვეთ $f\ (x)$.

$$f\ (x^2 - 3)\ =\ 3x^2 - 11$$

$$x^2 - 3 \equiv t$$

$$x^2\ =\ t\ +\ 3.$$

$$f\ (t)\ =\ 3\ (t\ +\ 3) - 11$$

$$f\ (t)\ =\ 3t - 2$$

ე. ი.

$$f\ (x)\ =\ 3x - 2$$

შესაბამისად, ნაპოვნია $f(x)$ და $g(x)$. ფუნქციათა კომპოზიცია კი გამოგვადგა აღნიშნული საკითხის შესასწავლად. მოსწავლეებს ელემენტარული წარმოდგენები შეექმნებათ ფუნქციონალურ განტოლებებზე. მარტივი ფუნქციონალური განტოლებები და მათი მოსწავლეთათვის შეთავაზება მასწავლებლის ხელოვნებასა და სახელმძღვანელოთა ავტორების მათემატიკური გემოვნების საქმეა.

§2.7. ფუნქციათა ლუწობა-კენტობის სწავლების საკითხი და ფუნქციათა ტოლობა

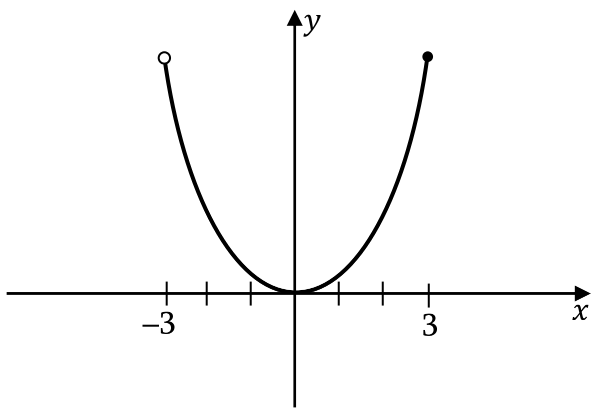
ფუნქციების შესწავლისას სკოლის სახელმძღვანელოებში აუცილებლად საუბრობენ ფუნქციათა ლუწობის და კენტობის შესახებ.

თუ f ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია რიცხვითი წრფის სათავის მიმართ და განსაზღვრის არის ყოველი x წერტილისათვის $f\ (-x)\ =\ f\ (x)$ მაშინ $y\ =\ f\ (x)$ ფუნქციას ლუწი ფუნქცია ეწოდება. ამის მაგალითად მოსწავლეთათვის მოგვყავს ხოლმე მათთვის კარგად ნაცნობი $f(x)\ =\ x^2$ ფუნქცია.

თუ f ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიულია რიცხვითი წრფის სათავის მიმართ და განსაზღვრის არის ყოველი x წერტილისათვის $f\ (-x)\ = -f\ (x)$, მაშინ $y =$

$f(x)$ ფუნქციას კენტი ფუნქცია ეწოდება. ამის მაგალითად კი მოგვყავს, ასევე კარგად ნაცნობი ფუნქცია $f(x) = x^3$.

რა თქმა უნდა, ჩვენ არ დავიწყებთ კენტი და ლუწი ფუნქციების თვისებების ჩამოწერას, მაგრამ ყურადღებას გავამახვილებთ იმაზე, რომ მოსწავლეებისათვის მეორეხარისხოვან ინფორმაციად რჩება ის, რომ $y = f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე სიმეტრიული უნდა იყოს საკოორდინატო წრფის სათავის მიმართ, რამეთუ ამის გარეშე, მაგალითად, ვერაფრით ვერ ვიტყვით ფრაზას „მაშინ განსაზღვრის არის ყოველი x რიცხვისათვის $f(-x) = f(x)$ ან $f(-x) = -f(x)$“. იმისათვის, რომ მოსწავლეებისათვის აღნიშნული გარემოება უფრო ცხადი გახდეს და დარწმუნდნენ აღნიშნული სიტყვების აუცილებლობაში, კარგი იქნება თუ გრაფიკული ფორმით მივაწვდით ფუნქციას.



ნახ. 14

მაგალითად, მოსწავლე მიუთითებს, რომ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა (-3; 3] შუალედი და თითქოს მოცემული ფუნქცია უნდა იყოს ლუწი, ზოგიერთი მოსწავლე ან მასწავლებლის დახმარებით ან დამოუკიდებლად მიხვდება, რომ $f(x) = x^2$, $D(f) = (-3;\ 3]$ შუალედში, ყველა წერტილში სრულდება ფუნქციის ლუწობის პირობა, გარდა $f(3) \neq f(-3)$, რამეთუ (-3)–ში ფუნქცია საერთოდ არაა განსაზღვრული, ამიტომ მოცემული ფუნქცია არაა ლუწი! აქვე უნდა დავსვათ მეორე შეკითხვაც, არის თუ არა მოცემული ფუნქცია კენტი? ხშირ შემთხვევაში იმპერატიულად ვამბობთ ხოლმე, რომ „მაშინ მოცემული ფუნქცია არის კენტი“. ძალიან მნიშვნელოვანია ამ შემთხვევაში მოსწავლეთა მზაობა, რომ „შეგვეწინააღმდეგონ“ იმავე მაგალითის მოყვანით $f(3) \neq f(-3)$, რამეთუ ისევ -3–ში

ფუნქცია საერთოდ არაა განსაზღვრული. ამ გარემოების აღწერის შემდგომ მოსწავლეები ასკვიან ორ რამეს: ა) ის რომ ფუნქციის ლუწობისა და კენტობისათვის აუცილებელია, მაგრამ არასაკმარისია, რომ აღნიშნული ფუნცქიის განსაზღვრის არე სიმეტრიული იყოს რიცხვით წრფის სათავის მიმართ და ბ) რომ არსებობენ ფუნქციები, რომლებიც არც ლუწები არიან და არც კენტები. ცოდნის „გამყარებისათვის“ კარგი იქნებოდა მასწავლებლებს მიგვეცა რამდენიმე კენტი ან ლუწი ფუნქციის ან არც კენტი, არც ლუწი ფუნქციის დახაზული გრაფიკი და მოსწავლეებს ამოეცნოთ, თუ რომელი მათგანი რომელი ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს. მეორე ეტაპია, რომ მასწავლებელმა მოსწავლეებს შესთავაზოს გრაფიკის დახაზული „ნახევარი“ და იმის მითითებით, თუ ლუწია ან კენტი ფუნქცია, აღადგინოს მეორე ნაწილი ანდა სულაც თვითონ დახაზონ რამდენიმე კენტი ან ლუწი ფუნქციის გრაფიკი. თითქოს გრაფიკებთან ყველაფერი ცხადი უნდა იყოს ამის მერე, მაგრამ როდესაც საქმე გვაქვს კონკრეტული ფუნქციის ლუწობის ან კენტობის დადგენასთან, ზოგადი სახით უჭირთ ხოლმე მოსწავლეებს და ხშირად შემოიფარგლებიან საპირისპირო რიცხვების ჩასმით ფუნქციაში. მაგ. 2–ისა და (-2)-ის ჩასმით (რა თქმა უნდა, ზოგიერთი არც კი აანალიზებს, რომ მოცემული წერტილები ეკუთვნიან თუ არა აღნიშნული ფუნქციის განსაზღვრის არეს) და თუ $f(-2) = f(2)$ ამბობენ, რომ ლუწია და თუ $f(-2) = -f(2)$ ამბობენ, რომ კენტია, და თუ არცერთი ზემოთ ჩამოთვლილი არ შესრულდა, მაშინ ფუნქცია არც კენტია და არც ლუწი. ასეთი „ტრივიალური“ დამტკიცებებით რომ არ მოგვიწიოს მუშაობა მოსწავლეებთან და შემდგომშიც, უმაღლეს სკოლაშიც არ მიეჩვიონ ასეთ მსჯელობებს, კარგი იქნებოდა, რომ მოსწავლეები „საკმაო“ რაოდენობის მაგალითებით მივაჩვიოთ მკაცრ დამტკიცებას.

იმის გამო, რომ მოსწავლეებს ხშირად უხდებათ ანალიზურად მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არის მოძებნა სკოლაშიც დაერთიან ეროვნულ გამოცდებზეც, შევეცადეთ ჩვენეული მეთოდი შემოგვეთავაზებინა ფუნქციის განსაზღვრის არის მოძებნასთან დაკავშირებით, რომელიც გამოადგება მასწავლებელს ფუნქციებთან დაკავშირებული საკითხების შეჯამებისას სკოლაში.

სასკოლო სახელმძღვანელოებში ფუნქციის მოცემის სხვადსხვა ხერხს განიხილავენ ხოლმე ავტორები. განსაზღვრის არის პოვნა შედარებით უიოლდებათ მოსწავლეებს მაშინ, როდესაც ფუნქცია მოცემულია გრაფიკულად ან ცხრილის სახით. ორივე შემთხვევაში უფრო მეტი თვალსაჩინოებაა, ვიდრე ფუნქციის ანალიზურად მოცემის შემთხვევაში. სხვათაშორის, ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე ანალიზურად მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არის პოვნა აბიტურიენტებს უმაღლესი ქულის მოპოვების საშუალებას აძლევს.

შევეცდებით შემოგთავაზოთ მეთოდი, რომელიც მოსწავლეებს დაეხმარება ანალიზურად მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არის სწრაფად და ზუსტად მოძებნაში. მოცემული მეთოდი დამყარებულია პრინციპზე : „რაც აკრძალული არაა - ყველაფერი ნებადართულია“.

„აკრძალვა #1“ არის შემდეგი ტიპის ფუნქციებში: $y = \frac{C}{N(x)}$ (C - მუდმივია) ან $y = \frac{M(x)}{N(x)}$. მოსწავლეებს ვუსვამთ შეკითხვას, თუ რა არ შეიძლება მოხდეს მოცემულ შემთხვევაში, რა აკრძალვა ეხება ფუნქციას, უკეთ რომ ვთქვათ, მარჯვენა მხარეში მდგომ გამოსახულებას? ფაქტია, რომ გამოსახულების მნიშვნელი არ უნდა უდრიდეს 0-ს (სწორედ ეს არის „აკრძალვა“). კარგი იქნებოდა, მოსწავლეებს კიდევ ერთხელ გაეხსენებინათ, თუ რატომ არ შეიძლება ნულზე გაყოფა. ხშირ შემთხვევაში მოსწავლეებმა იციან ეს ფაქტი, მაგრამ არ იციან მიზეზი ამისა. ზოგიერთ მოსწავლეს მიაჩნია, რომ ეს მათემატიკოსების კაპრიზია - ასე გადაწყვიტეს მათემატიკოსებმა. მაშასადამე, მოცემული ფაქტის გახსენების შემდეგ, მოსწავლეები მიხვდებიან, რომ ნებისმიერ ასეთი სახით მოცემულ ფუნქციაში მნიშვნელი არ უნდა უდრიდეს ნულს. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი:

ა) $f(x) = \frac{1}{x-8}$ ანუ $x - 8 \neq 0$

ბ) $f(x) = \frac{2x+7}{3x-1}$ $3x - 1 \neq 0$

გ) $f(x) = \frac{2x}{x^2-7x+12}$ $x^2 - 7x + 12 \neq 0$

ასე გვპასუხობენ მოსწავლეები. ამის შემდეგ ყველაფერი უკვე ტექნიკის საქმეა, თუ რამდენად კარგად შეუძლიათ მოსწავლეებს განტოლების ამოხსნა.

„აკრძალვა #2“ გვხვდება შემდეგი ტიპის ფუნქციებში: $y = \sqrt[2n]{M(x)}$. როგორც „აკრძალვა #1“-ში, აქაც კარგი იქნებოდა, მოსწავლეებს გაეხსენებინათ მიზეზები, თუ რატომ არ შეიძლება ლუწი ხარისხის ფესვის ამოღება გამოსახულებიდან, რომელიც უარყოფითია, უფრო სწორად კი - თუ როგორი უნდა იყოს გამოსახულება, რომ მისგან შეიძლებოდეს ლუწი ხარისხის ფესვის ამოღება. შეიძლება ითქვას, განსაზღვრის არის მოძებნა იძულებულს გვხდის კიდევ ერთხელ შევაჯამოთ მათემატიკის ბევრი საკვანძო საკითხი. საბოლოოდ დავადგენთ, რომ ფესქვეშა გამოსახულება უნდა იყოს არაუარყოფითი, ანუ $M(x) \geq 0$.

მოვიყვანოთ შესაბამისი მაგალითები:

ა) $f(x) = \sqrt{x+8}$ ანუ $x + 8 \geq 0$

ბ) $f(x) = \sqrt[6]{4 - 3x + x^2}$ $4 - 3x + x^2 \geq 0$

გ) $f(x) = \sqrt[4]{1 + \sqrt{x+1}}$ $\begin{cases} 1 + \sqrt{x+1} \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$

დ) $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt[3]{x}}$ $4 - \sqrt[3]{x} \geq 0$

ამ ორი „აკრძალვის“ შემდეგ შეგვიძლია მოსწავლეებს შევთავაზოთ კომბინირებული ვარიანტი:

ა) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{5x}$ ანუ $\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 5x \neq 0 \end{cases}$

ბ) $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$ $x + 4 > 0$

გ) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-3x+2}}$ $\frac{x-1}{x^2-3x+2} \geq 0$

დ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt[4]{x+2}}}$ $\begin{cases} 1 - \sqrt[4]{x+2} > 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$

ე) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{2}{\sqrt[6]{15+2x+x^2}}$ $\begin{cases} -x \geq 0 \\ 15 + 2x + x^2 > 0 \end{cases}$

ვ) $f(x) = \frac{7}{\sqrt[3]{x-1}}$ $x - 1 \neq 0$

მოსწავლეები აღმოაჩენენ რომ, ხშირ შემთხვევაში, ფესვქვეშა გამოსახულება აღარ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, ანუ სავალდებულოა, იყოს მკაცრად დადებითი და თუ კენტი ხარისხის ფესვთან „აკრძალვა“ არ იყო, ზოგჯერ მაინც ხდება ხოლმე პრობლემა.

„აკრძალვა #3“ გვხვდება ლოგარითმულ ფუნქციაში: $f(x) = \log_{N(x)} M(x)$. ასევე, ვიხსენებთ ლოგარითმის თვისებებს და ვაჯამებთ მოცემულ საკითხს, რის შედეგადაც დავადგენთ, თუ რატომ $\begin{cases} M(x) > 0 \\ N(x) > 0 \\ N(x) \neq 1 \end{cases}$

ა) $f(x) = \log_2(-x+1) + \log_3(-x^2 - x + 6)$ ანუ $\begin{cases} -x+1 > 0 \\ -x^2 - x + 6 > 0 \end{cases}$

ბ) $f(x) = \log_{(x+2)}(x^2 - 5x - 6)$ $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ x + 2 \neq 1 \end{cases}$

ამ ყველაფრის შემდეგ ისევ შეგვიძლია ვისაუბროთ მათს კომბინირებულ ვარიანტებზე:

ა) $f(x) = \sqrt{1 - \log_2 x}$ ბ) $f(x) = \log_2(2 - \sqrt{x})$ გ) $f(x) = \frac{\log_3(-x^2+4x+5)}{\sqrt{x-2}}$

დ) $f(x) = \sqrt{\log_{0,4}\frac{x-1}{x+5}}$ ე) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x\lg(x-5)}$ დ) $f(x) = \frac{1}{\log_2(x^2-2x-8)-4}$

ზ) $f(x) = \lg(3 - \sqrt{x+1})$ თ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{1-\log_{\frac{1}{3}}(1-x)}$ ი) $f(x) = \lg(\lg x)$

„აკრძალვა #4“ ეხება $f(x) = \mathrm{tg}\ \mathrm{M}(x)$ ფუნქციას, სადაც ე.წ. „აკრძალვა“ ის არის, რომ $M(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

ა) $f(x) = \mathrm{tg}\,(x-1)$ ბ) $f(x) = \mathrm{tg}\,(\sin x)$ გ) $f(x) = 2\,tg(-2x + \frac{\pi}{4})$

ამის შემდეგ ყველაფერი იმავე ლოგიკით გრძელდება, როგორც ზემოთ იყო - კომბინირებული ვარიანტები.

ალბათ ადვილი მისახვედრია ჩვენი მცდელობა ცოდნის სისტემატიზაციისა, რადგანაც აბიტურიენტთა 51 %-მა საერთოდ ვერაფერი ვერ დაწერა შემდეგ ამოცანაში:

„იპოვეთ $y = \frac{\log(-x^2+4x+5)}{\sqrt{x-2}}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე“, ხოლო 15 %-მა შეძლო სრულად ამოხსნა.

შემოვიფარგლეთ მხოლოდ იმ ფუნქციებზე საუბრით, რომლებიც მათემატიკის მინიმალური სტანდარტის მიხედვით მოეთხოვებათ მოსწავლეებს. არც ერთი ამოცანა ბოლომდე არ არის მიყვანილი ამოხსნის თვალსაზრისით, საკმარისია, რომ საკითხის არსში ერკვეოდეს მოსწავლე, დანარჩენი კი იმაზეა დამოკიდებული, თუ როგორ შეუძლია განტოლებებისა და უტოლობების ამოხსნა. რა თქმა უნდა, ყველა

ჩამოთვლილი ფუნქციის შესწავლა ერთ რომელიმე გაკვეთილზე ვერ მოხერხდება, მით უმეტეს, რომ სხვადასხვა ფუნქცია, სხვადასხვა კლასში ისწავლება, მაგრამ ის კი ნამდვილად შესაძლებელია, დამამთავრებელ კლასებში ამგვარად გავიმეოროთ ფუნქციის განსაზღვრის არის პოვნის შესახებ ამოცანები. მოცემულ მეთოდს დიდ ეფექტს შესძენს ის, რომ მასწავლებელმა გაკვეთილზე კომპიუტერული ტექნოლოგიების საშუალებით ააგებინოს მოსწავლეებს ნახსენები ფუნქციების გრაფიკები. თვალსჩინოება არც ამ ასაკში კარგავს თავის უდიდეს მნიშვნელობას.

დავუბრუნდეთ ფუნქციის ლუწობა-კენტობის საკითხს. აღნიშნული საკითხი რომ პრობლემურია და სავარაუდოდ მასწავლებლებისთვისაც „მახედ" გამოდგება, ამას კარგად მოწმობს ამოცანა VII–XII კლასების მათემატიკის მასწავლებელთა კომპეტენციის დადასტურების ტესტებიც 2015 წელს მასწავლებლებისთვის შეთავაზებული იყო ასეთი ამოცანა: „კლასს დამოუკიდებელ სამუშაოდ ჰქონდა მიცემული დავალება: დაადგინეთ, არის თუ არა ლუწი ან კენტი შემდეგი ფუნქცია

$$f(x) = \frac{\cos x \cdot \log_2(1-2x+x^2)}{\log_2(1-x)}$$

მოსწავლე გამოთვლების შემდეგ მოსწავლე წერს, რომ

$f(x) = 2cos\,x$

$f(-x) = 2cos\,x$

და ასკვნის, რომ ფუნქცია ლუწია. ჩვენ არ ამოვხსნით მოცემულ ამოცანას, თუმცა ვიტყვით, რომ აღნიშნული ამოცანის არასწორი პასუხი გამოიწვია იმ გარემოებამ, რაზეც ზემოთ დავწერეთ, ანუ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$, ამიტომ საერთოდ არ დაიწყებდა მოსწავლე საუბარს ლუწობაზე ან კენტობაზე, თუ დაადგენდა განსაზღვრის არეს და არასიმეტრიულობის გამო პირდაპირ იტყოდა, რომ მოცემული ფუნცქია არც კენტია და არც ლუწი.

ასეთივე ამოცანასთან გვაქვს საქმე 2017 წლის ეეგ მათემატიკის ტესტის N 16 ამოცანაში:

„ქვემოთ ჩამოთვლილთაგან რომელი არ არის ლუწი ფუნქცია:

ა) $f(x) = |x| - 1$ ბ) $f(x) = \frac{x-x^3}{x}$ გ) $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$ დ) $f(x) = \sqrt{x^2}$ "

ამ ამოცანის ამოხსნისას მოსწავლეები ხშირად თითოეულ სავარაუდო პასუხს ამოწმებენ ლუწობა-კენტობის „ინდიკატორზე", ანუ პოულობენ $f(x) -$

$ნა$ და $f(-x) - ნ$, ზოგი „უფრო ადვილ“ გზას ირჩევს და კონკრეტული რიცხვების ჩასმით შემოიფარგლება ხოლმე, მაგალითად პოულობს $f(2) - ნა$ და $f(-2) - ნ$, ზოგნი გრაფიკების აგებას იწყებენ, ზოგი ფიქრობს, რომ „თუ ფუნქცია არაა ლუწი“, ეს ნიშნავს, რომ „ის კენტია“, მოკლედ რომ ვთქვათ, უამრავ ვერსიას გვთავაზობენ, თუმცა არავინ არ უყურებს ამ ფუნქციათა განსაზღვრის არეს. ამ ამოცანას მოუხდებოდა სახელი „შეხედე და მიხვდი“, ერთადერთი ფუნქციაა (გ), რომლის განსაზღვრის არეც არ არის სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ, შესაბამისად მის არც ლუწობაზე და არც კენტობაზე საუბარი არ შეიძლება. ამით უნდა სრულდებოდეს მსჯელობა. ასეთი ამოცანები გამოდგება კლასში პრობლემური სიტუაციის შესაქმნელად და მოსწავლეთა ცოდნის ზეპირად შემოწმებისას.

აქვე, ძალიან საინტერესოა, კლასში თუ აღმოჩნდება მოსწავლე, რომელიც დასვამს შეკითხვას იმის შესახებ, არსებობენ თუ არა ისეთი ფუნქციები, რომლებიც ერთდროულად კენტიცაა და ლუწიც?! თუ ასეთი კითხვა მოსწავლეთა მიერ არ დაისვა, აუცილებელია მასწავლებელმა დასვას შეკითხვა სრული სიცხადისათვის. სანამ აღნიშნულ საკითხს ჩვენეულ ვერსიას შემოგთავაზებდეთ, ვიტყვით, რომ ზემოთ განხილულ ამოცანაში, რომელიც მასწავლებლებს მიეცათ კომპეტენციის დასადასტურებელ გამოცდაზე, იქვე იყო დასმული ასეთი შეკითხვა: „ლევანმა გაკვეთილზე იკითხა: „არსებობს თუ არა ფუნქცია, რომელიც ერთდროულად ლუწიც არის და კენტიც?“ დაეხმარეთ ლევანს. მოიყვანეთ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ყველა ასეთი ფუნქცია. პასუხი დაასაბუთეთ“.

გვინდა მოვიყვანოთ გამოცდების ეროვნული ცენტრის მიერ შემოთავაზებული ამოხსნა:

„თუ f ერთდროულად ლუწი და კენტი ფუნქციაა თავის განსაზღვრის არეზე და x რიცხვი f ფუნქციის განსაზღვრის არეს ეკუთვნის, მაშინ $f(x) = f(-x) = -f(x)$, ამიტომ $f(x) = 0$. ე.ი. განსაზღვრის არეზე f ფუნქცია იგივურად ნულის ტოლია. მიზეზი იმისა, თუ რატომ მოვიყვანეთ ციტატა სრულად, შემდეგია: კითხვაში დასმული იყო ასეთი საკითხი, რომ უნდა მოგვეყვანა **ყველა** ასეთი ფუნქციის მაგალითი და პასუხი დაგვესაბუთებინა. შესაბამისად, თუ გამოცდების ეროვნული ცენტრის მიერ შემოთავაზებული ამოხსნას დავაკვირდებით, $f(x) = 0$ ფუნქცია რომ

ლუწიცაა და კენტიც, თავის განსაზღვრის არეზე, ნამდვილად დასაბუთებულია, მაგრამ იგულისხმება, რომ ასეთი ფუნქცია ერთადერთია, რამეთუ მოთხოვნა იყო, რომ ყველა ასეთი ფუნქციის მაგალითი უნდა მოეყვანათ მასწავლებლებს და თუ $f(x) = 0$ ფუნქცია ერთადერთია, მაშინ დასაბუთებული უნდა იყოს მისი ერთადერთობა, რაც ნამდვილად არაა მოცემული. ს.ხეკალო თავის სტატიაში [мат. В школе, 2002(6)] ადასტურებს ამას შემდეგნაირად:

თუ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა და ლუწიც, მაშინ უნდა შესრულდეს ორი პირობა ერთდროულად:

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

თუ პირველ განტოლებას გამოვაკლებთ მეორე განტოლებას, მივიღებთ $0 = f(x)$-$-(-f(x))$ ანუ $2f(x) = 0$ ანუ $f(x) = 0,$ ნებისმიერი $x \in D(f)$–სთვის და ასკვნის, რომ იგივურად ნულის ტოლი ფუნქცია ერთადერთია, რომელიც ერთდროულად ლუწიცაა და კენტიც.

კონტრმაგალითის გამოყენებით გვინდა შემოგთავაზოთ ისეთი ფუნქციის მაგალითი, რომელიც ლუწიცაა და კენტიც, თუმცა განსხვავდება $f(x) = 0$ ფუნქციისაგან.

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \sqrt{lg\cos x}$.

ვიპოვოთ განსაზღვრის არე

$(lg\cos x \geq 0) \Rightarrow (\cos x \geq 1) \Rightarrow (\cos x = 1) \Rightarrow (x = 2\pi k;\ k\epsilon Z)$

ე.ი. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $2\pi\kappa;\ \kappa \in Z$ წერტილები. ამ წერტილებში ფუნქცია 0–ის ტოლია. ე.ი. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ერთი წერტილისაგან შედგება. შესაბამისად, მოცემული ფუნქციის გრაფიკი $(2\pi\kappa;\ 0)\ \kappa \in Z$ წერტილებისგან შედგება. მოცემული წერტილები სიმეტრიულად არიან განლაგებულნი, როგორც $0x$ ღერძის, ასევე $0y$ ღერძის მიმართაც, საიდანაც ვასკვნით, რომ $f(x) = \sqrt{lg\cos x}$ ფუნქცია ერთდროულად ლუწი ფუნქციაცაა და კენტიც.

მიუხედავად იმისა, რომ $x = 2\pi k;\ k\epsilon Z$ წერტილებში $f(x) = 0$ და თითქოს „სხვა ფუნქცია" არ არის ეს და $f(x) = 0$ ერთადერთი აღმოჩნდა, რომელიც ლუწიცაა და კენტიც, მაგრამ, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეები $f(x) = 0$ და $f(x) = \sqrt{lg\cos x}$ არ ემთხვევა ერთმანეთს, შესაბამისად, მოცემული ფუნქციები ტოლი არაა.

აღარ ვისაუბრებთ იმაზე, რომ ასეთ ფუნქციას ზევრს ავაგებთ და შესაბამისად, $f(x) = 0$ ფუნქციის ერთადერთობაზე ლაპარაკი აღარ შეიძლება.

რადგანაც ფუნქციათა ტოლობას შევეხეთ, აქვე გვინდა გავამხავილოთ ყურადღება იმ საკითხებზე, თუ როდის შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფუნქციები არიან ტოლები. მოსწავლეებს შეიძლება დავუსვათ შეკითხვა: არიან თუ არა ტოლი ფუნქციები $f(x) = x^2,$ სადაც $D(f) = R$ და $g(x) = x^2,$ სადაც $D(g) = [-3;\ 5]$.

ასეთი სახის ამოცანის მიცემა მოსწავლეებს გაუადვილებთ სწორი პასუხისკენ გზას, რადგანაც ისინი შეამჩნევენ, რომ განსაზღვრის არეები არ ემთხვევა ერთმანეთს, შესაბამისად, „იეჭვებენ“ განსაზღვრის არეზე დამოკიდებული უნდა იყოს ფუნქციათა ტოლობა. კარგი იქნება, რომ თავიდან მოსწავლეებს მივცეთ ასეთი ფუნქციები: არიან თუ არა ტოლები შემდეგი ფუნქციები:

$f(x) = x - 1$ და $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

ალბათ მოსწავლეები აქაც „იეჭვებენ“ აღნიშნულ გარემოებას და თუ გრაფიკების აგებას შეეცდებიან, დაადგენენ, რომ მათ ერთნაირი გრაფიკები არ აქვთ, ანუ გრაფიკულად ერთნაირად არ მოიცემიან. შესაბამისად ისინი ტოლები არ უნდა იყვნენ. კარგი იქნება თუ მოსწავლეებს სტანდარტულ მაგალითს შევთავაზებთ, ტოლები არიან თუ არა $f(x) = \sqrt{x^2}$ და $g(x) = x$. ზოგიერთი მოსწავლე ალბათ თავიდანვე „მიხვდება“, რომ $f(x) \neq g(x)$ და მთელი კლასი კიდევ ერთხელ გაამახვილდება ყურადღებას აღნიშნულ ტიპურ შეცდომაზე. ეს ძალიან კარგ მაგალითად მიგვაჩნია, რათა მოსწავლეები დარწმუნდნენ, რომ მარტო განსაზღვრის არე არ არის კავშირში ფუნქციათა ტოლობასთან, რამეთუ $D(f) = D(g) = R$, თუმცა გრაფიკულად თუ წარმოადგენენ აღნიშნულ ფუნქციებს, ისევ სხვადასხვა წირს დაინახავენ, რა თქმა უნდა მოსწავლეთა ის ნაწილი, რომელიც თავიდანვე ვერ მიხვდა, გრაფიკის აგების შემდგომ მაინც მიხვდება, რომ $f(x) = |x|$ და $g(x) = x$ ერთი და იგივე ფუნქცია ვერ იქნება, ზოგიერთი მოსწავლისთვის შეგვეძლო თავიდანვე მნიშვნელობათა სიმრავლე დადგვედგინებინა და მიხვდებოდნენ, რომ რადგანაც $E(f) = [0;\ +\infty)$ და $E(g) = (-\infty; +\infty)$ აღნიშნული ფუნქციები ტოლები ვერ იქნებიან. ასეთი ტიპის რამოდენიმე ამოცანაც კმარა, რათა მოსწავლეებმა თავად

ჩამოაყალიბონ ორი ფუნქციის ტოლობის პირობები. ორ f და g ფუნქციას ვუწოდოთ ტოლი, თუ:

$$D(f) = D(g) = A$$

$$E(f) = E(g) = B$$

$$\text{ნებისმიერი } a \in A-\text{სთვის } f(a) = g(a) \in B$$

ზოგიერთი ავტორი გვთავაზობს, რომ საკმარისია ტოლ ფუნქციებს მხოლოდ განსაზღვრის არე ჰქონდეთ ტოლი და მნიშვნელობათა სიმრავლეები ავტომატურად ტოლები ექნებათ. [მათემატიკა VII-XII მათემატიკა, საგნობრივი გზამკვლევი, 2013].
ა. შენი კი ამბობს, რომ ფუნქციები ტოლები არიან მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ტოლები არიან მათი გრაფიკები როგორც სიმრავლეები [Шень, 2015].

მიზანშეწონილად მიგვაჩნია, მოსწავლეებს შევთავაზოთ შემდეგი ფუნქციების ტოლობის საკითხის დადგენა. შემდეგ ამოცანებში ვგულისხმობთ, რომ ფუნქციის მოცემა ნიშნავს მოიცეს ფუნქციის განსაზღვრის არე, მნიშვნელობათა სიმრავლე და წესი:

$f(x) = \sqrt{x^2}$ და $g(x) = (\sqrt{x})^2$

$f(x) = log_2 x^2$ და $g(x) = 2log_2 x$

$f(x) = 0$ და $g(x) = \sqrt{lg\cos x}$

$f(x) = 1$ და $g(x) = tgx \cdot ctgx$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1-sin^2 x}}{\cos x}$ და $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

$f(x) = \frac{x}{x}$ და $g(x) = 1$

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ და $g(x) = 1$

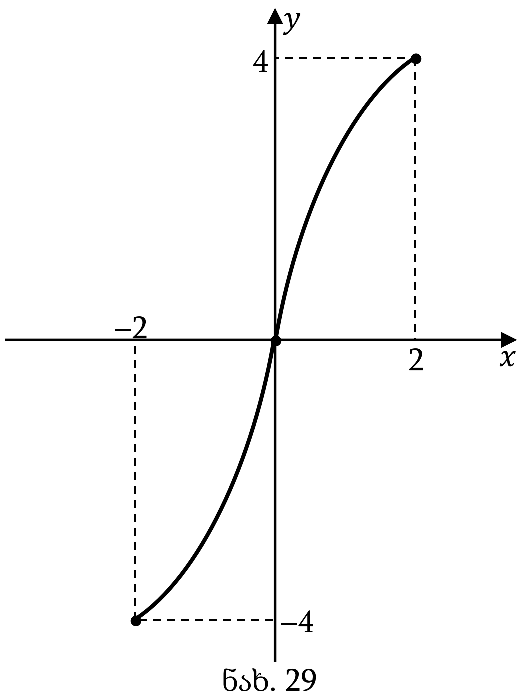
$f(x) = 2^{log_2(x^2-2)}$ და $g(x) = x^2-2$

ძალიან საინტერესოდ მიგვაჩნია შემდეგი ტიპის ამოცანა, რომელიც ერთიან ეროვნულ გამოცდაზე იყო შეთავაზებული მოსწავლეთათვის 2014 წელს.

„ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულია კენტი პერიოდული f ფუნქცია პერიოდით 4. f ფუნქცია [0; 2] სეგმენტზე განსაზღვრულია ტოლობით $f(x) = 4x - 2x^2$. იპოვეთ $2f(x) \cdot f(x-8) - 3f(x+12) - 2 = 0$ განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე“.

ასეთი ტიპის ამოცანები ძალიან საინტერესოა თავისი შინაარსით და ამოხსნის გზითაც, ამომხსნელს ფუნქციათა თვისებების შესახებ თუ მყარი წარმოდგენები და ფუნდამენტური ცოდნა არ გააჩნია, მაშინ ძნელდება და თითქმის შეუძლებელია ჭეშმარიტ პასუხამდე მისვლა, საწინააღმდეგო შემთხვევაში კი მოსწავლეებს ძალიან მოსწონთ ასეთი სახის ამოცანები და დიდი ენთუზიაზმით ერთვებიან მის ამოხსნაში, თანაც ფუნქციის რამდენიმე თვისების გამოყენებაა საჭირო ერთ ამოცანაში, როცა მას მატებს მეტ „სილამაზეს“. ამ ამოცანის ამოხსანით მოსწავლეები კიდევ ერთხელ დარწმუნდებიან იმაში, რომ პერიოდული ფუნქციები მხოლოდ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან არ უნდა ასოცირდებოდეს.

ამოვხსნათ ამოცანა: რადგანაც $f(x) = 4x - 2x^2$ $[0; 2]$ შუალედში განსაზღვრული ფუნქციაა, გამოკვლევის შედეგად ვიღებთ, რომ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[0; 4]$ და რადგანაც მოცემული ფუნქცია კენტია, მაშინ აღნიშნული ფუნქციის ფრაგმენტს ექნება შემდეგი სახე



ნახ. 29

$2 \cdot f(x) \cdot f(x-8) - 3 \cdot f(x+12) - 2 = 0$

იმის გათვალისწინებით, რომ ფუნქციის პერიოდია 4, მივიღებთ:

$2 \cdot f(x) \cdot f(x) - 3 \cdot f(x) - 2 = 0$

$2 \cdot f^2(x) - 3 \cdot f(x) - 2 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$$f_1(x) = \frac{3+5}{2} = 2 \in E(f)$$

$$f_2(x) = \frac{3-5}{2} = -\frac{1}{2} \notin E(f)$$

თუმცა ფუნქციის კენტობის გამო, $f_2(-x) = -f_2(x) = \frac{1}{2}$

თითოეული შემთხვევა განვიხილოთ ცალ-ცალკე:

ა) $4x - 2x^2 = 2$ ბ) $-4x - 2x^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 - 2x + 1 = 0$ $4x^2 + 8x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$ $D_1 = 16 - 4 = 12$

$x_1 = 1$ $x_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

კიდევ ერთხელ გასათვალისწინებელია ის გარემოება, რომ ფუნქციის პერიოდია 4, ამიტომ საბოლოოდ ამონახსნები მიიღებენ სახეს:

$x_1 = 1 + 4k\,; \ k \in Z$

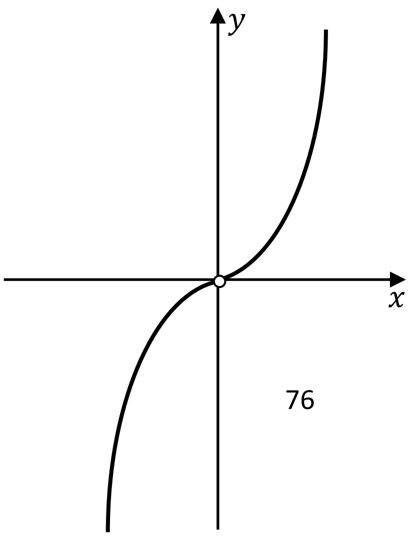
$x_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 4k\,; \ k \in Z$

$x_3 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4k\,; \ k \in Z$

ვრწმუნდებით, რომ „არასტანდარტული მათემატიკური ამოცანების ამოხსნა, უდავოდ, განეკუთვნება შემოქმედებით საქმიანობას“ – დ. პოია.

ფუნქციის ლუწობა-კენტობის საკითხის განხილვისას ძალიან საინტერესო ამოცანაა შემდეგი: $f(x) = \begin{cases} x^2, & თუ\ x > 0 \\ -x^2, & თუ\ x < 0 \end{cases}$

მიუხედავად იმისა, რომ $y = x^2$ ფუნქციის ანალოგიით, ეს ფუნქციაც ლუწი ფუნქცია ჰგონიათ ხოლმე მოსწავლეებს, ამის არამართებულობაში ძალიან მარტივად დარწმუნდებიან, გრაფიკის აგებითაც.



ნახ. 30

შევჩერდეთ კიდევ ერთ საინტერესო ფუნქციაზე, რომელიც უმაღლესი მათემატიკის შესწავლისას ძალიან ხშირად შეგვხვედრია:

$$sign\,(x) = \begin{cases} 1, & თუ\ \ x > 0 \\ 0, & თუ\ x = 0 \\ -1\,, & თუ\ x < 0 \end{cases}$$

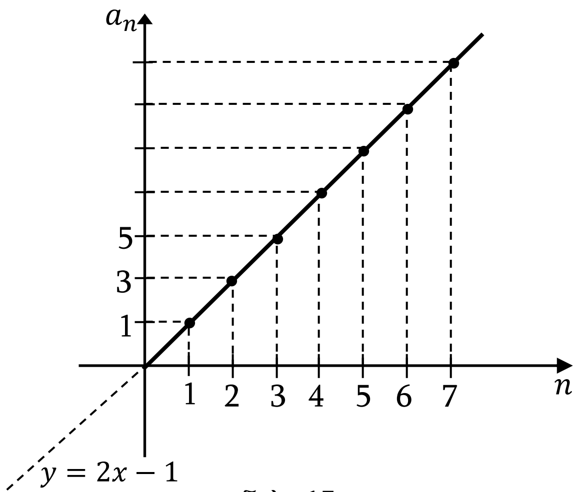
აღნიშნულ ფუნქციაზე მიუთითებს ი. მარიანსკი [Математика в школе 1978(2), 67] და საუბრობს იმ გარემოებაზე, რომ აღნიშნული ფუნქცია, მხოლოდ იმით განსხვავდება ძალიან ცნობილი და მოსწავლეთათვის შესასწავლ ფუნქციისგან $f(x) = \frac{x}{|x|}$ - სგან, რომ ეს უკანასკნელი (0; 0) წერტილზე განსაზღვრული არ არის. ჩვენ კი დავძენთ, რომ ასეთი ფუნქციის შესწავლა ძალიან მნიშვნელოვანია მოსწავლეთათვის, ერთი მხრივ იმიტომ, რომ რამდენიმე ფორმულით მოიცემა აღნიშნული ფუნქცია და ასეთი ფუნქციების აღქმა უჭირთ მოსწავლეებს, ასევე, „რაღაცნაირად" ჰგავს დირიხლეს ფუნქციას და მეორე ასეთი ფუნქციის განხილვით ცოტა გამყარდება მოსწავლეთა ცოდნა, მესამე იმიტომ, რომ აღნიშნული ფუნქცია კიდევ ერთი კარგი მაგალითია კენტი ფუნქციისა. ასევე, ეს არის ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია მთელს რიცხვით წრფეზე და აღნიშნული ფუნქციის მიხედვით მოსწავლეები პასიურად მაინც მიხვდებიან „ფუნქციის ნახტომის" არსს.

§2.8. ფუნქციონალური ხაზის ზოგიერთი საკითხის მიმოხილვა

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის ფუნქციონალურ ხაზს უნდა მივაკუთვნოთ ისეთი საინტერესო და მარტივი საკითხი, რომელსაც რიცხვითი მიმდევრობები ეწოდებათ. მიმდევრობა ფუნქციის ის კერძო სახეა, რომლის განსაზღვრის არეც N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ანუ $f : N \to R$ სახის ფუნქციებს

მიმდევრობები ეწოდებათ. ამ კონკრეტული შემთხვევისათვის ვიყენებთ ჩაწერის სხვა ფორმებს, ანუ არგუმენტს ვწერთ ფრჩხილების მაგიერ ქვედა ინდექსად. მაგალითად, ვწერთ a_n და არა $a(n)$.

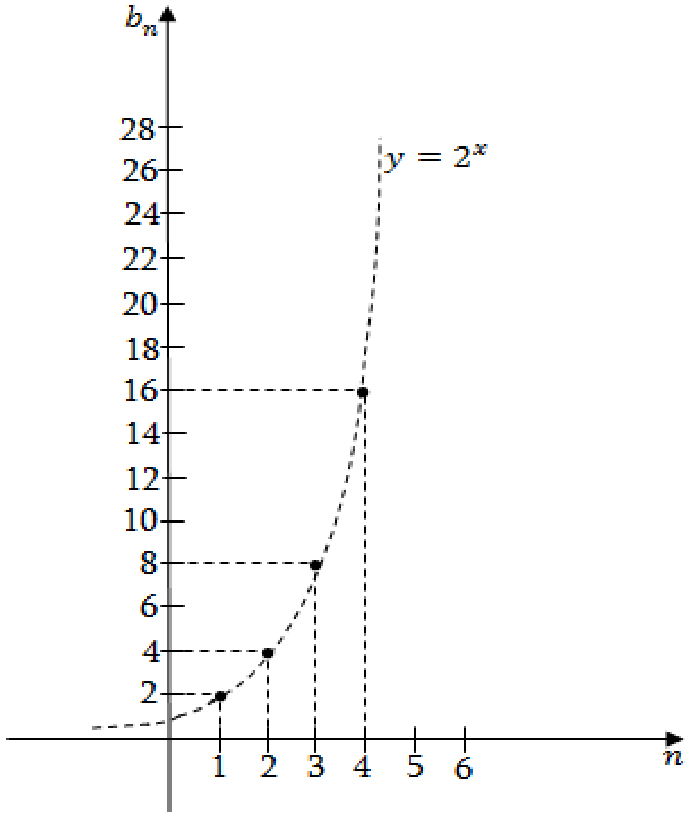
მოსწავლეებს შეგვიძლია შევთავაზოთ გრაფიკის აგებაც, მაგალითად თუ a_n არითმეტიკური პროგესია მოიცემა ფორმულით $a_n = 2n - 1$, მაშინ მისი გრაფიკი იქნება წერტილები, რომლებიც მდებარეობენ $y = 2x - 1$ წრფეზე, რომელთაც განსაზღვრის არე აქვთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე.



ნახ. 15

ერთ-ერთ სახელმძღვანელოში [წილოსანი, წულაია, ჯაფარიძე: X კლასი, 2012] ასეთი განმარტებაა მოყვანილი „ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქცია არითმეტიკული პროგრესიაა“ - კარგია, როდესაც ფუნქციონალური ხაზის გატარება სურთ ავტორებს, თუმცა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია ჯერ ერთი რომ წყვეტილია და, შესაბამისად, ვერაფრით ვერ იქნება წრფივი ფუნქცია. ასევე, ვერაფრით ვერ დავარქმევთ წრფივ ფუნქციას მაგალითად $y = 2x - 1$ -ს, თუ შევზღუდავთ მის განსაზღვრის არეს ვთქვათ არაუარყოფით რიცხვთა სიმრავლეზე.

ასევე, შეგვიძლია მოსწავლეებს გეომეტრიული პროგრესიის გრაფიკის აგებაც შევთავაზოთ, მაგალითად, $b_n = 2^n$



შესაბამისად, აღნიშნული ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს $y = 2^x$ მაჩვენებელი ფუნქციის წერტილებს. მოსწავლეები თვალნათლივ დაინახავენ, რომ მოცემულ შემთხვევაში არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიის n–ური წევრის საპოვნელი ფორმულა აღმოჩნდა ფუნქციონალური შესაბამისობა, ასევე გაამახვილებენ ყურადღებას იმ გარემოებაზე, რომ ფუნქციის გრაფიკი მხოლოდ I საკოორდინატო მეოთხედშია და მხოლოდ წერტილებია გრაფიკი და არა „გადაბმული" წირი.

სასკოლო ლიტერატურაში ყურადღება უნდა გამახვილდეს ფუნქციაზე კომბინატორიკის ელემენტების შესწავლისას. კომბინატორიკაში ვიხილავთ სასრული სიმრავლის სასრულ სიმრავლეებზე ასახვას, თანაც სასრული სიმრავლის საკუთარ თავზე ასახვა აუცილებლად იქნება შექცევადი ასახვა.

მოვიყვანოთ მხოლოდ მაგალითები:

სასრული სიმრავლის თავის თავზე ასახვას ვუწოდოთ გადანაცვლება, რომელიც მოიცემა ანალიზურად შემდეგნაირი ფორმით:

$$f\ (n)\ =\ n!$$

კომბინატორიკაში მიღებულია, რომ ჩავწეროთ სხვანაირად

$$P_n = n!$$

სადაც $n!$ განიმარტება როგორც $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots\ldots 1$.

იგივენაირად შეგვიძლია მოსწავლეებს ავაგებინოთ გრაფიკები წყობის ან ჯუფთების და ამ ფუნქციათა სხვადასხვა თვისებაზეც შესაძლოა საუბარი. მაგალითად, ზრდადიბა-კლდებადობაზე, ლუწ-კენტობაზე, შექცევადობაზე და ა.შ.

როგორც ფუნქციებზე მოსწავლეთა თვალსაწიერის გაფართოება უმნიშვნელოვანესი უნდა იყოს მასწავლებლისათვის. ჩვენ აღარ შევჩერდებით კომბინატორულ ფორმულებზე, თუმცა მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია, რომ მოსწავლეებს კომბინატორიკის ელემენტების ახსნისას დაწყებით და საბაზო საფეხურებზე, ყურადღება გავამახვილებინოთ აღნიშნულ ფაქტორებზე, რათა საშუალო საფეხურზე მეტი მათემატიკური სიმკაცრით მოეკიდონ (მიუდგნენ) საკითხის შესწავლას.

სკოლაში ამოზნექილი მრავალკუთხედის დიაგონალების შესწავლისას მოსწავლეები იყენებენ კომბინატორულ აზროვნებას. შეიძლება არც არაფერი იცოდნენ „კომბინატორიკის" შესახებ. ჩვენ არ მოვყვებით იმას, თუ როგორ უნდა მიიყვანოს მასწავლებელმა ამოზნექილი n–კუთხედის დიაგონალების გამოსათვლელ ფორმულამდე მოსწავლეები და რა სტრატეგიები უნდა გამოიყენოს მის დასამტკიცებლად, თუმცა მიღებული ფორმულის მიღების შემდეგ კარგი იქნება, მოსწავლეებთან განიხილოს შემდეგი საკითხები:

თუ დიაგონალების დათვლა შესაძლებელია ფორმულით $\frac{n(n-3)}{2}$ მაშინ, რა პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს n. მოსწავლეთა სავარაუდო პასუხებიდან $n \geq 3$ და $n \in N$ წარმოადგენს სწორ პასუხს.

- შეიძლება თუ არა ერთ მრავალკუთხედს ორი რაოდენობა შეესაბამებოდეს დიაგონალებისა?
- შეესაბამება თუ არა ერთ ამოზნექილ მრავალკუთხედს ცალსახა რაოდენობა დიაგონალებისა?
- შეგვიძლია თუ არა იგივე კითხვები დავსვათ შებრუნებული სახით?
- იქნება თუ არა აღნიშნული შესაბამისობა ცალსახა; შექცევადი?

თუ მოსწავლეები უკვე დაუფლებულები არიან ფუნქციის ცნებას და კარგად ესმით მისი აზრი, მაშინ დავუსვათ შეკითხვა, არის თუ არა მოცემული შესაბამისობა ფუნქციონალური? აღნიშნულ კითხვაზე სრულყოფილი პასუხი მოსწავლეებისგან იქნება მასწავლებლისთვის კიდევ ერთი ტესტი, თუ როგორ აითვისეს მათ ფუნქცია. შევთავაზოთ მოსწავლეებს, რომ მოიფიქრონ ჩანაწერი, თუ როგორ ჩაწერენ მოყვანილ მსჯელობას. სავარაუდო პასუხები შეიძლება ზევრნაირი იყოს:

$n \to \frac{n(n-3)}{2}$; $\quad f(n) = \frac{n(n-3)}{2}$; $\quad f_n = \frac{n(n-3)}{2}$; $\quad d_n = \frac{n(n-3)}{2}$;

ძალიან მნიშვნელოვანია, თუ მოსწავლეები დაასახელებენ მოცემული ასახვის განსაზღვრის არესა და მნიშვნელობათა სიმრავლეს. აღმოაჩენენ თუ არა რაიმე კანონზომიერებას მნიშვნელობათა სიმრავლის ელემენტებს შორის.

ზევრი მაგალითის მოყვანა შეიძლება აღნიშნულ საკითხთან დაკავშირებით, თუმცა გვინდა შემოვიფარგლოთ იმ იდეით, რომ მასწავლებელმა რა საკითხზე უნდა გაამახვილოს ყურადღება და რომ მასწავლებლის მზაობა უნდა იყოს მაღალი ხარისხის. ამოცანათა რაოდენობრივ სიმრავლეს ზევრ წიგნში შეიძლება შევხვდეთ სასკოლო თუ დამატებით ლიტერატურაში, რაც მასწავლებელს გაუადვილებს საგაკვეთილო პროცესის წარმართვას. არაა გამორიცხული, მასწავლებელმა საკუთარი ფანტაზიით მოიყვანოს მაგალითები და რაც ყველაზე მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია, მოსწავლეებს მოსთხოვოს ფანტაზიის მოხმობა გაკვეთილზე, თვითონ მოიფიქრონ ამოცანები. ჩვენი აზრით, მოსწავლე, რომელიც შეადგენს კორექტულ ამოცანას, ე.ი. სრულყოფილად დაეუფლა კიდეც საკითხის არსს.

არ შეიძლება მხედველობიდან გამოგვრჩეს ალბათობის თეორიის საკითხების განხილვა ფუნქციის კონტექსტში. მართალია, მოსწავლეთათვის "ცოტა უცნაური" აღმოჩნდება ალბათობა, როგორც ფუნქცია, თუ მასწავლებელი ყურადღებას გაამახვილებს იმ გარემოებზე, რომ რიცხვითი ფუნქციების გარდა არსებობს ფუნქციების სხვა (რომლებსაც ეხებიან ძირითადად მოსწავლეები) სახეობებიც და ყურაღდებას გაამახვილებენ იმ გარემოებაზე, რომ ხდომილობის შესაბამისობა [0; 1] სიმრავლესთან ფუნქციონალურია, მაშინ ცხადი გახდება საკითხის არსი.

ჩანაწერში

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

მოსწავლეებს მოვთხოვოთ გამოყონ განსაზღვრის არე (ხდომილობათა სივრცე) და მნიშვნელობათა სიმრავლე [0; 1] სეგმენტი და უფრო მეტი სიცხადისთვის მოვიშველიებთ მოსწავლეთათვის ყველაზე ცნობილ ჩანაწერს $f(x) = y$, მაშინ უფრო ცხადი გახდება ყველაფერი

$$f\ : A \to [0; 1]$$

$$P\ :\ A \to [0; 1]$$

კარგი იქნება, თუ შევეხებით შექცევადობის საკითხს. მოვიყვანოთ კლასიკური მაგალითი ერთი კამათლის გაგორების შესახებ. რამდენიმე ხდომილობის ალბათობის გამოთვლის შემდეგ კი დავუსვათ საკითხი იმის შესახებ, არის თუ არა ფუნქცია შექცევადი. საინტერესო იქნება, შეუძლიათ თუ არა ააგონ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აღნიშნული ფუნქციის "გრაფიკი". ასევე, ფუნქციათა თვისებების შესახებ საუბრისას მოსწავლეები დარწმუნდებიან, რომ არ უნდა "შემოიფარგლონ" მხოლოდ რიცხვითი ფუნქციებით და შესაბამისად, მათი თვალსაწიერიც გაფართოვდება. გახდებიან უფრო კრიტიკულები, შემოქმედებითები და "ეჭვის თვალით" დაუწყებენ ყურებას ახალ საკითხს. აღარაფერს დავწერთ ლოგიკურ ფუნქციებზე, რომლებიც გამონათქვამებს შეუსაბამებენ რიცხვებს 0-ს ან 1-ს და რაოდენ დიდი მნიშვნელობა აქვს მათ თანამედროვე მათემატიკაში და მათემატიკის გამოყენებებში. ვფიქრობთ, აღნიშნულზე საუბარი საკმაოდ შორს წაგვიყვანს და შესაბამისად, მხოლოდ რეპლიკით შემოვიფარგლებით.

§2.9. ასახვათა შექცევადობის საკითხი

რადგანაც ჩვენი საუბარი შეეხო ისეთ ფუნქციებს, რომლებსაც რიცხვით ფუნქციას ვეღარ ვუწოდებთ (რამეთუ მოსწავლეებმაც უნდა იცოდნენ, რომ რიცხვითი ფუნქცია ისეთია ფუნქციებს შორის, რომელსაც განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე აქვს რიცხვითი სიმრავლე). ამიტომ გვინდა შევეხოთ ასახვის კერძო სახეს, რომელსაც მათემატიკაში გეომეტრიული გარდაქმნებად მოიხსენიებენ. სანამ აღნიშნულ საკითხს განვიხილავდეთ, დავძენთ, რომ ვილენკინი განიხილავს ასახვის ოთხ ტიპს: 1. რიცხვითი სიმრავლის ასახვას რიცხვით სიმრავლეზე; 2. რიცხვითი სიმრავლის ასახვას წერტილოვან სიმრავლეზე, მაგ, საკოორდინატო სიბრტყის მაგალითი; 3. წერტილოვანი სიმრავლეების ასახვას რიცხვით სიმრავლეზე, მაგ.

გეომეტრიული ფიგურა → ზომა; 4. წერტილოვანი სიმრავლის ასხვას წერტილოვან სიმრავლეზე, რაც გეომეტრიული გარდაქმნებია [Виленкин, 1980]. ასევე, გვინდა რამდენიმე სიტყვით შემოვიფარგლოთ შექცეული ფუნქციის შესახებ გეომეტრიული გარდაქმნების სწავლებისას და არამარტო აქ, შექცეული ფუნქციის ცნება დიდ როლს თამაშობს. შესაბამისად, იგი მოსწავლეთათვის კარგად გააზრებულ საკითხად უნდა ვაქციოთ. ჩვენ არ შევუდგებით იმის განხილვას, თუ როდის, რა დოზით ან როგორ უნდა შემოვიდეს მათემატიკაში აღნიშნული საკითხი, ერთს კი დავამატებთ, რომ მოსწავლეთათვის ყველაზე ძნელად აღსაქმელი აღმოჩნდება ხოლმე. ძალიან ბევრი მაგალითია საჭირო იმისათვის, რომ დავადგენინოთ მოსწავლეებს, თუ რომელი ფუნქციაა შექცევადი და განსაზღვრის მთელ არეზე შექცევადი, თუ განსაზღვრის არის შეზღუდვაზე. როდესაც მაგალითები მოგვყავს სიმრავლეთა შორის შესაბამისობით (ისრებით) ან ცხრილის სახით, მაშინ ძალიან უადვილდებათ მოსწავლეებს აღქმა, თუ რატომ გააჩნია ან არ გააჩნია შექცეული ფუნქცია თავდაპირველს, იმასაც კარგად იაზრებენ, რომ გარკვეული პირობების შესრულებაა საჭირო, რათა ფუნქციას გააჩნდეს შექცეული ფუნქცია. საშუალო საფეხურზე შემოდის ცნებები ინექცია, სურექცია, ბიექცია. აღნიშნული ტერმინოლოგიის გამოყენებით ცოტა უძნელდებათ მოსწავლეებს ოპერირება, ხშირ შემთხვევაში კი მასწავლებელთა უმეტესობა საერთო არ ასწავლის აღნიშნულ საკითხს. ფუნქციის ახსნისადმი სიმრავლური მიდგომა აიოლებს შექციული ფუნქციის იდეის ახსნას. მხედველობაში გვაქვს ფუნქციის წყვილებით მოცემა. თუმცა საკითხში სრულად გასარკვევად ესეც არ კმარა. გარკვეული რაოდენობის ამოცანის ამოხსნის შემდგომ მოსწავლეები ხვდებიან, რომ თავდაპირველი ფუნქცია და მისი შექცეული ფუნქცია "ცვლიან" განსაზღვრისა არესა და მნიშვნელობათა სიმრავლეს. აღნიშნული ფაქტის თვალსაჩინო მაგალითია მაჩვენებელნი და ლოგარითმული ფუნქციები. სხვათაშორის, ლოგართმული ფუნქციის შემოტანა მათემატიკის სასკოლო კურსში ხდება როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. მოსწავლეებისათვის ასევე აუცილებელია გაერკვნენ ტერმინ ურთიერთცალსახა ასახვაში.

რადგანაც გეომეტრიულ გარდაქმნებს შევეხეთ, გვინდა ერთი ამოცანა განვიხილოთ, რომელიც საკმაოდ პრობლემურია ხოლმე მოსწავლეთათვის. ამოცანა

აღებულია ეეგ 2017 წლის მათემატიკის გამოცდის ტესტიდან. „საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული წრფის განტოლებაა $y = 3x - 5$. ეს წრფე $\vec{p}$ (6; -2) ვექტორით განსზღვრულ პარალელურ გადატანას გადაჰყავს წრფეში, რომლის განტოლებაა:

ა) $y = 3x - 25$. ბ) $y = 3x + 25$. გ) $y = 3x + 15$. დ) $y = 3x - 15$.“

მოსწავლეთა დიდი ნაწილი ამოცანას ხსნის შემდეგნაირად:

$y - 2 = 3(x + 6) - 5$, საიდანაც $y = 3x + 15$. ისინი აღნიშნულ პასუხს პოულობენ სავარაუდოთა ჩამონათვალში და სიმართლე ჰგონიათ. ზოგიერთი მოსწავლე იოლ გამოსავალს პოულობს და შემდეგნაირად იქცევა: პოულობს ნებისმიერ ორ წერტილს, რომელიც თავდაპირველ ფუნქციას ეკუთვნის, მაგალითად $(0; -5)$ და $(2; 1)$, შემდგომ კი თითოეული წერტილი „გადააქვს პარალელურად“ $(0 + 6; -5 - 2)$ და $(2 + 6; 1 - 2)$, ანუ $(0; -5) \rightarrow (6; -7)$ და $(2; 1) \rightarrow (8; -1)$, ამ ყველაფრის შემდგომ კი წერს $(6; -7)$ და $(8; -1)$ წერტილებზე გამავალ წრფის განტოლებას $y = 3x - 25$. რამეთუ „თუ წრფე გადადის პარალელურად, ე.ი. მისი ყველა წერტილი გადადის პარალელურად...“. ვფიქრობთ, კრეატიული გადაწყვეტაა ამოცანის, აქ კარგად ჩანს მოსწავლეთა მათემატიკური აზროვნება, მათემატიკური ხედვა. ბევრი რამის სწავლაა შესაძლებელი მათგან, ხშირად ისეთ გზას გვთავაზობენ, რომლებზეც არც კი გვიფიქრია იმიტომ, რომ კარგად ვიცით ასეთი ამოცანების ამოხსნების სტანდარტული გზები. ასე მაგალითად, $y' = y - 2$ და $x' = x + 6$, საიდანაც $y = y' + 2$ და $x = x' - 6$, რომელთა ჩასმითაც თავდაპირველ განტოლებაში, მივიღებთ $y' + 2 = 3\,(x' - 6) - 5$

$y' = 3\,x' - 18 - 5 - 2$ ანუ $y' = 3\,x' - 25$ და „რატომღაც“ ისევ ვწერთ, რომ ახალი ფუნქციაა $y = 3x - 25$. მოსწავლეთათვის ცოტა გაურკვეველი რჩება $x' -$ ისა და $y' -$ ის რაობა. არ ვდავობთ იმაზე, რომ მასწვლებლის მონდომება და ხელოვნება ამ ყველა ნიუანსის ახსნაში მნიშვნელოვანია, თუმცა მოსწავლეთა ამოხსნის გზა უფრო მეტი სილამაზის შემცველია, ვიდრე სტანდარტული გზები. აღნიშნული ტიპის ამოცანაც საგაკვეთილო პროცესში კარგა მასალაა, რათა მასწავლებელმა პრობლემაზე ორიენტირებული გაკვეთილი ჩაატაროს და მოსწავლე მხოლოდ პასიური მსმენელის როლში არ მოგვევლინოს გაკვეთილზე. მათ თუნდაც შეცდომები დაუშვან ამოხსნისას, მაინც ბევრად მეტის მომცემი იქნება, ვიდრე

მასწავლებლის მიერ მოწოდებული ალგორითმი. როგორც ფ. კლაინი იტყოდა: „მათემატიკის სწავლება სკოლაში, ხატოვნად რომ ვთქვათ, უნდა იყოს ფსიქოლოგიური და არა სისტემატიკური. მასწავლებელს ერთგვარი დიპლომატობაც მოეთხოვება: მან ანგარიში უნდა გაუწიოს მოსწავლის სულიერ სწრაფვას და შეძლოს, მოზარდში ინტერესის გაღვივება, ამას კი მხოლოდ მაშინ მიაღწევს, თუ საკითხებს თვალსაჩინო, მისაწვდომი ფორმით გადმოსცემს. მხოლოდ ზედა კლასებშია შესაძლებელი მასალის უფრო აბსტრაქტული გადმოცემაც“.

სხვათაშორის, თანამედროვე ლიტერატურაში ურთიერთცალსახა ასახვის მაგიერ იყენებენ ტერმინებს შექცევადი ასახვა ან შექცევადი ფუნქცია, და ტერმინების „ინექცია“ , „სიურექცია“ და „ბიქცია“–ს გამოყენების მაგიერ ორ სიმრავლეს შესაბამისობას შორის „ში“ და „ზე“ სუფიქსების სწორ გამოყენებით უფრო ადვილად შეიძლება არსში გარკვევა [კოლმოგოროვი, 1987], თანაც ტერმინები მშობლიურ ენაზეა და ეს კიდევ უფრო გაადვილებს გაგებას.

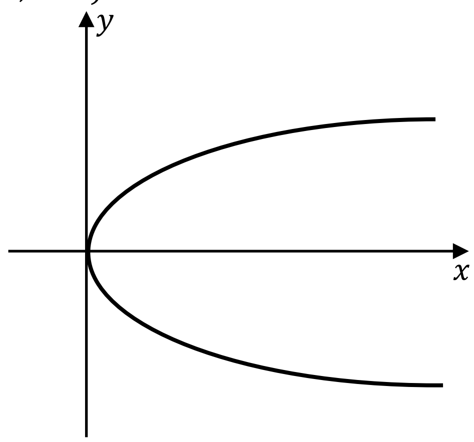
- A სიმრავლის B–ზე ასახვას „სიურექცია“
- შექცევადი ასახვა A სიმრავლისა B–ში არის „ინექცია“
- შექცევადი ასახვა A სიმრავლის B–ზე არის „ბიექცია“

პრაქტიკაში ხშირად შემხვედრია სიტუაცია გაკვეთილზე, როდესაც მოსწავლეები ყველანაირი შეზღუდვების გარეშე ამბობენ, რომ $f(x) = x^2$– ის შექცეული ფუნქციაა $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ანდა $f(x) = sinx$–ის შექცეული ფუნქცია $f(x) = arcsinx$. რა თქმა უნდა, კიდევ ბევრი მაგალითის მოყვანა შეიძლება აღნიშნულთან დაკავშირებით. მასწავლებლის მხრიდან დიდ ძალისხმევას მოითხოვს აღნიშნული საკითხის გააზრებულად შესწავლა და გამოყენება. სასკოლო სახელმძღვანელოებში მრავლადაა განხილული მაგალითები, თუ როგორ შეისწავლიან შექცეულ ფუნქციას. თუმცა, ხშირ შემთხვევაში, არცერთი მაგალითი არ იქნება შედეგის მომტანი, თუ მასწავლებელი არ ფლობს საგნობრივ თუ მეთოდიკურ ცოდნას აღნიშნულთან დაკავშირებით. ასევე, მასწავლებელი უნდა ფლობდეს კითხვის დასმის, ტერმინზე ყურადღების გამახვილების, შეცდომებზე სწავლების ისეთ ტექნიკებს და შეიძლება ითქვას, თეატრალურ ნიჭსაც, რათა მოსწავლე აზიაროს ჭეშმარიტებას და “ყურმოკრული” ცოდნით არ გაუშვას განათლების შემდგომ ეტაპზე. კარგი იქნება

ყურადღება გაამახვილოს მასწავლებელმა ზემოთ მოყვანილ და მათ მსგავს ამოცანებზე და თუნდაც გრაფიკული წარმოდგენის საშუალებით მიახვედრებს, რომ $f(x) = x^2$–ის შექცეულს ვერაფრით ვერ ექნება შემდეგი სახე: (ნახ 17).

შესაბამისად $f(x) = x^2$ დროს $f\colon R \to [0;\ +\infty)$, ხოლო შექცეული ფუნქციას აქვს სახე $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

ანუ $f\colon [0;\ +\infty) \to [0;\ +\infty)$



ნახ. 17

ე.ი. განსაზღვრის არემ და მნიშვნელობათა სიმრავლემ “ვერ გაცვალეს” ადგილები. მოსწავლეები მიხვდებიან, რომ კვადრატული $f(x) = x^2$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული $[0;\ +\infty)$ შუალედზე და არა მთელ განსაზღვრის არეზე.

ასევე $f(x) = sinx$ $f\colon R \to [-1;\ 1]$

თუმცა $f^{-1}(x) = arcsinx$ $f\colon [-1;\ 1] \to [-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$

ანალოგიურად იმსჯელებენ მოსწავლეები მოცემულ მაგალითშიც. აქვე გვინდა აღვნიშნოთ, რომ შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები არ შედის მათემატიკის სტანდარტში, თუმცა საინტერესო იქნებოდა მისი შემოტანა ფაკულტატურ მეცადინეობაზე ან ისეთ კლასში, სადაც მოსწავლეთა მზობა იქნება. აღნიშნული ფუნქციის არსებობა ელემენტარული ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნიდან შეგვიძლია გამოვაყვანინოთ $sinx = m$, როდესაც $m \in [-1;\ 1]$ და $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ შუალედში არსებობს ერთადერთი რიცხვი, რომლის სინუსიც m–ის ტოლია და აღვნიშნავთ $arcsin\, m$-ით. გარდა ამისა, გასათვალისწინებელია ფუნქციის თვისებების ცოდნაც, რათა ბოლომდე გაიაზრონ იგი. აუცილებელია იმის ცოდნა, რომ აღნიშნულ შუალედზე ფუნქცია ზრდადია და განსაზღვრის არის ერთ წერტილში მხოლოდ ერთ

მნიშვნელობას მიიღებს. ძალიან კარგი იქნება, თუ მოსწავლეები მაგალითების საშუალებით გაიაზრებენ, რომ ყოველი ზრდადი ან კლებადი ფუნქცია შექცევადია და ზრადი ფუნქციის შექცეული ზრდადია, ხოლო კლებადის შექცეული კლებადია. ეს თვისებები სასკოლო მათემატიკაში, განსაკუთრებით საშუალო საფეხურზე, მოსწავლებს ბევრი საკითხის უკეთ გააზრებაში ეხმარებათ.

ყურადღება გვინდა გავამახვილოთ ერთ–ერთი ფუნქციის შექცეული ფუნქციის მოძებნის შესახებ მაგალითზე:

დავუშვათ, მოცემულია $f(x) = \frac{2x-3}{7}$ ფუნქცია და გვსურს ვიპოვოთ მისი შექცეული ფუნქცია. მოსწავლეებს ვთხოვთ ხოლმე იმის გათვალისწინებით, რომ $y = f(x)$ აღნიშნული ფუნქცია ჩავწეროთ შემდეგნაირად $y = \frac{2x-3}{7}$ და ამის შემდეგ x ცვლადი გამოვსახოთ y ცვლადით. მივიღებთ

$$(7y = 2x - 3) \Leftrightarrow (x = \frac{7y-3}{2})$$

და ამ ყველაფრის შემდეგ “რატომღაც” x და y ცვლადები “ცვლიან” ადგილებს და $y = \frac{7x+3}{2}$ და შემოგვაქვს აღნიშვნა, რომ $f^{-1}(x)$ და მოსწავლეებს ვეუბნებით, რომ $f^{-1}(x) = \frac{7x+3}{2}$.

მოსწავლეებში $f(x)$– ის y–ით შეცვლა და შემდგომ აღნიშნული გარემოება დაბნეულობას იწვევს და შესაბამისად, აღარ შევჩერდებით ამ საკითხზე, თუ რა თვისებების მატარებელი უნდა იყოს მასწავლებელი, რათა დაარწმუნოს მოსწავლე ჩანაწერის სამართლიანობაში, რომ მექანიკურად არ მოუწიოს მოსწავლეს დასწავლა. ხშირად ასეთი გარემოებები იქცევა ხოლმე მოსწავლეებისათვის დამაბრკოლებელ მიზეზებად, რათა მათემატიკა აღიქვან, როგორც ფორმულითა და წესთა “მოჯადოებულ წრედ” და მიანებონ კიდეც თავი მათემატიკის სერიოზულ შესწავლას. მიუხედავად იმისა, რომ მასწავლებელს შეუძლია სამართლიანობაში დაარწმუნოს ცვლადის კონკრეტული მნიშვნელობების ჩასმითაც. „ცნებების თანდათანობით განვითარება და უნარი, - არ დაუშვა, რომ ზოგადი წესების ზეპირად შესწავლამ, აგრეთვე მექანიკურმა გამოთვლებმა შეცვალონ მსჯელობანი - არის სწავლების ხელოვნება და მისი წარმატების საწინდარი“ - ნ. ლობაჩევსკი.

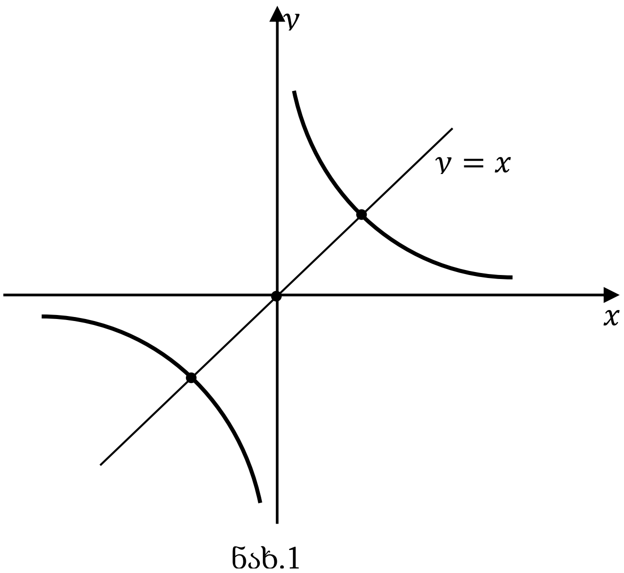
უკვე მოყვანილი მაგალითიდან კიდევ ერთი პრობლემა იკვეთება ხოლმე, მოსწავლეებს კარგად ახსოვთ, რომ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ფორმულა, შესაბამისად, ზოგიერთ მოსწავლეს ასოციაციურად ჰგონია, რომ $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$. რა თქმა უნდა, ისევ მასწავლებლის მზაობაა საჭირო, რომ აღნიშნულ გარემოებას გაუმკლავდეს, თუნდაც უკვე მოყვანილი მაგალითი გამოდგება კონტრმაგალითად, რათა დავრწმუნდეთ შემდეგში:

$\frac{1}{f(x)} = \frac{7}{2x-3}$; $f^{-1}(x) = \frac{7x+3}{2}$

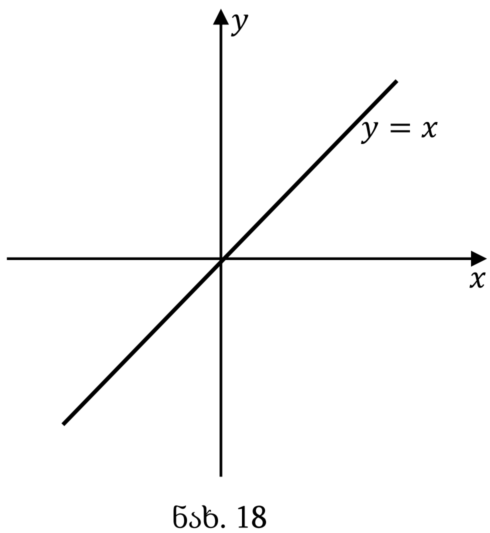
შესაბამისად

$$\frac{1}{f(x)} \neq f^{-1}(x)$$

საინტერესოა, თუ მოსწავლეები საშუალო საფეხურზე დასვამენ საკითხს მაგ. დირიხლეს ფუნქციის შექცევადობის შესახებ. ძალიან საინტერესოა იმის ჩვენება მოსწავლეთათვის, თუ რატომაა ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიული $y = x$ წრფის მიმართ. ასევე, კარგი იქნება, თუ მოსწავლეები წამოაყენებენ საკითხს, ისეთი ფუნქციის შექცეული ფუნქციის შესახებ, რომელით თავდაპირველის ტოლია ანუ $f^{-1}(x) = f(x)$. თუ მოსწავლეებისგან არ იქნება ინიციატივა, მაშინ მასწავლებელმა უნდა დასვას აღნიშნული შეკითხვა და მოსწავლეებს მოსთხოვოს გააზრება – როგორც დ. პოია იტყოდა, „მასწავლებლის მთავარი საზრუნავი ისაა, რომ ახალგაზრდობას ასწავლოს ფიქრი". დასმული საკითხის განხილვისათვის გამოდგება ცნობილი მარტივი მაგალითები, $f(x) = x$ და $f(x) = \frac{1}{x}$; აღნიშნული ფუნქციების გრაფიკების აგებით, მოსწავლეები თვალნათლივ დარწმუნდებიან და მეტ სიცხადეს შესძენენ ნასწავლს.



ნახ.1



ნახ. 18

არ დაგავიწყდეს ის გარემოებაც, რომ ძალიან ბევრი პრაქტიკული ამოცანა ითხოვს შექცეული ფუნქციის კარგად გააზრებას. ერთ–ერთი გახლავთ კრიპტოგრაფია, რომლის ელემენტები შეისწავლება საშუალო საფეხურზე და საბაზო საფეხურის IX კლასში. ელემენტარული ამოცანის ამოხსნაც კი, რომელიც კრიპტოგრაფიაში შეიძლება შეგვხვდეს, სულ მცირე, საჭიროებს წრფივი ფუნქციის შექცევადობის საკითხს.

რა თქმა უნდა, ჩვენ არ დავიწყებთ კრიპტოგრაფიის საკითხების განხილვას, თუმცა აღნიშვნის ღირსია ის გარემოებაც, რომ 2019/2020 სასწავლო წლიდან ამოქმედდება საბაზო სკოლის ახალი ეროვნული სასწავლო გეგმა, სადაც არჩევით საგნად შეტანილია „კოდირება“ – სპეციალური მითითებით, რომ ეს საგანი უნდა ისწავლებოდეს მხოლოდ IX კლასში. ცხადია, VIII კლასის ბოლოს მაინც სრულყოფილად უნდა ფლობდეს მოსწავლე შექცეული ფუნქციის შესახებ ძირითად იდეებს. ზოგადად, მიგვაჩნია, რომ აღნიშნული საკითხის გამოყოფა და სწავლება ცალკე კურსად არაა მიზანშეწონილი, რამეთუ იგი მთლიანად მათემატიკის შესწავლის საგანია და დღევანდელ მათემატიკის გრიფირებულ სახელმძღვანელოებში საკმაო რაოდენობით ეთმობა დრო მის შესწავლას IX-XII კლასებში.

განხილული თემის სიძნელის გამო, ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე თითქმის არ გვხვდება ამოცანები შექცევად ფუნქციებზე, თუმცა მრავლადაა აღნიშნული ამოცანები მათემატიკის მასწავლებელთა კომპეტენციის დასადასტურებელ ტესტში. ასეც რომ არ იყოს, ფუნქციათა შექცევადობა აუცილებელი საკითხია ელემენტური მათემატიკის კურსში და მისი განხილვის გარეშე უფრო მეტი „ბუნდოვანება“ იქნებოდა სასკოლო მათემატიკაში.

§2.10. გრაფიკული აზროვნების განვითარება მოსწავლეებში

დავუბრუნდეთ უკვე ნახსენებ საკითხს გეომეტრიული გარდაქმნების შესახებ. სასკოლო მათემატიკის სიმრავლურ გადმოცემაზე დაფუძნებამ საშუალება მისცა მათემატიკოსებს ერთიანი იდეა გაეტარებინათ იმის თაობაზე, რომ ერთი შეხედვით განსხვავებული მიმართულებები მათემატიკაში, ერთიანი თვალთახედვით გადმოეცათ! რა თქმა უნდა, ამის საშუალებად იქცა ასახვის ცნება. ასახვის და ფუნქციის ცნება გახდა სხვადასხვა მეცნიერების მათემატიკასთან დამაკავშირებელი საუკეთესო საშუალება, რომ აღარაფერი ვთქვათ თვითონ მათემატიკის შიგნით მიმართულებების ერთი თვალთახედვით აღქმაზე. გეომეტრიული გარდაქმნები ასახვის კერძო სახეა, შესაბამისად წერტილთა სიმრავლედ აღიქმება სიბრტყე ანუ სიბრტყის თავის თავზე შექცევად ასახვას ვუწოდებთ გეომეტრიული გარდაქმნას. სკოლის სახელმძღვანელოებში, ეროვნული სასწავლო გეგმით გათვალისწინებულია გეომეტრიული გარდაქმნებიდან ცენტრული და ღერძული სიმეტრიების შესწავლა, ასევე პარალელური გადატანა, ჰომოეტია, მობრუნება. მოსწავლეთათვის ძნელად აღსაქმელია ტერმინი „სიბრტყის თავის თავზე ასახვა“, რაც მასწავლებლისთვის ყურადსაღები უნდა გახდეს, „სიბრტყე“ მათემატიკაში განუმარტავ ცნებად გვაქვს შემოტანილი და ასეთი განუმარტავი ცნების შესახებ საუბრისას, მეორე ძნელად აღსაქმელი საკითხი, ასახვა და თანაც, შექცევად ასახვაზე საუბარი, რა თქმა უნდა, მოსწავლეთა დაბნეულობას გამოიწვევს. განსაკუთრებით კითხვის ნიშნის ქვეშ დგება ისეთი საკითხის სწავლება, როდესაც მობრუნების ან ჰომოთეტიის სწავლებისას „ერთი წერტილი“ უძრავად რჩება და სიბრტყე აისახება თავის თავში. აქვე, გვინდა ვისაუბროთ ფუნქციათა გრაფიკების გარდაქმნების შესახებ. თუ გავიხსენებთ რას ეწოდება ფუნქციის გრაფიკი, მაშინ ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნა შეგვიძლია ვუწოდოთ რიცხვითი სიბრტყის ასახვას თავის თავზე. სასკოლო გრიფირებული სახელმძღვანელოების ანალიზის საფუძველზე დაყრდნობით შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ აღნიშნული საკითხების შესწავლა ძალიან შრომატევადია და ძნელია, თანაც გაკვეთილების იმ რაოდენობის შემთხვევაში, რომელიც გათვალისწინებულია ესგ–თი, ხოლო ამ საკითხების არ შესწავლა გამოიწვევს მათემატიკის მიმართულებების ერთ წიგნად აკინძვის მექანიკურ მცდელობას. ბევრი

მათემატიკოსი დღესაც ეწინააღმდეგება ალგებრისა და გეომეტრიის „შეერთებას" და ითხოვს ისევ ცალკე საგნებად სწავლებას. თანაც, გეომეტრიის ისევ აქსიომატურ მეთოდზე აგებას. აქ ამას არ შევეხებოდით, რომ არა ფუნქცია, რომელიც აერთიანებს მათემატიკის მიმართულებებს, ლიაპუნოვი გვთავაზობს, რომ ელემენტარული ალგებრის საწყისები აქსიომატური მეთოდით ყოფილიყო გადმოცემული, რასაც ეთანხმებიან ბრონშტეინი და ლიპშიცი, თუმცა ბევრი მათემატიკოსის აზრით აქსიომატური მეთოდი „ბრწყინვალეა პროფესიონალი მათემატიკოსებისათვის, თუმცა პედაგოგიური თვალსაზრისით არსად არ გამოგვადგება" – ფრეშე. [Фридман, 2014]. აქსიომატური მეთოდით მათემატიკის აგება, ეს გამოცდილების შედეგია და სანამ გამოცდილება და ცოდნა არ გროვდება, იქ ძნელია აღნიშნული მეთოდის ეფექტიანი გამოყენება. ძალიან მნიშვნელოვანია ფუნქციის გრაფიკების გარდაქმნების და გეომეტრიული გარდაქმნების შესწავლისას, შევეხოთ თვალსაჩინოებას მათემატიკაში. თვალსაჩინოების მეთოდი, რომელიც ასეთი აუცილებელია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის დაწყებით საფეხურზე, რა თქმა უნდა, თავის დიდ მნიშვნელობას არ კარგავს საბაზო და საშუალო საფეხურებზე, თანაც, როდესაც ვსაუბრობთ ისეთ თემაზე, რომელიც ფუნქციებს ეხება და თანაც იმ საგაკვეთილო დატვირთვის ფარგლებში, რომელიც გამოყოფილია მათემატიკის სწავლებისათვის. ა. კოლმოგოროვი თვალსაჩინოებაზე საუბრობს თავის ნარკვევში „ყველგან, სადაც შესაძლოა, მათემატიკოსები ცდილობენ შესასწავლი პრობლემა გახადონ გეომეტრიულად თვალსაჩინო. საშუალო სკოლაში აშკარად ჩანს, თუ რამდენად სასარგებლოა გრაფიკები ფუნქციის თვისებების შესასწავლად. ამიტომ გეომეტრიული წარმოსახვა ან, როგორც ამბობენ, „გეომეტრიული ინტუიცია" დიდ როლს თამაშობს კვლევითი მუშაობისას მათემატიკის ყველა დარგში, ყველაზე განყენებულშიც კი" [ჯინჯიხაძე, 1987. Колмогоров, 1987].

დღევანდელ რეალობაში თვალსაჩინოებას შეგვიძლია მივმართოთ უშუალოდ გაკვეთილზე და ან სახლში შესრულებული მასალებით, თუმცა არსებული რეალობა მეტ–ნაკლებად გვაძლევს საშუალებას საგაკვეთილო პროცესში ჩავრთოთ ტექნიკური საშუალებები და უფრო ოპერატიულად შევძლოთ ასახსნელი მასალის მიწოდება მოსწავლეთათვის, გარდა იმისა, რომ სკოლებს აღნიშნული მეთოდის გამოყენების

საშუალება მეტ–ნაკლებად აქვს, ესგ–თი მოთხოვნილია, რომ აუცილებლად ვიყენებდეთ კიდეც, შესაბამისად თანამედროვე ეპოქაში გვერდს ვერ ავუვლით კომპიუტერის გამოყენებას საგაკვეთილო პროცესში, გვსურს ეს თუ არა, ხელგვეწიფება ეს თუ არა. თანამედროვე ტრენინგპროგრამებში აქტიურად მიეწოდებათ ინფორმაცია მასწავლებლებს სხვადასხვა კომპიუტერულ პროგრამებზე და მათი გამოყენების შესახებ ტარდება მუშაობა. ერთ–ერთ ასეთ პროგრამად აღიარებულია Geogebra (არსებობს მისი ქართული ვარიანტი) და Desmos, ორივე მრავალმხრივი ფუნქციებითაა დატვირთული და ერთ–ერთ კარგ თვალსაჩინო საშუალებას წარმოადგენს მათემატიკის შესწავლის დროს. რა თქმა უნდა, ჩვენ არ მოვყვებით Geogebra–ს მუშაობის შესახებ ან როგორ ააგონ გრაფიკები, თუ სხვა გეომეტრიული ფიგურები აღნიშნულ პროგრამაში, თუმცა დავძენთ ერთსაც, რომ აღნიშნული პროგრამა არ წარმოადგენს ერთადერთ საშუალებას. საკმარისია საძიებო სისტემაში ავკრიფოთ ბრძანება იმის შესახებ, თუ როგორ ავაგოთ ფუნქციათა გრაფიკები ონლაინ რეჟიმში და დიდი რაოდენობით მოგვეცემა შემოთავაზებები.

სწორად დასძენს ვ. გონჩაროვი: „საშუალო სკოლაში ფუნქცია განუყოფელია თავისი გრაფიკული წარმოდგენისაგან“, საგაკვეთილო პროცესში კი ერთი გრაფიკის აგებაც კი ძალიან შრომატევადია, რომ აღარაფერი ვთქვათ გრაფიკების გარდაქმნების სწავლებაზე. ამ დროს „ტექნიკურ საშუალებებს არა მარტო შემეცნებითი–საგანმანათლებლო მნიშვნელობა აქვს, არამედ – დიდი აღმზრდელობითი და განმავითარებელი ფუნქცია ყოველმხრივ განვითარებული პიროვნების ფორმირებაში [ლორთქიფანიძე, 1983]. ჩვენს თემაში ტექნიკური საშუალებები თვალსაჩინოების მეთოდის გამოყენებისათვის საუკეთესო საშუალებას წარმოადგენს. „ამასთანავე ყოველთვის უნდა ვითვალისწინებდეთ იმას, რომ თვალსაჩინოება არ ვაქციოთ თვითმიზნად; თვალსაჩინოებას უნდა მივმართოთ მაშინ, როცა იგი შედარებით მოკლე დროში მოგვცემს მეტ სასწავლო–აღმზრდელობით ეფექტს“ [ლორფქიფანიძე, 1983]. ზუსტად ამ სასწავლო–აღმზრდელობით ეფექტზე ვსაუბრობდით ჩვენ, თანაც მოკლე დროში, რის საშუალებასაც გვაძლევს კომპიუტერი და კომპიუტერული პროგრამები ზოგადად. აქვე მოვიშველიებთ ისევ დ. ლორფქიფანიძის სიტყვებს: „ყოველი დიდაქტიკური მასალა და ხელსაწყო უნდა იყოს მეცნიერულად

გამართული, ზუსტად შეესატყვისებოდეს პროგრამისა და თითოეული ცალკე აღებული გაკვეთილის მასალის შინაარსს, იძლეოდეს საგანსა და მოვლენაში ნათლად, ზუსტად და ადვილად ჩაწვდომის შესაძლებლობას, მაქსიმალური სისწორით ასახავდეს შესატყვის რეალურ სინამდვილეს, უპასუხებდეს მოსწავლეთა განვითარების თავისებურებას, იყოს მიმზიდველი, საინტერესო" [ლორთქიფანიძე, 1983]. ჩვენ მეტს აღარ შევჩერდებით თვალსაჩინოების როლზე მათემატიკის და კერძოდ, ფუნქციების შესწავლის პროცესში მის შესახებ საუბარია დიდაქტიკის ყველა სახელმძღვანელოში და ჯ. ჯინჯიხაძეს თვალსაჩინოების მეთოდზე დიდი ლიტერატურული მიმოხილვა აქვს გაკეთებული ერთ–ერთ მონოგრაფიაში [ჯინჯიხაძე, 1987]. დაინტერესებული მკითხველი შესაძლოა გაეცნოს აღნიშნულ პარაგრაფს. სკოლაში სწავლებისას ტექნიკური საშუალებების გამოყენებაზე ყოველთვის საუბრობდნენ და ალბათ კიდეც ისაუბრებენ მათემატიკოსები, უამრავი სტატია აქვს მიძღვნილი აღნიშნულ საკითხს ჟურნალებში „Математика в школе" და „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში", სადაც მეცნიერი მათემატიკოსები, მეთოდისტები თუ პრაქტიკოსი მასწავლებლები უხვად უზიარებენ საკუთარ გამოცდილებას და აზრს დაინტერესებულ პირებს. ამ საკითხზე საუბარი იმდენად ბევრ წელს ითვლის, რომ ზედმეტიც უნდა იყოს ახლა საუბარი, თუმცა ქართული რეალობა გვაიძულებს ვისაუბროთ. მიუხედავად იმისა, რომ საქართველოს განათლების სამინისტროს მიერ მრავალჯერადად გავრცელებული ინფორმაცისა, რომ თითქმის ყველა სკოლა აღჭურვილია სათანადო რაოდენობის კომპიუტერით, მაინც პრობლემად რჩება მათი გამოყენების ხარისხი. ერთი ან ორი კომპიუტერული ოთახი სკოლის ყველა მასწავლებელს ვერ მისცემს საშუალებას, სათანადო დროს და დანიშნულებით გამოიყენოს ტექნიკური საშუალებები, თუნდაც კაბინეტური სისტემის ამოქმედების და თითოეული კაბინეტის სათანადო აღჭურვითაც კი ძნელი წარმოსადგენია ამ პრობლემის მოგვარება. კომპიუტერი იმდენად შემოიჭრა თითოეულ ახალგაზრდის ცხოვრებაში, რომ ისინი ადვილად უმკლავდებიან პრობლემას ეპოქის მონაპოვარის გამოყენებით, თანამედროვე მასწავლებლები კი საჭიროებენ დახმარებას. რა თქმა უნდა, ეს ყველა მასწავლებელზე არ ითქმის. შესაბამისად, კომპიუტერულ ოთახში ჩატარებული გაკვეთილი, გარდა თვითონ ინფორმაციულ–საკომუნიკაციო

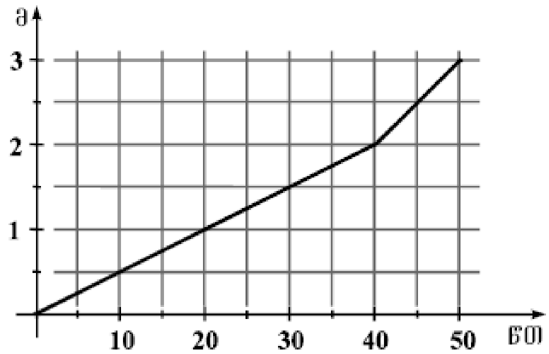
ტექნოლოგიებისა, იშვიათად თუ უნახავს ვინმეს, ან საუკეთესო შემთხვევაში, სკოლაში იშვიათად, მაგრამ მაინც აღმოჩნდებიან ხოლმე მასწავლებლები, რომლებიც აქტიურად იყენებენ ისტ–ს. უბრალოდ, ტექნიკური საშუალების გამოყენებით ჩატარებული გაკვეთილი ძირითადად ე.წ. საჩვენებელი, ღია, სამოდელო გაკვეთილების დროს თუ უნახავთ მოსწავლეებს და სკოლის პერსონალს. საჭიროა სწორად მომზადებული კადრი და თითოეული საკლასო ოთახში სპეციალური აღჭრვილობა, რათა სრულფასოვნად მოხდეს მათი გამოყენება და შესაბამისად, ესგ–ს სტანდარტების შესრულება. დიდი სურვილი იქნებოდა, თუ ამ ყველაფრის შემდგომ, მათემატიკის სახელმძღვანელოების ავტორები ელექტრონული დისკის საშუალებით მასწავლებელს მიაწოდებდნენ დიდაქტიკურ მასალებს შესაბამისი თემის განხილვის ეფექტიანობის ასამაღლებლად. ეს ყველაფერი განათლების სისტემაში ფულადი კაპიტალის დიდ რაოდენობას ითხოვს, რაც, სავარაუდოდ, მომავლის საქმეა.

გრაფიკული აზროვნების გამომუშავება რა თქმა უნდა, ვერ იქნება მხოლოდ ტექნიკური საშუალებების შედეგი. ცხადია, მიზანმიმართულად უნდა ვცდილობდეთ აღნიშნული უნარის გამომუშავებას მოსწავლეებში საკმაო მცირე სასკოლო ასაკიდან. ეს უნარი არ არის მხოლოდ მათემატიკური, ვგულისხმობთ, რომ მხოლოდ მათემატიკის შესწავლის პროცესში არ გამოგვადგება. იგი ზოგადი უნარია, რომლით ოპერირებაც მოუწევს არა მარტო სკოლის მოსწავლეს, არამედ ნებისმიერ ზრდასრულ ადამიანს. გრაფიკების „წაკითხვა“ სწავლების ყველა ეტაპზე მოეთხოვება ადამიანს, ერთიანი ეროვნული გამოცდების ზოგადი უნარ–ჩვევების მათემატიკურ ნაწილში, თვითონ მათემატიკის გამოცდაზე. ასევე, საერთო სამაგისტრო გამოცდებზე და თუ მასწავლებლობა გადაწყვიტა პიროვნებამ, კომპეტენციის დასადასტურებელ ტესტებზეც. ჩვენ აქ აღარ შევჩერდებით ამ უნარის გამოყენებაზე სხვა დისციპლინებში, სადაც სიდიდეებს შორის გრაფიკული დამოკიდებულების გამოსახვა, ჩაწერა და წაკითხვა აუცილებელია, რათა სრულყოფილი წარმოდგენის შესაქმნელად საგანზე მრავალფეროვანი გრაფიკების მოფიქრება ავტორის ხელოვნებაზეა დამოკიდებული, ხოლო მათი საშუალებით სწავლება მათემატიკის მასწავლებლის დიდ ძალისხმევას მოითხოვს. აუცილებელია არა მარტო „გრაფიკების წაკითხვა“ ვასწავლოთ მოსწავლეებს, არამედ თვითონ შექმნან გრაფიკები, უკვე

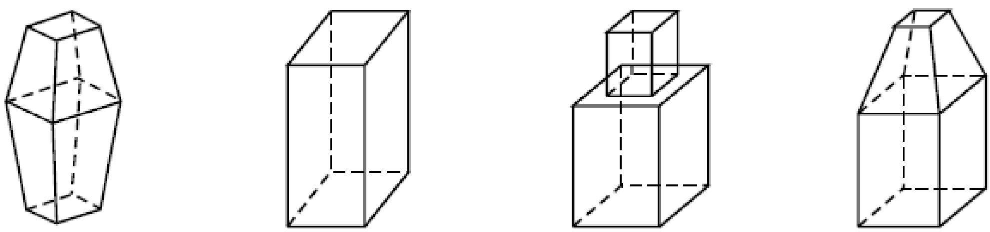
შექმნილი გრაფიკების წაკითხვისას თვითონ დასვან დამატებითი შეკითხვები იმის შესახებ, თუ კიდევ „რისი ამოკითხვაა“ შესაძლებელი გრაფიკიდან იმ ფუნქციების გრაფიკების გარდა, რომელიც სასკოლო მათემატიკის კურსშია შეტანილი, როგორც აუცილებელი საკითხი. შესაძლებელია, ძალიან მარტივად მოვიფიქროთ სხვა ფუნქციების გრაფიკები და ავაგებინოთ მოსწავლეებს, ან აგებულ გრაფიკებს და მოვლენებს შორის დაადგინონ შესაბამისობები.

ძალიან საინტერესოდ გვეჩვენება VII კლასის მათემატიკის სახელმძღვანელო [Муравин Г. К., Муравин К. С., Муравина О. В., 2014] ამ კუთხით, სადაც მოყვანილია ბევრი მაგალითი, რათა მოსწავლეებმა უკეთ გაიაზრონ გრაფიკის იდეა. აღნიშნული სახის ამოცანები მრავლადაა და საერთო სამაგისტრო გამოცდებზე, ასევე მასწავლებელთ სასერტიფიკაციო გამოცდებზე, სადაც „მოვლენის“ გრაფიკის ამოკითხვა ევალება აპლიკანტს. მოვიყვანოთ მაგალითი 2015 წლის I-VI კლასის მათემატიკის მასწავლებელთა კომპეტენციის დასადასტურებელი ტესტიდან:

„ცარიელ ავზს ავსებენ წყლით. ავზში დროის ტოლ შუალედებში ერთი დაიმავე რაოდენობის წყალი ჩაედინება. დიაგრამაზე მოცემული, თუ როგორ იცვლებოდა ავზში წყლის დონე დროის მიხედვით:



შეკითხვა: ავზს ქვემოთ მოცემულთაგან ერთ-ერთი ფიგურის ფორმა აქვს. რომელი ფიგურის ფორმა აქვს ავზს?



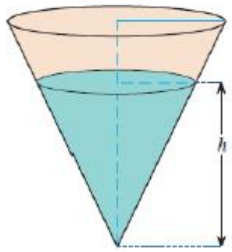
(ა) (ბ) (გ) (დ)

შევაბრუნოთ ამოცანა [საერთო სამაგისტრო გამოცდა, 2018] -

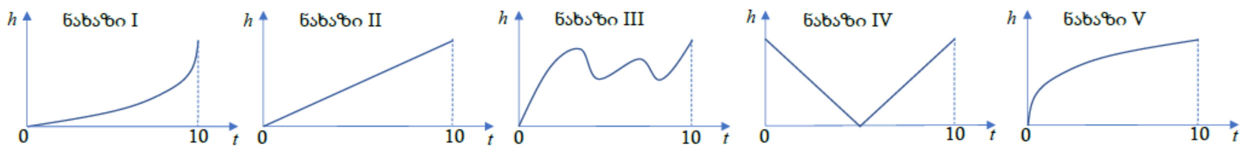
„1-ელ ნახაზზე გამოსახულ კონუსის ფორმის ცარიელ სახანძრო სათლში დროის $t = 0$ მომენტში დაიწყეს წყლის ჩასხმა. წყალი ისხმებოდა თანაბარი სიჩქარით. პროცესი დასრულდა $t = 10$ მომენტში, როდესაც სათლი სრულად აივსო წყლით.

ქვემოთ მოცემული ხუთი - I, II, III, IV, V - ნახაზიდან მხოლოდ ერთზეა გამოსახული ამ პროცესში სათლის წყლის h დონის t დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. რომელია ეს ნახაზი?

ნახაზი 1



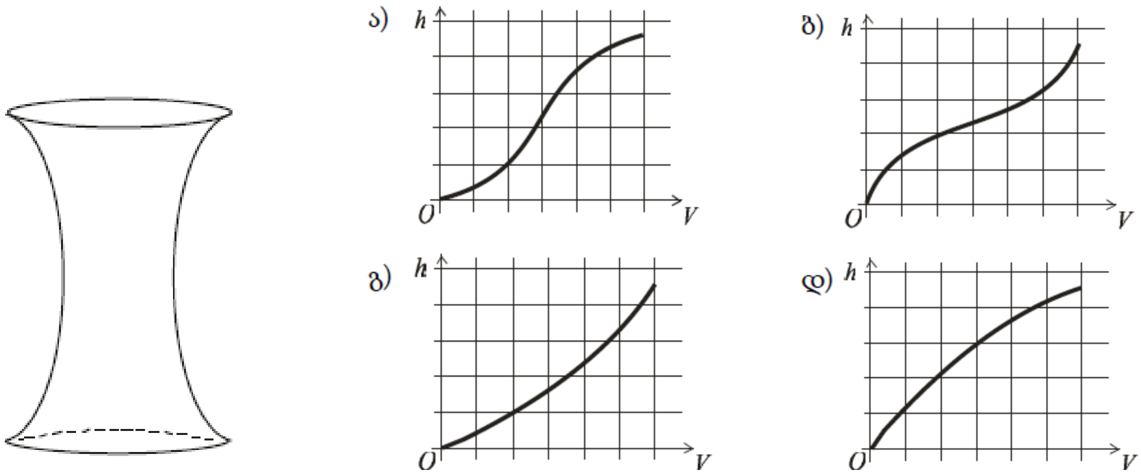
ნახაზი 2



(ა) ნახაზი I (ბ) ნახაზი II (გ) ნახაზი III (დ) ნახაზი IV (ე) ნახაზი V

ანდა 2017 წლის VII-XII კლასის მათემატიკის მასწავლებელთა გამოცდაზე გამოყენებულ ამოცანას:

„სურათზე გამოსახულ ცარიელ ჭურჭელს ავსებენ წყლით. ქვემოთ მოცემული გრაფიკებიდან ერთ-ერთი წარმოადგენს $h = h(V)$ ფუნქციის გრაფიკს, სადაც V აღნიშნავს ჭურჭელში წყლის მოცულობას, ხოლო $h -$ ჭურჭელში წყლის დონეს. რომელია ეს გრაფიკი?

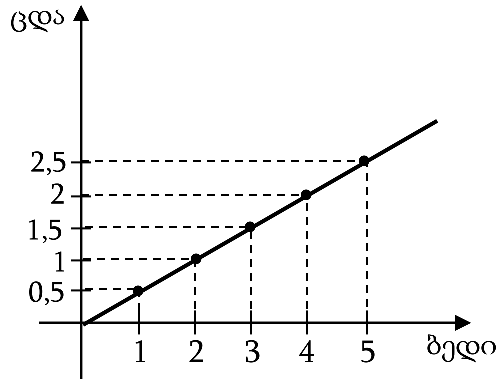


ასეთი სახის ამოცანები ნამდვილად გაამდიდრებდა სასკოლო სახელმძღვანელოებს, უფრო საინტერესოს და მიმზიდველს გახდიდა და რაც მთავარია, მოსწავლეებს ფუნქციის იდეის, მისი გრაფიკის ფუნქციათა თვისებების „უფრო სხვა“ თვალით დანახვას შეუწყობდა ხელს. გრაფიკულად დაინახავდნენ მოსწავლეები, რომ პროცესის უწყვეტობა „გრაფიკის უწყვეტობას“ გამოიწვევდა. გრაფიკული აზროვნების გასავითარებლად მოსწავლეებში ძალიან გამოდგება ისეთი ფუნქციები, რომლებიც ანალიზურად არ არიან მოცემულნი და ეს კიდევ ერთი ფაქტი იქნება იმისა, რომ მოსწავლეები მიეჩვევიან აზრს, რომ ფუნქცია არაა მხოლოდ ფორმულა. ლიტერატურის მიმოხილვისას, ყურადღება გავამახვილეთ სახელმძღვანელოზე [Математика без формул, 1995], სადაც ავტორები ცდილობენ მათემატიკის ფორმულების გარეშე გადმოცემას, ისინი გრაფიკულ აზროვნებაზე დიდ ყურადღებას ამახვილებენ. ჩვენ შევეცადეთ ქართული სიბრძნის მარგალიტებით გვეჩვენებინა, რომ ფუნქცია რამდენად დაკავშირებულია ყოველდღიურ ცხოვრებასთან და ქართული ანდაზების მაგალითზე აგვეგო რამდენიმე გრაფიკი. აღნიშნული გრაფიკების აგება საინტერესო იქნება იმ მოსწავლეებისათვის, რომლებიც გრაფიკთან „ურთიერთობას ამყარებენ“, როცა ფუნქციას მოსწავლეებს ვაცნობთ, როგორც ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულებას. შესაძლოა ჩატარდეს სახალისო გაკვეთილი აღნიშნულ თემაზე, და პროექტის სახითაც მიეცეთ მოსწავლეებს, რათა სხვა მაგალითები მოიყვანონ. „ხშირად შემიმჩნევია, რომ ადამიანები უფრო მეტ გამომგონებლობას თამაშის დროს

ამჟღავნებენ და ამიტომ, მათემატიკური თამაშები ყურადღებას იმსახურებენ არა თავისთავად, არამედ იმიტომ, რომ საზრიანობას ავითარებენ“ - წერს ფ. ლაიბნიცი.

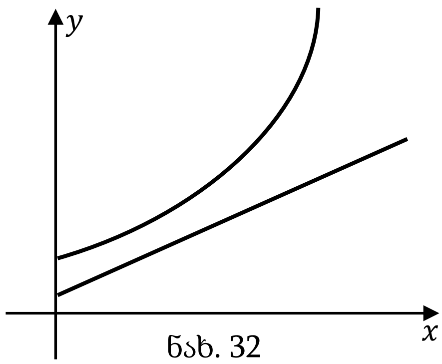
მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი კრებულიდან „ხალხური სიბრძნე - ანდაზები, მახვილსიტყვაობა, გამოცანები“ - ხუთ ტომად, ტ.5, გამომცემლობა ნაკადული, 1965 წ.

- „ცდა ბედის მონახევრეაო“



ნახ. 31

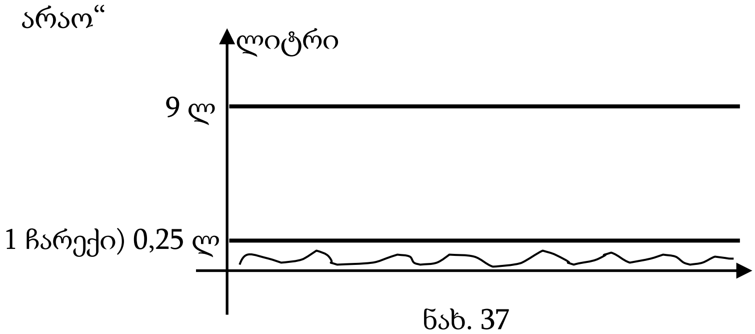
- „სახელის გატეხვას თავის გატეხვა სჯობიაო“ - ორი ფუნქციის „შესადარებლად“.



ნახ. 32

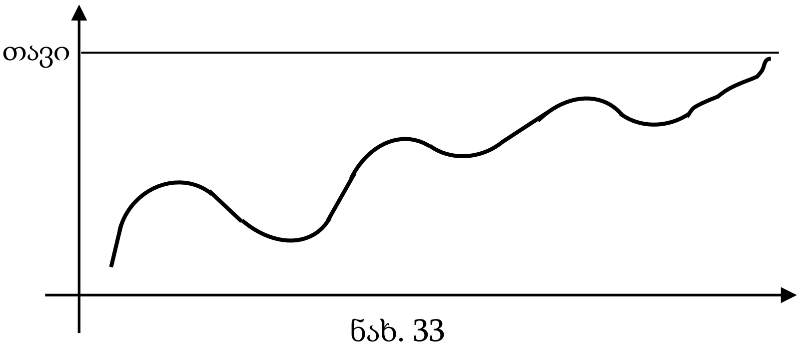
ასევე,

- „დაკარგული ძროხა ცხრა ლიტრს იწველიდა, დაუკარგავი - ერთ ჩარექსაც არაო“



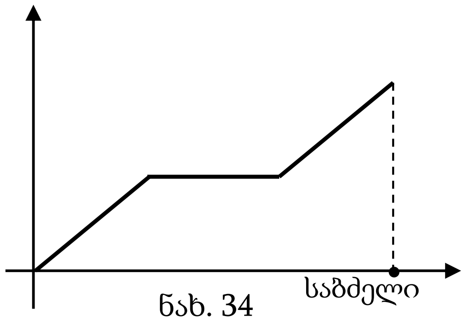
ნახ. 37

- „თავს ზემოთ ძალა არ არისო“ - მნიშვნელობათა სიმრავლეების „დასანახად“



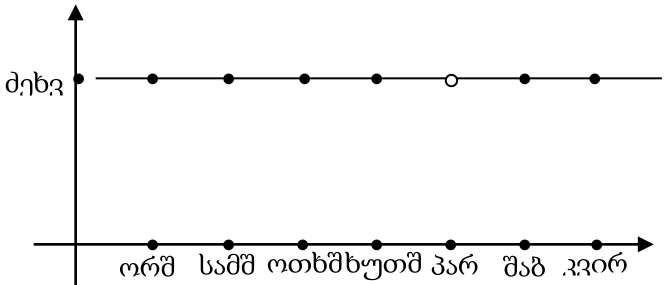
ნახ. 33

- „კატის გაქცევა საზმლამდისო“ - განსაზღვრის არის უკეთ გასააზრებლად



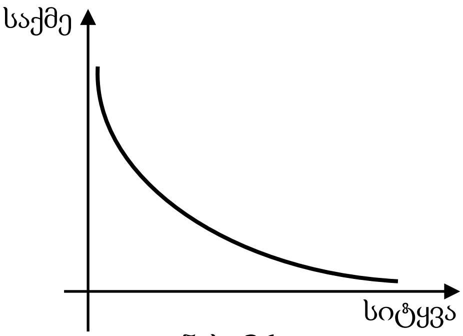
ნახ. 34

- „კატა ვერ შესწვდა მეხვსაო - პარასკევია დღესაო“



ნახ. 35

- „როცა სიტყვა ხშირდებაო, მაშინ საქმე მცირდებაო“



ნახ. 36

ჩაწერა „რამდენიმე ფორმულით“,

- „მდიდარს ერთი ეხარჯება, ღარიბს - ორიო“

$$f(x) = \begin{cases} 1, & თუ\ x\ მდიდარი \\ 2, & თუ\ x\ ღარიბი \end{cases}$$

და ზოგადად, ფუნქციის არსის გასააზრებლად:

- „ერთ მკვდარს ორ საფლავში არ მარხავენო“
- „ერთი ცხვარი ორჯერ არ გატყავდებაო“
- „ერთ ხარს ორი ტყავი არ გასძვრებაო“
- „ერთი ცხვარი ორ ალაგს არ დაიკვლებაო“

აღნიშნული „ლირიკული გადახვევები“ და მცირედი იუმორი გარდა მათემატიკისა ბევრ სხვა საინტერესო საკითხზე დააფიქრებს მოსწავლეებს, გაუფართოვებს თვალსაწიერს, კომპლექსურად შეხედავენ მათემატიკის საკითხებს და გამჭოლ კომპეტენციებს და მკვიდრ წარმოდგენებს ჩამოუყალიბებს. ა. ცუკარი თავის სტატიაში [журнал “математика в школе”, 2000(4)] მე-7 კლასელებს სთავაზობს ძალიან ბევრ საინტერესო გრაფიკს და ეუბნება, რომ იფანტაზიორონ, თუ რა რეალურ პროცესს შეიძლება ასახავდეს ესა თუ ის გრაფიკი. ვფიქრობთ, ჩვენ მიერ შემოთავაზებული სახალისო გაკვეთილიც ეხმიანება აღნიშნულ მოსაზრებას. ეს მცირედი ჩანართიც გვინდა დავამთავროთ უოლტ დისნეის სიტყვებით: „დისნეილენდი არასდროს იქნება დასრულებული, ის გაიზრდება, სანამ სამყაროში იარსებებს ფანტაზია“ - რას მოუხდება ეს სიტყვები, თუ არა - მათემატიკას.

აღარ შევჩერდებით ჩვენ უკვე ნახსენები ფუნქციების ანუ სკოლაში ანალიზურად მოცემული ფუნქციების გრაფიკების აგების ეტაპებზე. თუმცა ვიტყვით, რომ გრაფიკული აზროვნება ძალიან ბევრი ამოცანის ამოხსნის დროს გვჭირდება. მაგალითისათვის მოვიყვანთ პარამეტრული კვადრატული განტოლები, სადაც დასადგენია აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ

- $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ განტოლების ორივე ფესვი მეტი (ნაკლები) იყოს მოცემულ m რიცხვზე;
- $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ განტოლების ერთი ფესვი მეტი იყოს m რიცხვზე, ხოლო მეორე m-ზე ნაკლები (ე.ი. უნდა იყოს ფესვებს შორის);

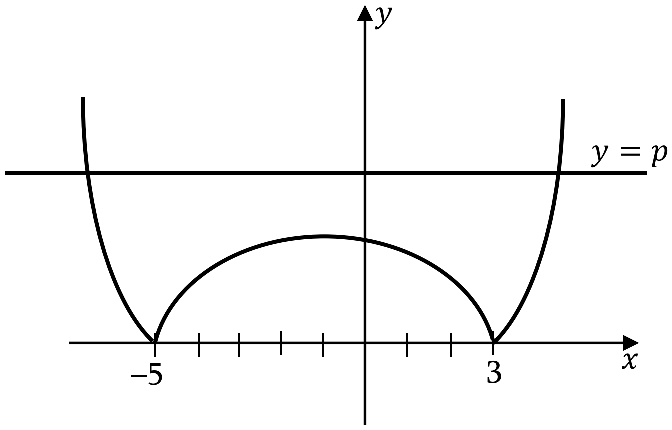
- $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ განტოლების ფესვები, რომ მოცემულ რიცხვებს შორის მდებარეობდეს;
- $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ განტოლების ფესვები რომ მოდულით ტოლი და სხვადასხვანიშნიანები იყოს.

ასეთი და ამის მსგავსი უამრავი ამოცანაა განხილული რეპეტიტორთა სახელმძღვანელოებში. ამ ამოცანების ამოხსნაზე აქ არ შევჩერდებით. ერთს კი დავძენთ, რომ აღნიშნული განტოლებების ამოხსნადობის პრობლემა კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის გააზრებულ ცოდნას ითხოვს, თანაც გრაფიკი გვევლინება როგორც თვალსაჩინოება.

მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია, რომ მოსწავლეებმა გამოიმუშავონ ე.წ. „მათემატიკური გემოვნება" და ამოცანები ამოხსნან ხოლმე შესაბამისი ხერხით. მაგალითისათვის მოვიყვანთ ამოცანას, რომელიც 2010 წელს მიეცათ აბიტურიენტებს ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე მათემატიკაში:

„იპოვეთ $y = |x^2 + 2x - 15|$ და $y = p$ ფუნქციათა გრაფიკების ყველა გადაკვეთის წერტილი, რომლის ორივე კოორდინატი მთელი რიცხვია, თუ p პარამეტრი იღებს ყველა მნიშვნელობას, მარტივ რიცხვთა სიმრავლიდან". აღნიშნული ამოცანა ხშირად შემითავაზებია მოსწავლეთათვის. გადამწყვეტი მნიშვნელობა არ ჰქონდა გაკვეთილზე თუ რამდენად კარგად და სწრაფად ამოხსნიდნენ ამოცანას. პრობლემური სიტუაციის მნიშვნელობა მდგომარეობდა იმაში, თუ ამოხსნის რა გზას აირჩევდნენ მოსწავლეები, როგორც კი მოსწავლეები ამოცანის პირობაში ამოიკითხავდნენ, რომ ფუნქციათა გრაფიკების შესახებ იყო საუბარი, თავიდანვე იწყებდნენ აღნიშნული ფუნქციების გრაფიკების აგებას. არსებული ფუნქციის გრაფიკს ადვილად აგებდნენ ისინი, ასევე კარგად ესმოდათ აზრი იმისა, თუ $y = |f(x)|$ ფუნცქიის გრაფიკი როგორ მიიღებოდა $y = f(x)$ ფუნცქიის გრაფიკისგან და როგორც კი $y = p$ წრფეს გაავლებდნენ და გადაკვეთის წერტილების დადგენას დააპირებდნენ, სიტუაცია ექცეოდა ჩიხში. ვერ ხვდებოდნენ, სად უნდა გაეტარებინათ $y = p$ წრფე, თანაც იმის შეხსენებით, რომ p მარტივ რიცხვთა სიმრავლიდან იყო $x \in Z$ და $y \in Z$. მაშინ რამდენიმე მოსწავლე მარტივ რიცხვთა

სიმრავლიდან შეეცადა „ჩასმით“ დაედგინა პასუხი, თუმცა მიხვდნენ, რომ ამოხსნის აღნიშნული გზა დიდად საიმედო ვერ იქნებოდა.



ნახ. 20

მოსწავლეები გამოთქვამდნენ ვარაუდს, თუ საერთოდ რამდენი გადაკვეთის წერტილი შეიძლებოდა ჰქონოდა ამ ორ ფუნქციას, თუმცა როდესაც მთელ მნიშვნელობებზე მიდგებოდა საქმე, უკვე უძნელდებოდათ პასუხის გაცემა.

თუ p მარტივია, მაშინ ჩავსვათ $p = 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ \ldots$.

ა) $|x^2 + 2x - 15| = 2$

$x^2 + 2x - 15 = 2$ *ან* $x^2 + 2x - 15 = -2$

$D_1 = 18$ $\quad$ $D_1 = 14$

$x \notin Z$ $\quad$ $x \notin Z$

ბ) ა) $|x^2 + 2x - 15| = 3$

$x^2 + 2x - 15 = 3$ *ან* $x^2 + 2x - 15 = -3$

$D_1 = 20$ $\quad$ $D_1 = 13$

$x \notin Z$ $\quad$ $x \notin Z$

გ) ა) $|x^2 + 2x - 15| = 5$

$x^2 + 2x - 15 = 5$ *ან* $x^2 + 2x - 15 = -5$

$D_1 = 21$ $\quad$ $D_1 = 11$

$x \notin Z$ $\quad$ $x \notin Z$

დ) ა) $|x^2 + 2x - 15| = 7$

$x^2 + 2x - 15 = 7$ *ან* $x^2 + 2x - 15 = -7$

$D_1 = 23$ $\quad$ $D_1 = 9$

$x \notin Z$ $\quad$ $x_1 = 2,$ *შესაბამისად,* $y = p = 7$ *ე.ი.* $(2;\ 7)$

$$x_2 = -4, \text{ შესაბამისად, } y = p = 7 \text{ ე.ი. } (-4;\ 7)$$

ცხადია, ჩვენ ვიპოვეთ ფუნქციათა გადაკვეთის რამდენიმე წერტილი, მაგრამ სად უნდა გავჩერდეთ, იქნებ კიდევ აქვთ აღნიშნულ ფუნქციებს გადაკვეთის წერტილები. სადამდე გავაგრძელოთ მარტივი რიცხვების მოსინჯვა?!

ამის გამო, მოსწავლეები მიდიან გადაწყვეტილებამდე, რომ თავიდანვე დაადგინონ p პარამეტრის „არეალი“.

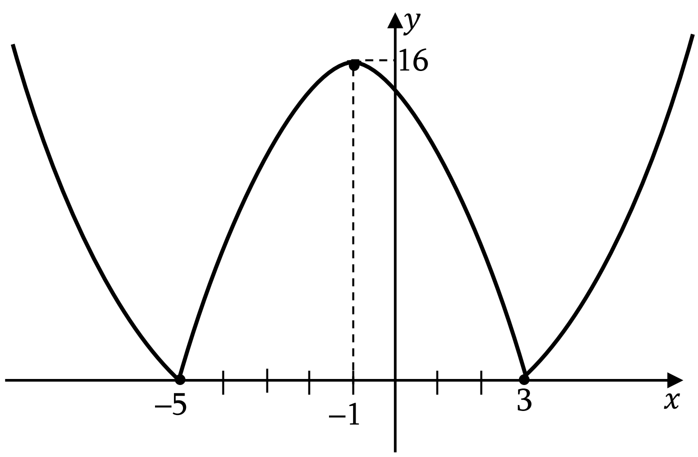
$$|x^2 + 2x - 15| = p$$

$$x^2 + 2x - 15 = p \quad \text{ან} \quad x^2 + 2x - 15 = -p$$

$$x^2 + 2x - (15 + p) = 0 \quad \text{ან} \quad x^2 + 2x + (p - 15) = 0$$

$$D_1 = 1 + 15 + p \geq 0 \qquad\qquad D_1 = 1 - p + 15 \geq 0$$

$$p \geq -16 \qquad\qquad p \leq 16$$



ნახ. 28

აქედან აშკარად ჩანს, რომ უნდა შევამოწმოთ მხოლოდ $p = 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11$ და 13. რის შემდეგადაც ადვილად დაწმუნდებიან, რომ მეტი გადაკვეთის წერტილი ამ ორ ფუნქციას არ ექნებოდა.

აშკარაა, მოსწავლეები ძალიან იღლებოდნენ ამოხსნაში მოყვანილი გზით. რის შემდეგაც ვთავაზობდი ალტერნატიული გზის ძებნას. ჩემი მითითებით მოსწავლეები ამოხსნის ალგებრული გზით ადვილად მიდიოდნენ პასუხამდე:

$p = |x^2 + 2x - 15| = |(x-3)(x+5)| = |x-3| \cdot |\,x+5|$ და იმ პირობით, რომ p მარტივია და შესაბამისად, იქნებოდა 1–ის და საკუთარი თავის ნამრავლის ტოლი, ვიღებდით

$$\begin{cases} |x-3| = 1 \\ |x+5| = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-3| = p \\ |x+5| = 1 \end{cases}$$

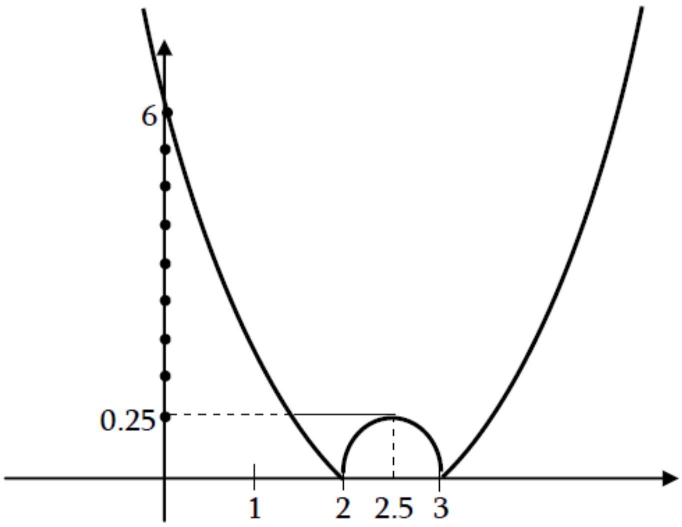
საიდანაც პასუხების შერჩევის გზით მივდიოდით საძიებელ პასუხამდე (2; 7) და (-4; 7). როგორც დ. პოია იტყოდა: „ამოცანის ამოხსნის დროს, ხშირად ცუდი გეგმა უფრო სასარგებლოა, მან შეიძლება მიგვიყვანოს უკეთეს გეგმამდე“.

რა თქმა უნდა, ზოგიერთი მოსწავლე აპროტესტებდა ამოხსნის აღნიშნულ ხერხს და პროტესტი მიმართული იყო იმისკენ, რომ თუ კვადრატული სამწევრი არ დაიშლებოდა მამრავლებად, მაშინ კიდევ სხვა გზის ძიება იქნებოდა საჭირო. მსჯელობის შედეგად მივდიოდით დასკვნამდე, რომ მათემატიკაში არსებობს ე.წ. მექანიკური ტიპის ამოცანები და თავიდანვე გათვლილია ამოხსნის მსვლელობის გზები. ერთ–ერთი ამოცანა კი მათ წინაშე იყო წარმოდგენილი.

აღნიშნული ამოცანის მოსწავლეებთან გაკვეთილზე გარჩევის მცდელობა არ ემსახურებოდა მიზანს ამოცანა ამოცანისთვის. ამ ყველაფრის შემდგომ, მოსწავლეებს ვთავაზობდი, რომ ამოეხსნათ განტოლება:

$$|x^2 - 5x + 6| = a$$

ეს ამოცანა რამდენადმე გავს წინა ამოცანას. შესაბამისად, აღნიშნულის ამოხსნა მოსწავლეებმა დაიწყეს „უკვე ნაცადი“ და აპრობირებული ალგებრული ხერხით. აღარ მოვყვებით იმის შესახებ თუ რა პრობლემებთან მოუწიათ გამკვლავება მოსწავლეებს და რამდენად ერთულათ მოდულის შემცველი პარამეტრული განტოლების ამოხსნა, არა მხოლოდ იდეის, არამედ ალგებრული ჩანაწერის თვალსაზრისითაც. ზოგიერთმა ინტერვალებად დაყო და ისე დაიწყო ამოხსნა, ზოგიერთმა შედარებით მარტივი გზებიც მონახა, თუმცა სამი ან ოთხი ამონახსნი არსად „არ გამოჩნდა“. ამის შემდეგ რამდენიმე მოსწავლემ წამოაყენა იდეა განტოლების გრაფიკულად ამოხსნის შესახებ, თანაც აღნიშნულ ამოცანაში არაფერი არ იყო ნახსენები არც ფუნქციებზე და არც გრაფიკებზე.



წვეროს კოორდინატებია $(x_0;\, y_0) = (2.5;\, -0{,}25)$

გრაფიკიდან ცხადად ჩანს, რომ თუ $a < 0$ მაშინ $x \in \emptyset$, თუ $a = 0$ ან $a > 0{,}25$, მაშინ ორი ამონახსნი აქვს განტოლებას. თუ $0 < a < 0{,}25$, ოთხი ამონახსნი, ხოლო $a = 0{,}25$, განტოლებას სამი ამონახსნი გააჩნია (ძალიან მარტივი აღმოჩნდა მცდელობა მაშინაც, როცა მამრავლებადაც არ იშლებოდა).

კიდევ ბევრი მაგალითის მოყვანა შეიძლება აღნიშნული იდეის გასამყარებლად. ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე კი შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ გრაფიკული აზროვნების განვითარება აუცილებელია მოსწავლეებში, რაც ნათლად აისახება ამოცანების ამოხსნის გზების ძიების „მათემატიკურ გემოვნებაზე“ და კიდევ ერთხელ ამყარებს იმ აზრს, რომ ფუნცქიების შესახებ ყოველმხრივი კომპლექსური მიდგომა ეფექტიანი აღმოჩნდება ხოლმე საგაკვეთილო პროცესში. ფუნქციის გრაფიკი კარგი საშუალებაა „ბევრი რაღაცის დასანახავად“.

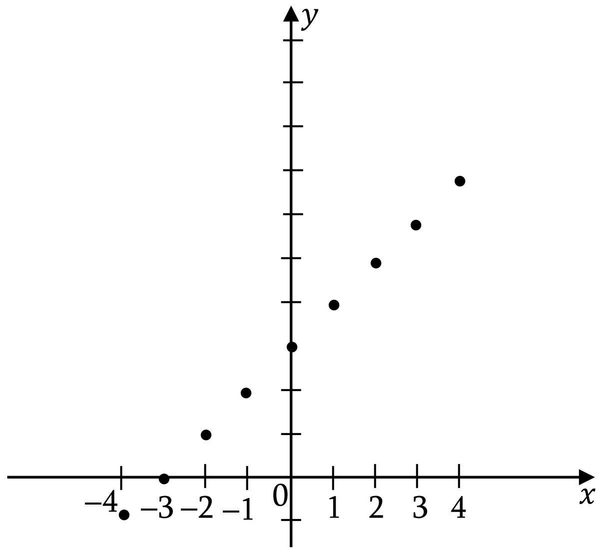
სასკოლო მათემატიკის კურსში, რა თქმა უნდა, შეუძლებელია მათემატიკის ყველა საკითხს შევეხოთ, თანაც „მათემატიკური სიმკაცრე“ შევინარჩუნოთ. განსაკუთრებით ეს შეეხება ფუნქციის ცნებას, რომელიც ხერხემალია მათემატიკისა და მთავარ შემაერთებელ რგოლს თამაშობს სასკოლო და საუნივერსიტეტო მათემატიკას შორის. ჩვენ ვემიჯნებით იმ იდეას, რომ სკოლაში თუ „ბოლომდე“ ვერ ხერხდება რაიმე საკითხის სწავლება, მაშინ საერთოდ არ უნდა ისწავლებოდეს, ეს, ჩვენი მხრიდან, წარმოუდგენელიც იქნებოდა, რამეთუ რიცხვის ცნების ბოლომდე

გარკვევას ვერ ახერხებენ ხოლმე ხშირად მოსწავლეები სკოლაში და კუთხის ცნება არ იციან ხოლმე დამამათავრებელი კლასის მოსწავლეებმა, ამ ლოგიკით, სკოლაში მათემატიკა არ უნდა ისწავლებოდეს საერთოდ. თუ დავუბრუნდებით ჩვენს საკვლევ საკითხს და დავუკვირდებით მის სწავლებაში რამდენიმე ასპექტს, აუცილებლად შევამჩნევთ, რომ ფუნქციის უწყვეტობის ან წყვეტის შესახებ საუბარი არ გვიწევს საკლასო ოთახში, თუმცა მისი გვერდის ავლაც ვერ ხერხდება. ეს საკითხი რამდენადმე „მიჩუმათებულია“ და არც კი ვახსენებთ ხოლმე უწყვეტი ფუნქციას ან წყვეტილ ფუნქციას და რომც ვახსენოთ, მაინც ინტუიციის დონეზე უნდა გავაკეთოთ ეს, იმიტომ, რომ არანაირი განმარტება სასკოლო სახელმძღვანელოებში მის შესახებ არ მოიპოვება. ეს ცხადიცაა, უწყვეტობის განმარტებისას ზღვრის ცნებაა საჭირო, რაც სასკოლო სახელმძღვანელობიდან ამოღებულია. აღნიშნული ცნება აუცილებლობით გამოწვეული შესასწავლი თემაა სკოლის მოსწავლეებისათვის, თუმცა სამსჯელოა, როგორ უნდა მოხდეს ამ ცნების შემოტანა – ეს იქნება მკაცრი მათემატიკური ტერმინოლოგიით, თუ მაგალითების საშუალებით მივახვედრებთ მოსწავლეებს, რომ ზოგიერთი ფუნქციის ყოველი წერტილი „გადაბმულია“ და ზოგიერთი ფუნქციიდან „ამოვარდნილია“ წერტილები. ალბათ ამ მიზეზით გამოწვეულია ის გარემოება, რომ სასკოლო სახელმძღვანელოების ავტორები გვთავაზობენ ისეთი ტიპის ამოცანებს, სადაც მოსწავლეებს მოუწევთ გაამახვილონ ყურადღება აღნიშნულზე.

მაგალითად, მოცემულია ორი ფუნქცია $f(x) = x + 3$ და $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$. ავაგოთ ორივე ფუნქციის გრაფიკი და დავადგინოთ რა „განსხვავებაა“ მათ შორის. მათემატიკის გაკვეთილებზე თითქმის ყველა ფუნქციის გრაფიკის აგებისას მასწავლებლები გვთავაზობენ ისეთ გზას, სადაც ცხრილს „მოვიშველიებთ“, ხოლმე – თუ არ ჩავთვლით ლოგარითმული ან $f(x) = |x|$ ტიპის ფუნქციების გრაფიკებს, სადაც პირველ შემთხვევაში მის გრაფიკს ვაგებთ როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქცის შექცეული ფუნქციის გრაფიკს, მეორე შემთხვევაში კი - წრფივი ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნით.

დავუშვათ, ასაგებია $f(x) = x + 3$ გრაფიკი

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7



ნახ. 22

საკამათო არაა ის, რომ ყველა ასე ვაგებდით გრაფიკს. მიუხედავად იმისა, რომ ორი წერტილის კოორდინატები საკმარისია გრაფიკის ასაგებად, უწყვეტობაში დასარწმუნებლად რამდენჯერმე შეიძლება შევთავაზოთ უფრო მეტი წერტილის მონიშვნაც. ეს არ გამორიცხავს იმას, რომ მოსწავლეთა შორის აღმოჩნდეს შემომდავებელი რადგან „როგორც ახლოსაც“ არ უნდა აგვეღო ეს წერტილები, „მათ შორის მდებარე წერტილების შესახებ ბევრ ვერაფერს ვერ ვაჩვენებთ მოსწავლეებს, ერთადერთი საშუალება არის ის, რომ მოსწავლეებს „ძალიან სჯერათ“ მასწავლებლების. რაოდენ დიდი ავტორიტეტით უნდა სარგებლობდეს მასწავლებელი, რომ მოსწავლეებს უსიტყვოდ სჯეროდეთ იმ ფაქტის, რომ „არსად არ ხდება წყვეტა“ და გრაფიკის ფრაგმენტის წერტილების შეერთებაც შეიძლება და გარდა ამისა, ეს გრაფიკი ასევე უწყვეტად გრძელდება უსასრულობაში. ეს საკითხი ეჭვის ქვეშ დასაყენებელია. არაა გამორიცხული ის გარემოება, რომ მოსწავლეები ინტუიციურად ხვდებიან აღნიშნულს, თუმცა ბუნებით უფრო რთული ფუნქციების შესახებაც იგივეს თქმა გაგვიძნელდება. მაგ:, $f(x) = a^x$ ($a>0$; $a\neq1$). ცოტა ძნელი წარმოსადგენია, რომ ირაციონალური რიცხვის ირაციონალურ ხარისხზეც ასევეე მარტივი ინტუიციით იყოს მისახვედრი ფუნქციის უწყვეტობა. ჩვენ აღარ შევჩერდებით სხვა მაგალითების განხილვაზე, ვფიქრობთ, აღნიშნულიც კმარა, რათა

ფუნქციის უწყვეტობის ცნების შემოტანა სავალდებულოდ მივიჩნიოთ სასკოლო მათემატიკაში და უმაღლეს მათემატიკაში, როდესაც უწყვეტ ფუნქციათა კლასს ახსენებს ლექტორი, მაშინ არ გახდეს აღნიშნულის შესახებ დაფიქრება.

ზოგი ავტორი გვთავაზობს, რომ „უწყვეტი ფუნქციის გრაფიკის დახაზვა შესაძლებელია ფურცლიდან ფანქრის აუღებლად.“ [Ивашев-Мусатов, 1978 (3)].
„ეს თვისება ახასიათებს ფუნქციას, განსაზღვრის არის $(a;b)$ შუალედში, თუ ამ შუალედში ფუნქციის გრაფიკი უწყვეტი წირით გამოისახება – დაიხაზება ფანქრის წვერის რვეულიდან მოუცილებლად“ [წილოსანი და სხვები, მათემატიკა X კლასი].

ფუნქციათა უწყვეტობის საკითხის შესახებ ძალიან მნიშვნელოვანია გვესაუბრა მოსწავლეებთან, როდესაც უტოლობათა ამოხსნის ე.წ. „ინტერვალთა მეთოდს“ ვთავაზობთ. ასევე, რას ნიშნავს ფუნქციის მიერ „ნიშნის შეცვლა“. რამდენადაც მეთოდი ძალიან კარგი აპარატია, იმდენად ბუნდოვანია მისი არსი მოსწავლეებისათვის და კითხვა „რატომ“ მოსწავლეთათვის დასასმელად აქ ყველაზე უხერხული აღმოჩნდება ხოლმე.

ჩვენ მიგვაჩნია, რომ ზოგიერთი თეორემა დამტკიცების გარეშე შეიძლება ისწავლებოდეს სასკოლო მათემატიკაში და ზოგიერთი ტერმინის განმარტება კი არამკაცრად შემოდიოდეს. ასეთი თეორემა შეიძლება კარგი აპარატი აღმოჩნდეს ამოცანების ამოსახსნელად ან სხვა საკითხის უკეთ გაგებას შეუწყოს ხელი, ხოლო ისეთი ტერმინები, რომელთა განმარტებებშიც უმაღლესი მათემატიკის ელემენტებია საჭირო, ნათელს მოჰფენს ბევრ ბუნდოვან საკითხს. მაგალითად, მოვიყვანთ თეორემას, რომელიც თ. ვეფხვაძის რედაქტორობით გამოცემული XII კლასის მათემატიკის წიგნშია: „თუ $f(x)$ პოლინომური ფუნქციისთვის გვაქვს პირობა $f(a) \neq f(b)$, მაშინ f ფუნქცია $[a;b]$ შუალედში ყველა მნიშვნელობას იღებს $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს შორის, ანუ ნებისმიერი m რიცხვისათვის, რომელიც $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს შორისაა, არსებობს ისეთი რიცხვი $c \in (a;b)$, რომ $f(c)=m$. იქვე მოყვანილია აღნიშნული თეორემის გეომეტრიული ინტენრპრეტაცია და კერძო შემთხვევაც, როცა $f(a)<0$ და $f(b)>0$, მაშინ $f(c)=0$. რადგანაც პოლინომური ფუნქცია უწყვეტი ფუნქციაა, შესაბამისად, აღნიშნული თეორემა სამართლიანია. რადგანაც ეს თეორემა უმაღლესი მათემატიკის კურსში კოშის თეორემის სახელითაა ცნობილი და

პოლინომური ფუნქციის მაგიერ უმაღლეს მათემატიკაში ვახსენებთ ზოგადად უწყვეტ ფუნქციას. ავტორებს აღნიშნული თეორემა პოლინომური ფუნქციის თვისებების გასააზრებლად შემოაქვთ სახელმძღვანელოში, თუმცა იგი არსად არაა დამტკიცებული. აღნიშნული კოშის თეორემა, ასევე, არაა დამტკიცებული თსუ–ს Calculus–ის კურსშიც, რამეთუ იგი შესავალი დისციპლინაა ტექნიკურ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებაში [ახობაძე, გოგინავა, 2016]. შესაბამისად, თუ კალკულუსის კურსში ავტორებმა აარიდეს თავი აღნიშნული თეორემის დამტკიცებას. რა თქმა უნდა, სასკოლო სახელმძღვანელო, თუ იგი არაპროფილური სკოლისთვისაა განკუთვნილი, მითუმეტეს უნდა არიდებდეს თავს დამტკიცებას, რადგან სათანადო მათემატიკური აპარატის არცოდნა გვაიძულებს ამას. ყურადღება გვინდა გავამახვილოთ ერთ საინტერესო ამოცანაზე, რომელიც 2014 წელს შესთავაზეს აბიტურიენტებს ერთიანი ეროვნული გამოცდების მათემატიკის ტესტში №29 ამოცანად. ეს ამოცანა არჩევითპასუხიანი გახლდათ და, შესაბამისად, 1 ქულით ფასდებოდა. ორივე ვარიანტში ერთი და იმავე სირთულის ამოცანა შეხვდათ აბიტურიენტებს.

იპოვეთ $f(x)$=2^{sinx} ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, თუ $x\in[\frac{\pi}{6};\ \pi]$

ა) $[\ 1;\ 2\ ]$

ბ) $[\ 1;\ \sqrt{2}\ ]$

გ) $[\frac{1}{2};\ 2\ ]$

დ) $(0;\ 2]$

იპოვეთ $f(x)=3^{cosx}$ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, თუ $x\in[\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}]$

ა) $[\frac{1}{3};\ 3\ ]$

ბ) $[\ 1;\ \sqrt{3}\ ]$

გ) $(\ 0;\ 3\ ]$

დ) $[1;\ 3]$

ერთი შეხედვით, ეს ამოცანა ძალიან იოლია, მითუმეტეს მასწავლებელთათვის, თუმცა ამოცანის სტრუქტურა საკმაოდ რთულია, მით უმეტეს, მოსწავლეთათვის და მაშინ, როდესაც სასკოლო სახელმძღვანელოებში იმ თეორემის შესახებ, რაც აღნიშნული ამოცანების ამოხსნას სჭირდება, არაფერია ნათქვამი. ჩვენ შორს

წაგვიყვანს რეპეტიტორთა ინსტიტუტზე საუბარი და ეს არც შეადგენს ჩვენს მიზანს. ერთს კი ვიტყვით, რომ აღნიშნული ამოცანის ამოხსნა იმ სასკოლო მზაობით, რომელიც აბიტურიენტს გააჩნია, რთულია. ჩვენ არ შევჩერდებით აღნიშნული ამოცანის ამოხსნის იმ გზაზე, რომელიც წარმოებულის ცნებასთანაა დაკავშირებული.

შევეცადოთ ამოვხსნათ მოსწავლეთა ენაზე. განვიხილოთ ერთ–ერთი მაგალითი:

$$f(x) = 2^{sinx}\ ;\ x \in [\frac{\pi}{6};\ \pi].$$

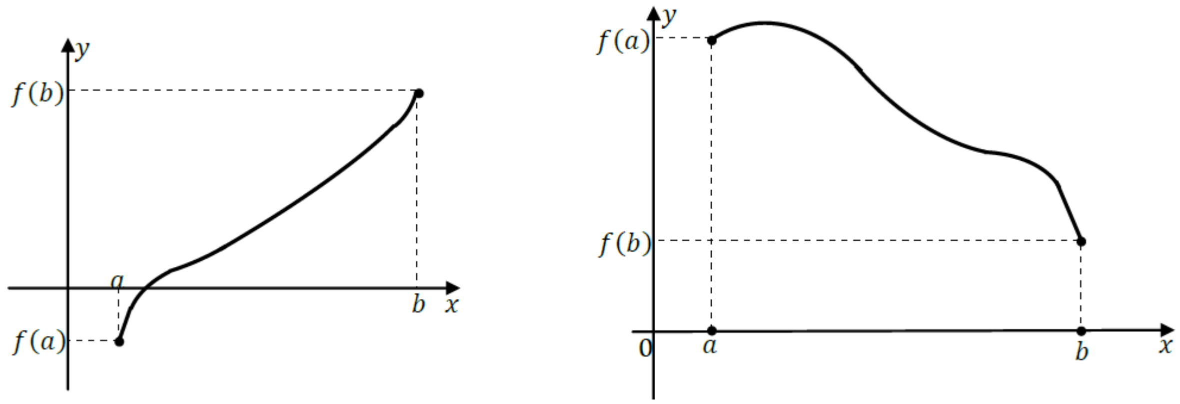
არაა გამორიცხული, რომ აბიტურიენტებმა ჩასვან სეგმენტის საზღვრის წერტილები

$$f(\frac{\pi}{6}) = 2^{sinx} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$f(\pi) = 2^{sin\pi} = 2^0 = 1$$

და შესაბამისად, სწორ პასუხად აირჩიონ (ზ) პასუხი, რომელიც, რა თქმა უნდა, შესარჩევ პასუხებს შორის ფიგურირებს.

თუმცა სასკოლო სახელმძღვანელოები არაფერს საუბრობენ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციათა თვისებების შესახებ. მაგ:, ვაიერშტრასის თეორემაზე. ყველაფერს რომ თავი გავანებოთ, აღნიშნული ფუნქცია ზრდადია თუ კლებადი, ამის დადგენაც უნდა გაუჭირდეთ მოსწავლეებს. ბევრი ალბათ ჩათვლიდა, რომ $f(x) = 2^x$ ფუნქციის ანალოგიით ეს ფუნქცია თავის განსაზღვრის არეზე სულ ზრდადი უნდა იყოს. ეს ასე რომ არაა, იქიდანაც ჩანს, რომ $\frac{\pi}{6} < \pi$ და f $(\frac{\pi}{6}) > f\ (\pi)$. ასე რომც იყოს, მოსწავლე ინტუიციურად ხვდება შემდეგი ფუაქტების სისწორეს, რომ სეგმენტებზე მკაცრად ზრდადი ფუნქცია მიიღებს თავის მინიმალურ და მაქსიმალურ მნიშვნელობას საზღვრის წერტილებში. (მაგ. თუ ფუნქცია მკაცრად ზრდადია და უწყვეტია $[a;b]$-ზე, მაშინ მნიშვნელობათა სიმრავლე იქნება $[f(a);f(b)]$)



ის ფაქტი, რომ $f(x) = 2^{sinx}$ არის ფუნქციათა კომპოზიცია

$f(x) = g(h(x))$, სადაც $g(x) = 2^x$ და $h(x) = sinx$ და რთული $g(h(x))$ ფუნცქიის ზრდადობა–კლებადობა დამოკიდებულია $h(x)$ ფუნქციის ზრდადობა–კლებადობაზე. ეს მოსწავლეთათვის ადვილი მისახვედრი არ უნდა იყოს. შესაბამისად, $[\frac{\pi}{6}; \pi]$ შუალედის დაყოფით, $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$ შუალედში $h(x) = sinx$ ზრდადი ფუნქციაა და $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ შუალედში კი $h(x) = sinx$ კლებადი ფუნცქიაა, ანუ $f(x) = 2^{sinx}$ ფუნქცია ზრდადობა–კლებადობის შუალედებიც შესაბამისი იქნება. ისღა დაგვრჩენია $f(x) = 2^{sinx}$ ცალ-ცალკე შევაფასოთ თითოეულ შუალედში:

$f(\frac{\pi}{6}) = 2^{sin\frac{\pi}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2^{sin\frac{\pi}{2}} = 2^1 = 2$ ზრდადია და მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[\sqrt{2}; 2]$.

$f(\frac{\pi}{2}) = 2^{sin\frac{\pi}{2}} = 2^1 = 2$

$f(\pi) = 2^{sin\pi} = 2^0 = 1$ კლებადია და მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[1; 2]$.

$f(x) = 2^{sinx}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე კი $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$ სეგმენტებზე იქნება $[1; 2]$.

ალექსანდროვს თავის სახელმძღვანელოში [пособие по математике для поступающих в ВУЗЫ, 1972, გვ. 157] აქვს მცდელობა „კრიტიკული წერტილის“ შემოტანის მოსწავლეთა ენაზე: „თუ $a \leq x < x_o$ ინტერვალზე ფუნქცია $y = f(x)$ მკაცრად ზრდადი (კლებადია) და $x_o < x \leq b$ ინტერვალზე კი მკაცრად კლებადია (ზრდადია), მაშინ $f(x_o)$ არის $[a; b]$ სეგმენტზე $y = f(x)$ ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა“. ძნელად წარმოსადგენია ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის მოსწავლე, რომელიც ასე იმსჯელებდა და მივიდოდა სწორ პასუხამდე და ფუნქციის მნიშვნელობა შეემოწმებინა $\frac{\pi}{2}$ წერტილშიც.

იგივე პრობლემა დგას ჩვენ მიერ მოყვანილ მეორე ამოცანაშიც. აღნიშნული ამოცანები გვინდა შევაპირისპიროდ მასწავლებელთა კომპეტენციის დამადასტურებელ გამოცდაში 2016 წლის იანვარში შეთავაზებულ ამოცანასთან.

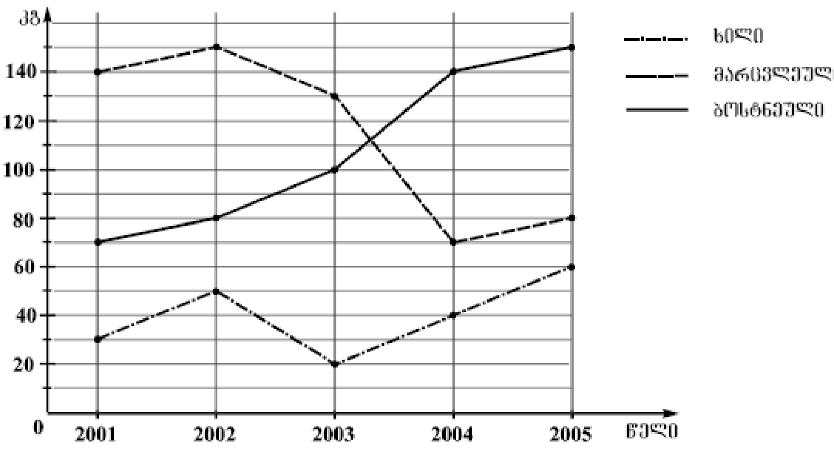
იპოვეთ $f(x) = (\sqrt{5})^{2-x^2+4x}$ ფუნცქიის უდიდესი მნიშვნელობა:

ა) 5 ბ) 25 გ) 125 დ) არ არსებობს

აღარ შევჩერდებით ამ ამოცანის ამოხსნაზე. სირთულის თვალსაზრისით განსხვავება თვალსაჩინოა.

მოსწავლეები მაინც ხშირად უშვებენ შეცდომებს ელემენტარულ ამოცანებშიც კი და ფუნქციის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს მაინც საზღვრის წერტილებში ეძებენ ხოლმე. მოვიყვანოთ მარტივი მაგალითი ზოგადი უნარ-ჩვევების 2014 წლის (I ვარიანტი) ტესტიდან.

“დიაგრამაზე მოცემულია, თუ რამდენი კილოგრამი ხილი, მარცვლეული და ბოსტნეული მოიყვანე ქვეყანაში ერთ სულ მოსახლეზე 2001-2005 წლებში.



დასმულია შეკითხვა,

- რა ფარგლებში მერყეობდა ხილის მოსავალი ერთ სულ მოსახლეზე 2001-2005 წლებში?

  (ა) 10-50 კგ (ბ) 20-30 კგ (გ) 20-60 კგ (დ) 30-60 კგ (ე) 30-80 კგ „

მოსწავლეთა დიდი ნაწილი პასუხობს, რომ პასუხია (დ), რაც, ცხადია, არასწორია. აღნიშნული ამოცანაც გვაფიქრებინებს, რომ სპეციალურადაა შერჩეული როგორც კითხვა ხილის შესახებ, და არა, მაგალითად, ბოსტნეულის შესახებ, ასევე - სავარაუდო პასუხებიც.

იმავე სტილის ამოცანას ვხვდებით, 2005 წლის (III ვარიანტი) ზოგადი უნარ-ჩვევების შემდეგ ამოცანაშიც:

„ცხრილში მითითებულია თუ რამდენი ლარი იყო ზოგიერთი საკვები პროდუქტის საშუალო ფასი სხვადასხვა წელს (1995 წლიდან 1998 წლის ჩათლით).

	1995	1996	1997	1998
საქონლის ხორცი (1 კგ)	3.72	3.30	3.80	4.10
ღორის ხორცი (1 კგ)	3.88	3.70	4.00	4.20
ქათამი (1 კგ)	4.62	4.50	4.00	3.62
კვერცხი (10 ცალი)	1.30	1.40	1.50	1.60
კარაქი (1 კგ)	5.20	5.00	5.00	6.20
ყველი (1 კგ)	4.90	3.80	3.80	3.80
შაქრის ფხვნილი (1 კგ)	0.80	0.91	0.84	0.97
ხორბლის ფქვილი (1 კგ)	0.85	1.00	0.94	1.00
ღვინო (0.7 ლიტრი)	1.13	1.37	1.37	1.37

ხოლო კითხვაა:

- რა ფარგლებში მერყეობა (იცვლებოდა) ღორის ხორცის საშუალო ფასი 1995-1998 წლებში?

  (ა) 3.70-სა და 4.00 ლარს შორის

  (ბ) 3.88-სა და 4.00 ლარს შორის

  (გ) 3.70-სა და 4.20 ლარს შორის

  (დ) 4.00-სა და 4.20 ლარს შორის

  (ე) 3.88-სა და 4.20 ლარს შორის „

ცხადია, დაუკვირვებლობის გამო, აქაც მხოლოდ „საზღვრის“ წერტილებს იხილავენ მოსწავლეები და წერენ (ე) პასუხს, თუმცა რეალობა (გ) პასუხშია მოცემული.

განხილული ამოცანების საილუსტრაციოდ შესანიშნავი ამოცანაა მოყვანილი IX კლასის სახელმძღვანელოში [გოგიშვილი & ვეფხვაძე, 2012], რომელიც ზუსტად რომ ამ საკითხზე ამახვილებს ყურადღებას

„ f ფუნქცია $x \rightarrow x^2$, $x \in [-2; 5]$ არის ფუნქცია, რომელიც ყოველ x რიცხვს $[-2; 5]$ შუალედიდან შეუსაბამებს ამ რიცხვის კვადრატს;

- რა არის ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე?

- რა მნიშვნელობებს იღებს x^2, როცა x იცვლება $-2-$დან $5-$მდე? რა არის ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე? "

ცხადია, ამოცანის განსაზღვრის არე სპეციალურადაა შერჩეული, რათა მიზანს მივაღწიოთ და მთავარი გზავნილები მივიტანოთ მოსწავლეებამდე და ინტუიციურად მაინც გავარკვიოთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისებებში.

როგორც უაილდი იტყოდა, „ჩვენ ვასწავლით ხალხს, როგორ დაიმახსოვრონ და არასდროს ვასწავლით, როგორ ისწავლონ".

განვიხილოთ შემდეგი ორი ამოცანა, რომელთაგან პირველი ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე 2015 წელს მიეცათ აბიტურიენტებს.

"საკოორდინატო სიბრტყეზე მოძრაობს $A(x;y)$ წერტილი, რომლის კოორდინატები დროის ყოველ t მომენტში აკმაყოფილებენ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t \\ y = 4\sin t - 12\cos t \end{cases}$$

იპოვეთ, რა უმცირესი მანძილით იქნება $A(x;y)$ წერტილი დაშორებული $B(-1;2)$ წერტილიდან, როდესაც $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$ "

ერთი შეხედვით ძალიან ძნელი ამოცანა საკმაოდ მარტივდება, თუ მოსწავლეები გამოთვლიან ორ წერტილს შორის მანძილს და გარდაქმნიან მიღებულ გამოსახულებას:

$$|AB| = \sqrt{(8\sin t + 6\cos t + 1)^2 + (4\sin t - 12\cos t - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{80sin^2t + 180cos^2t + 60cost + 5} =$$

$$= \sqrt{80(1 - cos^2t) + 180cos^2t + 60cost + 5} =$$

$$= \sqrt{100cos^2t + 60cost + 85}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ ფესქვეშა გამოსახულება კვადრატული სამწევრია და მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, როდესაც $\cos t = \frac{-60}{2\cdot 100} = -0{,}3$, შესაბამისად, სრულდება პირობა $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$, მაშინ მივიღებთ,

$$|AB|_{min} = \sqrt{100(-0{,}3)^2 + 60(-0{,}3) + 85} = \sqrt{76}.$$

მოსწავლეები, რომლებმაც დაიმახსოვრეს რომ კვადრატული ფუნქციის ექსტრემუმი პარაბოლის წვეროშია საძიებელი, შემდეგ ამოცანაში შეცდომამდე მიდიან:

მოცემულია ფუნქცია $y = 9 + 4\sin x - cos^2 x$, ვოპოვოთ მოცემული ფუნქციის მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები.

მოსწავლეები წერენ, $y = 9 + 4\sin x - cos^2 x = 9 + 4\sin x - (1 - sin^2 x) =$

$$= sin^2 x + 4\, sinx + 8$$

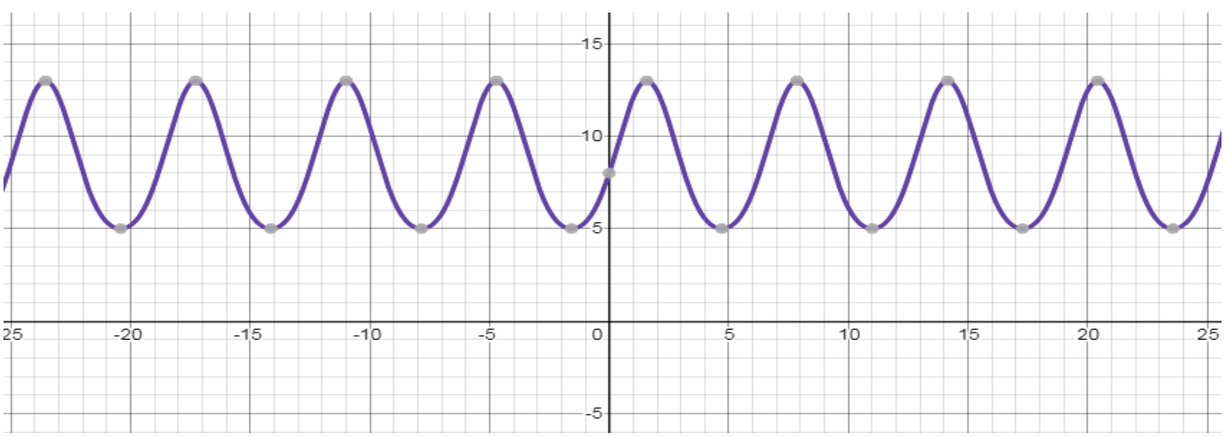
შესაბამისად, პოულობენ ე.წ. „წვეროს" კოორდინატებს, $x_0 = \frac{-4}{2} = -2$, ანუ $\sin x = -2$ და სვამენ $y = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 8 = 4.$ რა თქმა უნდა, აქ ბევრი ფუნდამენტური შეცდომაა დაშვებული და მასწავლებლებს გვმართებს დიდი სიფრთხილე, რათა ჭეშმარიტებამდე მივიყვანოთ მოსწავლეები. ასე მაგალითად,

$$y = 9 + 4\sin x - cos^2 x = 9 + 4\sin x - (1 - sin^2 x) = sin^2 x + 4\, sinx + 8 =$$
$$= (sin\, x + 2)^2 + 4$$

რადგანაც $-1 \le sin\, x \le 1$, ამიტომ $1 \le sin\, x + 2 \le 3$, შესაბამისად,

$$1 \le (sin\, x + 2)^2 \le 9$$
$$5 \le (sin\, x + 2)^2 + 4 \le 13$$

ე.ი აღნიშნული ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობაა 5, ხოლო მაქსიმალური კი - 13. აღნიშნულში ძალიან მარტივად დავრწმუნდებოდით, თუ საკლასო ოთახში შესაბამისი აღჭურვილობით მოსწავლეთათვის ავაგებდით გრაფიკს:



ზემოთ ამოხსნილი ორივე ამოცანის ტიპის ამოცანების განხილვა საკლასო ოთახში კარგი იქნება ერთდროულად, მოსწავლეები შეაპირისპირებენ ორივეს და ბევრი

საინტერესო დასკვნის გამოტანას შეძლებენ. თანაც, ნასწავლი მასალა პასიურ ცოდნად კი არ დარჩება, არამედ პრობლემური სიტუაცია მას გააქტიურებს და მოსწავლეს გაიყვანს მაღალ სააზროვნო უნარებზე. აღარაფერს ვამბობთ იმაზე, რომ მოსწავლეები მეტად ფრთხილები და დაკვირვებულები გახდებიან.

აღნიშნული მაგალითების განხილვა (არ ვგულისხმობთ ზოგადი უნარ-ჩვევების ტესტიდან მოყვანილ ამოცანებს, რომლებიც საკმაოდ მარტივია და დიდი მათემატიკური აპარატის ცოდნას არ მოითხოვს) არ ემსახურება რომელიმე ინსტიტუციის გაკრიტიკებას. დამნაშავე არც წიგნის ავტორია, არც მასწავლებელი და არც გამოსაცდელი ტესტის შემდგენელი, მით უმეტეს, დანაშაული არ უნდა ვეძებოთ მოსწავლეებში და ყოველწლიურად არ ვამტკიცოთ, რომ მათემატიკის სწავლების ხარისხი იკლებს. ჩვენი სურვილი იქნებოდა, რომ ერთიანი ეროვნული სასწავლო გეგმის მათემატიკის სტანდარტში მაქსიმალური სიზუსტითა და ხარისხით იყოს აღწერილი იმ საკითხთა ჩამონათვალი, თუ რისი სწავლებაც უცილებელია სასკოლო დონეზე, ინტერპრეტაციები და დამატებითი შემოთავაზებები მივანდოთ სახელმძღვანელოთა ავტორებს. ასევე, დიდი სურვილი გვექნებოდა, საგამოცდო ტესტების შედგენისას ითვლისწინებდნენ მოსწავლეთა სახელმძღვანელოებს, რითაც მიმდინარეობს სწავლება.

§2.11. ზოგიერთი საინტერესო ამოცანა ფუნქციის არსის უკეთ გააზრებისათვის

პირველ რიგში, წარმოვადგენთ ერთ უმარტივეს (ჩვენი აზრით) ამოცანას, რომელიც აპლიკანტებს მიეცათ 2015 წელს განხორციელებულ კვლევის ფარგლებში - „სახელმწიფო შეფასება. მათემატიკა IX კლასი“. ვფიქრობთ, ამ ამოცანაზე კომენტარს აღარ გავაკეთებთ, მისი სტატისტიკური ანალიზი ისედაც ბევრი რამის მთქმელია. ამ ამოცანის აქ მოტანის მიზანი კი ის გახლავთ, რომ კიდევ ერთხელ დავრწმუნდეთ, თუ რაოდენ გასამახვილებელია ყურადღება ფუნქციის სწავლებაზე.

	დავალების სწორად ამოხსნის პროცენტი	**შინაარსობრივი სფერო:** კანონზომიერებები და ალგებრა **კოგნიტური სფერო:** გამოყენება **აღწერილობა:** მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე. ფუნქციის გრაფიკი.
ჯამური	6.4%	ცნობილია, რომ $f(x) = x^3 - 2x + kx - 3$ ფუნქციის გრაფიკი გადის $A(1;\ 5)$ წერტილზე. იპოვეთ k. პასუხი:
ქალაქი	8.4%	
სოფელი	1.0%	
კერძო სკოლა	16.9%	
საჯარო სკოლა	5.5%	
არასერტიფიცირებული მასწავლებელი	3.7%	
სერტიფიცირებული მათემატიკაში	9.8%	
სერტიფიცირებული სხვა საგანში	6.2%	
გოგონები	6.9%	
ბიჭები	5.9%	

და ამოცანა ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე: „$y = -3(3-x)^2 + 5$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა: (ა) -2 (ბ) 0 (გ) 5 (დ) 9 (ე) 12“ და 42 %-მა მიიღო შეფასებად 0 ქულა.

შევჩერდეთ რამდენიმე ამოცანაზე, რომელიც, ჩვენი აზრით, ძალიან საინტერესო და ლოგიკურ კავშირშია საკვლევ საკითხთან.

ყურადღება შევაჩეროთ ირაციონალურ განტოლებებზე. აღნიშნული საკითხი მოსწავლეთათვის „თითქოს“ არ წარმოადგენს დიდ პრობლემას.

მათი უმეტესობა ძალიან მარტივად უყურებს აღნიშნულ საკითხს და ელემენტარული განტოლების, მაგ: $\sqrt{x-2} = 3$ შემთხვევაშიც კი პირდაპირ ორივე მხარის კვადრატში აყვანით იწყებს ამოხსნას. ისე რომ არც კი აკვირდება იმას, რომ მარჯვენა მხარეში დგას მუდმივი. აღარაფერს ვამბობთ იმ შემთხვევაზე, რომ $\sqrt{x-2} = -3$ განტოლების შემთხვევაშიც იგივეს მოიმოქმედებენ ხოლმე, ისე, რომ არც კი აინტერესებთ ამოხსნადობის საკითხი. ეს კი უკვე იმის მანიშნებელია, რომ მოსწავლეთა უმეტესობა „მექანიკური დაზეპირების“ იმედზეა. ვფიქრობთ,

აღნიშნული საკითხი თეორიულად უფრო მნიშვნელოვანია და ბევრი რამის დანახვის საშუალებას იძლევა, ვიდრე პრაქტიკულად მისი ამოხსნა. შევჩერდეთ რამდენიმე მაგალითზე. ძალიან მნიშვნელოვანია, მოსწავლეებს სანამ დავაწყებინებდეთ ამოხსნას ალგებრული ხერხით, იგივე ჯერ გრაფიკულად გააკეთონ, რაც მათ გარკვეულ საკითხებზე დაფიქრების საშუალებას მისცემთ. არითმეტიკული კვადრატული ფესვის განმარტებაც კი კმარა ამოხსნადობის საკითხის დასადგენად. კონკრეტული მაგალითების ამოხსნის დაწყებამდე, ძალიან საინტერესო იქნებოდა, რომ შეგვეთავაზებინა ისეთი ამოცანები, სადაც მოსწავლეებს ვთხოვთ, რომ ამოუხსნელად დადგინონ, თუ რატომ არ აქვს ფესვი აღნიშნულ განტოლებას:

მაგალითად: $\sqrt{3x-12}+\sqrt{4-x}=4$

ვფიქრობთ, მოსწავლეებისათვის ეს დამაინტრიგებელი მაგალითია, იგი ამჯობინებდა „კვადრატში აყვანას“, თუმცა განსაზღვრის არის დადგენის შემდეგ

$$\begin{cases}3x-12\geq 0\\4-x\geq 0\end{cases}\quad\begin{cases}x\geq 4\\-x\geq -4\end{cases}\quad\begin{cases}x\geq 4\\x\leq 4\end{cases}\quad\{x=4$$

მიხვდებოდა, რომ $x=4$ ვერაფრით ვერ იქნებოდა ამონახსნი, სხვა ფესვი კი არ შეიძლება ჰქონდეს განტოლებას, ანდა $3x-12$ გამოსახულებაში თუ 3-ს გაიტანდა ვინმე ფრჩხილებს გარეთ, მაშინვე დაინახავდა „დაგებულ ხაფანგს“.

იმავე საკითხს ეხება შემდეგი განტოლებაც:

$\sqrt{x-13}-\sqrt{3-2x}=7$

$$\begin{cases}x-13\geq 0\\3-2x\geq 0\end{cases}\quad\begin{cases}x\geq 13\\-2x\geq -3\end{cases}\quad\begin{cases}x\geq 13\\x\leq 1{,}5\end{cases}\quad\{x\in\emptyset$$

უფრო მეტი ეფექტისათვის მოსწავლეებს შევთავაზოთ შემდეგი განტოლება:

$\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-5}=0{,}99$

$$\begin{cases}x-3\geq 0\\2x-5\geq 0\end{cases}\quad\begin{cases}x\geq 3\\x\geq 2{,}5\end{cases}\quad\{x\in[3;+\infty)$$

აღნიშნულ მაგალითში თითქოს პრობლემური არაფერია, თუმცა თუ მოსწავლეები მიხვდებიან იმას, რომ მარცხენა მხარე ორი ზრდადი ფუნქციის ჯამია და ე.ი. ზრდადია, მაშინ ის მინიმალურ მნიშვნელობას მიიღებს, როდესაც $x=3$. ე.ი.

$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-5} = \sqrt{3-3} + \sqrt{2 \cdot 3-5} = 1$

შესაბამისად, მარცხენა მხარეს მნიშვნელობათა სიმრავლეა [1; +∞), ანუ 0,99 ვერაფრით ვერ იქნება მარცხენა მხარის ტოლი.

აღნიშნული მაგალითები აშკარად ადასტურებს იმას, თუ რაოდენ მნიშვნელოვანია ფუნქციის თვისებების ცოდნა ამოცანების ამოსახსნელად. განხილული მაგალითების შემდეგ შეგვიძლია განვიხილოთ შემდეგი ამოცანები:

$f\ (x) = g(x)$

$\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = x^2 - 3x + 3$

$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ -x \geq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad x \in [1;\ 2]$

$f^2(x) = \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}\right)^2 = \mathrm{x} - 1 + 2\sqrt{(x-1)(2-x)} + 2\text{-x} = 1 + 2\sqrt{(x-1)(2-x)} \geq 1$

ე.ი. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} \geq 1$

$g\ (x) = x^2 - 3x + 3$ მისი წვერია $x_0 = 1{,}5$, ხოლო $x \in [1;\ 2]$ შუალედში, მისი უდიდესი მნიშვნელობაა $g\ (1) = g\ (2) = 1;\ g\ (1{,}5) = 0{,}75$.

ე.ი. $g\ (x) \leq 1$

ე.ი. თუ $f\ (x) = g\ (x)$ და $f\ (x) \geq 1$ და $g\ (x) \leq 1$

ე.ი. $\begin{cases} \mathrm{f\ (x)} = 1 \\ \mathrm{g\ (x)} = 1 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 \\ x^2 - 3x + 3 = 1 \end{cases} \begin{cases} 1 + 2\sqrt{(x-1)(2-x) = 1} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x - x^2 - 2 + x} = 0 \\ D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \end{cases} \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 = 0 \\ x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

ე.ი. $x \in \{1;\ 2\}$.

„ორივე მხარის კვადრატში აყვანის“ მეთოდით აღნიშნული ამოცანის ამოხსნა დასაწყისშივე „აშინებს“ მოსწავლეებს:

$\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = x^2 - 3x + 3 \quad x \in [1;\ 2]$

$x - 1 + 2 - x + 2\sqrt{-x^2 + 2x - 2 + x} = x^4 + 9x^2 + 9 - 6x^3 + 6x^2 - 18x$

$2\sqrt{-\ x^2\ + 3x - 2\ } = x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 8$ ...

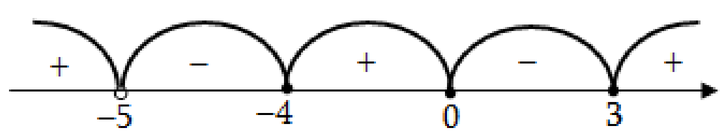
.....

გადავიდეთ განტოლებების ამოხსნის ხერხების შესწავლაზე. მოსწავლეებს გააზრებით ეცოდინებათ, რომ ჯერ ამოხსნადობის საკითხი გაარკვიონ ხოლმე და თუ ფესვები გააჩნია განტოლებას, განსაზღვრის არეში მოხვდებიან თუ არა – შემოწმება სჭირდება. ჩანართის სახით ვიტყოდით, რომ თუ ფესვი კენტი ხარისხისაა, ხშირად მოსწავლეებს ჰგონიათ, რომ ხარისხში აყვანის შემთხვევაში გარეშე ფესვი არ მიიღება, რაც არასწორია, თუმცა აღნიშნულზე არ შევჩერდებით ჩვენი თემის ფარგლებში. ასევე, აღარ შევჩერდებით ირაციონალურ უტოლებებზე. აღნიშნული ტიპის ამოცანები მრავლად გვხვდება თ. ვეფხვაძის რედაქტორობით გამოცემულ სახელმძღვანელოებში.

აქვე, გვინდა გავამახვილოთ ყურადღება უტოლობათა ამოხსნის ინტერვალთა მეთოდზე. ჩვენ არ შევჩერდებით იმაზე, თუ რაოდენ ძნელია მოსწავლეთათვის აღნიშნული საკითხის სწავლება გააზრებულად, რაც შეეხება მექანიკურ დონეზე, ის ძალიან მარტივად მიღწევადია. აქ ყურადღება გვინდა გავამახვილოთ ასეთ უტოლობაზე:

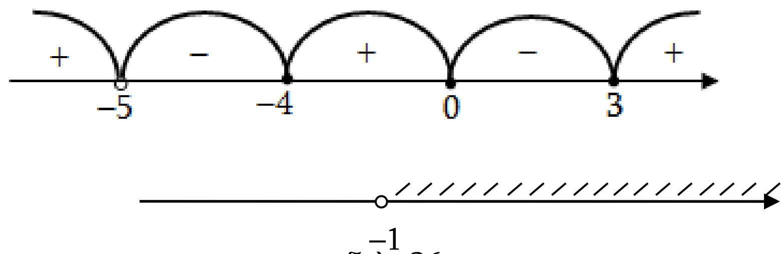
$$\frac{(x-3)(x+4)\ell g\,(x+1)}{x+5} \leq 0$$

მოსწავლეები წერენ მხოლოდ



$$x \in (-5;\ -4\,] \cup [\,0;\ 3\,]$$

ისინი არ ითვალისწინებენ $y = \ell g\,(x+1)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს $D\,(y) = (-1;\ +\infty)$ და ამიტომ



ნახ. 26

შესაბამისად $x \in [\,0;\ 3\,]$.

ყურადღებას მივაქცევთ ისევ მექანიკური დასწავლის მომენტებს, რომელიც ხშირად შეიმჩნევა მოსწავლეებში. ძალიან მკაცრად ნათქვამი რომ არ გამოგვივიდეს, ვიტყოდით რომ არის მომენტები, რასაც ყურადღებას ნაკლებად აქცევენ მოსწავლეები და მასწავლებლები, რაც მექანიკურად დასწავლას უწყობს ხელს და არა – გააზრებას.

აღარ შევჩერდებით წრფივი დაპროგრამების ამოცანებზეც, სადაც ფუნქციებთან გვაქვს ისევ კავშირი და მათემატიკის გამოყენების ჩვენების საუკეთესო საშუალებას წარმოადგენს სასკოლო მათემატიკაში.

შევჩერდებით რამდენიმე საკითხზე, რომელზეც ვთვლით, რომ მოსწავლეებს მეტი დაფიქრება მართებთ, რათა ბევრი არასწორი მომენტი აირიდონ თავიდან. შევეხოთ ერთ–ერთს. როდესაც მოსწავლეებს ვეუბნებით, რომ y = $ax^2 + bx + c$ სახის ფუნქციას ვუწოდებთ კვადრატულ ფუნქციას, სადაც a; b; c რიცხვებია და $a \neq 0$. თითქოს ყველაფერი ცხადია მოსწავლეთათვის. ძალიან მნიშვნელოვნად ვთვლით, რომ გამახვილდეს ყურადღება იმ მომენტზე, თუ რატომ არ შეიძლება a კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა. როდესაც მოსწავლე დაეჭვდება, რომ a შეიძლება 0–ის ტოლი გახდეს, უბრალოდ ფუნქცია გადაიქცევა წრფივად, ყველაფერი ცხადი გახდება. მოსწავლეებს შევთავაზოთ ორი ამოცანა, რათა დავადგინოთ, ერკვევა თუ არა ბოლომდე კვადრატულ და წრფივ ფუნქციებში.

- a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია $f(x) = (a-1)x^2 + ax + 1$ კვადრატულ ფუნქციას ერთი ნული.

- a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის გააჩნია $f(x) = (a-1)x^2 + ax + 1$ ფუნქციას ერთი ნული.

თუ ამ ორივე ამოცანას ერთდროულად შევთავაზებთ მოსწავლეებს და ვთხოვთ რომ შეადარონ ერთმანეთს, მაშინ, ცხადია, სიტყვასიტყვით შედარებით შემთხვევაში აღმოაჩენენ, რომ ერთ სიტყვაშია მხოლოდ განსხვავება და რომელიმე მოსწავლემ კიდეც შეიძლება იეჭვოს, რომ ეს სიტყვა რაღაც კავშირშია ამოხსნადობასთან. თუმცა, საეჭვოა ბოლომდე მიიყვანოს ამოცანის ამოხსნა. პრაქტიკამ გვაჩვენა, რომ ასეთი ამოცანები გადაულახავ პრობლემად რჩება მოსწავლეთათვის. ამის მიზეზად მივიჩნიეთ ის, რომ $a \neq 0$, $y = ax^2 + b\,x + c$ ფუნქციაში, უბრალოდ განმარტებისათვისაა საჭირო. ცხადია, მასწავლებლის დახმარებით, შეგვიძლია მივიყვანოთ მოსწავლეები სწორ პასუხამდე. პირველ ამოცანაში თავიდანვეა მოთხოვნა, რომ აღნიშნული ფუნქცია კვარდრატულია. შესაბამისად, $a - 1 \neq 0$ ანუ $a \neq 1$ და

$$D = a^2 - 4 \cdot 1\,(a - 1) = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 = 0$$

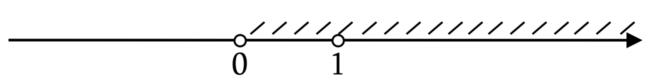
მივიღებთ, რომ $a = 2$.

შესაბამისად, თუ $a = 2$, მოცემულ კვადრატულ ფუნქციას ექნება ერთი ნული.

სხვა გარემოებაა მეორე ამოცანაში, ავტორი არ ითხოვს, რომ აღნიშნული ფუნქცია კვარდრატულია, შესაბამისად, თუ $a = 1$, მაშინაც ერთი ნული გააჩნია ფუნქციას, რაც შეგვიძლია მოსწავლეებს $a = 1$ ჩასმით შევამოწმებინოთ, და $a = 2$–ის შემთხვევაშიც გააჩნია ერთი ნული. შესაბამისად, სწორი პასუხია $a = 1$ და $a = 2$.

იგივე პრობლემები იჩენს ხოლმე თავს, სხვა ფუნქციების განმარტებისას, მაგალითად, $y = \frac{k}{x}$ რატომაა, რომ $k \neq 0$ ანდა $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; $ad - bc \neq 0$ და $c \neq 0$.

აღარაფერს ვამბობთ მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციებზე, მაგ: $y = a^x$; $(a > 0;\ a \neq 1)$



ნახ. 27

ძალიან საინტერესოა, მოსწავლეებს განვახილვინოთ სიტუაციები, როდესაც $a = 0$ ან $a = 1$ ანდა $a < 0$ და მათ თვითონ გააკეთონ დასკვნები აღნიშნულთან დაკავშირებით. აღარაფერს ვამბობთ $y = \ell\text{og}_a\text{x}$, $(a > 0;\ a \neq 1)$ ფუნქციაზე, განტოლებების და უტოლობების შემთხვევაში, ისედაც გათვალისწინებულია ხოლმე, რომ $a > 0$ და $a \neq 1$, თუმცა თუ ცვლადფუძიან ლოგარითმს შევთავაზებთ, იშვიათი ხვდება იმას, რომ ამოცანის განხილვისას გასათვალისწინებელი აქვს სხვადასხვა გარემოება. აქვე გვინდა აღვნიშნოთ, რომ მაჩვენებლიანი თუ ლოგართმული განტოლებების ამოხსნისას, იშვიათია, რომ რომელიმე მოსწავლემ გააზრებულად იცოდეს, თუ რატომ უნდა „შეტრიალდეს უტოლობის ნიშანი", როდესაც $0 < a < 1$ და „არ ტრიალდება", როდესაც $a > 1$, რა შუაშია აქ ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა. მიუხედავად იმისა, რომ ზოგიერთი მათგანი წარმატებით ხსნის კიდეც უტოლობებს. აღნიშნული გარემოება მაინც ტიპურ შეცდომად უნდა ჩაითვალოს მოსწავლეებში, რადგანაც უმეტესობა მათგანი „არ ატრიალებს" ხოლმე უტოლობის ნიშანს და სხვადასხვა სახის გამოცდებზეც მოსწავლეთა რანჟირების კარგ საშუალებას წარმოადგენს. აღნიშნული ტიპის მაგალითების მსგავს მაგალითებს ბევრს მოვიძიებთ საკუთარი პრაქტიკიდან,თუ კარგად დავუკვირდებით მოსწავლეთა მსჯელობას. ძალიან მნიშვნელოვანია მოსწავლეებს მივცეთ სისტემური ცოდნა და „წვრილმანებში" დავანახოთ მათემატიკის სილამაზე. აღარ შევჩერდებით უკვე ლოგარითმულ განტოლებებსა და უტოლობებზე, სადაც მხოლოდ მექანიკური გზით ამოხსნას და განსაზღვრის არის არგათვალისწინებას აბსურდულ შედეგამდე მივყავართ ხოლმე. აზრის გასამყარებლად გამოდგება $\sin x = a$ და $\cos x = a$ განტოლებების ამოხსნადობის საკითხი, რომელიც პირდაპირაა დაკავშირებული აღნიშნული ფუნქციების გრაფიკებთან და ხშირად ამონახსნის ფორმულები მექანიკურად დასწავლილია ხოლმე. მასწავლებლებიც ხშირად აჰყვებიან აზრს მოკლებულ გამონათქვამებს, რომ „დამტკიცებები არ მოეთხოვებათ მისაღებ გამოცდებზე" და საჭიროდ არ თვლიან ასწავლონ. უნდა აღვნიშნოთ, რომ არ შეიძლება უმაღლეს სასწავლებლებში მისაღები გამოცდები იქცეს მეტრად სასკოლო

განათლებისათვის და არანაირი გამოცდა რომ არ არსებობდეს საერთოდ, მაშინ აღნიშნული ლოგიკით მათემატიკა საერთოდ არ უნდა ვასწავლოთ. ჩვენ მიერ განხილული მაგალითები სხვადასხვა გამოცდიდან მხოლოდ შედარებითი ხასიათის მატარებელია და კარგი საშუალებაა იმისა, რომ აღმოვაჩინოთ ნაკლოვანებები და უპირატესობები ფუნქციის სწავლისას სკოლაში და თვითონ გამოცდის ეფექტიანობაშიც.

სასკოლო მათემატიკიდან გვინდა მოვიყვანოთ მაგალითები, რომლებიც, ჩვენი აზრით, პრობლემურია და ისევ და ისევ, მექანიკურად დასწავლილი აქვთ ხოლმე მოსწავლეებს. მათ, ხშირ შემთხვევაში, წრფივ ფუნქციად წარმოუდგენიათ, $y = kx + b$ ტიპის ფუნქცია (თანაც კოეფიციენტები უნდა ჰქონდეს მთელი რიცხვები). ძალიან იშვიათია, რომ $7x – 3y + 13 = 0$ ფუნქცია იგივენაირად აღქმადი იყოს, როგორც $y = \frac{7}{3}x + \frac{13}{3}$. ხშირად სხვა მომენტებსაც ვაწყდებით ხოლმე, $xy = 2$ ფუნქცია წრფივი ჰგონიათ მოსწავლეებს, იმიტომ რომ „ხარისხში კვადრატი“ ვერსად დაინახეს. ასევე, $y = -7x - 3x^2 + 10$ ფუნქციაში კოეფიციენტების ჩამოწერა რომ ვთხოვოთ მოსწავლეებს, წერენ $a = -7$; $b = -3$; $c = 10$, (ისიც საკითხავია „b კოეფიციენტთან“ 3–ს დაწერენ თუ –3–ს).

აღნიშნული მაგალითებიც კი კმარა იმის დასადასტურებლად, რომ მასწავლებელს ბევრი აქვს სამუშაო, რათა ეს პრობლემები აღმოიფხვრას და სათანადოდ დაეუფლონ მოსწავლეები შესასწავლ საკითხს. აღნიშნულის შემდეგ, ალბათ, გასაკვირი აღარ იქნება ის, რომ წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობის საკითხის დადგენისას (იგულისხმება რომ კოეფიციენტები ისეა შერჩეული, რომ განტოლებები წრფეს განსაზღვრავენ) ხშირად მოსწავლეები წერენ ხოლმე:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

ა) თუ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ მაშინ სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

ბ) თუ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ მაშინ სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს.

გ) თუ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ მაშინ სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია.

თუმცა ერთმანეთში ერევათ პირობები.

იშვიათად თუ მოვძებნით მოსწავლეს, რომელიც აღნიშნულ საკითხს წრფივ ფუნქციას დაუკავშირებდა. უფრო ხშირად, მათ დაზეპირებულად იციან, რომ სისტემაში შემავალი განტოლებები არიან წრფეები და წრფეთა ურთიერთგანლაგების სამი შემთხვევა არსებობს სიბრტყეზე. სულ რომ ვერ ახერხებდნენ მოსწავლეები წრფივი ფუნქციით ოპერირებას, ხშირად იმასაც ვერ ახერხებენ, რომ პარამეტრის დადგენისას სისტემაში აღნიშნული „სამი წესი“ კი არ გამოიყენონ, არამედ ერთი უცნობის მეორეთი გამოსახვით, წრფივი განტოლების ამოხსნადობის საკითხამდე დაიყვანონ, რაშიც ალგებრა დაეხმარებათ. ამით მიხვდებიან იმას, რომ ზოგიერთი საკითხის გაზეპირება ზედმეტია მათემატიკისათვის, უფრო კარგი იქნებოდა, სისტემის ამოხსნის გრაფიკული ხერხის პირველ პლანზე წამოწევა. თუ ამოხსნას ყოველთვის გრაფიკული ხერხით დავიწყებთ ხოლმე და არსში გაერკვევიან მოსწავლეები - ის რომ წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ჩასმის ან შეკრების ხერხით უფრო ადვილია და უფრო ზუსტიცაა გრაფიკულ ხერხთან შედარებით, მოსწავლეები ამას კარგად მიხვდებიან და აირჩევენ კიდეც აღნიშნულ გზას, თუმცა იდეა გრაფიკული ხერხში კარგად ჩანს. „ზურგი უნდა შევაქციოთ ყალბ ცოდნას და ფორმულების ზეპირობას და შევუდგეთ შეძენას ნამდვილის, ჭეშმარიტი ცოდნისას“ - ი. გოგებაშვილი. ასევე, კვადრატული განტოლების გრაფიკული ხერხით ამოხსნა სახარბიელო არაა. მაგ: $x^2 - 5x + 6 = 0$ მოსწავლეს ორი ფუნქციის გატოლება უწევს $x^2 = 5x - 6$ და შემდგომ გრაფიკების აგება და გადაკვეთის წერტილების ძიება, თუმცა საკითხში ბოლომდე გასარკვევად საჭირო და საიმედოა.

ფუნქციის სწავლების საკითხებზე საუბარი ალბათ შორს წაგვიყვანს და პრეტენზიაც არ გვაქვს იმაზე, რომ ამომწურავად ვისაუბროთ თითოეულ ნიუანსზე. უფრო მნიშვნელოვნად მიგვაჩნია, რომ წინა პლანზე წამოვწიოთ ისეთი საკითხები, რომელთა ცოდნაც მოეთხოვებათ ანდა იგულისხმება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის სტანდარტით და ერთობ „უმნიშვნელო“ საკითხების სწავლას, რომლებსაც

არაპრაქტიკოსი მათემატიკოსები ძალიან მარტივად უყურებენ, და, კიდევ ერთხელ გავიმეორებთ, რაოდენ ძნელია პრაქტიკოსი მათემატიკის მასწავლებლებისთვის, თანაც, როდესაც სხვადასხვა მზაობის მოსწავლე ზის ერთ კლასში. ისევ დავესესხებით დ. პოიას, რომელიც ამბობს, რომ „სწავლება არაა მეცნიერება, არამედ ხელოვნებაა"–ო. ჩვენეული მიდგომაც ითვალისწინებს იგივეს და ვფიქრობთ, რომ გააზრებულად დასწავლა უნდა გამოვიდეს ასპარეზზე, სადაც კითხვაზე „რატომ" ყოველთვის არსებობს ცალსახა პასუხი. „ახალგაზრდობა უნდა მივაჩვიოთ ფიქრს" [პოია, 1970]. ლ. კუდრიავცევი კი ამბობდა, რომ „სწავლება ისე უნდა მოვაწყოთ, რომ მოსწავლეები ცოდნის შეძენის პროცესში აღფრთოვანებულნი იყვნენ იმათი სიბრძნით, ვინც ეს ცოდნა მოუტანა ადამიანებს, აღფრთოვანდნენ და გაუკვირდეთ საგანთა ჰარმონია, რომელსაც აცნობენ, რომ მათ საქმიანად შეაფასონ მიღებული ცოდნის არსი და დანიშნულება" [Фридман, 2014].

მოსწავლეთა მაღალ სააზროვნო უნარებზე გასაყვანად საჭირო და მნიშვნელოვანია თეორიული ტიპის ამოცანებით ოპერირება გაკვეთილებზე. კარგი იქნება, რომ მოსწავლეებისათვის განტოლებები და უტოლობები აღიქმებოდეს ფუნქციების ნაწილად და არა ცალკე თემად. სასწავლო პროცესი სტანდარტული ტიპის ამოცანების განხილვითაა ხოლმე დატვირთული და მხოლოდ ამოხსნებზეა ორიენტირებული, სადაც მხოლოდ „ამოცანის პასუხის" მითითება ითვლება შემოქმედებით საქმიანობად. თეორიული საკითხების არსებობა ზეპირ გამოცდებზე უნდა მოწმდებოდეს და პროფილურ ფაკულტეტებს მაინც უნდა ჰქონდეს ე.წ. „მისაღებ გამოცდებში" შიდა შესარჩევ პირობად. ასე მაგალითად,

1. რამდენი ამონახსნი გააჩნია $3^x + 4^x = 5^x$ განტოლებას?
2. იქნება თუ არა პერიოდული ორი პერიოდული ფუნქციის ჯამი, ნამრავლი?
3. დაამტკიცეთ, რომ თუ f პერიოდული ფუნქციაა, როგორიც არ უნდა იყოს g ფუნქცია, მაშინ $f(g(x))$ აუცილებლად იქნება პერიოდული.
4. აჩვენეთ, რომ, თუ f პერიოდული ფუნქციაა T პერიოდით და $g: E(f) \to R$, მაშინ $g \circ f$ პერიოდული ფუნქციაა T პერიოდით.

5. დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ფუნქცია არაა პერიოდული.
6. დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = x^2$ ფუნქცია არაა პერიოდული.
7. დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = e^x$ ფუნქცია არაა პერიოდული.
8. დაამტკიცეთ, რომ $f(x) = |\sin x|$ ფუნქცია არის პერიოდული.
9. რატომ არ შეიძლება ჰქონდეს პერიოდულ ფუნქციას თავის განსაზღვრის არეში წყვეტის წერტილთა სასრული რაოდენობა? იმსჯელეთ $y = \frac{1}{x(x-2)}$ ფუნქციის მაგალითზე.
10. როგორი ფუნქცია იქნება ორი ლუწი (კენტი) ფუნქციის ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და შეფარდება (თუ ამ უკანასკნელს აზრი აქვს)?
11. როგორი ფუნქცია იქნება კენტი და ლუწი ფუნქციების ჯამი, სხვაობა, ნამრავალი და შეფარდება (თუ ამ უკანასკნელს აზრი აქვს)?
12. თუ f ლუწი ფუნქციაა და $g -$ კენტი. როგორი ფუნქცია იქნება $g \circ f$ ან $f \circ g$?
13. როგორი ფუნქცია იქნება ორი ზრდადი (კლებადი) ფუნქციის ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და შეფარდება (თუ ამ უკანასკნელს აზრი აქვს)?
14. თუ f ზრდადი ფუნქციაა და $g -$ კლებადი. გამოიკვლიეთ მონოტონურობაზე $g \circ f$ და $f \circ g$.
15. არის თუ არა შექცევადი ყოველი ზრდადი (კლებადი) ფუნქცია?
16. როგორი ფუნქცია იქნება მონოტონურობის თვალსაზრისით ზრდადი (კლებადი) ფუნქციის შექცეული ფუნქცია?
17. დაამტკიცეთ, რომ ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულები არიან $y = x$ წრფის მიმართ.

ჩვენ აღარ შევჩერდებით იმ თეორიების მიმოხილვაზე, რომელიც მათემატიკის მასწავლებელს გამოადგება საკუთარი პრაქტიკის განხორციელებისას საკლასო ოთახში. გარდა იმ თეორიებისა, რომელიც მასწავლებელს მოეთხოვება სასერტიფიკაციო გამოცდების პროფესიულ უნარების ბლოკში და რომელიც აუცილებელია ნებისმიერი საგნის მასწავლებლისათვის, მათ შევთავაზებდით

გასცნობოდნენ განმავითარებელი სწავლების გალპერინის, ზანკოვის, ელკონინის და დავიდოვის თეორიებს, რომლებსაც ქართულად შეუძლიათ გაეცნონ ჯ. ჯინჯიხაძის წიგნში „პიროვნების სასკოლო მათემატიკური განვითარების ძირითადი პრობლემები, გამომცემლობა „მერიდიანი“, თბილისი 2013“. აღნიშნულ მონოგრაფიაში, ბევრ საინტერესოს ამოიკითხავს მასწავლებელი, რაც მასწავლებელს მნიშვნელოვან დახმარებას გაუწევს და რითაც საკუთარ გაკვეთილს უფრო მრავალფეროვანს გახდის.

დასკვნის მაგიერ: „ადამიანი შეიძლება დიდი ერუდიციის მქონე იყოს, მაგრამ უნარი არ ჰქონდეს ამ ცოდნის განვითარებისა და გამოყენებისა, არ შეეძლოს კვლევა, არ ჰქონდეს საკითხის დამოუკიდებლად გადაჭრის უნარი. ეს გამოწვეულია იმით, რომ მას თეორიული მასალა შესწავლილი აქვს პასიურად, არა კრიტიკულად. ასეთი ადამაინი უსუსურია ცხოვრების წინაშე, როცა მას ახალ სიტუაციაში სჭირდება გარკვევა. მაშასადამე, მარტოოდენ ცოდნის გადაცემა კი არაა გადამწყვეტი, არამედ ამ ცოდნის გამოყენების უნარის გამომუშავება, რათა ადამიანმა ყოველ კონკრეტულ ვითარებაში შეძლოს საჭირბოროტო საკითხების გადაჭრა. ამიტომ სწავლება ისე უნდა მიმდინარეობდეს, რომ მოსწავლე ყოველთვის აქტიურად იყოს ჩაბმული გაკვეთილის პროცესში“ [ქელბაქიანი, 2001]. ჩვენს დაწერილსა და მეცნიერთა სიტყვებს ეხმიანება თანამედროვე კვლევები. რომლებითაც დასტურდება, რომ მოსწავლის შედეგებზე, უამრავ სხვა ფაქტორთან ერთად, მოქმედებს მასწავლებლის ფაქტორები. ესენია:

- მასწავლებლის საკუთარი საქმიანობით კმაყოფილება;
- სწავლების სტრატეგიები: ზოგადი მიდგომები და მათემატიკის სწავლების სტრატეგიები;
- მასწავლებლის შეხედულებები მათემატიკის სწავლების შესახებ;
- მასწავლებლის სერტიფიცირება;

[სახელმწიფო შეფასება მათემატიკაში - IX კლასი, კვლევის ანგარიში 2016]

მოკლედ თუ გავეცნობით ამ შედეგებს, დავინახავთ, რომ

მასწავლებლის საკუთარი საქმიანობით კმაყოფილებას პოზიტიური შედეგები აქვს მოსწავლეთა საქმიანობაზე და თვითშეფასებაც უფრო მაღალი აქვთ მათ მოსწავლეებს. ასევე, დიდი მნიშვნელობა აქვს კონსტრუქტივისტული მიდგომების მქონე მასწავლებელს მოსწავლეთა შედეგებზე. თუ მასწვლებელი მათემატიკას მხოლოდ „წესების და პროცედურების“ მეცნიერებად თვლის, ეს უარყოფითად აისახება მისი მოსწავლეების შედეგებზე, ხოლო თუ მასწავლებელს მათემატიკა წარმოუდგენია, როგორც „კვლევის საშუალება“, მაშინ კავშირი პოზიტიურია. და, რაც მთავარია, იმ მასწავლებლების მოსწავლეები, რომლებიც სერტიფიცირებულები არიან, უფრო კარგ შედეგს აჩვენებენ იმ მოსწავლეებთან შედარებით, რომელთა მასწავლებლებიც არასერტიფიცირებულები არიან. ეს მდგომარეობა სტატისტიკურად მნიშვნელოვანია, მოსწავლეთა სხვა მახასიათებლების გათვალისწინების შემდეგაც. [სახელმწიფო შეფასება მათემატიკაში, კვლევის ანგარიში 2016]. ამიტომაც, „საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლების რეფორმის წარმატებისთვის აუცილებელია თვითონ მასწავლებლები დავარწმუნოთ რეფორმის აუცილებლობაში“ - ფ. კლაინი. რეფორმა კი თითოეული მასწავლებლის საკუთარ თავზე მუშაობით უნდა იწყებოდეს.

კვლევის აღწერა

თემის პრობლემურობის გათვალისწინებით და მრავალმხრივ შესასწავლად კვლევა წარვმართეთ რამდენიმე ეტაპად.

კვლევის **პირველ ეტაპზე** შევისწავლეთ მეორადი ინფორმაცია, რის შედეგადაც დადგინდა, რომ:

- ფუნქციის არსის და, შესაბამისად, მისი სწავლების პრობლემურობა ძალიან კარგად იკვეთება როგორც მეცნიერ მათემატიკოსთა, ისე მეთოდისტების ნააზრევში. რაც კიდევ ერთხელ გვარწმუნებს მისი მეთოდიკურად შესწავლის აუცილებლობაში;

- ფუნქციის სწავლებისას მასწავლებელმა აუცილებლად უნდა იცოდეს ისტორიული კონტექსტი, რომელიც ცხადჰყოფს მისი შესწავლის პრობლემურობასაც;
- მნიშვნელოვანია და აუცილებელი, რომ მათემატიკის მასწავლებლები კარგად ერკვეოდნენ ეროვნულ სასწავლო გეგმასა და კონკრეტულად მათემატიკის სტანდარტში, რათა ზუსტად იყოს მიღწეული ის მიზნები, რასაც კონკრეტული საკითხების სწავლება ემსახურება.

კვლევის მეორე ეტაპზე, არსებული თეორიული შესწავლის საფუძველზე და საკუთარ პრაქტიკაზე დაყრდნობით, განვიხილეთ საგაკვეთილო კაზუსები, რომლებიც საკუთარი თუ სხვა მასწავლებელთა დიდი ხნის გამოცდილებისა და ნაფიქრის შედეგია.

კვლევის მესამე ეტაპზე, მეტი დამაჯერებლობისთვის, სრულყოფისთვის, გადავწყვიტეთ ჩაგვეტარებინა ფოკუსჯგუფი მათემატიკის მასწავლებლებთან, რომ მიგვეღო ინფორმაცია ყველა იმ საკითხზე, რაც ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში ფუნქციის სწავლებას უკავშირდება. ასევე, ჩავატარეთ სიღრმისეული ინტერვიუ დარგის ექსპერტებთან. კვლევაში მონაწილეობდა 28 მასწავლებელი და 4 ექსპერტი. მასწავლებელთა უმრავლესობა ხუთ წელზე მეტია რაც ასწავლიდა მათემატიკას სკოლაში. შერჩეული ექსპერტებისა და სკოლის მათემატიკის მასწავლებელთა თხოვნით, თავს ვიკავებთ მათი ვინაობის დასახელებისაგან. დანართის სახით წარმოდგენილი გვაქვს სადისკუსიო გეგმა. რესპოდენტებს წინასწარ განემარტათ ინტერვიუს მიზანი. რა თქმა უნდა, ორივე შემთხვევაში კითხვარი იგივე იყო, ერთი განსხვავებით, დარგის ექსპერტებს, თუ ისინი იმავდროულად სკოლის მათემატიკის მასწავლებლები არ იყვნენ, არ ვუსვამდით შეკითხვებს, სადაც საკუთარი საგაკვეთილო პრაქტიკის შესახებ იყო საუბარი. ჩვენ ქვემოთ გავაანალიზეთ მიღებული ინფორმაცია, ერთნაირი ხედვები წარმოვადგინეთ შეჯერებული სახით და იმ შემთხვევაში, თუ სკოლის მასწავლებელთა და დარგის ექსპერტებს შორის

გამოიკვეთა აზრთა სხვადასხვაობა, ამაზე გავამახვილეთ ყურადღება. ინტერვიუირება ჩატარდა 2019 წელს. გთავაზობთ ინტერვიუს შედეგებს.

- **თქვენი დაკვირვებით, რა ადგილი უკავია ფუნქციას სასკოლო მათემატიკურ განათლებაში?**
- **თქვენი დაკვირვებით, რა ადგილი უკავია ფუნქციას სკოლის შემდგომ მათემატიკურ განათლებაში?**

ყველა მასწავლებელი თანხმდება იმ საკითხზე, რომ ფუნქცია სასკოლო მათემატიკის ძირითადი საკითხია, რამეთუ სხვა საკითხების შესწავლაც „ფუნქციის შესწავლას ემსახურება“, ხოლო სკოლისშემდგომი განათლებისათვის კი ფუნქციის საფუძვლიანი შესწავლა არის ბაზისი მათემატიკური ანალიზის/კალკულუსის, ფუნქციათა თეორიის და ფუნქციონალური ანალიზის შესწავლისა. „ფუნქცია უმნიშვნელოვანესი ცნებაა“, „სიდიდეებს შორის დამოკიდებულების შესწავლამ ადამიანები მიიყვანა ფუნქციის ცნებამდე“, „სკოლის მრავალი საკითხი ფუნქციონალურ ენაზე უნდა იხსნებოდეს“. აღნიშნულ გარემოებას ეთანხმებიან ექსპერტებიც.

- **რა არის მთავარი გზავნილი, რაც გინდათ, რომ ფუნქციის სწავლებისას თქვენ მოსწავლეებს გადასცეთ?**

მასწავლებელთა მოსაზრებები ასეთი იყო: „ფუნქცია მათ დაეხმარებათ ბევრი საკითხის შესწავლაში“, „ცხოვრებისეული ამოცანები ფუნქციის ენაზე ჩაიწერება“, „ფუნქციის შესწავლით შეძლებენ მრავალი პრობლემის ოპტიმალურად გადაჭრას, თუნდაც ეკონომიკაში“.

- **რომელი უნარები გინდათ, რომ ყველაზე მეტად გამოიმუშავონ მოსწავლეებმა ფუნქციის სწავლებისას? რატომ?**

მასწავლებელთა აბსოლუტური უმრავლესობა თანხმდება, რომ ფუნქციის შესწავლისას მოსწავლეები გამოიმუშავებენ მაღალ სააზროვნო უნარებს, როგორიცაა ანალიზი, სინთეზი, შეფასება. „მთელი ბლუმის ტაქსონომიაა ჩადებული ფუნქციის სწავლებისას“, „ფუნქცია თუ არ გამოუმუშავებს მაღალ სააზროვნო უნარებს, აბა -

რომელი?“, „ჩემი გაკვეთილები პრობლემაზე ორიენტირებული სწავლებით მიმდინარეობს, მოსწავლეთა მსჯელობა ფუნქციებზე ხელს უწყობს კრიტიკული აზროვნების განვითარებას“, „ფუნქცია მაღალ აზროვნებაზეა გათვლილი“, „ტრანსფერული უნარები ერთ-ერთი მთავარია ფუნქციის სწავლებისას“.

აღნიშნულ გარემოებას ეხმიანებიან ექსპერტები და აღნიშნავენ, რომ „მაღალი სააზროვნო უნარების განვითარება ფუნქციის ნიშაა“. ისინი ასევე თვლიან, რომ „ინტელექტუალური უნარების“ განმავითარებელია ფუნქცია. „მათ უნდა შეძლონ „გრაფიკების წაკითხვა“, აი ესაა თანამედროვე უნარები, რომ გადახედოთ მსოფლიოს მოწინავე ქვეყნების მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებს, ეს თვალშისაცემია“.

- **თქვენი აზრით, რამდენად გამოიმუშავებენ აღნიშნულ უნარებს მოსწავლეები? თუ არ გამოიმუშავებენ, – რატომ?**

ყველა მასწავლებლის ერთიანი პასუხი იყო, რომ მათი მოსწავლეები მეტ-ნაკლებად გამოიმუშავებენ აღნიშნულ უნარებს, თუმცა რა იყო შეფასების ინდიკატორები და რით ზომავდნენ ისინი აღნიშნული უნარების განვითარებას, პასუხი არ ჰქონდათ. ზოგიერთმა მასწავლებელმა აღნიშნა, რომ - შემაჯამებელი სამუშაოებით. „ყოველდღე უნდა ვითარდებოდეს უნარები. გამოწვევები ყოველდღეა“.

- **თქვენი დაკვირვებით, რამდენად უკავშირებენ მოსწავლეები ფუნქციას უკვე ნასწავლ/ცნობილ საკითხებს?**

მასწავლებლები გვპასუხობენ, რომ „მეტ-ნაკლებად უკავშირებენ, როგორც კი გეზს მივცემ“, „ამ დროს კითხვა-პასუხის რეჟიმით მივდივართ ხოლმე საბოლოო შედეგთან“, „მოსწავლეთა საკმაოდ დიდ ნაწილს უჭირს ამ ტერმინის შინაარსში ბოლომდე გარკვევა“.

- **თქვენი დაკვირვებით, პირველად როდის ეცნობიან მოსწავლეები ფუნქციის ცნებას? რომელ საგანში? მუშაობთ თუ არა სხვა საგნის მასწავლებელთან აღნიშნული მიმართულებით?**

ამ კითხავზე გამოიკვეთა ის გარემოება, რომ სხვადასხვა საგნის მასწავლებლები ერთმანეთთან არ თანამშრომლობენ, ან თანამშრომლობას მხოლოდ სტიქიური ხასითი აქვს, კონკრეტული პრობლემის გამოკვეთისას. მასწავლებლებმა ვერ დაასახელეს პირველად როდის ეცნობიან ტერმინ „ფუნქციას", მათ მხოლოდ მათემატიკაში იციან ფუნქციის შემოტანის ეტაპები. რამდენიმე მასწავლებლის რეპლიკა იყო ასეთი: „ალბათ ფიზიკაში თუ შემოვა უფრო ადრე დამოკიდებულების ცნება", „ბუნებაშიც მგონია რაღაც მაგდაგვარი იქნება".

ექსპერტები ამბობენ, რომ აღნიშნული საკითხები პირველივე კლასიდან უნდა შემოდიოდეს სხვადასხვა დისციპლინაში ერთდროულად და თანაც, „ცხოვრებისეული, საყოფაცხოვრებო ამოცანებით" და მოჰყავდათ სხვადასხვა ტიპის ამოცანები, რომელთა საშუალებითაც მარტივად იქნებოდა შესაძლებელი ფუნქციის ცნების გაცნობა მოსწავლეთათვის.

- თქვენი აზრით, რამდენად აინტერესებთ მოსწავლეებს ფუნქციის საკითხები? კონკრეტულად რომელ საკითხებს გამოყოფდით, რომელიც მოსწონთ? რატომ? რომელ საკითხებს გამოყოფდით რომლებიც არ მოსწონთ მოსწავლეებს? რატომ?

მასწავლებლები ამბობენ, რომ მათ მოსწავლეებში ფუნქციის საკითხებით დაინტერესება ნამდვილად შეიმჩნევა და ბევრი საკითხის გამოყოფა ვერ შეძლეს.

„მოსწავლე რასაც ხედავს, იმას ხალისით ეკიდება", „გრაფიკული გამოსახვა უფრო მოსწონთ", „პარაბოლები". ასევე, იყო პასუხი - „ნაკლებად აინტერესებთ, როცა სირთულეს ხედავენ".

- ყველაზე ძალიან რა გიტაცებთ ფუნქციის სწავლებისას? რატომ?
- არის თუ არა ისეთი საკითხი, რომლის ახსნაც თავად არ მოგწონთ ფუნქციის სწავლებისას? რატომ?

„ფუნქციის სწავლებისას მომწონს მისი თვისებების გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას", „პარამეტრის შემცველი ამოცანები ძალიან ლამაზად იხსნება", „კვადრატული ფუნქცია მომწონს. ფუნქციის გამოკვლევა", „ფუნქციის გრაფიკების

აგება და მათი გარდაქმნების სწავლება დიდ სიამოვნებას მანიჭებს, თანაც გაკვეთილზევე მაქვს შესაძლებლობა ვაჩვენო ეკრანზე“. რაც შეხება საკითხებს, თუ რომლის ახსნა არ მოსწონთ მასწავლებლებს, აქ თავი შეიკავეს, მაგრამ იყო რამდენიმე რეპლიკა: „ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკები რომ გადამაქვს ერთეულოვანი წრეწირიდან საკოორდინატო სიბრტყეზე“, „რაღა დაგიმალოთ, პერიოდების სწავლება“, „ექსტრემუმის წერტილები მეზარება ხოლმე“, „ფუნქცია ისეთი რამეა, გააჩნია მოსწავლეთა დამოკიდებულებებს“. ზოგი კი შეეწინააღმდეგა: „გააჩნია რა ფორმით შევთავაზებთ, ეს ჩვენზეა დამოკიდებული“.

- **იმ პერიოდის მანძილზე, რაც თქვენ ამ საგანს ასწავლით, შეიცვალა თუ არა საქართველოში მიდგომა ფუნქციის სწავლებისადმი? თუ შეიცვლა: კერძოდ რა შეიცვალა? როგორ შეაფასებდით ამ ცვლილებას/ცვლილებებს?**

  მასწავლებელთა უმრავლესობა ცვლილებებს აფასებს დადებითად:

  „რა თქმა უნდა, შეიცვალა - ადრე ძირითადი ყურადღება ეთმობოდა ფუნქციის გრაფიკების სწავლებას და მის გამოკვლევას“, „ახლა რამდენადმე შეცვლილია, ფუნქცია კი დარჩა ფუნქციად, მაგრამ ბევრი რამ დაემატა, გეომეტრიული გარდაქმნები მაგალითად“, „დადებითად შევაფასებდი, ეს მრავალფეროვნება ეფექტური სწავლების რესურსია“. ზოგიერთი მასწავლებლის აზრით კი „დაეტოვებინათ ძველებურად, რას ერჩოდნენ“.

  ექსპერტები ერთხმად აღიარებენ, რომ ფუნქციის შესწავლისადმი მიდგომა შეცვლილია, მათი უმრავლესობა ყვებოდა პროგრამების გარდაქმნებზე, თუ რა პროცესები მიმდინარეობდა ახალი სტანდარტისა და სახელმძღვანელოების შექმნის მიზნით.

- **ეთანხმებით თუ არა ე.წ. ალგებრისა და გეომეტრიის ერთ სახელმძღვანელოში გაერთიანებას და რა უნდა იყოს ამის გამომწვევი მიზეზები?**

  მიუხედავად იმ გარემოებისა, რომ ბევრ ცვლილებას დადებითად აფასებენ მასწავლებლები, მაინც ჩნდება მოსაზრება, რომ მასწავლებლებს სურთ ალგებრისა და გეომეტრიის ცალ-ცალკე სწავლება: „ვფიქრობ, ალგებრა და გეომეტრია არ უნდა

აირიოს ერთმანეთში“, „ის ალგებრა აღარ არის“, „ეს დიდი შეცდომა იყო, გეომეტრიის აგების აქსიომატური მეთოდი საერთოდ აღარ ჩანს“, „არა მხოლოდ ალგებრას და გეომეტრიას გავყოფდი, არამედ მაღალ კლასებში ფუნქციებზე საერთოდ ცალკე გავაკეთებდი წიგნს“. აღნიშნული გარემოება გააპროტესტა რამდენიმე მასწავლებელმა. მათი აზრით „დიახაც რომ მნიშვნელოვანი და საჭიროა ამ ორი საგნის გაერთიანება“, „ზუსტად ფუნქციაა ის საკითხი, რომელიც მათემატიკის ერთიანობის საფუძველია“, „მე კი ვეთანხმები გაერთიანებას, თუმცა ზოგიერთ სახელმძღვანელოში ფორმალურ ხასიათს ატარებს“. აღნიშნულ საკითხზე ექსპერტებიც ერთხმად თანხმდებიან, რომ „მათემატიკის ფორმალური დაყოფა სხვადასხვა საგნად, განსაკუთრებით სასკოლო საფეხურზე, ყოვლად დაუშვებელია და ფუნქციის/ასახვის შესწავლა ამაში ძალიან გვეხმარება“. მათი აზრით ფუნქციაა ის საკითხი, რომელიც მათემატიკის ერთი შეხედვით განსხვავებულ მიმართულებებს საერთო პერსპექტივიდან უყურებს და, რა თქმა უნდა, აკავშირებს ერთმანეთთან.

- **რა საკითხების სწავლებისას იყენებთ ხოლმე ბაზისად ფუნქციას და რამდენად მნიშვნელოვნად მიგაჩნიათ საკითხის აღნიშნული სახით გადმოცემა?**

მოცემულ კითხვაზე მასწავლებლებმა დაასახელეს გეომეტრიული გარდაქმნები და მიმდევრობები.

- **თქვენი დაკვირვებით, რამდენად მნიშვნელოვანია გეომეტრიული გარდაქმნების სწავლება სკოლაში?**
- **როგორ უნდა იყოს აგებული მისი სწავლების საფუძვლები?**
- **რამდენად მნიშვნელოვნად მიგაჩნიათ საკითხის აღნიშნული სახით გადმოცემა?**

ის მასწავლებლები, რომლებიც ეთანხმებოდნენ ალგებრისა და გეომეტრიის „გაერთიანებას“, ამბობენ, რომ მეომეტრიული გარდაქმნების სწავლება „მნიშვნელოვანია ასახვათა უკეთ გააზრებისათვის და, აღარაფერს ვამბობ ასახვათა კომპოზიციების შესწავლისას“, „ურთიერთცალსახა შესაბამისობა კარგად ჩანს“, „გეომეტრიულ გარდაქმნებზე გაკვეთილები ძალიან სახალისოა, იმიტომ რომ

მარტივი და საინტერესოა მათთვის. ხშირად ვატარებთ ხოლმე ინტეგრირებულ გაკვეთილებს, სადაც მოსწავლეთა მოტივაცია უჩვეულოდ მაღალია“, „იგრძნობა მათემატიკის სილამაზე“. ექსპერტებმა აღნიშნეს, რომ „ფუნქციის ცნება და გეომეტრიული გარდაქმნები IX კლასში ერთდროულად შემოდის და ეს ძალიან კარგია“, „გეომეტრიული გარდაქმნები ეს ის აპარატია, რომლითაც უფრო მარტივად იხსნება პრაქტიკული ამოცანები“.

- **წარმოიდგინეთ, რომ საკლასო ოთახში თქვენს მოსწავლეებს დაუსვით შეკითხვა ფუნქციის რაობასთან დაკავშირებით, - ყველაზე მეტად რა პასუხებს გაიგონებდით მათგან? (რასთან ასოცირდება მათთვის ფუნქცია?)**

ინტერვიუების ჩატარებისას და შემდგომ მათი ანალიზის დროს აშკარად გამოიკვეთა შემდეგი გარემოება, რომ კერძო სკოლის მასწავლებლების უმეტესობათა პასუხი იყო „გრაფიკი“, ხოლო საჯარო სკოლების მასწავლებლებისგან სხვადასხვა პასუხი მოდიოდა „განტოლება“, „შესაბამისობა“, „ცვლადებს შორის შესაბამისობა“, „სიმრავლეებს შორის შესაბამისობა“, „გრაფიკი“, „საყოფაცხოვრებო ამოცანების გეომეტრიული ინტერპრეტაციით ამოხსნა“.

2. თქვენი აზრით, არის თუ არა პრობლემები ფუნქციის სწავლებისას ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საბაზო და საშუალო საფეხურზე?

- **თქვენი აზრით ფუნქცია მიეკუთვნება თუ არა იმ საკითხთა ჩამონათვალს მათემატიკაში, რომლის სწავლა/სწავლებაც პრობლემურია?**
- **რომელ საკითხებს გამოყოფდით პრობლემურობის თვალსაზრისით? რატომ თვლით ასე?**
- **შეძლებისდაგვარად, ჩამოგვითვალეთ ყველა ის განმაპირობებელი ფაქტორი, რომელიც ფუნქციის სწავლებაში პრობლემას ქმნის?**

მასწავლებლები ამბობენ რომ სწავლებაში პრობლემა არ აქვთ, თუმცა ასახელებენ რიგ გარემოებებს, რომლებიც ხელს შეუწყობს ფუნქციის სწავლების უკეთ წარმართვას. ძირითადად, საუბარი მიდინარეობდა მატერიალურ-ტექნიკურ ბაზაზე. ასევე, მოსწავლეთა დიდ რაოდენობაზე, რაც ხელს უშლიდათ „თითოეულ

მოსწავლესთან მისვლამდე“. ბევრი მასწავლებელი ასახელებდა საათების მცირე რაოდენობას, რომლებიც ეთმობოდა ფუნქციის სწავლებას. საფეხურის თვალსაზრისით, ყველაზე პრობლემურად საბაზო საფეხური გამოკვეთეს, განსაკუთრებით, IX კლასი.

პრობლემურობის თვალსაზრისით ფუნქციის წყვეტაზე ისაუბრეს. ასევე, რამდენიმე მასწავლებელმა ახსენა ის გარემოება, რომ მაგალითად, მონოტონურობის ან ნიშანმუდმივობის შუალედების ჩაწერისას მოსწავლეებს გაუჭირდათ იმის გააზრება, თუ რატომ უნდა დასახელდეს შუალედი Ox ღერძიდან და არა Oy ღერძიდან. გარდა ამისა, პრობლემურად ჩათვალეს საკითხი, რომელშიც ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნის ფორმულის გამოყვანაზე იყო საუბარი. ძალიან მნიშვნელოვნად თვლიდნენ გრაფიკებს, რომლებსაც მოსწავლეები ვერ იყენებდნენ ამოხსნისას. ზოგიერთმა მასწავლებელმა თქვა, რომ „დაინტერესებაა პრობლემა“, „ტერმინი იციან და შინაარსს ცოტა მერე იგებენ, ესაა პრობლემა“.

- **რას გვეტყოდით მათემატიკის მასწავლებელთა კვალიფიკაციაზე ზოგადად და ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებით - კონკრეტულად?**

მასწავლებელთა უმრავლესობა თვლის რომ საკმაოდ აქვს ის უნარები, რომლებიც დაეხმარება ფუნქციებზე ეფექტური გაკვეთილის ჩატარებისას. ზოგადად, სხვა მასწავლებლების კვალიფიკაციაზე თავი შეიკავეს. რაც შეეხება ექსპერტების მოსაზრებებს, ისინიც თვლიან, რომ მასწავლებელთა მზაობა მეტ-ნაკლებად დამაკმაყოფილებელია, მაგრამ მნიშვნელოვანია ყოველდღიური განვითარება და „მეცნიერებისათვის ფეხის აწყობა“, „მასწავლებლებმა მოსწავლეები უნდა დააინტერესონ გამოყენებითი ტიპის ამოცანებით, მაგალითად ორი სიტუაციიდან უფრო ხელსაყრელი მდგომარეობის შერჩევაზე ამოცანებით. აქ ფუნქცია რამდენიმე ფორმულით მოიცემა, რაც ზუსტად ფუნქციის თანამედროვე გაგების საფუძველია“, „ხშირ შემთხვევაში, თვითონ მასწავლებლები არ აძლევენ გამოყენებითი ტიპის ამოცანებს“, „მე პირადად, IV კურსზე როდესაც ვეკითხები სტუდენტს ფუნქციის

რაობის შესახებ, მათ ეს არ იციან. კი ისწავლეს, მაგრამ ცოტა დრო დაეთმო ფუნქციას, ფუნქციის თვისებებს. სტუდენტები ვერ მპასუხობენ, „დამოკიდებულებაა“, - ამას მეუბნებიან“, „მასწავლებელი მიჩვეულია იმის ახსნას, რაც სკოლაში ისწავლა და არა, რაც უმაღლესში ისწავლა. რაც უმაღლესში ისწავლა, იმას ვერ იყენებს სკოლაში საკუთარი საქმიანობის გასაუმჯობესებლად“, „მასწავლებელმა გაცილებით მეტი უნდა იცოდეს, ვიდრე ასწავლის. ის კი არ უნდა იცოდეს, რასაც ასწავლის!“.

- რას გვეტყოდით ეროვნულ სასწავლო გეგმაზე/მათემატიკის სტანდარტზე? (ფუნქციასთან მიმართებაში)

მასწავლებლები თვლიან, რომ მათემატიკის სტანდარტი ძალიან გადატვირთულია, თუმცა კონკრეტულ საკითხს როცა ვუსვამდით, თუ რას თვლიდნენ ზედმეტად, აშკარად იგრძნობოდა, რომ მასწავლებლები ამოდიოდნენ იმ სახელმძღვანელოდან, რომლითაც უწევდათ სწავლება სკოლაში. „სტანდარტი არაა პრობლემა. ეს არის ცოცხალი ორგანიზმი, ყველაფერი მასწავლებელზეა დამოკიდებული, კლასიდან გამომდინარე“ , „“ყველაფერი სტანდარტიდან მოდის“.

ექსპერტები აღნიშნავენ, რომ მათემატიკის სტანდარტი, რომლითაც ახალი სახელმძღვანელოები უნდა შეიქმნას საბაზო და საშუალო საფეხურზე, უკვე „საკმაოდ სერიოზულია“, გამოსწორებულია ბევრი რამ და მაღალ კლასებშია გადატანილი შედარებით „ძნელი“ საკითხების სწავლება.

- რას გვეტყოდით მათემატიკის გრიფირებულ სახელმძღვანელოებზე, რომლითაც მიმდინარეობს სწავლება სკოლაში? (ფუნქციასთან მიმართებაში)
- მათ შორის რომელ სახელმძღვანელოს მიანიჭებდით უპირატესობას და რატომ? (ამოცანების რაოდენობა, ამოცანათა მრავალფეროვნება,მასალის გადმოცემის სიცხადე, მასწავლებლის წიგნი)
- ესგ -ის მიხედვით სწავლება უნდა იყოს დეკლარატიული, პროცედურული, პირობისეული - რამდენადაა დაცული ეს ყველაფერი აღნიშნულ სახელმძღვანელოებში?

მასწავლებლები დადებითად აფასებენ იმ გარემოებას, რომ სხვადასხვანაირი შესაბამისობის შესწავლა გვხვდება დაწყებით საფეხურზეც, რაც არის შემამზადებელი ეტაპი ფუნქციის უკეთ გასააზრებლად საბაზო და საშუალო საფეხურზე. ზოგიერთი მასწავლებელი „უჩიოდა“ სახელმძღვანელოებში საკითხის ახსნის მეთოდიკას, სავარჯიშოების სიმცირეს და ამბობდნენ, რომ არ ჩანდა ისეთი ტიპის ამოცანები, რომლებიც ფუნქციის გამოყენებითი ხასითის მაჩვენებელი იქნებოდა. თუმცა იყვნენ ისეთებიც, რომლებიც თვლიან რომ სავარჯიშოთა რაოდენობა საკმაოდ მრავალფეროვანი იყო, მათ შორის გამოყენებითი ხასიათისაც, და არ საჭიროებდა დამატებას. ზოგიერთი მასწავლებელი ასახელებდა დამხამრე ლიტერატურას, რომლითაც „ავსებდა“ სასკოლო სახელმძღვანელოებს. მასწავლებლები დავობდნენ სახელმძღვანელოთა ხარისხზე და ამ დავაში მაინც გამოიკვეთა ისეთი სახელმძღვანელოები, რომლებიც, მასწავლებელთა აზრით, სტანდარტს აკმაყოფილებს. მათი პასუხები ასეთი იყო: „კვადრატულ ფუნქციას ჩავსვამდი დიდი რაოდენობით“, „მეცხრე კლასამდე ცოტა განვტვირთავდი პროგრამას და მეათეში - დიდი დატვირთვა“, „მეათეში იმეორებენ ბევრ რაღაცას და ინტერესი ეკარგებათ, ეს ხომ შარშან ვისწავლეთო“, „გამოყენებაზე ამოცანები ნაკლებადაა“, „წიგნებში, თემის დასაწყისში რომ ეწეროს აქა და აქ გამოგადგებათო, კარგია“, „ამოცანები გათვლილი უნდა იყოს გამოყენებაზე. აი აქა და აქ გამოგადგებათ“.

ესპერტების თვალსაზრისით, საქართველოს რეალობაში, ნამდვილად გვხვდებოდა ისეთი სახელმძღვანელოები, რომლებიც „კარგ გზას ადგანან“ და მრავლად აქვთ შემოთავაზებული ავტორებს გამოყენებითი ხასიათის სავარჯიშოები. ზოგიერთი თვლიდა, რომ სახელმძღვანელოები „უფრო და უფრო უნდა იხვეწებოდეს და მორგებული იყოს ბავშვის ინტერესებზე“. „გრიფირებული სახელმძღვანელოების შექმნა რთული პროცესია. ისინი განსხვავდება რუსული წიგნებიდან, რუსული პროგრამებიდან, რომლებიც ჯერ კიდევ ყოფენ მათემატიკას ფორმალურად სხვადასხვა მიმართულებებად. კი გამოჩნდა რამდენიმე თანამედროვე ხასიათის

წიგნი, მაგრამ მაინც. ბრძოლა ახლებური სახელმღვანელოების შესახებ რამდენი ხანია გრძელდება“, „გრიფირების პროცესი სწორი არაა. რამდენიმე წიგნს მისცეს გრიფი. ფასი დაუკლო. ზოგიერთმა და უღირსმა წიგნმა აჯობა ღირსეულ წიგნს“, „სახელმძრვანელოები არსებობს, ამოცანა კვადრატული განტოლებით იხსნება და კვადრატული განტოლება ნახსენებიც კი არა აქვთ ჯერ ავტორებს. მეთოდიკურ უზუსტობებზე აღარაფერს ვამბობთ, ფუნქციის პერიოდულობასთან მიმართებაში თუნდაც“.

- **რას გვეტყოდით ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე ფუნქციასთან დაკავშირებულ ამოცანებზე? რამდენად შესაბამისობაშია ის სკოლაში შესწავლილ მასალასთან? მათემატიკის სტანდარტთან?**

მასწავლებლები თვლიან, რომ სკოლაში შესწავლილი მასალა შესაბამისობაშია ერთიან ეროვნულ გამოცდებზე შეთავაზებულ ფუნქციასთან დაკავშირებულ ამოცანებთან, თუმცა გაიხსენეს რამდენიმე ამოცანა, რომელიც, მათი აზრით, „საკმაოდ რთული იქნებოდა ყველაზე ძლიერი მოსწავლისთვისაც კი“.

- **რას გვეტყოდით კონსტრუქტივისტულ მიდგომებზე ფუნქციის სწავლა-სწავლებისას?**

მასწავლებლებმა გაიხსენეს, რომ ტრენინგებზე მიღებული ცოდნა რამდენადმე დაეხმარათ გაკვეთილის ჩატარებისას კონსტრუქტივისტული მიდგომებით. კონკრეტულად ფუნქციებთან მიმართებაში ერთ-ერთმა მასწავლებელმა ახსენა მოსწავლეთა დაყოფა აუდიალად, ვიზუალად და კინესთეტიკად, „ასეთი მიდგომა ძალიან დამეხმარა ფუნქციის თვისებების სწავლებისას“, „როგორი რეფორმაც არ უნდა ჩატარდეს, ყველაფერი გადის მასწავლებელზე“.

- **რას გვეტყოდით ციფრული ტექნოლოგიების გამოყენებაზე, ადგილსა და დანიშნულებაზე ფუნქციის სწავლებისას?**
- **რამდენად იყენებენ მასწავლებლები აღნიშნულ საშუალებებს? რა საკითხების სწავლებისას?**

აღნიშნული კითხვაზე ყველა მასწავლებელი ცალსახად თანხმდება, რომ ციფრული ტექნოლოგიების დანერგვა გაკვეთილზე ყველანაირად შეუწყობდა ხელს

მასწავლებლებს ძალიან მცირე დროში ეფექტის მისაღწევად. „ერთხელ ააგოს გრაფიკი და მერე ტექნოლოგიებით“. კერძო სკოლის მასწავლებლები აღნიშნავდნენ, რომ მათ ისედაც ჰქონდათ „ეს ფუფუნება“ თითოეულ ოთახში და იყენებდნენ საჭიროებისამებრ, ხოლო საჯარო სკოლის მასწავლებლები კი ითხოვდნენ, რომ შესაძლებლობა ჰქონოდათ არა ისტ-კაბინეტში გაკვეთილის ჩატარებისა, არამედ საკლასო ოთახებშიც. „ჩემთვის სულ სხვა შედეგი გამოიღო“. ერთმა მასწავლებელმა კი აღნიშნულთან ერთად სურვილი გამოთქვა, რომ სკოლას დაეფინასებინა მასწავლებელთათვის ინგლისური ენის შესწავლა, რათა შესალებლობა მისცემოდა უცხოური გამოცდილების გაცნობისა და საკუთარ პრაქტიკაში დანერგვისა. ყველაზე მეტად, თუ რა საკითხის ახსნისას იყენებდნე მასწავლებლები აღნიშნულ საშუალებებს, მასწავლებლებისგან მოდიოდა პასუხი - „გრაფიკების აგებები“, „გრაფიკების გარდაქმნები“, „განსაზღვრის არის თითოეულ წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის დასანახად და გამოსათვლელად“, „გრაფიკების გადაადგილება ადვილია“. ასევე, აღმოჩნდა მასწავლებელი, რომელიც ამბობდა, რომ მოსწავლემ თვითონ ააგოს გრაფიკი, უკეთესი იქნებოდა „რეცეპტი რომ ჩაგაწერინონ ისე უფრო კარგად ააგებთ, თუ თქვენ თვითონ გააკეთოთ?!“.

3. თქვენ როგორ ასწავლით ფუნქციას? თქვენი დაკვირვებით, რა არის ფუნქციის სწავლების მოგვარების საწინდარი?

- **თქვენი აზრით, რისი მოგვარება შეცვლიდა მიდგომებს ფუნქციის სწავლებისას და აამაღლებდა ეფექტიანობას? რატომ ფიქრობთ ასე?**
- **რას გვეტყოდით მათემატიკის მასწავლებელთა მომზადების საუნივერსიტეტო კურსებზე?**
- **რას გვეტყოდით მათემატიკის სწავლების ზოგადი/კერძო მეთოდიკის კურსზე ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებით?**
- **რას გვეტყოდით სასკოლო მათემატიკის მეცნიერული საფუძვლების კურსზე ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებით?**

- რას გვეტყოდით მათემატიკის ისტორიის კურსზე ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებით?

მასწავლებლები არ უხვევენ გვერდს ზემოთ ჩამოთვლი გარემოებებს და ისევ ასახელებენ საათების სიმცირეს, მოსწავლეთა დიდ რაოდენობას და მატერიალურ-ტექნიკურ ბაზას, თუმცა არაფერს ამბობდნენ მასწავლებელთა მომზადებაზე. ჩვენ მიერ შეთავაზებული იყო რამდენიმე გარემოება, რომელიც შესაძლოა შეცვლიდა სწავლების მიდგომებს. ინტერვიუერთა უმრავლესობას არც კი ჰქონდა უნივერსიტეტში იმის შესაძლებლობა, რომ გასცნობოდა მათემატიკის ისტორიას ან სასკოლო მათემატიკის მეცნიერულ საფუძვლებს. ძალიან მცირე აღმოჩნდა იმათი რაოდენობა, ვისაც საუნივერსიტეტო განათლებისას ეკითხებოდათ მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის კურსი, თუმცა კონკტრეტული საკითხების სწავლების შესახებ უკეთეს შემთხვევაში ძალიან მწირი ინფორმაცია მიეწოდათ, ან - საერთოდ არაფერი. სხვათაშორის, მასწავლებლები ძალიან დაინტერესდნენ აღნიშნული კურსებით და გამოთქვეს მზაობა მათი მოსმენის შესახებ. ზოგიერთი ფიქრობდა, რომ ეს კურსები რომ გაერთიანებულიყო და მასწავლებლებისთვის საჭირო ინფორმაცია ჩადებულიყო მხოლოდ, დიდი სიამოვნებით მოისმენდა.

„მეთოდიკაში ფუნქციაზე არაფერი წამიკითხავს, ძალიან მცირე დოზით იყო შეტანილი“, „ძალიან კარგი იქნება გავიაროთ კურსები და სადაც „მყარად ვერ ვდგავართ“ იმაზე მოგვესმინა ლექციები“, „მეცნიერული საფუძვლები ნამდვილად არ გაგვივლია“, „მათემატიკის ისტორია - რატომაც არა! კარგი იქნებოდა მაგის გავლა. მოსწავლეებსაც რომ მივაწოდოთ მოტავაციის გაზრდის მიზნით, ეგაც კაია“. იყო ასეთი პასუხიც, „რავიცი, რამეში დაგვეხმარება მათემატიკის ისტორია?“.

ექსპერტების აზრითაც, „მასწავლებელთათვის უნდა არსებობდეს კვალიფიკაციის ასამაღლებელი კურსები. მართალია ისწავლა, მაგრამ კარგად არ იციან. არის საკითხები, რომელიც არასწორადაა განმარტებული სასკოლო სახელმძღვანელოებში, თუნდაც რაციონალური რიცხვის ცნება. არის რაღაც ცნებები, რაც ბოლომდე არ განიმარტება. მაგ. ნატურალური რიცხვის ცნება,

ფუნქცია. მთავარია ეს ყველაფერი მოსწავლეს აღაწერინოს მაგალითებით. ფუნქციონალური დამოკიდებულება გაარჩევინოს არაფუნქციონალური დამოკიდებულებიდან“, „ფუნქცია პირველადი ცნება კია და ამბობენ, რომ შესაბამისობაა. მერე ამ „შესაბამისობას“ სჭირდება განმარტება და ა.შ. არაა მთავარი, რომ კონკრეტული განმარტება იცოდეს მოსწავლემ. მთავარია, მასწავლებელმა მიაწოდოს, რომ ფუნქცია კერძო სახის შესაბამისობაა, კერძო სახის მიმართებაა. მთავრია, მოსწავლეს გააგებინოს, რომ რა არის ფუნქციონალური დამოკიდებულება, ფუნქციონალური შესაბამისობა“, „ცალკეული ფუნქციების განხილვის დროს მასწავლებელმა უნდა დაიწყოს პრაქტიკული ამოცანებით, საიდან მოდის“, „სწავლების დროს, ყურადღება მივაქციოთ, რომ განსაზღვრის არეზე და მნიშვნელობათა სიმრავლეზე „დაშვება“ უნდა გაკეთდეს, რათა ისინი ვიპოვოთ. ფუნქციის მოცემა ხომ ისედაც ნიშნავს მათ მოცემას“, „ცხადია, მეცნიერული საფუძვლების კურსის მოსმენა აუცილებელია. არა მარტო ეს, ხშირ შემთხვევაში, ამოცანების კეთება არ იციან მასწავლებლებმა“, „ადრე ვალდებული იყო დრო და დრო გაეარათ კვალიფიკაციის ასამაღლებელი კურსები - ეს უნდა აღდგეს!“, „მათემატიკის მასწავლებლებმა კარგად უნდა იცოდნენ მათემატიკური წინადადებები: ცნების განსაზღვრება და დამტკიცება. ასევე კარგად უნდა იცოდნენ ცნების განსაზღვრების შემოღების გზები: აქსიომატურად თუ სხვანაირად“, „მასწავლებელმა შეიძლება გრაფიკი ვიზუალიზაციის გარეშეც ახსნას. დავუშვათ, გრაფიკად მიიჩნევა წყვილების სიმრავლე. თანამედროვე სახელმძღვანელოებში მასეა. შეიძლება კოორდინატთა სისტემა საერთოდ არც დაგვჭირდეს“.

- რას გვეტყოდით ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებულ მეთოდიკურ ლიტერატურაზე ?
- მიგიღიათ თუ არა კონფერენციებზე/სამუშაო შეხვედრებზე მონაწილეობა მათემატიკის სწავლებასთან დაკავშირებით და გახსენდებათ თუ არა რაიმე ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებით?

- რას გვეტყოდით ახალგაზრდულ ჟურნალებზე მათემატიკის პოპულარიზაციასთან დაკავშირებით?
- შეძლებისდაგვარად დაგვისახელეთ სახელმძღვანელო/ ლექციათა კურსი/ მონოგრაფია/ სტატია ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებით.
- მათ შორის რამდენია გამოქვეყნებული 2010 წლის შემდგომ?
- რამდენად მუშაობთ საგნობრივ კათედრაზე კონკრეტული საკითხის სწავლა-სწავლებასთან დაკავშიებით?

აღნიშნულ კითხვებზე მასწავლებლებს პასუხის გაცემა გაუჭირდათ. მხოლოდ ერთი აღმოჩნდა ისეთი მასწავლებელი, რომელიც მონაწილეობას იღებდა კონფერენციებში. რაც შეეხება სამუშაო შეხვედრებს სკოლაში საგნობრივ კათედრაზე, თუ სკოლის გარეთ, უმეტესობას მონაწილეობა ჰქონდა მიღებული. სტატიებისა და ლექციათა კურსების შესახებ მასწავლებლები ასახელებდნენ სხვადსხვა ვებგვერდებზე გამოქვეყნებულ ვიდოებს და ელექტრონულ რესურსებს, რომელთა უმრავლესობაც რუსულ ენაზე იყო - იმიტომ რომ უცხოური ენებიდან მასწავლებელთა უმრავლესობა ფლობდა რუსულ ენას, ასევე აღნიშნავდნენ, რომ უმაღლეს სასწავლებლებში იყენებდნენ რუსულ ლიტერატურას. პასუხები ასეთი იყო: „რაც ვიცი, არანაირი ახალგაზრდული ჟურნალი არ არსებობს", „აუცილებელიც უნდა იყოს კათედრაზე აზრთა გაცვლა-გამოცვლა". ექსპერტები კი თვლიან, რომ მიუხედავად მრავალფეროვანი მასალებისა, რომლის მოძიებაც მასწავლებლებს უცხოურ ენებზე ნამდვილად შეუძლიათ, მაინც მნიშვნელოვანია „მათემატიკური გემოვნების ფლობა" და ამიტომაც მასწავლებელი შეიძლება შევიდეს შეცდომაში. მათ მიაჩნიათ, რომ პირველ ეტაპზე, „მეცნიერის მიერ წაკითხული ლექცია მოისმინონ". ასევე, „არის ჟურნალი „მათემატიკა", გამოწერილი აქვთ? „ხანის აკადემია" არსებობს კიდევ".

- თქვენი ნება რომ იყოს, რას შეცვლიდით სასკოლო მათემატიკის კურსში ფუნქციის სწავლებასთან დაკავშირებით.
  (სახელმძღვანელო/დრო/კლასი/საკითხი/დავამატებდი/ამოვიღებდი პროგრამიდან...)

მასწავლებლები საკუთარ პრაქტიკაზე დაყრდნობით გამოთქვამდნენ სურვილებს, რომ ზოგიერთი საკითხი საბაზო საფეხურიდან გადაეტანათ საშუალო საფეხურზე, მაგალითად, ასახვათა კომპოზიცია და სხვადასხვა ფუნქციის თვისებების შესწავლისას ძირითადი ყურადღება გაემახვილებინათ გრაფიკებზე. მათ არცერთი საკითხი არ დაუსახელებიათ, რომელსაც ამოიღებდნენ პროგრამიდან. უბრალოდ, საშუალო საფეხურს „უფრო დატვირთავდნენ, ვიდრე საბაზო დაფეხურს". ასევე, „ბავშვებს ვკითხავდი რაში გამოიყენებდნენ ფუნქციას და რას გამოიყენებდნენ საერთოდ ფუნქციებიდან. საინტერესეო იქნებოდა და მაგის მიხედვით ვიმოქმედებდი".

- ჩვენ მიერ განხილული იყო საგაკვეთილო კაზუსები. გთხოვთ, გაეცნოთ რამდენიმე მათგანს. რამდენად ეფექტურად მიგაჩნიათ ფუნქციის სწავლებისას ასეთი მიდგომები?

ძალიან სასიხარულო გამოდგა ის გარემოება, რომ მასწავლებლები ჯერ დიდი სიამოვნებით გაეცნენ ჩვენ მიერ შეთავაზებულ საგაკვეთილო სიტუაციებს, შემდგომ კი ამბობდნენ რომ აუცილებლად გამოსცდიდნენ საკუთარ საგაკვეთილო პრაქტიკაში. რამდენიმე მასწავლებელმა კი თქვა, რომ მათაც ხშირად გამოუყენებიათ ასეთი მიდგომები სხვადასხვა საკითხის ახსნის დროს. მთავარი მაინც ის იყო, რომ მასწავლებლებმა თქვეს, რომ „ასეთი სიტუაციები უნდა ქვეყნდებოდეს და ვეცნობოდეთ მასწავლებლები", „სხვისი პრაქტიკის დანერგვა ძალიან კარგი იქნებოდა, თუკი ნამდვილად აპრობირებულია", ზოგმა თქვა, რომ „მოდიფიცირებული სახით მაინც შევიტანდი გაკვეთილზე, თუ პირდაპირ ასეთი სახით არა". ექსპერტების მხრიდან ასეთმა მიდგომებმა მოწონება დაიმსახურა და თქვეს, რომ „თითოეულ წვრილმანზე ასე ჩაკირკიტება და ჩაძიება სკოლის პედაგოგებს თუ მოუწევთ ხოლმე, რომლებიც უშუალოდ არიან სასწავლო პროცესის განმახორციელებელნი", „სკოლის მასწავლებლებისგან ჩვენც ბევრს ვსწავლობთ და სხვანაირად შევხედავთ ხოლმე არსებულ რეალობას", „საერთოდაც, სკოლის მასწავლებლების აზრებს და მიდგომებს რომ ხშირად უსმენდნენ, იქნებ

უკეთესობისკენაც შეცვლილიყო მდგომარეობა“, „საგაკვეთილო პროცესის დროს გამოყენებული ტექნიკები, რომლებსაც შედეგზე გაყავხარ დროში გამოცდილი უნდა იყოს და, შესაბამისად, მივესალმები“.

დასკვნის სახით ვიტყვით, რომ ყველა მასწავლებელი და ექსპერტი თანხმდება იმ საკითხზე, ფუნქციების სწავლისას მოსწავლეებში ყალიბდება მათემატიკური კულტურა. ასევე, მისი სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში მხოლოდ მათემატიკას არ წაადგება. იგი იმ საკითხთა ჩამონათვალში პირველია, რომელიც „აერთიანებს“ არამარტო მათემატიკის სხავადასხვა მიმართულებებს, არამედ სასკოლო საფეხურზე ბევრ სხვადასხვა საგანსა და სასკოლო და საუნივერსიტეტო მათემატიკას შორის კი პირდაპირ დამაკავშირებელ ხაზს წარმოადგენს. საკითხი, რომელიც მაღალი სააზროვნო უნარების განვითარებისათვის საუკეთესო საშუალებაა. შესაბამისად, მისი საფუძვლიანად შესწავლით უნდა იყვნენ დაინტერესებულები სხვადასხვა საფეხურისა და სხვადასხვა დისციპლინის პედაგოგები. აუცილებლად გასათვალისწინებელია ექსპერტების მოსაზრებები იმასთან დაკავშირებით, რომ ფუნქცია უფრო დიდი დოზითა და ინტენსივობით შემოდიოდეს პირველსავე კლასიდან ისტორიული კონტექსტის გათვალისწინებით, რაც საბაზო საფეხურზე ფუნქციის არსის „მათემატიკური სიმკაცრით“ გადაცემისას გააიოლებს საკითხის არსის წვდომასა და დასასწავლი საკითხის მიმართ მოხსნის „ერთგვარ დაძაბულობას“. მიუხედავად იმისა, რომ მასწავლებელთა დიდი ნაწილი ყურადღებას ამახვილებს ე.წ. „გრაფიკულ აზროვნებაზე“, მაინც საჭიროა, რომ მოსწავლეებმა იცოდნენ გრაფიკის რეალური არსი - გრაფიკად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ მხოლოდ წყვილები და აღარც კი გახდეს საჭირო მისი „ვიზუალიზაცია“, ხოლო ის გრაფიკები, რომლებიც სკოლაში ისწავლება, ზოგადად გრაფიკის „კერძო შემთხვევაა“. ჩვენ მიერ შეთავაზებული საგაკვეთილო სიტუაციები კი, როგორც პრობლემური სწავლების ტექნოლოგია, მათემატიკაში მიღებული ცოდნის არამარტო საკითხის უკეთ გააზრებას შეუწყობს ხელს და მაღალი

სააზროვნო უნარების გამომუშავებას, არამედ ცოდნის გრძელვადიან მეხსიერებაში გადატანის საუკეთესო საშუალება იქნება.

დასკვნები და რეკომენდაციები

ფუნქციის ცნების/საკითხის სასკოლო მათემატიკის სწავლების/დიდაქტიკის ისტორიული კონტექსტის შესწავლის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ:

- ✓ ზოგადსაგანმანათლებლო დაწესებულებებში ფუნქციის თემის სწავლების მეთოდოლოგიის საკითხებზე მეცნიერებს/მეთოდისტებს განსხვავებული მიდგომები აქვთ.

მეთოდიკური ლიტერატურისა და საქართველოში მოქმედი გრიფმინიჭებული მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოებისა და მასწავლებელთათვის მათი მეთოდიკური გზამკვლევების, ასევე, საბუნებისმეტყველო მეცნიერებების მოქმედი გრიფმინიჭებული სახელმძღვანელოების ანალიზის საფუძველზე შეიძლება ითქვას, რომ:

- ✓ სასკოლო სახელმძღვანელოებში ფუნქციის საკითხები განსხვავებული მეთოდიკური მიდგომებითაა გადმოცემული;
- ✓ საქართველოში მოქმედი გრიფმინიჭებული მათემატიკის სასკოლო სახელმძღვანელოები შედგენილია თანამედროვე მეთოდიკური ორიენტირების საფუძველზე, რისი გარანტიც არის მათემატიკის სტანდარტი;
- ✓ მათემატიკის ზოგიერთ სასკოლო გრიფმინიჭებულ სახელმძღვანელოში ფუნქციის თემის განხილვისას დაშვებულია მეთოდიკური უზუსტობები;
- ✓ სკოლის გრიფმინიჭებული სახელმძღვანელოების მასწავლებელთა მეთოდიკური გზამკვლევები, იშვიათი გამონაკლისის გარდა, მხოლოდ მოსწავლის წიგნში მოყვანილი ამოცანების ამოხსნების კრებულს შეადგენს. არაა მოყვანილი მეთოდიკური ხაზები და ფუნქციის იდეის ფორმირების

საბოლოო შედეგები, რაც მასწავლებლისთვის მხოლოდ ამოცანების ამოხსნაზე ორიენტირებას მიანიშნებს;

- ✓ ფუნქციის ცნების ფორმირება საბუნებისმეტყველო მეცნიერებების გრიფმინიჭებულ სახელმძღვანელოებში წინ უსწრებს მათემატიკის საგნობრივი სტანდარტით გათვალისწინებული ფუნქციის თემის შესწავლას, შესაბამისად, სასკოლო მათემატიკური სახელმძღვანელოები შესაბამის კლასებში ისე უნდა იყოს შედგენილი, რომ საგანთაშორისი კავშირები მთავარი ხაზი იყოს სწავლებაში და ამის გარანტად „ფუნქცია" ნამდვილად გამოდგება.

კვლევის ფარგლებში გამოკითხული მასწავლებლების აზრით:

- ✓ ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლაში ფუნქციის თემის სწავლება პრობლემურია. მოსწავლეთა მხრიდან ფუნქციის საკითხების ცოდნის თვალსაზრისით კი დოკუმენტალურად ამასვე ადასტურებს საერთაშორისო კვლევები და ერთიანი ეროვნული გამოცდების შედეგები;
- ✓ ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლებში მათემატიკის კათედრის წევრთა მეთოდიკური კომპეტენტურობა განაპირობებს ფუნქციის თემის სწავლების თავისებურებებს/მიდგომებს პედაგოგიურ პრაქტიკაში;
- ✓ საჭიროა, სასკოლო მათემატიკის მეთოდიკური ლიტერატურის განახლება, ხოლო არსებულ მეთოდიკურ რესურსებზე მასწავლებელთა ხელმისაწვდომობის გაზრდა;
- ✓ საჭიროა, მასწავლებლის მომზადების საგანამანათლებლო პროგრამებში მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის კურსებში ფუნქციის თემის სწავლების საკითხის განხილვისას სხვადასხვა სკოლის მიმდევრების მეთოდიკური მიდგომების გაცნობა;
- ✓ საჭიროა, მათემატიკის მასწავლებლებისთვის ორგანიზებულ ტრენინგებში ფუნქციის თემის სწავლების მეთოდიკური ორიენტირების ასახვა.

ფუნქციის ცნების და მისი სწავლების შესახებ მეთოდიკური ლიტერატურის დამუშავებისა და, ასევე საკუთარ თუ სხვა მასწავლებელთა მდიდარი სასკოლო პრაქტიკის შედეგად, ჩვენ მიერ შემუშავდა მეთოდიკური გზამკვლევი, რომელშიც ყურადღება გამახვილებულია ყველა იმ საკითხზე, რომლის სწავლებაც მოუწევს მათემატიკის მასწავლებელს ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის საბაზო და საშუალო საფეხურზე ფუნქციის საკითხების ფარგლებში. აღნიშნული მიდგომები მოწონებულია მოქმედი მასწავლებლებისა და დარგის ექსპერტების მიერ. სხვა მრავალ საკითხთან ერთად, გზამკვლევში განხილულია:

- მოსწავლეთათვის ფუნქციის განმარტების სწავლების თავისებურებები;
- ფუნქციის განსაზღვრის არის დადგენის პრაქტიკული უნარ-ჩვევები;
- ფუნქციის მონოტონურობის შუალედების სწავლებისას გასათვალისწინებელი მომენტები;
- ფუნქციის ნულებისა და ნიშანმუდმივობის შუალედების სწავლება;
- ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების მოძებნისას წამოჭრილი საკითხები;
- ფუნქციათა ლუწობისა და კენტობის, ასევე, პერიოდულობის სწავლების შესახებ გასათვალისწინებელი საკითხები;
- ფუნქციათა კომპოზიციის სწავლება და პრაქტიკული მაგალითები, რომლებსაც ფუნქციონალურ განტოლებამდე მივყავართ;
- გამოყენებითი ხასითის ამოცანების როლი და ადგილი ფუნქციის სწავლებისას;
- სახალისო გაკვეთილების ესკიზები, რომლებიც ფუნქციონალურ შესაბამისობებს ემყარება;
- თეორიული და პრაქტიკული ტიპის ამოცანები, რომლებიც მოქმედ მასწავლებლებს გამოადგებათ საგაკვეთილო პროცესში ფუნქციის უკეთ სასწავლებლად და რომლებიც მოსწავლეებში მაღალი სააზროვნო უნარების განვითარებას შეუწყობს ხელს;

- ყურადღების გამახვილება ისეთ ნიუანსებზე, რომლებიც მეთოდიკური ცოდნით აღჭურვავს მასწავლებლებს;
- ფუნქციონალური ხაზი - მათემატიკის, როგორც სასკოლო დისციპლინის, ერთიანი ხედვის საშუალება;
- გრაფიკული აზროვნების სწავლების შესახებ საინტერესო ამოცანები;
- პრობლემური სწავლების ტექნოლოგიით გაკვეთილის წარმართვა ფუნქციის საკითხებზე.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. ბერიძე ლ., & ლაშხი ა. (2009). *„მათემატიკური განათლება საქართველოში“*. თბილისი: „ტექნიკური უნივერსიტეტი“.
2. ბექაური თ., & საგინაშვილი ა., & ბექაური გ. (2012). *მათემატიკა VIII კლასი, მოსწავლის წიგნი.* თბილისი: საქართველოს განათლების და მეცნიერების სამინისტრო.

3. ბექაური თ., & საგინაშვილი ა., & ბექაური გ. (2012). *მათემატიკა VII კლასი, მოსწავლის წიგნი.* თბილისი: საქართველოს განათლების და მეცნიერების სამინისტრო.
4. ბექაური თ., & საგინაშვილი ა., & ბექაური გ. (2012). *მათემატიკა IX კლასი, მოსწავლის წიგნი.* თბილისი: საქართველოს განათლების და მეცნიერების სამინისტრო.
5. ბუაძე ა. & ზანდუკელი თ. & მელაძე ო. & შათაშვილი ს. (1980). *მათემატიკა.* თბილისი: თბ. უნივ. გამომცემლობა.
6. გაგნიძე ა., & ლელაძე დ. (2006). *მათემატიკა. ამოცანების კრებული.* თბილისი: ,,უნივერსალი‘‘.
7. გაგუა ვ. & გურგენიძე დ. და სხვ. (1978) „პედაგოგიკის შესავალი“, თბილისი: გამ. „განათლება“
8. გეგელია თ. (1982) „მათემატიკის სპეციალური კურსი“, თბილისი: გამ. „განათლება“
9. გეგელია თ. (1985) „სასკოლო მათემატიკის ფუნდამენტური ცნებები - სიმრავლე. შესაბამისობა. ფუნქცია. მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი“, თბილისი: გამ. „მეცნიერება“
10. გოგინავა უ., & დანელია ა., & კოპალიანი თ., & ნადიბაიძე გ. (2007). *,,კალკულუსი. პროგრამა Maple–ის გამოყენებით. სალექციო კურსი‘‘.* თბილისი.
11. გოგიშვილი გ., & ვეფხვაძე თ., & მებონია ი., & ქურჩიშვილი ლ. (2008). *გავიმეოროთ მათემატიკა, წიგნი აბიტურიენტებისა და მათემატიკის მასწავლებლებისთვის. I ნაწილი.* თბილისი: ინტელექტი.
12. გოგიშვილი გ., & ვეფხვაძე თ., & მებონია ი., & ქურჩიშვილი ლ. (2012). *მათემატიკა VII კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.
13. გოგიშვილი გ., & ვეფხვაძე თ., & მებონია ი., & ქურჩიშვილი ლ. (2012). *მათემატიკა VIII კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

14. გოგიშვილი გ., & ვეფხვაძე თ., & მებონია ი., & ქურჩიშვილი ლ. (2012). *მათემატიკა IX კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

15. გოგიშვილი გ., & ვეფხვაძე თ., & მებონია ი., & ქურჩიშვილი ლ. (2012). *მათემატიკა X კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

16. გოგიშვილი გ., & ვეფხვაძე თ., & მებონია ი., & ქურჩიშვილი ლ. (2012). *მათემატიკა XI კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

17. გოგიშვილი გ., & ვეფხვაძე თ., & მებონია ი., & ქურჩიშვილი ლ. (2012). *მათემატიკა XII კლასი.* თბილისი: ინტელექტი.

18. გოკიელი ლ. (1957). *,,მათემატიკის საფუძვლები''.* თბილისი: თბ. უნივერ. გამომც.

19. გორგოძე გ., & ჯიქია მ. (2003). *მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის ზოგადი კურსი.* თბილისი, გამომც., „ცის ნამი"

20. დეისაძე მ. & ადეიშვილი ვ. & კირთაძე შ. (2013). *,,მათემატიკის დაწყებითი კურსის მეცნიერული საფუძვლები'', (I ნაწილი).* ქუთაისი: აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა.

21. ეროვნული სასწავლო გეგმა. საგნობრივი პროგრამა მათემატიკაში (2018). საქართველოს განათლების, მეცნიერების, კულტურისა და სპორტის სამინისტრო.

22. ვახანია ზ. (1999). *სასკოლო მათემატიკის სწავლების აქტიური მზაობის მეთოდიკა. ავტორეფერატი პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად.* თბილისი.

23. ვეფხვაძე თ. (1997). *,,მათემატიკის რჩეული თავები'', ლექციების კურსი.*

24. ვეფხვაძე თ. (2017 (4)) „ამოცანები რიცხვის მთელი და წილადი ნაწილების თვისებების გამოყენებაზე", თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი მათემატიკა გვ. 67-71

25. ვეფხვაძე თ., & ქურჩიშვილი ლ. (2015). *გრაფიკების გამოყენებით პარამეტრის შემცველი ამოცანების ამოხსნის სწავლების შესახებ.* სამეცნიერო პოპულარული ჟურნალი „მათემატიკა“, (№3).
26. ზვიადაძე ქ., & გიორგაძე თ. (2003). *მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა დაწყებით სკოლაში.* ქუთაისი.
27. თოფურია ს., & ხოჭოლავა ე. და სხვები. (2006). *მათემატიკა, I ნაწილი.* თბილისი: „ტექნიკური უნივერსიტეტი“.
28. იმერლიშვილი ე. (1984). *სასკოლო მათემატიკის განვითარების ისტორიისათვის.* თბილისი.
29. იმერლიშვილი ე. (2001). *„მათემატიკის სწავლების ზოგადი მეთოდიკა“.* თბილისი: „თბ. უნივ. გამომც“.
30. კეზერაშვილი რ. & ქურჩიშვილი ა. (1991) „გავიმეოროთ ფიზიკა და მათემატიკა - უმაღლეს სასწავლებელში შემსვლელთათვის“, თბილისი, საქართველოს რესპუბლიკის შსს სტამბა.
31. ლორთქიფანიძე დ. (1983). *„დიდაქტიკა“.* თბილისი: თბ. უნივერ. გამომც.
32. *მათემატიკის სწავლების ინოვაციური მეთოდები.* (2016). G-PRIED-მასალები.
33. მაკარიჩევი ი., & მინდიუკი ნ., & ნეშკოვი კ., & სუვოროვა ს., & ტელიაკოვსკი ს. /რედ./. (1998). *ალგებრა: საშ. სკოლის მე–7 კლ. სახელმძღვანელო.*
34. მაკარიჩევი ი., & მინდიუკი ნ., & მონახოვი ვ. და სხვ., ტელიაკოვსკი ს. /რედ./ (1998). *ალგებრა: საშ. სკოლის მე–9 კლ. სახელმძღვანელო.*
35. მაკარიჩევი ი., & მინდიუკი ნ., & ნეშკოვი კ., & სუვოროვა ს., & ტელიაკოვსკი ს. /რედ./ (1998). *ალგებრა: საშ. სკოლის მე–8 კლ. სახელმძღვანელო.*
36. მაყაშვილიმ., & ქუთელია რ., და სხვ. (2012). *საბუნებისმეტყველო მეცნიერებეის საფუძვლები.* თბილისი. ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.
37. მაჭარაშვილი ნ. (2017). *„ზოგადი უნარები. მათემატიკური ნაწილი“.* თბილისი.

38. მახვილაძე ნ. (2004). *„მათემატიკის სათავეებთან“.* თბილისი: შპს „ფინანსები“.

39. მებონია ი., & ჭელიძე ნ. (2014). *შეამოწმე შენი ცოდნა მათემატიკაში.* თბილისი: „უსტარი“.

40. მძინარიშვილი ლ. /რედ./ (1988) „მათემატიკის ამოცანათა კრებული“, თბილისი: გამ. „განათლება“

41. მძინარიშვილი მ., & ბერიძე ლ. და სხვ. (1988). *მათემატიკის ამოცანათა კრებული.* თბილისი: „განათლება“.

42. ნაცვლიშვილი ზ., & კვალიაშვილი ა. და სხვ. (1985). *განტოლებები, უტოლობები, სისტემები (მოსამზადებელი განყოფილების მსმენელთათვის და აბიტურიენტთათვის).* თბილისი: „განათლება“.

43. ნოზაძე გ. (2009). *„მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის საკითხები“.* თბილისი: „მერიდიანი“.

44. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“ (1982 (1)) ერაძე გ. „მთავარი ფიგურა მასწავლებელია“ გვ. 72-80

45. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“ (1986 (3)) ბრეგაძე მ. „წილადურ-წრფივი ფუნქციის შექცევადობა“ გვ. 43-48

46. *როგორ მოვემზადოთ პედაგოგთა სასერტიფიკაციო გამოცდებისთვის* (2008), მათემატიკა. თბილისი, გამოცდების ეროვნული ცენტრი.

47. სამეცნიერო-პოპულარული ჟურნალი მათემატიკა (2017 (4)) თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, ღვაბერიძე ბ. & ფურთუხია ო. „ამოცანები ექსტრემუმზე მათემატიკის სასკოლო კურსში“, გვ. 20-27

48. სამხარაძე ი., & შოშიტაშვილი მ., & კვირკველია თ. (2015). *„ზოგადი უნარები. მათემატიკა“. ნაწილი I.* თბილისი.

49. სახელმწიფო შეფასება. მათემატიკა - IX კლასი (2016). შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი.

50. სულაქველიძე ა. & ქურჩიშვილი ა. (1971) „მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები და განტოლებები მოსამზადებელი განყოფილებების მსმენელთა და უმაღლეს სასწავლებელში შემსვლელთათვის“, თბილისი: თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

51. სულაქველიძე ა. & ქურჩიშვილი ა. (1984) „ალგებრა და ანალიზის საწყისები X კლასი (დამხმარე სახელმძღვანელო)“, თბილისი: გამ. „განათლება“

52. ქანთარია რ., & ჩიჩუა ლ., & და სხვ. (2018). *ბუნებისმეტყველება.* V და VI კლასების სახელმძღვანელოები. თბილისი. გამომცემლობა „კლიო“

53. ქელბაქიანი ვ. (2001). *„მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. I ნაწილი“.* ქუთაისი: ქუთ. სახ. უნივ. გამომც.

54. ქურჩიშვილი ა. & ქურჩიშვილი. & ლ. ჭელიძე ი. (2004) „მათემატიკური კალეიდოსკოპი“, თბილისი: გამ. „ინტელექტი“

55. ქურჩიშვილი ა. & ქურჩიშვილი. ლ. (1992) „ირაციონალური განტოლებები უმაღლეს სასწავლებელში შემსვლელთათვის“, თბილისი: თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

56. ქურჩიშვილი ა. (1971) „შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები მოსამზადებელი განყოფილებების მსმენელთა და უმაღლეს სასწავლებელში შემსვლელთათვის“, თბილისი: თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

57. ღვაბერიძე ბ., & დვალიშვილი ფ. და სხვ. (2014). *მათემატიკა, ალგებრა და ანალიზის საწყისები.*

58. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2005–2019). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები მათემატიკაში.*

59. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2005–2019). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები ზოგად უნარ-ჩვევებში.*

60. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2009–2019). *საერთო სამაგისტრო გამოცდების ტესტები.*

61. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2010–2019). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები მათემატიკის მასწავლებელთა (VII-XII კლასები) კომპეტენციის დასადასტურებელი ტესტები.*

62. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი (2012–2019). *ერთიანი ეროვნული გამოცდების ტესტები მათემატიკის მასწავლებელთა (I-VI კლასები) კომპეტენციის დასადასტურებელი ტესტები*

63. წერეთელი ალ., & თოფურიძე ნ., & გორგოძე გ., & კომლაძე გ., & ჯაფარიძე გ., & თავართქილაძე რ. (1970). *„თეორიული და პრაქტიკული არითმეტიკის კურსი", დაწყებითი განათლების პედაგოგიკისა და მეთოდიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის.* თბილისი, გამომცემლობა „განათლება".

64. ჭავჭავაძე ი. (1938). *„პედაგოგიური თხზულებანი".* თბილისი: „სახელგამი".

65. ჭელიძე ვლ., & წითლანაძე ე. (1989). *„მათემატიკის ანალიზის კურსი", ტ. I.* თბილისი. თბ. უნივ. გამომც.

66. ჭკუასელი ი. (1986) „პედაგოგიკის ზოგადი საფუძვლები", თბილისი: თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

67. ჭკუასელი ქ., ჭკუასელი ი. (2012). *„პედაგოგიკის ზოგადი საფუძვლები".* თბილისი: „ინტელექტი".

68. ხარშილაძე ფ. (1981). *მათემატიკის სასკოლო კურსის თანამედროვე საფუძვლები.* თბილისი.

69. ხარშილაძე ფ. (1981). *მათემატიკის სასკოლო კურსის თანამედროვე საფუძვლები.* თბილისი.

70. ჯაფარიძე ნ., & წილოსანი მ., & წულაია ნ. (2012). *მათემატიკა IX კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.

71. ჯაფარიძე ნ., & წილოსანი მ., & წულაია ნ. (2012). *მათემატიკა X კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.

72. ჯაფარიძე ნ., & წილოსანი მ., & წულაია ნ. (2012). *მათემატიკა XI კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.

73. ჯაფარიძე ნ., & წილოსანი მ., & წულაია ნ. (2012). *მათემატიკა XII კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.
74. ჯაფარიძე ნ., & წილოსანი მ., & წულაია ნ. (2012). *მათემატიკაVII კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.
75. ჯაფარიძე ნ., & წილოსანი მ., & წულაია ნ. (2012). *მათემატიკაVII კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.
76. ჯაფარიძე ნ., & წილოსანი მ., & წულაია ნ. (2012). *მათემატიკაVIII კლასი.* თბილისი: ბაკურ სულაკაურის გამომცემლობა.
77. ჯინჯიხაძე ჯ. (1987). *„საშუალო სკოლაში მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის საკითხები“.* თბილისი: „განათლება“.
78. ჯინჯიხაძე ჯ. (2011). *„მათემატიკის დაწყებითი კურსის მეთოდიკა და ტექნოლოგია“.* თბილისი: „უნივერსალი“.
79. ჯინჯიხაძე ჯ. (2012). *„მათემატიკის დაწყებითი კურსის მეცნიერული საფუძვლები“.* თბილისი: „ინოვაცია“.
80. ჯინჯიხაძე ჯ. (2013). *„პიროვნების სასკოლო მათემატიკური განვითარების ძირითადი პრობლემები“.* თბილისი: „მერიდიანი“.
81. GE-CAT გამოცდების ვარიანტები.
82. PISA (2009). *მოსწავლეთა შეფასების საერთაშორისო პროგრამა.* 2009 წლის კვლევის ეროვნული ანგარიში. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი.
83. TALIS (2015). სწავლებისა და სწავლის საერთაშორისო კვლევა. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი.
84. TEDS-M (2010). მათემატიკის მომავალი მასწავლებლების განათლების კვლევა. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი.
85. TIMSS (2011). მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო საგნების სწავლისა და სწავლების კვლევა. შეფასებისა და გამოცდების ეროვნული ცენტრი.

86. Bayens M. (2016). *Teaching functions: The Good, the Bad, and the many ways to do better*. *Dissertation thesis*. Murray state university.

87. Foster Alan G., & James N. Rath & Lestie J. Winters. (1986). “*Algebra Two with Trigonometry*”. USA, “Merri//publishing Co”.

88. Kirkpatrick Chris. (2008). *Functions 11*. Canada, “Thomson Nelson”.

89. Larson R & Bruse H. (2011). *Calculus I with Precalculus*.

90. Larson R. (2011). *Precalculus with Limits, second Edition*. USA, Brooks//Cole.

91. Larson R., & Boswell L. (????). *Pre-Algebra*. Pennsylvania, Bigideas learning.

92. Timothy J. Kelly, & John T. Anderson & Richard H. Balomenos. (1992). *College Algebra and Trigonometry.* USA, Boston, Houghton Mifflin Company.

93. Viirman O. (2014). *The function concept and university mathematics teaching. Dissertation*. Karlstad University Studies.

94. Lenze M., & Schroder M., & Wurl b., & Wynands A. (2010). Mathematik SEKUNDO 7, Hamburg: Westermann.

95. Lenze M., & Schroder M., & Wurl b., & Wynands A. (2010). Mathematik SEKUNDO 8, Hamburg: Westermann.

96. Lenze M., & Schroder M., & Wurl b., & Wynands A. (2010). Mathematik SEKUNDO 9, Hamburg: Westermann.

97. Lenze M., & Schroder M., & Wurl b., & Wynands A. (2010). Mathematik SEKUNDO 10, Hamburg: Westermann.

98. Александров П.С., & Маркушевич А.И., & Хинчин А.Я. (ред.). (1952). *«Энциклопедия элементарной математики. Книга третья. Функции и пределы. Основы Анализа».* Москва: «государственное издательство технико-теоретической литературы».

99. Александрова Н.В. (2008). *«История математических терминов, понятий, обозначений. Словарь-справочник»*. Москва: издательство ЛКИ.

100. Андронов И.К. (1967). *«Три этапа в развитии международного школьного математического образования в XIX-XX вв». Математика в школе* (4), стр. 82-85.

101. Аргунов Б.И. (1971). *«Фигуры и уравнения». Математика в школе* (2), стр. 11-16.

102. Бевз Г.П. (1980). *«Об определении понятия «Вектор». Математика в школе* (2), стр. 58-59.

103. Болтянский В.Г. (1979). *«Обратная функция». Математика в школе* (1), стр. 49-55.

104. Болтянский В.Г.(1978). *«как развивать «графическое мышление». Математика в школе* (3), стр. 16-23.

105. Борель Е. (1958). *Как соглосовить преподование в средней школе с прогрессом науки*. «математическое просвещение», (№3), стр. 89-100.

106. Борель Э. (1958). «*Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки».* «математическое просвещение». (3), стр. 89-100.

107. Бурбаки Н. (1963). *Очерки по истории математики*. «Мир».

108. Бутузов В.Ф. (2012). *«Лекции по мат. Анализу, часть 1».* Москва: физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова.

109. Вавилов В.В., & Мельников И.И., & Олехник С.Н., & Пасиченко П.И. (1990). *«задачи по математике. Начала анализа»*. Москва: «наука».

110. Вавилов В.В., & Мельников И.И., & Олехник С.Н., & Пасиченко П.И. (1987). *«задачи по математике. Уравнения и неравенства»*. Москва: «Наука».

111. Варшавский И.К., & Гаиашвили М.Я., & Гразков Ю.А. (2005). *«Функция, её производная и первообразная на эге». Математика в школе* (8), стр. 2-15.

112. Виленкин Н. Я. (1978). *Элементарные функции в школьном курсе математики. Математика в школе,* (3), стр. 53-57.

113. Виленкин Н.Я. (1978). *функции в природе и технике*. Москва. «просвещение».

114. Виленкин Н.Я. (1985). *«функции в прориде и технике».* Москва: «просвещение».

115. Виленкин Н.Я., & Дуничев К.И., & Калужин Л.А., & Столяр А.А. (1980). *«современные основы школьного курса математики».* Москва: «просвещение».

116. Виленкин Н.Я., & Дуничев К.И., & Калужина А.А., & Столяр А.А. (1980). *Современные основы школьного курса математики*. Москва: «Просвещение».

117. Владимиров В.С., & Понтрягин Л.С., & Тихонов А.Н. (1979). *«О школьном математическом образовании». Математика в школе* (3), стр. 12-14.

118. Власова Е.В. (2002). *«ещё раз об изучении функции в средней школе». Математика в школе* (6), стр. 53-57.

119. Воказе К. (2008). *Урок по теме: «Функция: ее определение и обсуждение». Фестиваль педагогических идей «Открытый урок*. Издательский дом «Первое сентября»

120. Вороной А.Н. (2002). *«Уравнение с переменной под знаком целой или дробной части». Математика в школе* (10), стр. 56-60.

121. Вороной А.Н. (2004). *«Функциональные уравнения и метод неопределённых коэфициентов». Математика в школе* (8), стр. 62-66.

122. Выгодский М.Я. (1966). *Справочник по элементарной математике*. Издательство. Москва: наука.

123. Галицкий М.Л., & Гольдман А.М., & Звавич Л.И. (2001). *«Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8-9 кл. С углубленным изучением математики».* Москва: «просвещение».

124. Гельфанд И.М., & Глаголева Е.Г., & Шноль Э.Э (2006). *«Функции и Графики (основные приемы) ».* Москва: МЦНМО.

125. Гельфанд И.М., & Глагомва Е.Г., & Кириллов А.А. (1966). *«Метод ноординат».* Москва: «наука».

126. Геренштейн А.В., & Эвнин А.Ю. (2002). *«О сумме периодических функций». Математика в школе* (1), стр. 68-73.

127. Глаголева Е.Г., & Ивашев-Мусатов О.С. (1981). *«Вопросы преподавания алгебры и начала анализа в средней школе. Сборник статей».* Москва: «просвещение».

128. Глейзер Г.И. (1964). *«история математики в школе. Пособие для учителей».* Москва: «просвещение». стр. 166-170.

129. Глейзер Г.И.(1983). *История математики в школе, IX–X классы*. Москва: просвещение.

130. Гнеденко, Б.В. (1977). *«О развитии математики в нашей стране за 60 лет советской власти». Математика в школе* (5), стр. 12-19.

131. Горина Л.А. (2011). *«О развитии потенциале функционально-графической линии в курсе алгебры основной школы». Математика в школе* (2), стр. 69-73.

132. Гурский И.П. (1964). *«Функции и построение графиков».* Москва: «просвощение».

133. Гуськов В.А. (1981). *«Об одной проверке качества усвоения понятия функции». Математика в школе* (1), стр. 50-52.

134. Гуськов, В.А. (1983). *«Об изучении понятия зависимости между значениями переменных IV-V в классах»*. *Математика в школе* (1), стр. 35-38.

135. Данищева Л.О. (1983). *«Приёмы учебной работы как средство формирования частных умений при обучении началам математического анализа». Математика в школе* (1), стр. 14-19.

136. Дворянинов С.В. (2013). *«Обратная функция». Математика в школе* (2), стр. 34-38.

137. Дёмина Т.Ю. (2009). *«Исследование функции на монотонность. Экстремумы функции». Математика в школе* (9), стр. 3-11.

138. Дёмина Т.Ю. (2010). *«Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке». Математика в школе* (1), стр. 10-14.

139. Денишева Л.О. (2015). *«Теория и методика обучения математике».* Москва: «Бином».

140. Динь За Фонг. (1973). *«Эксперимент в школе «Танг-Тиен». Математика в школе* (6), стр. 89-91.

141. Динь За Фонг. (1973). *«Эксперимент в школе «Танк-Тиен». Математика в школе* (6), стр. 89-91.

142. Дорофеев Г., & Розов Н. (1987). *«Функции периодические и непериодические».* КВАНТ. (9), стр. 50-55.

143. Дорофеев Г.В. (1978). *«понятие функции в математике и в школе». Математика в школе* (2), стр. 10-27.

144. Дорофеев Г.В. (1980). *«применение производных при решении задач в школьном курсе математики»*, *Математика в школе* (6), стр. 24-30.

145. Дорофеев Г.В. (2014). *«Возрастание и убивание функции».* Журнал *«Математика для школьников».* (1), стр. 16-25.

146. Дорофеев Г.В. (2018). *«математика для поступающих в вузы: учебные пособие».* Москва: «Дрофа».

147. Дорофеев Г.В., & Кузнецова, Л.В., & Седова, Е.А., & Охтеменко, О.В. (2005). *«Алгебра и начала анализа – 10: Функции – непрерывность функций графики функций». Математика в школе* (9), стр. 43-48.

148. Дорофеев Г.В., & Потапов М.К., & Розов Н.Х. (2007). *Пособие по математике для поступающих в вузы.* Москва.

149. Егоров А., & Раббот Ж. (2002), *«Монотонные функции в конкурсных задачах». Журнал КВАНТ*. (6), стр. 34-40.

150. Зеленяк О.П. (2014). *«От функциональных зависимостей – к экстремальным задачам». Математика в школе* (4), стр. 28-33.

151. Зорич В.А. (2002). *«математический анализ. Часть I.»* Москва: «МЦННО».

152. Зорич. (1981). *«математичесский анализ», часть I.*

153. Ивашев-мусатов О.С. (1974). *«Об изложении темы «График линейной функции». Математика в школе* (4), стр. 39-40.

154. Ивашев-Мусатов, О. С.(1978). *«непреривность и начала анализа». Математика в школе* (3), стр. 49-53.

155. Ильин В.А., & Садовничий В.А., & Сендов Б.Х., & Тихонов А.Н. /ред./. (1985). *«Математический анализ. Начальний курс»*. Москва: издательство Московского университета.

156. Канин Е.С. (2005). *«к изучению общего понятия свойств и классов числовых функций одного действительного переменного». Математика в школе* (9), стр. 48-56.

157. Карпенко Г.М. (1949). *«Изучение функции в V и VI классах но основе понятий множества и соответия». Математика в школе* (6).

158. Келбакиани В.Н. (1987). *Межпредметные связи в естественно-математической и педагогической подготовке учителей*. Тбилиси: „Ганатлеба“.

159. Колмогоров А.Н. (1970). *«Что такое график функции»*. КВАНТ. (2).

160. Колмогоров А.Н. (1971). *«О системе основных понятий и обозначений для школьного курса математики». Математика в школе* (2), стр. 17-22.

161. Колмогоров А.Н. (1971). *«Современная математика и математика в современной школе». Математика в школе* (6).

162. Колмогоров А.Н. (1971). *«Что такое функция».* КВАНТ. (1).

163. Колмогоров А.Н. (1978). *«что такое функция». Математика в школе* (2), стр. 27-29.

164. Колмогоров А.Н. (1987). *«математика – наука и профессия».* Москва: «наука».

165. Колмогоров А.Н. (1991). *«математика в её историческом развитии».* Москва: «наука».

166. Колмогоров А.Н. (2010). *«Отношение эквивалентности и равенство». Математика в школе* (1), стр. 3-9.

167. Колмогоров А.Н., & Абрамов А.М., & Ивашев-Муатов О.С., & Ивлев Б.М., & Шварцбурд С.И. (199). *«Показательная и логарифмическая функция». Математика в школе* (6), стр. 22-27.

168. Колмогоров А.Н., & Ивашев-Мусатов О.С. (1975). *«Действительные числа, бесконечные последовательности и их пределы». Математика в школе* (2), стр. 25-35.

169. Колмогоров А.Н., & Шварцбурд С.И. (1976). *«тригонометричесские функции, их графики и производные в учебном пособии для X класса», Математика в школе* (1), стр.11-25.

170. Кольман Э. (1936). *«предмет и метод современной математики».* Москва: государственное социально-экономическое издательство.

171. Кольмогоров А.Н., & Фомин С.В. (2004.,1976). *«элементы теории функций и функционального анализа».* Москва: физматлит.

172. Колягин Ю.М. (2012). *«Реформа и контрреформа». Математика в школе* (6), стр. 69-74.

173. Колягин Ю.М., & Луканин Г.Л., & Мокрушин Е.Л. (1975). *«Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика».* Москва: «просвещение».

174. Колягин Ю.М., & Луканин Г.Л., & Мокрушин Е.Л. (1977). *«Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики.* Москва: «просвещение».

175. Крейн С.Г., & Ушакова В.Н. (1963). *«математический анализ элементарных функции».* Москва: государсвенное издательство физико-математической литературы.

176. Крутецкий В.А. (1968). *Психология математических способностей школьников*. Москва: «наука».

177. Крючкова В.В. (2004). *«Обобщающий семинар по теме «Обратные тригонометрические функции»*. *Математика в школе* (1), стр. 10-13.

178. Кудрявцев Л.Д. (1985). *Современная математика и ее преповаданние*. Москва: «наука».

179. Кудрявцев Л.Д. (1988). *«курс математического анализа 1».* Москва: высшая школа.

180. Кузнецов В.Т. (1954). *«К вопросу о введении понятия функции в средней школе». Математика в школе* (4).

181. Кузнецова Г.Б., & Скопец З.А. (1973). «*графическое решение некоторых алгебрических уравнений». Математика в школе* (6), стр. 73-76.

182. Кузнецова Л.В., & Ковалева, Г.И., & Фадеева, О.М. (2002). *«методические указания к теме «Функции». Математика в школе* (3), стр. 31-41.

183. Кузнецова Л.В., & Макарычев Ю.Н., & Миндюк К.Г., & Суворова С.Б. (1979). *«О методических аспектах теоретико-множественного подхода к понятию функции». Математика в школе* (2), стр. 23-27.

184. Курант Р., & Роббинс Г. (2000).*«Что такое математика?»* Москва: «МЦННО».

185. Левитас Г.Г. (1973). *«Графики в V классе». Математика в школе* (4), стр. 57-60.

186. Локоть В.В. (2010). *«Задачи с парометрами. Применение свойств функций, преобразование неравенств».* Москва: «Аркти».

187. Лузин Н.Н. (1958). *«Дифференциальное исчисление».* Москва: «Советская наука».

188. Любецкий В.А. (1987). *«Основые понятия школьной математики».* Москва: «просвещение».

189. Ляпин С.Е., & Баранова И.В., & Борчугова З.Г. (1978). *«Сборник задач по элементарной алгебре».* Москва: «просвещение».

190. Лященко Е.И. (1970). *«Изучение функций в курсе математики восьмилетней школы».* Минск: «Народная асвета».

191. Макарычев Ю.Н., & Миндюк Н.Г., & Муравин К.С., & Суворова С.Б. (1974). *«Арифметическая и геометрическая прогресии» в курсе алгебры VIII класса».* *Математика в школе* (4), стр. 5-11.

192. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Муравин К.С. (1972). *«Структура и некоторые особенности нового учебника алгебры для VI класса» Математика в школе* (1), стр. 16-22.

193. Маркушевич А.И. (1947). *«Понятие функции». Математика в школе* (4), стр. 1-16.

194. Маркушевич А.И., & Маслова Г.Г., & Черкасов Р.С. (1977). *«О развитии школьного математического образования в СССР за 60 лет» Математика в школе.* (5), стр. 7-12.

195. Марянский И.А. (1971). *«О представлении функции одной формулой». Математика в школе* (1), стр. 71-73.

196. Медведева О.С. (2002). *Методическая основа развития теоретического мышления учащихся в процессе решения математических задач*. Москва:МПГУ.

197. Михалевская Г.И. (1973). *«Урок по математике с применением технических средств». Математика в школе* (6), стр. 55-57.

198. Мишин В.И. (1987). *«Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика».* Москва: «Просвещение».

199. Мишин В.И. (1987). *Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика.* М. «Просвещение».

200. Мордкович А.Г. (2012). *«О некоторых проблемах школьного математического образования». Математика в школе* (10), стр. 35-43.

201. Морянский И.А. (1976). *«О функции знак числа». Математика в школе* (4), стр. 67.

202. Муравин Г.К., & Муравин К.С., & Муравина О.В. (2014). *Алгебра 7.* Москва: «дрофа».

203. Нагибин Ф.Ф. (1954). *«Выяснение понятия функции в средней школе». Математика в школе* (4).

204. Неванлинна Р. (1968). *Реформа в преподавании математики*. *Математика в школе* (1).

205. Никольский С.М. (1983). *«курс мат, анализа. Т. 1».* Москва: «наука».

206. Никольский С.Н. /ред./ (1996). *«Математика. Школьная энциклопедия».* Москва: «Большая российская энциклопедия».

207. Новиков А.И. (2004). *«Квадратичные функции». Математика в школе* (6).

208. Новиков А.И. (2005). *«Свойства функций и задача нахождения множества значений функций». Математика в школе* (5), стр. 36.

209. Новоселов С.И. (1946). *«Учение о функциях в средней школе». Математика в школе* (5-6), стр. 22

210. Новоселов С.И. (1954). *«О дисскусионных вопросах, связанных сучением о функциях в школьном курсе». Математика в школе* (4).

211. Обидных С.Т. (1975). *«Об изучении двуместных отношений на занятиях кружка». Математика в школе* (3), стр. 80-82.

212. Павленкова И.А. (1980). *«Новая публикация юнеско по вопросам математического образования». Математика в школе* (3), стр. 73-75.

213. Панишева О.В. (2001). *«Применение показательной функции». Математика в школе* (5), стр. 12-13.

214. Песков Т.А. (1951). *«Об изучении функцийдней школе». Математика в школе* (5), стр. 52-55.

215. Петров В.А. (2004). *«Вопросы периодичности на экзаменах». Математика в школе* (4), стр. 51-52.

216. Петров В.А. (2014). *«Вооружившись графиками».* Журнал *«Математика для школьников».* (1), стр. 26-39.

217. Писаревский, Б.М. (2004). *«задачи об экстремумах». Математика в школе* (6), стр. 47-51.

218. Подходова Н.С., & Снегурова В.И. и др. (2018). *«Методика обучения математики», часть 2;* Москва: «Юрайт».
219. Подходова Н.С., & Снегурова В.И. и др. (2018). *«Методика обучения математики», часть 1;* Москва: «Юрайт».
220. Подходова Н.С., & Снегурова В.И. и др. (2018). *«Методика обучения математики», часть 3*; Москва: «Юрайт».
221. Подходова Н.С., & Снегурова В.И. и др. (2018). *«Методика обучения математики. Практикум»*. Москва: «Юрайт».
222. Пойа Д. (1976). *Математическое отрытие*. Москва: „наука“.
223. Покровский В.П. (2014). *«методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия. Учебно-методическое пособие».* Владимир: ВлГУ.
224. Понарин Я.П. (1979). *«Преобразования подобия плоскости». Математика в школе* (3), стр. 62-67.
225. Понтрягин Л.С. (1980). *«Математический анализ для школьников».* Москва: «наука».
226. Понтрягин Л.С. (1983). *Математический анализ для школьников*. Москва: наука.
227. Прокофьев А.А., Бардушкин В.В. (2013). *«Использование свойств функции* $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ *при решении задач». Математика в школе* (9), стр. 23-31.
228. Пухначёв Ю.В., & Попов Ю.П. (1995). *«Математика без формул».* Москва: «столетие».
229. Рождественская Л. (2017). *«Новые цифровые инструменты учителья математики».* Нарва.
230. Сабинина Л.В. /ред./. (1982). *«математика впонятиях, определениях и терминах. Часть 1».* Москва: «просвещение».
231. Сабинина Л.В. /ред./. (1982). *«математика впонятиях, определениях и терминах. Часть 2»*. Москва: «просвещение».
232. Савин А.П. /сост./. (1989). *«Энциклопедический словарь юного математика».* Москва: «Педагогика».

233. Семенович, А.Ф. (2000). *«об определении понятия «отображение». Математика в школе* (5), стр. 35.

234. Сивашинский И.Х. (1965). *«Элементарные функции и графики. Теория и задачи с решениями».* Москва: «Наука».

235. Сильвестров В.В. (2004) *«Как найти множество жначении функции». Математика в школе*

236. Слонимская И.С., & Слонимский Л.И. (2010). *«математика. Экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ – функции»*. Москва: «Астрель».

237. Смирнова Р.И. (2002). *«О периодичности и непериодичности функций». Математика в школе* (1), стр. 66-68.

238. Соболев С.К. (2013). *«Монотонные функции: элементарная теория и приложения». Математика в школе* (10), стр. 22-30.

239. Солодухин В.Я. (2001). *«Показателние неравенства». Математика в школе* (5), стр. 13-17.

240. Стефанова Н.Л., & Подходова Н.С. и др. (2005). *«методика и технология обучения математики». Курс лекции.* Москва: «Дрофа».

241. Столяр А.А. (1965). *«Логические проблемы преподавания математики».* Минск: «Высшая школа».

242. Стратилатов П.В. (1970). *«дополнительные главы по курсу математики 9 класса».* Москва: «просвещение».

243. Стюарт Я.Н. (1980). *«Концепции современной математики. Перевод с англиского»*. Минск: «Вышэйшая школа».

244. Суворова С.Б., & Тернопол А.Н. (2002). *«Методические указания к теме «квадратичная функция». Математика в школе* (9), стр. 12-28.

245. Сухорослов А.С. (1954). *«О месте изучения понятия функции». Математика в школе* (4).

246. Танатар И.Я. (2012). *«Геометрические преобразования графиков функций».* Москва: «МЦНМ».

247. Темербекова А.А. (2003). *«методика преподавания математики».* Москва: «Владос».

248. Терновая Н.А. (2012). *«история школьного математического образования в России и за рубежом». Учебно-методическое пособие.* Саратов.
249. Тихомиров В.М. (1986). *«Рассказы о максимумах и минимумах*». Библиотека Квант. Москва: «наука»,
250. Томашевич Ф.М. (1954). *«Понятие функции в школьном курсе». Математика в школе* (4).
251. Трель И.Л., & Казаченко И.В. (2010). *«функции в ЕГЭ по математике».* Кемерово: «Кемеровский государственный университет».
252. Улимаева А.Т. (1979). *«Решение задач на нахождение наибольших и наименьших значений функции». Математика в школе* (6), стр. 42-43.
253. Фирстова Н.И. (2002). *«Целая и дробная части числа в задачах». Математика в школе* (10), стр. 60-69.
254. Фихтенгольц Г.М. (1968). *«основы математического анализа».* Москва: «наука».
255. Фридман Л.М. (1985). *«учитесь учиться математике».* Москва: «просвещение».
256. Фридман Л.М. (2014). *«основы проблемологии».* Москва: «Либроком».
257. Фридман Л.М. (2019). *«Что такое математика».* Москва: «Ленанд».
258. Фридман Л.М. (2014). *«Теоретические основы методики обучения математики».* Москва: «Либроком».
259. Фройденталь Г., & Виленкин Н.Я. (ред.). (1983). *«Математика как педагогическая задача. Книга для учителя».* Москва: «просвещение».
260. Халилов У.М. (1977). *«Из опыта изучения взаимно-обратных функции». Математика в школе* (4), стр. 31-33.
261. Хахамов, Л.Р. (1979). *«преобразования плоскости. Пособие для учителей».* Москва: «просвещение».
262. Храмов А.В. (2004). *«О периодичности тригонометрических функции». Математика в школе* (1), стр. 9-10.
263. Хэкало С.П. (2002). *«Исследование функций на чётность или нечётность в школьном курсе математики». Математика в школе* (6), стр. 3-66.

264. Цукарь А.Я. (2002). *«изучении функций в IX-XI классах». Математика в школе* (7), стр. 30-35.

265. Чайковский В.Д. (1971). *«Графики функции, не заданных формулами». Математика в школе* (3), стр. 70-71.

266. Чайковский В.Д. (1971). *«Графики функций, не заданных формулами». Математика в школе* (3), стр. 70.

267. Шахно К.У. (1966) *Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности* (изд. 3-е). Минск.

268. Шварц, Л. (1972). *«Анализ, том 1».* Москва:

269. Шварцбурд С.И., & Боковнев О.А. (1977). *«углубленное изучение алгебры и анализа».* Москва: «Просвещение».

270. Шень А. (2015). *«Лекции по дискретной математике».* Москва.

271. Шилов Г.Е. (2003). *«Что такое функция». Математика в школе* (1).

272. Шиханович Ю.А., & Дорофеев Г.В. (1965). *«Введение в современную математику. Начальние понятия»*. Москва: «наука».

273. Шихова А.П. (1973). *«комбинаторные задачи в IV-VI классах». Математика в школе* (5), стр. 23-28.

274. Шунда Н.Н. (1981). *«Дополнительные упражнения на исследование функций». Математика в школе* (3), стр. 62-64.

275. Эпифанова Т.Н. (2004). *«Отыскание экстремальных значений функции различними способами». Математика в школе* (4), стр. 52-55.

276. Яглом И.М. (2018). *«математика и реальный мир».* Москва: Ком. Книга.