ავტორის სტილი დაცულია

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნინო სამაშვილი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

აპროქსიმაციის ზოგიერთი საკითხი ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში

სადოქტორო დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

თსუ ასოცირებული პროფესორი **თენგიზ კოპალიანი**

ჩეხეთის მეცნ. აკადემიის მათემატიკისინსტიტუტის
მეცნიერ-თანამშრომელი **ამირან გოგატიშვილი**

თბილისი

2017

აბსტრაქტი

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება აპროქსიმაციის საკითხებს არასტანდარტულ ბანახის ფუნქციურ სივრცეებში. დისერტაციის პირველ თავში შესწავლილია ზოგადი ჰარდის ოპერატორის სასრულგანზომილებიანი ოპერატორებით აპროქსიმაციის რაოდენობრივი (კომპაქტურობის) მახასიათებლები, რომელიც გამოხატულია აპროქსიმაციის, კოლმოგოროვის, ბერშტეინის, იზომორფიზმის, გელფანდის რიცხვების (მოკლედ s–რიცხვები) საშუალებით, ზოგად ბანახის ფუნქციურ სივრცეებში, იმ შემთხვევაში, როცა განხილული სივრცისათვის გარკვეული ტიპის სუსტი ტიპის მინკოვსკის უტოლობები გვაქვს. როგორც შედეგი მიღებულია ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში s–რიცხვების ასიმტოტური შეფასებები, რომლებიც უკვე ცნობილი შედეგების (ედმუნდსი, ლანგი, ნეკვინდა) არსებითი განზოგადოებას წარმოადგენენ. დისერტაციის მეორე პარაგრაფში შესწავლილია ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცისათვის ნორმის აპროქსიმაციის დადისკრეტიზაციის ამოცანა, რომელთაც არსებითი მნიშვნელობა აქვს ჰარმონიული ანალიზის პრობლემატიკის დამუშავებისათვის არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში. ჩვენ შევისწავლეთ ნორმის G′ და G′′თვისება $L^{p(\cdot)}[0;1]$ ცვალდმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცის შემთხვევაში. ჩვენს მიერ დადგენილია კლასი ექსპონენტებისა, რომლებისთვისაც შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეს გააჩნია G', მაგრამ არ გააჩნია G''თვისება (ან პირიქთ). დისერტაციის მესამე თავში დამუშავებულია საუკეთესო მიახლოების არაწრფივი პოლინომიური ოპერატორის უწყვეტად გაგრძელების ამოცანა $L^{p(\cdot)}[\Omega]$ სივრციდან $L^{p(\cdot)-1}[\Omega]$ სივრცეში, როცა $1 < p_- \le p_+ < \infty$. კლსიკურ ლებეგის L^p $(1 < p < \infty)$ სივრციდან L^{p-1} სივრცეში საუკეთესო მიახლოების არაწრფივი პოლინომიალური ოპერატორის უწყვეტი გაგრძელების საკითხი უკანასკნელ პერიოდში დამუშავებული იყო სუენიას მიერ. დისერტაციის მეოთხე თავში შესწავლილია ვეივლეტ სისტემის საშუალებით ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცის კონსტრუქციული დახასიათების საკითხი. სახელდობრ დადგენილია კლასი ექსპონენტებისა, რომლის შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში სამართლიანია პელი-ლიტტლვუდის თეორემის ანალოგი.

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Nino Samashvili

Faculty of Exact and Natural Sciences

Department of Mathematics

Some approximation problems in the variable exponent Lebesgue spaces

Thesis submitted for the degree of PhD in Mathematics

Scientific advisers:

TengizKopaliani-Associate Professor of Mathematics,
IvaneJavakhishvili Tbilisi State University

AmiranGogatishvili- Research Fellow at the Department of
Topology and Functional Analysis
of the Institute of Mathematics of the
Academy of Sciences of the Czech Republic

Tbilisi

2017

Abstract

This work studies Some approximation problems in the variable exponent Lebesgue spaces. Namely, the first chapter, which is dedicated to study of s-numbers for a weighted Hardy-type operator T actingin a Banach function space E. Under some geometrical assumptions on E, and on the weights u, v, we obtain two-sided estimates for its approximation, isomorphism, Bernstein, Gelfand and Kolmogorov numbers. The second chapter, which covers study the property G' (property G'') for variable Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}[0;1]$. We have described the class of exponents, for which the correspondent variable exponent Lebesgue spaces has property G' (property G''). Also we have constructed variable exponent Lebesgue space with property $G'(G''$), which does not possess G'' (G') property. The third chapter covers extention of the operator of the best polynomial approximation from $L^{p(\cdot)}[\Omega]$ to $L^{p(\cdot)-1}[\Omega]$, when $1 < p_- \le p_+ < \infty$. The best polynomial approximation operator was recently extended by Cuenya from L^p $(1 < p < \infty)$ to L^{p-1} . The fourth chapter explores wavelet characterization of the variable exponent Lebesgue space.

სარჩევი

შესავალი 3-12

თავი I
ჰარდის ტიპის ინტეგრალური ოპერატორის ზოგიერთი s-რიცხვის აპროქსიმაციული შეფასებები ბანახის ფუნქციურ სივრცეებში

1.1.ძირითადი აღნიშვნები, განმარტებები და თეორემები 13-18
1.2.მახასიათებელი A და მისი თვისებები.. 18-28
1.3. T ოპერატორისთვის s-რიცხვების შეფასებები.. 28-33
1.4. ასიმპტოტური შედეგები.. 33-36

თავი II
ნორმების ქვედა და ზედა შეფასება ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში

2.1 G' და G'' თვისებები ზოგად ფუნქციურ სივრცეებში... 37-40
2.2 G' და G'' თვისებები ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში........................ 40-42
2.3. ძირითადი შედეგების დამტკიცება... 42-50

თავი III
საუკეთესო მიახლოების ოპერატორის შესახებ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში

3.1 აუცილებელი აღნიშვნები, განმარტებები და ძირითადი თეორემები 51-52
3.2 საუკეთესო მიახლოების პოლინომის არსებობა $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ლებეგის სივრცეში 52- 56
3.3 საუკეთესო მიახლოების ოპერატორის გაგრძელების და ერთადერთობის შესახებ $f \in L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$ სივრცეში.. 56-60

თავი IV
ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის დახასიათება ვეივლეტ ბაზისების საშუალებით

4.1 აუცილებელი აღნიშვნები, განმარტებები და ძირითადი თეორემები უპირობო ბაზისების არსებობისთვის ზოგად ფუნქციონალურ სივრცეებში.........................61-65
4.2 თეორემა ვეივლეტ ბაზისების საშუალებით ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის დახასიათების შესახებ 65-66

გამოყენებული ლიტერატურა 67-70

შესავალი

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება აპროქსიმაციის საკითხებს ბანახის ახალ, არასტანდარტულ ფუნქციურ სივრცეებში. ჩვენ განვიხილავთ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებს. კარგადაა ცნობილი, რომ ფუნქციური სივრცეები უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობენ როგორც კლასიკური, ასევე თანამედროვე ანალიზში. ისინი წარმოადგენენ მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს დიფერენციალური განტოლებების (ჩვეულებრივი და კერძოწარმოებულებიანი), დიფერენციალური გეომეტრიის, ფუნქციათა თეორიის, ვარიაციული აღრიცხვის პრობლემატიკის კვლევის დროს. გასული საუკუნის სამოციან წლებში შემოღებული იქნა მთელი რიგი ფუნქციური სივრცეები; ბესოვის (ლიფშიცის სივრცეები), ბესელის პოტენციალთა სივრცეები (ლიუვილის სივრცეები), ზიგმუნდის კლასები, ჰარდის სივრცეები, სასრული რხევის ფუნქციები. შეიქმნა მძლავრი მეთოდები, რომლებიც იძლევიან აღნიშნული სივრცეების სტრუქტურულ დახასიათებას. აგებული იქნა სხვადასხვა ტიპის ბაზისები (უპირობო ბაზისები) ზემოთ აღნიშნულ სივრცეებში, რომელთა ბაზაზე დამუშავებული იქნა ეფექტური წრფივი და არაწრფივი აპროქსიმაციული ალგორითმები.

გასული საუკუნის ბოლოს ცხადი გახდა, რომ კლასიკურ ფუნქციურ სივრცეებს აღარ ძალუძთ მთელი რიგი პრობლემების ამოხსნა, რომლებიც ჩნდება არაწრფივი დრეკადობის თეორიის, უკუმშვად სითხეთა დინების მექანიკის, ფიზიკის მათემატიკურ მოდელებში, არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში და სხვა. გაჩნდა ახალი სივრცეების შემოღებისა და გამოკვლევის აუცილებლობა. ბანახის არასტანდარტულ ფუნქციათა სივრცეებს შორის ერთ-ერთი მათგანია მუსიელაკ-ორლიჩის სივრცეები და განსაკუთრებით ამ სივრცეების კერძო შემთხვევა ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები. აღმოჩნდა, რომ ეს სივრცეები სწორედ ის სივრცეებია, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია გამოყენებითი მათემატიკისა და მექანიკის მთელი რიგი პრობლემების გადაჭრა. ამის მაგალითებია: ელექტრო-რეოლოგიური დინების მოდელირება, ფიზიკაში ლავრენტიევის ეგრეთწოდებული ფენომენის და მთელი რიგი სხვა ფიზიკური მოვლენების ვარიაციული მეთოდებით გამოკვლევასთან დაკავშირებული ამოცანები. უკანასკნელ ხანს ზემოხსენებულმა სივრცეებმა ფართო გამოყენება ჰპოვა აგრეთვე სახეთა გამოცნობის თეორიაში (იხ. [1], [2] მონოგრაფიები).

აღსანიშნავია, რომ $L^{p(\cdot)}$ სივრცეებს გააჩნიათ მთელი რიგი არასტანდარტული თვისებები, მუდმივი მაჩვენებლის მქონე L^p სივრცეებთან შედარებით. მაგალითად, აღნიშნულ სივრცეებში, საზოგადოდ, ძვრის ოპერატორი არაა შემოსაზღვრული. აღნიშნული დებულებიდან როგორც შედეგი მიიღება, რომ $f \in L^{p(\cdot)}$ ფუნქციის ნახვევის ოპერაცია ფიქსირებულ $g \in L^1$ ფუნქციასთან არაა უწყვეტი. ვინაიდან ჰარმონიული ანალიზისათვის მეტად საჭირო, ორი ძვრისა და ნახვევის ოპერატორი საზოგადოდ არაა შემოსაზღვრული $L^{p(\cdot)}$ სივრცეებში, ამიტომ აღნიშნულ სივრცეებისათვის ჰარმონიული ანალიზის მთელი რიგი კლასიკური თეორემები სამართლიანი არაა, ხოლო იმ დებულებათა დასაბუთებამ, რომელთა ანალოგების მოძებნა მოხერხდა $L^{p(\cdot)}$ სივრცეებისთვის, მოითხოვა ახალი მეთოდებისა დამუშავება (იხ [1], [2] მონოგრაფიები).

წინამდებარე დისერტაციაში შესწავლილი საკითხები მჭიდროდაა დაკავშირებული ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეების მთელ რიგ გეომეტრიულ თვისებებთან. შევნიშნოთ, რომ მათი გამოკვლევა საზოგადოდ ეფექტურად ვერ ხდება ბანახის სივრცის გეომეტრიის ისეთი ფუნდამენტალური ცნებების გამოყენებით, როგორიცაა

სივრცის $p-$ამოზნექილობა, $p-$ჩაზნექილობა, ნორმის ზედა (ქვედა) p-შეფასებები, რადემახერის $p-$ტიპი და q-კოტიპი და ა.შ. არასტანდარტული სივრცეებში ჰარმონიული ანალიზის საკითხების შესასწავლად საკმაოდ ეფექტური გამოდგა განზოგადოებული მინკოვსკის უტოლობის გარკვეული ტიპის სუსტი ფორმები. შესავალ ნაწილში მოკლედ მიმოვიხილავთ ამ საკითხის ისტორიას და იმ ამოცანებს რომლებიც დამუშავებული იქნება დისერტაციის შემდგომ თავებში.

ვთქვათ $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე ა, დადებითი ზომით. S სიმბოლოთი აღვნიშნოთ Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა ზომად ფუნქციათა სიმრავლე. შემდგომში $|X|$-ით აღვნიშნავთ ზომადი X სიმრავლის ზომას, ხოლო χ_X სიმბოლოთი X სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას. ვთქვათ $E\subset S$ ბანახის სივრცეა. ვიტყვით, რომ E ბანახის ფუნქციური სივრცეა, თუ სრულდება პირობები:

1) ნორმა $\|f\|_E$ განსაზღვრულია ნებისმიერი ზომადი f ფუნქციისათვის და $f\in E$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\|f\|_E<\infty,$ $\|f\|_E=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)=0$ თითქმის ყველგან;

2) $\|\,|f|\,\|_E=\|f\|_E$ ყოველი $f\in E$ -თვის;

3) თუ $0\le f(x)\le g(x)$ თითქმის ყველგან, მაშინ $\|f\|_E\le\|g\|_E$;

4) თუ $0\le f_n(x)\le f_{n+1}(x), \forall n\in\mathbb{N}$ და $f_n(x)\to f(x)$ თითქმის ყველგან Ω სიმრავლეზე, მაშინ $\|f_n\|_E\to\|f\|_E$;

5) თუ $X\subset\Omega$ რაიმე ზომადი სიმრავლეა, $|X|<\infty,$ მაშინ $\|\chi_X\|<\infty;$

6) ყოველი ზომადი X სიმრავლისათვის, რომლისთვისაც $|X|<\infty,$ არსებობს მუდმივი C_X ისეთი, რომ $\int\limits_X f(x)dx\le C_X\|f\|_X$.

შემდგომში E^* სიმბოლოთი ავღნიშნავთ E სივრცის შეუღლებულ (დუალურ) სივრცეს, ხოლო E'-ით E სივრცის ასოცირებულ სივრცეს. ეს უკანასკნელი სივრცე შეიცავს ყველა იმ $g\in S$ ზომად ფუნქციას, რომლისათვის ინტეგრალი $\int\limits_\Omega f(x)g(x)dx$ სასრულია, ნებისმიერი $f\in E$ ფუნქციისათვის. ყველა ასეთი ფუნქციების ერთობლიობა წარმოადგენს ბანახის ფუნქციურ სივრცეს ნორმით

$$\|g\|_{E'}=\sup\left\{\|fg\|_{L^1(\Omega)}:\|f\|_E\le1\right\}.$$

შევნიშნოთ, რომ E' წარმოადგენს შეუღლებული E^* სივრცის ჩაკეტილ ქვესივრცეს, გარდა ამისა ნებისმიერი $f\in E$ ფუნქციის ნორმა შესაძლებელია დავითვალოთ შემდეგნაირად

$$\|f\|_E=\sup_{\|g\|_{E'}\le1}\int\limits_\Omega f(x)g(x)dx.$$

ბანახის ფუნქციური სივრცეების ზოგადი თვისებები და გამოყენებანი მოცემულია ბენეტის და შარპლის [3] კლასიკურ მონოგრაფიაში. ბანახის ფუნქციური სივრცეების მაგალითებია კლასიკური ლებეგის L^p $(1\le p\le\infty),$ ლორენცის, მარცინკევიჩის, ორლიჩის სივრცეები. მათი გეომეტრიული და ფუნქციონალური თვისებები ფართოდ შეიწავლება ფუნქციონალურ ანალიზში (ბანახის სივრცეთა გეომეტრია, სიმეტრიული სივრცეების თეორია, ბანახის მესერთა თეორია, ოპერატორთა თეორია, ბანახის სივრცეთა

ინტერპოლაცია, სპექტრალური ანალიზი). აღნიშნულ სივრცეებს მნიშვნელოვანი გამოყენებები აქვთ ანალიზის, დიფერენციალური განტოლებების, დიფერენციალური გეომეტრიის საკითხების კვლევის დროს. ბანახის ფუნქციური სივრცეებს წარმოადგენს აგრეთვე ლებეგის სივრცეები ცვლადი მაჩვენებლით, რომლებიც თავის მხრივ მუსიელაკ-ორლიჩის სივრცეების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან და ანალიზში ფართოდ გამოყენებად სივრცეთა კლასს წარმოადგენენ.

ვთქვათ $\Im$ არის $Q=\{Q_i\}$ მიმდევრობათა რაიმე ერთობლიობა, სადაც თითოეული $\{Q_i\}$ მიმდევრობა წარმოადგენს Ω ზომადი სიმრავლის წყვილ-წყვილად არათანამკვეთ (ნული ზომის სიმრავლემდე სიზუსტით) ზომადი ქვესიმრავლეებით დანაწილებას (არაუმეტეს თვლადი) $\Omega=\bigcup_{Q_i\in Q} Q_i$, სადაც თითოეული Q_i სიმრავლის ზომა დადებითია და $Q_i\cap Q_j=\varnothing, i\neq j$ (ნული ზომის სიმრავლემდე სიზუსტით). შემდგომში ნებისმიერ ასეთ სიმრავლეთა მიმდევრობას ვუწოდებთ Ω სიმრავლის დანაწილებას.

ვთქვათ Q წარმოადგენს Ω სიმრავლის რაიმე დანაწილებას. შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება გარკვეული დისკრეტულ ბანახის სივრცეები, სადაც ინდექსებად გამოყენებული იქნება Q_i სიმრავლეები (უფრო ზუსტად თითოეული დანაწილებისათვის დაგვჭირდება გარკვეული დისკრეტული ფუნქციური სივრცე ინდექსებით Q_i). შემდგომში $Q=\{Q_i\}$ დისკრეტულ სიმრავლეს განვიხილავთ, როგორც ზომად სივრცეს, რომელშიც ნებისმიერი Q_i ქვესიმრავლის ზომა ერთის ტოლია, ხოლო $\{Q_i\}$ სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლის ზომა ამ ქვესიმრავლეში შემავალი ელემენტების რაოდენობა (coutnt measure). ცხადია Q-ზე განსაზღვრული ნებისმიერი რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ზომად ფუნქციას (ეს ფუნქციები უბრალოდ რიცხვითი მიმდევრობებია, სადაც ინდექსებად გამოყენებულია დანაწილების Q_i სიმრავლეები). მიღებულ ზომად ფუნქციათა სივრცეზე (ანუ მიმდევრობათა სივრცეზე) თითქმის ყველგან კრებადობა ცხადია ემთხვევა ყოველი კორდინატის გასწვრივ საკორდინატო რიცხვითი მიმდევრობის კრებადობას. ზემოთ, ჩვენ განვმარტეთ ბანახის ფუნქციური სივრცე Ω ზომად სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომადი ფუნქციებისათვის. ანალოგიურად შეგვიძლია მოვიქცეთ დისკრეტული Q ზომადი სიმრავლისათვის. სახელდობრ განვიხილოთ რიცხვითი მიმდევრობებისაგან (ინდექსებად გამოყენებულია დანაწილების Q_i სიმრავლეები) შემდგარი დისკრეტული ბანახის სივრცე ისე, რომ შესრულდეს ზემოთ მოყვანილი 1)-6) თვისებები Q-ზე განსაზღვრული დისკრეტული ზომის მიმართ. შემდგომში, ასეთნაირად განსაზღვრულ სივრცეებს ბანახის დისკრეტული ფუნქციურ სივრცეებს (მოკლედ ბანახის დისკრეტული სივრცეებს) ვუწოდებთ. როგორც უწყვეტი ზომის შემთხვევაში, ანალოგიურად განიმარტება დისკრეტული ლებეგის, ორლიჩის, ლორენცის, მარცინკევიჩის დისკრეტული სივრცეები.

შემდგომში l_Q სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $Q=\{Q_i\}$ სიმრავლეზე განმარტებულ რაიმე დისკრეტულ ბანახის ფუნქციურ სივრცეს (მიმდევრობათა სივრცეს). e_{Q_i}-სიმბოლოთი აღვნიშნავთ სტანდარტულ ერთეულოვან ვექტორს; მიმდევრობას, რომლის Q_i ადგილზე მდგომი რიცხვი ერთის ტოლია, ხოლო დანარჩენი ნულის.

განმარტება 0.1. ვთქვათ $\Im$ წარმოადგენს Ω სიმრავლის დანაწილებათა რაიმე ერთობლიობას, ხოლო $l=\{l_Q\}_{Q\in\Im}$ კი ბანახის დისკრეტულ სივრცეთა რაიმე ერთობლიობაა. ვიტყვით, რომ Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული E ბანახის ფუნქციური სივრცისათვის გვაქვს თანაბრად ზედა l (ქვედა l) შეფასება, თუ არსებობს

აბსოლუტური მუდმივი $C>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $f\in E$ ფუნქციისათვის და ნებისმიერი $Q\in\Im$ დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\| f \|_E \le C \left\| \sum_{Q_i\in Q} \| f\chi_{Q_i} \|_E \cdot e_{Q_i} \right\|_{l_Q} \tag{0.1}$$

$$\left(\left\| \sum_{Q_i\in Q} \| f\chi_{Q_i} \|_E \cdot e_{Q_i} \right\|_{l_Q} \le C \| f \|_E \right). \tag{0.2}$$

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვეაში როცა განმარტება 0.1-ში მოცემული დისკრეტული სივრცეები ერთიდაიგივე ლებეგის დისკრეტული l^p $(1\le p<\infty)$ სივრცეა, მაშინ გვექნება კლასიკური l^p ზედა (ქვედა) შეფასების ცნება ბანახის ფუნქციური სივრცეებისათვის. აღნიშნული ცნება (l^p-ამოზნექილობის, l^p-ჩაზნექილობის, რადემახერის p-ტიპის, რადემახერის p-კოტიპის ცნებებთან ერთად) ბანახის სივრცეთა გეომეტრიაში ერთ-ერთ ფუნდამენურ ცნებას წარმოადგენს. ბანახის სივრცის ეს მახასიათებელი (სხვა მახასიათებლებთან ერთად) ფართოდ გამოიყენება ანალიზის მრავალი საკითხის კვლევის დროს (ბანახის სივრცეებში ბაზისების, უპირობო ბაზისების თვისებების შესწავლა, შემთხვევითი ფუნქციონალური მწკრივების კრებადობა და ა.შ.). ბანახის სივრცეთა გეომეტრიის ეს საკითხები ფართოდაა გაშუქებული ლინდენშტრაუსის და ზაფრირის კლასიკურ მონოგრაფიაში [4].

განმარტება 0.1 ზოგადი ფორმით შემოღებული იყო კოპალიანის [5] მიერ. შემთხვევა, როცა განმარტება 0.1-ში მოცემული დისკრეტული სივრცეები ერთიდაიგივეა ნებისმიერი დანაწილებისათვის (მაგალითად ორლიჩის დისკრეტული სივრცე) განხილული იყო ბერეჟნოის მიერ [6] ნაშრომში.

შევნიშნოთ, რომ ფურიეს ანალიზის მნიშვნელოვანი ოპერატორების (სხვადასხვა ტიპის მაქსიმალური ოპერატორები, კალდერონ-ზიგმუნდის სინგულარული ოპერატორები, პოტენციალის ტიპის ოპერატორები და ა.შ) შემოსაზღვრულობის საკითხი სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეებში თანამედროვე ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიმართულებაა. აღნიშნული საკითხის დამუშავება მოითხოვს ფუნქციური სივრცის გეომეტრიის ფაქიზი მომენტების კვლევას. აღსანიშნავია, რომ ზოგადი ფორმით განმარტება 0.1 ეფექტური გამოდგა არასტანდარტულ სივრცეებში (სახელდობრ ლებეგის სივრცეებში ცვლადი მაჩვენებლით) ფურიეს ანალიზის საკითხების კვლევის დროს.

საინტერესოა იმ შემთხვევის განხილვა, როცა ბანახის ფუნქციურ E სივრცეში ერთდროულად გვაქვს თანაბრად ზედა და ქვედა l შეფასება ((0.1)-(0.2) შეფასებები). კოპალიანის მიერ [5] დამტკიცებული იყო, რომ ამ შემთხვევაში არსებობს აბსოლუტური მუდმივი $C>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $f\in E$ ფუნქციისათვის და ნებისმიერი $Q\in\Im$ დანაწილებისათვის

$$\frac{1}{C}\|f\|_E \le \left\| \sum_{Q_i\in Q} \frac{\| f\chi_{Q_i} \|_E}{\| \chi_{Q_i} \|_E} \chi_{Q_i} \right\|_E \le C\|f\|_E . \tag{0.3}$$

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც $E=L^p(\Omega)$, მაშინ (0.3)-ში გვაქვს ტოლობები $C=1$ მუდმივით. თუ რაიმე ბანახის ფუნქციურ სივრცეში გვაქვს (0.3) ტიპის შეფასება,

ეს საშუალებას მოგვცემს მოვახდინოთ ფუნქციის ნორმის „დისკრეტიზაცია“, როგორც ეს ლებეგის კლასიკურ სივრცეებში ხდება.

ვთქვათ $E = E_t$, $F = F_s$ Ω ზომად სიმრავლეზე განსაზღვრული ორი ბანახის ფუნქციური სივრცეა. შერეული ნორმით $E[F]$ და $F[E]$ სივრცეები განიმარტება, როგორც $\Omega\times\Omega$ ზომად სიმრავლეზე განსაზღვრული ბანახის ფუნქციური სივრცეები, რომლებიც შეიცავენ $\Omega\times\Omega$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ ყველა იმ $k(t,s)$ ზომად ფუნქციებს, რომელთათვისაც შესაბამისად $\|k(t,\cdot)\|_F \in E,$ $\|k(\cdot,s)\|_E \in F$ და სასრულია ნორმები

$$\|k\|_{E[F]} = \|\| k(t,\cdot) \|_F \|_E \,, \|k\|_{F[E]} = \|\| k(\cdot,s) \|_E \|_F \,.$$

შევნიშნოთ, რომ $E[F]$ და $F[E]$ სივრცეები საზოგადოდ იზომორფული სივრცეები არ არიან. კლასიკური კოლმოგოროვ-ნაგუმოს თეორემის ძალით, თუ $E[F]$ და $F[E]$ სივრცეები იზომორფულია , მაშინ E და F შესაბამისად იზომორფული არიან $L^p_{w_1}$ და $L^p_{w_2}$ წონიანი სივრცეებისა რაიმე $1 \le p < \infty$ რიცხვისათვის ან ორივე E და F AM ტიპის სივრცეა (იხ. [7]).

განმარტება 0.2. ვთქვათ $\Im$ არის Ω სიმრავლის რაიმე დანაწილებათა ერთობლიობა. ვიტყვით, რომ Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული ბანახის სივრცეთა (E,F) წყვილისათვის სრულდება სუსტი მინკოვსკის უტოლობა დანაწილებათა $\Im$ ერთობლიობის მიმართ, თუ არსებობს აბსოლიტური მუდმივა $C > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $f \in E$ და $g \in F$ ფუნქციებისათვის და ნებისმიერი $Q \in \Im$ დანაწილებისათვის

$$\left\| \sum_{Q_i \in Q} f(t)\chi_{Q_i}(t) g(s)\chi_{Q_i}(s) \right\|_{F[E]} \le C \left\| \sum_{Q_i \in Q} f(t)\chi_{Q_i}(t) g(s)\chi_{Q_i}(s) \right\|_{E[F]} . \qquad (0.4)$$

განმარტება 0.2 შემოღებული იყო კოპალიანის მიერ [5] ნაშრომში. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი F ბანახის ფუნქციური სივრცისათვის სამართლიანია განზოგადოებული მინკოვსკის უტოლობა $L^1[F] \subset F[L^1]$ და ამიტომ (0.4) უტოლობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მინკოვსკის უტოლობა ბანახის სივრცეთა (E,F) წყვილისათვის და სპეციფიკური ტიპის ორი ცვლადის ფუნქციებისათვის. შევნიშნოთ, რომ კონკრეტული ფუნქციური სივრცეებისათვის $E[F] \subset F[E]$ უწყვეტი ჩადგმები (განზოგადოებული მინკოვსკის უტოლობა) ამჟამადაც ინტენსიური კვლევის საგანია. იმ შემთხვევაში თუ (E,F) წყვილისათვის გვაქვს განზოგადოებული მინკოვსკის უტოლობა, შესაძლებელია მისი ეფექტური გამოყენება სხვადასხვა ტიპის ინტეგრალური, სინგულარული, მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის შესწავლის დროს E სივრციდან F სივრცეში (მაგალითად (L^p, L^q) სივრცეთა წყვილისათვის, როცა $1 \le p \le q \le \infty$ გვაქვს განზოგადოებული მინკოვსკის უტოლობა). როგორც აღმოჩნდა, მთელი რიგი კლასიკური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხის შესწავლის დროს E სივრციდან F სივრცეში არაა საჭირო მოვითხოვოთ განზოგადოებული მინკოვსკის უტოლობა (რომელიც შეიძლება სამართლიანიც არ იყოს), არამედ საკმარისია მოვითხოვოთ მისი სუსტი ვარიანტი, მაგალითად (0.4) უტოლობის სახით. მაგალითისათვის ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეთა $(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ წყვილისათვის თუ $p(\cdot) \ne const$ განზოგადოებული მინკოვსკის

უტოლობა არ სრულდება, თუმცა გარკვეულ პირობებში სამართლიანია სუსტი ტიპის მინკოვსკის უტოლობა, რაც საშუალებას იძლევა ჰარმონიული ანალიზის მნიშვნელოვანი საკითხები შესწავლილი იქნას ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში (იხ. მაგ. [5], [8], [9]).

განმარტება 0.3. ვთქვათ $\Im$ არის Ω სიმრავლის რაიმე დანაწილებათა ერთობლიობა. ვიტყვით, რომ Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული ბანახის ფუნქციურ სივრცეთა (E,F) წყვილისათვის სრულდება $G \equiv G(\Im)$ თვისება, თუ არსებობს აბსოლუტური მუდმივი $C > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $Q \in \Im$ დანაწილებისათვის, ნებისმიერი $f \in E$ და $g \in F'$ ფუნქციებისათვის

$$\sum_{Q_i \in Q} \| f\chi_{Q_i} \|_E \| g\chi_{Q_i} \|_{F'} \leq \| f \|_E \| g \|_{F'} . \tag{0.5}$$

განმარტება 0.3 შემოღებული იყო ბერეჟნოის მიერ [10] ნაშრომში. შევნიშოთ, რომ თუ $1 \leq p \leq q \leq \infty$, მაშინ ბანახის სივრცეთა (L^p, L^q) წყვილს გააჩნია G თვისება. კლასიკური ბანახის ფუნქციურ სივრცეთა (E,F) წყვილებისათვის (ლორენცის, მარცინკევიჩის, ორლიჩის) G თვისება შესწავლილი იყო ბერეჟნოის მიერ. მთელი რიგი კლასიკური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის შესწავლა E სივრციდან F სივრცეში ეფექტურად შესწავლადია თუ (E,F) წყვილებისათვის სრულდება G თვისება (იხ [10], [6]).

ზემოთ მოყვანილი ცნებები გამოსახავს ბანახის სივრცეთა გეომეტრიის მნიშვნელოვან ასპექტებს და აღნიშნული თვისებები ეფექტურად შეიძლება იქნეს გამოყენებული ანალიზის მრავალი საკითხის შეწავლის დროს. კოპალიანის მიერ [5] დამტკიცებული იყო, რომ სამივე მოყვანილი ცნება ერთმანეთის ექვივალენტურია. სახელდობრ, სამართლიანია თეორემა.

თეორემა 0.1. ვთქვათ $\Im$ არის Ω სიმრავლის რაიმე დანაწილებათა ერთობლიობა, ხოლო E და F Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული ბანახის ფუნქციური სივრცეებია. შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია:

1) (E,F) ბანახის ფუნქციური სივრცეთა წყვილებისათვის სრულდება განზოგადოებული მინკოვსკის უტოლობა;

2) (E,F) ბანახის ფუნქციური წყვილებისათვის სრულდება $G(\Im)$ თვისება;

3) არსებობს დისკრეტულ სივრცეთა $l = \{l_Q\}_{Q \in \Im}$ ერთობლიობა, ისეთი, რომ E სივრცეს გააჩნია თანაბარი ზედა l შეფასება, ხოლო F სივრცეს თანაბარი ქვედა l შეფასება.

ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში სუსტი მინკოვსკის ტიპის უტოლობები მიღებული იყო კოპალიანის მიერ [5], [8] ნაშრომებში. მოვიყვანოთ ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცის ცნება და რამოდენიმე მაგალითი ამ მიმართულებით. ვთქვათ $p(\cdot) : \Omega \to [1, \infty)$ ზომადი ფუნქციაა. განვიხილოთ Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა ის ზომადი f ფუნქცია, რომელთათვისაც არსებობს რაიმე დადებითი რიცხვი λ ისეთი, რომ

$$\int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx < \infty.$$

აგებულ სიმრავლეს შემდგომში ავღნიშნავთ სიმბოლოთი $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. ეს სიმრავლე წარმოადგენს ბანახის ფუნქციურ სივრცეს ნორმით

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\Omega}\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \le 1\right\}.$$

ვთქვათ $\Omega = R^n$, ხოლო $\Im$ წარმოადგენს $\mathbb{R}^n$ სიმრავლის არათანამკვეთ კუბებად დანაწლებათა ერთობლიობას. სიმბოლო $P(\mathbb{R}^n)$-ით ავღნიშნოთ იმ $p(\cdot):\Omega \to [1,\infty)$ ექსპონენტების ერთობლიობა, რომელთათვისაც სრულდება გლობალური ლოგ-ჰელდერის პირობა:

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{c}{\log\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right)}, \text{ როცა } |x-y| < \frac{1}{2}; \tag{0.6}$$

$$|p(x) - p_\infty| \le \frac{C}{\log(e + |x|)}, \text{ რაიმე } p_\infty \in \mathbb{R} \text{ რიცხვისათვის.} \tag{0.7}$$

მაგალითი 1. (იხ. [5], [8]) ვთქვათ $p(\cdot), q(\cdot) \in P(\mathbb{R}^n), \quad p(x) \le q(x)\ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$, მაშინ სივრცეთა $(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n), L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ წყვილისათვის სრულდება განზოგადოებული მინკოვსკის უტოლობა $\Im$ დანაწილებათა ერთობლიობის მიმართ (მაშასადამე თუ $p(\cdot) = q(\cdot)$ შესაბამის სივრცეში გვაქვს (0.3) შეფასებები).

ანალოგიური დებულება სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა Ω რაიმე სასრული (a,b) ინტერვალია, ხოლო $\Im$ წარმოადგენს (a,b) სიმრავლის არათანამკვეთ ინტერვალებით დანაწლებათა ერთობლიობას (იხ. [5]). ამ შემთხვევაში ექსპონენტთა $P((a,b))$ სიმრავლე განიმარტება მხოლოდ (0.6) პირობით.

შევნიშნოთ, რომ ექსპონენტზე გარკვეული პირობის გარეშე, საზოგადოდ შესაბამის ლებეგის სივრცეებში ცვლადი მაჩვენებლით სუსტი ფორმის მინკოვსკის უტოლობა სამართლიანი არაა. [5] ნაშრომში აგებული იქნა $p(\cdot):[0,1] \to [1,\infty)$ უწყვეტი ექსპონენტი ისეთი, რომ $\lim_{h\to 0} |p(0) - p(h)| \log(1/h) = \infty$ და შესაბამისი ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში არ სრულდება სუსტი მინკოვსკის უტოლობა $[0,1]$ სეგმენტის ინტერვალთა დანაწილების მიმართ.

მაგალითი 2. (იხ [5], [8]). ვთქვათ $p(\cdot), q(\cdot) \in P([0,1])$. განვიხილოთ $w:[0,1] \to [0,1]$ ჰომეომორფიზმი, რომელიც მოცემულია ფორმულით $w(x) = \int_0^x l(t)dt$, სადაც $l(t) > 0, \forall t \in [0,1]$ რაიმე ინტეგრებადი ფუნქციაა, ისეთი რომ $w(1) = 1$. მაშინ სივრცეთა $(L^{p(w(\cdot))}([0,1]), L^{q(w(\cdot))}([0,1]))$ წყვილისათვის სრულდება სუსტი მინკოვსკის უტოლობა (ინტერვალებით დანაწილების მიმართ).

მოკლედ მიმოვიხილოთ ის საკითხები, რომლებიც განხილული იქნება დისერტაციის მომდევნო თავებში.

დისერტაციის პირველ თავში შესწავლილია ზოგადი ჰარდის ოპერატორის

$$Tf(x) = w(x)\int_a^x f(t)u(t)dt$$

სასრულგანზომილებიანი ოპერატორებით აპროქსიმაციის რაოდენობრივი (კომპაქტურობის) მახასიათებლები, რომელიც გამოხატულია აპროქსიმაციის, კოლმოგოროვის,

ბერშტეინის, იზომორფიზმის, გელფანდის რიცხვების (მოკლედ $s-$რიცხვები) საშუალებით ზოგად ბანახის ფუნქციურ სივრცეებში იმ შემთხვევაში, როცა განხილული სივრცისათვის გარკვეული ტიპის სუსტი ტიპის მინკოვსკის უტოლობები გვაქვს. კლასიკურ ლებეგის სივრცეებისათვის ეს საკითხი ფართოდაა შესწავლილი (იხ. ლანგის და ედმუნდსის [11], ედმუნდსის და ევანსსის [12] მონოგრაფიები). შევნიშნოთ, რომ ჰარდის ტიპის ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხი ფართოდაა დაკავშირებული ანალიზის მნიშვნელოვან საკითხებთან (სივრცეთა ჩადგმების თეორია, სივრცეთა ინტერპოლაცია, სობოლევის სივრცეების გამოკვლევა, გარკვეული დიფერენციალური ოპერატორების სპექტრალური ანალიზი და ა.შ). ამასთანავე აღვნიშნოთ, რომ წრფივი უწყვეტი ინტეგრალური ოპერატორის კომპაქტურობის ხარისხი (რომელიც ცხადია ოპერატორის წარმომქნელ გულზეა დამოკიდებული) თავისთავად საინტერესოა და დაკავშირებულია ოპერატორის საკუთრივი რიცხვების ასიმპტოტურ ყოფაქცევასთან (იხ [13] მონოგრაფია). საკუთრივ, ჰარდის ტიპის ოპერატორისათვის $T: L^p(a,b) \to L^q(a,b)$ შემოსაზღვრულობის და კომპაქტურობის სხვადასხვა მახასიათებელების შესწავლა მჭიდროდაა დაკავშირბული ალბათობის თეორიაში „მცირე ბითვის“ (small ball) პრობლებასთან (იხ. მ. ლიფშიცის და ვ. ლინდეს მონოგრაფია [14]).

დისერტაციის მეორე პარაგრაფში შესწავლილია ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცისათვის ნორმის აპროქსიმაციის და „დისკრეტიზაციის“ ამოცანა. სახელდობრ, (0.3) უტოლობის გარკვეული განზოგადოებები, რომელიც თავისთავად საინტერესოა. შევნიშნოთ, რომ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისათვის ნორმის (0.3) სახით წარმოდგენამ ფართო გამოყენება ჰპოვა სხვადასხვა სახის ოპერატორების (ჰარდი-ლიტლვუდის, წილადური მაქსიმალური ფუნქციების, კალდერონ-ზიგმუნდის სინგულარული ოპერატორების და ა.შ.) შემოსაზღვრულობის საკითხის შესწავლის დროს, როგორც წონის გარეშე, ასევე წონიანი შეფასებების მიღების დროს (იხ. მონოგრაფია [1], [2]).

ვთქვათ E არის Ω სიმრავლეზე განსაზღვრული რაიმე ბანახის ფუნქციური სივრცე, ხოლო $\Im$ რაიმე დანაწილებათა ერთობლიობა. თავისთავად საინტერესოა ბანახის იმ ფუნქციური სივრცეების შესწავლა, რომლებისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\left\| \sum_{Q_i \in Q} \frac{\| f\chi_{Q_i} \|_E}{\| \chi_{Q_i} \|_E} \chi_{Q_i} \right\|_E \le C \| f \|_E , \tag{0.8}$$

მაგრამ არაა სამართლიანი უტოლობა

$$\frac{1}{C} \| f \|_E \le C \left\| \sum_{Q_i \in Q} \frac{\| f\chi_{Q_i} \|_E}{\| \chi_{Q_i} \|_E} \chi_{Q_i} \right\|_E , \tag{0.9}$$

რაიმე $C > 0$ აბსოლუტური მუდმივის, ყოველი $f \in E$ და ყოველი $Q \in \Im$ დანაწილების მიმართ (ან პირიქით). მეორე თავში აგებულია ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის მაგალითები, რომლებსაც ზემოთ აღნიშნული თვისება გააჩნიათ. შევნიშნოთ, რომ (0.8) ტიპის შეფასებები ((0.9) შეფასების გარეშე) ეფექტურად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპრერატორის შემოსაზღვრულობის შესწავლისათვის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში (იხ. [15]).

აპროქსიმაციის თეორია, რომელსაც საფუძველი ჩაუყარა ჩებიშევის, ვაიერშტრასის, ჯეკსონის და ბერშტეინის ფუნდამენტალურმა ნაშრომებმა, მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ინტენსიურად განვითარებადი მიმართულებაა. მისი მეთოდები ფართოდ გამოიყენება მათემატიკის სხვადასხვა დარგებში, განსაკუთრებით გამოყენებითი მიმართულებებით.

ვთქვათ E რაიმე ნორმირებული სივრცეა, ხოლო F მისი რაიმე ქვესიმრავლე. E ნორმირებულ სივრცეებში ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტის F სიმრავლის ელემენტებით მიახლოების ამოცანაში ბუნებრივია აპროქსიმაციის ზომად განხილული იქნას სიდიდე

$$\inf_{u \in F} \|x-u\|_E ,$$

რომელიც წარმოადგენს მანძილს E სივრცის x ელემენტს და F სიმრავლეს შორის. ძირითადად F სიმრავლის როლში იღებენ ქვესივრცეს (სასრულ ან უსასრულო განზომილების მქონეს) ან E სივრცის რაიმე ჩაკეტილ ამოზნექილ სიმრავლეს. თუ არსებობს $u_0 \in F$ ელემენტი ისეთი, რომ

$$\|x-u_0\|_E = \inf_{u \in F} \|x-u\|_E ,$$

მაშინ u_0 ელემენტს უწოდებენ x ელემენტისათვის F სიმრავლეში საუკეთესო მიახლოების (უახლოესს) ელემენტს (იხ. მონოგრაფია [16]). ბუნებრივია საუკეთესო მიახლოების ელემენტის არსებობა და ერთადერთობა დამოკიდებულია, როგორც E სივრცის ნორმაზე, ასევე F სიმრავლეზე. ამ მიმართულებით შეგვიძლია მოვიყვანოთ რამოდენიმე კარგად ცნობილი ფაქტი:

1) სახელდობრ, თუ F სასრულგანზომილებიანი სივრცეა, მაშინ ნებისმიერი $x \in E$ ელემენტისათვის არსებობობს F სიმრავლეში საუკეთესო მიახლოების ელემენტი;

2) თუ E სიმრავლის ნორმა მკაცრად ამოზნექილია და $x \in E$ ელემენტისათვის არსებობს $F \subset E$ ქვესივრცეში საუკეთესო მიახლოების ელემენტი, მაშინ ის ერთადერთია. (ვიტყვით, რომ E სივრცის ნორმა მკაცრად ამოზნექილია, თუ ტოლობა $\| x+y \|_E = \| x \|_E + \| y \|_E$, როცა $x \neq 0, y \neq 0$ სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = \lambda y$, სადაც $\lambda > 0$).

აპროქსიმაციის თეორიაში, ამოცანა საუკეთესო მიახლოების ელემენტის მახასიათებელი თვისებების დადგენის შესახებ გაცილებით რთულია, ვიდრე ამოცანა მისი არსებობის და ერთადერთობის შესახებ. ამ მიმართებით პრაქტიკული მოსაზრებით გამოყენებადი კრიტერიუმები არსებითად იყენებს როგორც E სივრცის გეომეტრიის ფაქიზ თვისებებს, ასევე F სიმრავლის თვისებებს. $L^p([a,b])\,(1<p<\infty), C([a,b])$ სივრცეებისათვის ამ მიმართულებით მიღებულია ფუნდამენტური შედეგები (იხ. მონოგრაფია [16]). მოვიყვანოთ $L^p([a,b])\,(1<p<\infty)$ სივრცისათვის ერთ-ერთი დებულება (იხ. [16]).

თეორემა 0.2. ვთქვათ F $L^p, 1<p<\infty$ სივრცის რაიმე ფიქსირებული ქვესივრცეა. იმისათვის, რომ ფუნქცია $\varphi_0 \in F$ წარმოადგენდეს $f \in L^p$ ფუნქციისათვის საუკეთესო მიახლოების ელემენტს F ქვესივრცეში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\int_{\Omega} \varphi(t)\,|\,f(t)-\varphi_0(t)\,|^{p-1} sign[\,f(t)-\varphi_0(t)]dt = 0, \quad \forall \varphi \in F. \tag{0.10}$$

იმ შემთხვევაში, როცა F სასრულგანზომილებიანი სივრცეა (მაგალითად n განზომილებიანი $\psi_1,\psi_2,...,\psi_n$ ბაზისით) თეორემა 0.2 -ში მოყვანილი პირობები შეგვიძლია მივიღოთ სტანდარტული მეთოდებით, თუ მინიმუმზე გამოვიკვლევთ ფუნქციას

$$\Lambda(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)=\int_{\Omega}\left|f(t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\psi_k(t)\right|^p dt\,.$$

ვთქვათ თეორემა 0.2-ში F წარმოადგენს ალგებრული პოლინომების რაიმე სასრულგანზომილებიან ქვესივრცეს, ხოლო Ω რაიმე შემოსაზღვრული ზომადი სიმრავლეა სასრული ზომით. შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში (0.10) ტოლობის მარცხენა მხარე სასრულია იმ შემთხვევაშიც, როცა $f\in L^{p-1}(\Omega)\,(1<p<\infty)$. ქუენიას მიერ [17] ნაჩვენები იყო, რომ იმ შემთხვევაში, როცა $f\in L^{p-1}(\Omega)\,(1<p<\infty)$ (ამ შემთხვევაში $p-1$ შესაძლებელია ნაკლები იყოს ერთზე) არსებობს ერთადერთი პოლინომი φ_0, რომელიც აკმაყოფილებს (0.10) პირობას. წარმოდგენილი დისერტაციის მესამე თავში ანალოგიური ამოცანა გადაწყვეტილია ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისათვის.

როგორც თეორიული, ასევე პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისათვის მნიშვნელოვანია გამოკვლეული იქნას საკითხი სივრცეში ბაზისის (უპირობო ბაზისის) არსებობის შესახებ. შევნიშნოთ, რომ სივრცეში გარკვეული თვისების მქონე ბაზისის (უპირობო ბაზისის) აგების ამოცანა მნიშვნელოვანია პრაქტიკული გამოყენებების თვალსაზრისით. ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში კლასიკური ორთონორმირებული სისტემების ბაზისურობის საკითხი მჭიდროდაა დაკავშირებული ამ სივრცეში ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობასთან. კოპალიანის [18] და იჟუკის [19] მიერ დადგენილი იქნა, რომ როდესაც ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში, მაშინ გლუვი ვეველეტ სისტემები ამ სივრცეების უპირობო ბაზისებია. დისერტაციის მეოთხე თავში ანალოგიური საკითხი შესწავლილია იმ შემთხვევაში, როდესაც ლოკალური ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში.

თავი I

ჰარდის ტიპის ინტეგრალური ოპერატორის ზოგიერთი s-რიცხვის აპროქსიმაციული შეფასებები ბანახის ფუნქციურ სივრცეებში

1.1. ძირითადი აღნიშვნები, განმარტებები და თეორემები

ამ თავში განვიხილავთ ჰარდის ტიპის ინტეგრალურ ოპერატორს

$$Tf(x) = T_{a,I,u,v} f(x) = v(x)\int_a^x f(t)u(t)dt,$$

სადაც u და v სასრულ $I = (a,b)$ ინტერვალზე განსაზღვრული არაუარყოფითი ზომადი ფუნქციები, ისეთია, რომ $\left|\{x : u(x) = 0\}\right| = \left|\{x : v(x) = 0\}\right| = 0$. დავუშვათ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები

$$u\chi_{(a,x)} \in E' \tag{1.1}$$

და

$$v\chi_{(x,b)} \in F \tag{1.2}$$

ნებისმიერი x -თვის, სადაც $a < x < b$. შემდგომში ყველგან $\Im$ სიმბოლოთი აღნიშნულია (a,b) ინტერვალის არათანამკვეთი ინტერვალებით ყველა დანაწილების სიმრავლე.

კოპალიანის მიერ [5]-ში დამტკიცებული იყო შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.1.1. ვთქვათ E და F წარმოადგენენ ბანახის ფუნქციურ სივრცეებს შემდეგი თვისებით: არსებობს ბანახის დისკრეტული სივრცეთა $l = \{l_Q\}_{Q\in\Im}$ ერთობლიობა ისეთი, რომ E სივრცე აკმაყოფილებს ქვედა l - შეფასებას, ხოლო F - ზედა l - შეფასებას. დავუშვათ, რომ სრულდება (1.1) და (1.2) პირობები. T ოპერატორი E სივრციდან F სივრცეში შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება პირობა

$$\sup_{a<t<b} \mathcal{A}(t) = \sup_{a<t<b} \left\| v\chi_{(t,b)} \right\|_F \left\| u\chi_{(a,t)} \right\|_{E'} < \infty .$$

შევნიშნოთ, რომ ანალოგიური შედეგი სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, თუ u და v ფუნქციების ნაცვლად ავიღებთ შესაბამისად $u\chi_J$ და $v\chi_J$ ფუნქციებს, სადაც J წარმოადგენს I ინტერვალის ნებისმიერ ქვეინტერვალს (იხ. [5]).

თეორემა 1.1.2. ვთქვათ $J = (c,d)$ არის I ინტერვალის ნებისმიერი ქვეინტერვალი. დაუშვათ, რომ E და F ბანახის ფუნქციურ სივრცეებისათვის არსებობს ბანახის დისკრეტულ სივრცეთა $l = \{l_Q\}_{Q\in\Im}$ ერთობლიობა ისეთი, რომ E სივრცე აკმაყოფილებს ქვედა l - შეფასებას, ხოლო F სივრცე - ზედა l -შეფასებას. ოპერატორი

$$T_J f(x)=v(x)\chi_J(x)\int_a^x u(t)\chi_J(t)f(t)dt$$

შემოსაზღვრულია E სივრციდან F სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება პირობა

$$\mathcal{A}_J=\sup_{t\in J}\mathcal{A}_J(t)=\sup_{t\in J}\left\|v\chi_J\chi_{(t,d)}\right\|_F\left\|u\chi_J\chi_{(c,t)}\right\|_{E'}<\infty .$$

T_J ოპერატორის შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში გვაქვს $\mathcal{A}_J\le\|T_J\|\le K\cdot\mathcal{A}_J$ შეფასება, სადაც $K\ge 1$ მუდმივი არ არის დამოკიდებული J ინტერვალზე.

იმ შემთხვევაში, როცა როცა $T:E\to F$ ოპერატორი შემოსაზღვრულია ედმუნდსის, გურკასა და პიკის მიერ [20]-ში მიღებულ იქნა T ოპერატორისათვის კომპაქტურობის ზოგადი პირობები, სახელდობრ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.1.3. ვთქვათ E და F წარმოადგენენ ბანახის ფუნქციურ სივრცეებს AC - ნორმებით და $T:E\to F$ ოპერატორი შემოსაზღვრულია. T ოპერატორი არის კომპაქტური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სამართლიანია შემდეგი ორი ტოლობა

$$\lim_{x\to a+}\sup_{a<r<x}\left\|v\chi_{(r,x)}\right\|_F\left\|u\chi_{(a,r)}\right\|_{E'}=0$$

და

$$\lim_{x\to b-}\sup_{x<r<b}\left\|v\chi_{(r,b)}\right\|_F\left\|u\chi_{(x,r)}\right\|_{E'}=0.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ E და F სივრცეებს გააჩნიათ AC - ნორმები და $u\in E'$, $v\in F$, მაშინ $T:E\to F$ ოპერატორი არის კომპაქტური ოპერატორი.

შემოვიღოთ წრფივი ოპერატორის კომპაქტურობის ზოგიერთი ზოგადი მახასიათებელი. $B(E,F)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ E სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი, შემოსაზღვრული ოპერატორების სივრცე, მნიშვნელობებით F სივრცეში. ვთქვათ M არის E სივრცის რაიმე ჩაკეტილი, წრფივი ქვესივრცე. ხოლო J_M^E M სივრცის ბუნებრივი ჩადგმის ოპერატორი E სივრცეში და Q_M^E კი კანონიკური ასახვაა E სივრციდან E/M ფაქტორ სივრცეში. ნებისმიერი $S\in B(E,E)$ ოპერატორისთვის განვსაზღვროთ ინექციურობის მოდული შემდეგნაირად:

$$j(S)=\sup\{\rho\ge 0:\ \|Sx\|_E\ge\rho\|x\|_E,\forall x\in E\}.$$

განმარტება 1.1.1. ვთქვათ $S\in B(E,E)$ და $n\in\mathbb{N}$. S ოპერატორის n-ური რიგის აპროქსიმაციის- $a_n(S)$, იზომორფიზმის- $i_n(S)$, გელფანდის- $c_n(S)$, ბერნშტეინისა- $b_n(S)$ და კოლმოგოროვის- $d_n(S)$ რიცხვები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$a_n(S)=\inf\{\|S-P\|:P\in B(E,E),\ rank(P)<n\};$$

$$i_n(S)=\sup\{\|A\|^{-1}\|B\|^{-1}\},$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა შესაძლო G ბანახის სივრცის მიმართ, სადაც $\dim G \geq n$, $A \in B(E,G)$, $B \in B(G,E)$ და ASB წარმოადგენს G სივრცეზე განსაზღვრულ იგივურ ასახვას;

$$c_n(S) = \inf\left\{\left\|SJ_M^E\right\| : \operatorname{codim}(M) < n\right\};$$

$$b_n(S) = \sup\left\{ j(SJ_M^E) : \dim(M) \geq n\right\};$$

$$d_n(S) = \inf\left\{\left\|Q_M^E S\right\| : \dim(M) < n\right\}.$$

ქვემოთ ზოგადად $s_n(S)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ S ოპერატორის n-ური რიგის აპროქსიმაციის, იზომორფიზმის, გელფანდის, ბერნშტეინის ან კოლმოგოროვის რიცხვს.

მოვიყვანოთ $s_n(S)$ რიცხვების ზოგიერთი ფუნდამენტური, კარგად ცნობილი თვისება (იხილეთ [11]).

თეორემა 1.1.4. ვთქვათ $S \in B(E,E)$ და $n \in \mathbb{N}$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი შეფასებები

$$a_n(S) \geq c_n(S) \geq b_n(S) \geq i_n(S)$$

და

$$a_n(S) \geq d_n(S) \geq b_n(S) \geq i_n(S).$$

აღვნიშნოთ, რომ s-რიცხვების თვისებები არსებითადაა შესწავლილი იმ შემთხვევაში, როცა $E = F = L^p(a,b)$ (იხილეთ [11] მონოგრაფია). მოვიყვანოთ ამ მიმართულებით ერთ-ერთი შედეგი.

თეორემა 1.1.5. ვთქვათ $1 < p < \infty$, $v \in L^p(a,b)$, $u \in L^q(a,b)$, სადაც $1/p + 1/q = 1$. მაშინ $T : L^p(a,b) \to L^p(a,b)$ ოპერატორისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} ns_n(T) = \frac{1}{2}\gamma_p \int_a^b u(x)v(x)dx,$$

სადაც $\gamma_p = \pi^{-1} p^{1/q} q^{1/p} \sin(\pi/p)$.

$p = 2$ შემთვევაში $s_n(T)$ ოპერატორის აპროქსიმაციის რიცხვები პირველად შესწავლილ იქნა [21]-ში ედმუნდის, ევანსისა და ჰარის მიერ. ზოგადი შემთხვევა, როცა $1 < p < \infty$ შესწავლილი იქნა [23]-ში ევანსის, ჰარისა და ლანგის მიერ. შევნიშნოთ, რომ $p = 2$ შემთვევაში როცა u და v ფუნქციები აკმაყოფილებენ დამატებით პირობებს, შესაძლებელია თეორემაში მოყვანილი შედეგის გაუმჯობესება (იხილეთ [24]). ანალოგიური ტიპის შედეგები, იმ შემთხვევაში, როცა $1 < p < \infty$ შესწავლილ იქნა [25]-ში ლანგის მიერ.

სხვადასხვა კლასიკური ოპერატორებისათვის კომპაქტურობის პირობები, არაკომპაქტურობის სხვადასხვა მახასიათებლები, კლასიკურ და ზოგად ფუნქციურ სივრცეებში გადმოცემულია მონოგრაფიებში [11], [26], [27], ნაშრომებში [22], [28], [29].

ვიტყვით, რომ ბანახის ფუნქციური E სივრცისათვის სრულდება მაკენჰაუპტის პირობა, თუ არსებობს $C>0$ მუდმივი ისეთი, რომ ნებისმიერი $J\subset I$ ინერვალისთვის სრულდება უტოლობა

$$\frac{1}{|J|}\|\chi_J\|_E\,\|\chi_J\|_{E'}\le C\,.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ E სივრცე აკმაყოფილებს მაკენჰაუპტის პირობას, მაშინ ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{1}{|J|}\int_J |f(x)|\,dx\le C\frac{\|f\chi_J\|_E}{\|\chi_J\|_E}.$$

თუ ამავდროულდ E სივრცე აკმაყოფილებს ქვედა და ზედა $l=\{l_Q\}_{Q\in\Im}$ შეფასებას, მაშინ (0.3) შეფასებიდან მივიღებთ

$$\left\|\sum_{I_i\in Q}\chi_{I_i}\frac{1}{|I_i|}\int_{I_i}|f(x)|\,dx\right\|_E\le C_1\|f\|_E\,,$$

სადაც $C_1>0$ მუდმივი არ არის დამოკიდებული I ინტერვალის Q დანაწილების შერჩევაზე. თუ E სივრცისთვის სრულდება მაკენჰაუპტის და (0.3) პირობა, ამ ფაქტს ავღნიშნავთ შემდეგნაირად $E\in\mathcal{M}$. შევნიშნოთ, რომ რეფლექსური ცვლადმაჩვენელიანი ლებეგის სივრცის შემთხვევაში $L^{p(\cdot)}\in\mathcal{M}$ პირობიდან გამომდინარეობს ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობა $L^{p(\cdot)}$ სივრცეში (იხ. მაგ. [8]). (შევნიშნოთ, რომ იმ ფუნქციური E სივრცეების დახასიათება, რომელთათვისაც $E\in\mathcal{M}$ პირობა უზრუნველყოფს ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობას E სივრცეში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა ჰარმონიულ ანალიზში).

ვიტყვით, რომ ფუნქცია $p:(a,b)\to[1,\infty)$ აკმაყოფილებს ლოგარითმული ჰელდერის უწყვეტობის პირობას, თუ არსებობს $C>0$ ისეთი, რომ

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{C}{\log(e+1/|x-y|)}\quad \text{ყველა } x,y\in(a,b) \text{ და } x\ne y\,.$$

$P((a,b))$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ყველა იმ ექსპონენტების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ ლოგარითმული ჰელდერის უწყვეტობის პირობას და სამართლიანია შემდეგი შეფასებები

$$p_-=ess\inf_{x\in(a,b)}p(x)>1\,,\ \ p_+=ess\sup_{x\in(a,b)}p(x)<\infty\,.$$

ვიტყვით, რომ ექსპონენტა $p(\cdot)\in P((a,b))$ აკმაყოფილებს ძლიერ ლოგარითმული ჰელდერის უწყვეტობის პირობას და ჩავწერთ $p(\cdot)\in SP((a,b))$, თუ არსებობს $[0,b-a]$

სეგმენტზე განსაზღვრული ზრდადი, უწყვეტი ფუნქცია, ისეთი, რომ $\lim_{t\to 0+}\psi(t)=0$ და ყოველი $x,y\in(a,b)$-თვის, სადაც $0<|x-y|<1/2$ სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$-|p(x)-p(y)|\ln|x-y|\le\psi(|x-y|).$$

[5]-ში კოპალიანის მიერ დამტკიცებულ იქნა შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.1.6. ვთქვათ $p(\cdot)\in P((a,b))$, მაშინ არსებობს ბანახის დისკრეტული სივრცეთა $l=\{l_Q\}_{Q\in\Im}$ ერთობლიობა ისეთი, რომ $L^{p(\cdot)}(a,b)$ სივრცე აკმაყოფილებს ერთდროულად ქვედა და ზედა l -შეფასებებს.

შევნიშნოთ, რომ არსებობს სხვა ექსპონენტების კლასები, რომლთათვისაც $L^{p(\cdot)}(a,b)$ სივრცეებისათვის სრულდება ერთდროულად ქვედა და ზედა l შეფასებები. სახელდობრ, ვთქვათ $p(\cdot):[0,1]\to[1,+\infty)$ აკმაყოფილებს ლოგარითმული ჰელდერის უწყვეტობის პირობას. დავუშვათ

$$w(t)=\int_a^t l(u)du,\quad t\in(a,b),\ \ w(b)=1,\ \ l(u)>0\ \ (u\in(a,b)),$$

$L^{p(w(\cdot))}(a,b)$ სივრცე აკმაყოფილებს ერთდროულად ქვედა დაზედა l შეფასებებს. (იხილეთ [8]).

ამ თავის მთავარ შედეგს წარმოადგენს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.1.7. ვთქვათ $E\in\mathcal{M}$ ბანახის ფუნქციური სივრცე აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

1) E,E^* სივრცეებს გააჩნიათ მკაცრად ამოზნექილი ნორმები;

2) E და E' სივრცეების ნორმები აკმაყოფილებენ AC თვისებას.

თუ $u\in E'$, $v\in E$, მაშინ არსებობს $C_1=C_1(E)$, $C_2=C_2(E)>0$ მუდმივები ისეთი, რომ $T:E\to E$ ოპერატორის s_n რიცხვებისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$C_1\int_a^b u(x)v(x)dx\le\liminf_{n\to\infty} ns_n(T)\le\limsup_{n\to\infty} ns_n(T)\le C_2\int_a^b u(x)v(x)dx\ .$$

მიღებული თეორემა ეფექტურად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისათვის. სახელდობრ, თეორემა 1.1.6 და თეორემა 1.1.7-დან მივიღებთ შემდეგ შედეგს:

შედეგი 1.1.8. ვთქვათ $p(\cdot)\in P((a,b))$ და $v\in L^{p(\cdot)}(a,b)$, $u\in L^{q(\cdot)}(a,b)$ $(1/p(x)+1/q(x)=1,$ $x\in(a,b))$, მაშინ $T:L^{p(\cdot)}(a,b)\to L^{p(\cdot)}(a,b)$ ოპერატორის s_n რიცხვებისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$C_1\int_{(a,b)}u(x)v(x)dx\le\liminf_{n\to\infty} ns_n(T)\le\limsup_{n\to\infty} ns_n(T)\le C_2\int_{(a,b)}u(x)v(x)dx\ .$$

შევნიშნოთ, რომ n-ური რიგის აპროქსიმაციის, გელფანდის, ბერნშტეინისა და კოლმოგოროვის რიცხვებისათვის ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცის შემთხვევაში შეფასებები შესწავლილი იყო ედმუნდსისა და ლანგის მიერ (იხ. [30]). სახელდობრ, როცა $u=v=1$ [30]-ში დამტკიცებულ იქნა შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.1.9. ვთქვათ $p(\cdot)\in SP((a,b))$ და $u=v=1$, მაშინ T არის $L^{p(\cdot)}(a,b)$ სივრცეზე განსაზღვრული ოპერატორი მნიშვნელობებით $L^{p(\cdot)}(a,b)$ სივრცეში და სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot s'_n(T)=\frac{1}{2\pi}\int_I \left(q(x)p(x)^{p(x)-1}\right)^{1/p(x)}\sin(\pi/p(x))dx ,$$

სადაც $s'_n(T)$ წარმოადგენს T ოპერატორის ნებისმიერი n-ური რიგის აპროქსიმაციის, გელფანდის, ბერნშტეინის და კოლმოგოროვის რიცხვს.

1.2. მახასიათებელი A და მისი თვისებები

განმარტება 1.2.1. ვთქვათ E არის ბანახის ფუნქციური სივრცე, ხოლო J წარმოადგენს $I=(a, b$ ინტერვალის რაიმე ქვეინტერვალს. ვთქვათ $c\in[a,b]$, $u\in E'(J)$ და $v\in E(J)$. შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქცია

$$A(J)=A(J,u,v)=\sup_{f\in E,\, f\neq 0}\inf_{\alpha\in R}\frac{\|T_{c,J}f-\alpha v\|_{E(J)}}{\|f\|_{E(J)}} ,$$

სადაც

$$T_{c,J}f(x)=v(x)\chi_J(x)\int_c^x f(t)u(t)\chi_J(t)dt .$$

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით $A(J)$ ფუნქციის გარკვეულ თვისებებს. სახელდობრ, თუ ავიღებთ $\alpha=0$, მივიღებთ, რომ

$$A(J)\le\|T_{c,J}\|\le K\cdot\mathcal{A}_j ,$$

სადაც $\mathcal{A}_j=\sup_{t\in J}\mathcal{A}_J(t)=\sup_{t\in J}\|v\chi_J\chi_{(t,b)}\|_E\,\|u\chi_J\chi_{(a,t)}\|_{E'}$.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $d\in[a,b]$ წერტილისთვის სამართლიანია წარმოდგენა

$$T_{d,J}f(x)=T_{c,J}f(x)+v(x)\chi_J(x)\int_d^c f(t)u(t)\chi_J(t)dt$$

და $A(J,u,v)$ სიდიდე არ არის დამოკიდებული $c\in[a,b]$ წერილის შერჩევაზე.

ლემა 1.2.2. ვთქვათ E წარმოადგენს ბანახის ფუნქციურ სივრცეს, ხოლო J წარმოადგენს I ინტერვალის რაიმე ქვეინტერვალს. ვთქვათ $u\in E'(J)$ და $v\in E(J)$. შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქცია:

$$\tilde{A}(J)=\sup_{\|f\|_{E(J)}=1}\inf_{|\alpha|\le 2\|u\|_{E'(J)}}\|T_{c,J}f-\alpha v\|_{E(J)} .$$

მაშინ

$$A(J)=\tilde{A}(J) .$$

დამტკიცება. ჰელდერის უტოლობიდან გვექნება $T_{c,J}$ ოპერატორის ნორმების შემდეგი შეფასება

$$\|T_{c,J}\| \le \|u\chi_J\|_{E'(J)} \|v\chi_J\|_{E(J)} \ .$$

ვთქვათ $\|f\|_{E(J)} = 1$ და $|\alpha| > 2\|u\|_{E'(J)}$. მაშინ $|\alpha| > \dfrac{2\|T_{c,J}\|}{\|v\|_{E(J)}}$ და სამკუთხედის უტოლობიდან გამომდინარე გვექნება

$$\|\alpha v - T_{c,J} f\|_{E(J)} \ge |\alpha| \|v\|_{E(J)} - \|T_{c,J}\| \|f\|_{E(J)}$$

$$> 2\|T_{c,J}\| - \|T_{c,J}\| = \|T_{c,J}\|.$$

მაშასადამე

$$\|T_{c,J}\| \ge A(J)$$

$$= \sup_{\|f\|_{E(J)}=1} \min\left\{ \inf_{|\alpha|\le 2\|u\|_{E'(J)}} \|T_{c,J} f - \alpha v\|_{E(J)}, \inf_{|\alpha|>2\|u\|_{E'(J)}} \|T_{c,J} f - \alpha v\|_{E(J)} \right\}$$

$$= \sup_{\|f\|_{E(J)}=1} \inf_{|\alpha|\le 2\|u\|_{E'(J)}} \|T_{c,J} f - \alpha v\|_{E(J)} = \tilde{A}(J)\,.$$

ლემა 1.2.2 დამტკიცებულია.
ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$A(J) = \sup_{\|f\|_{E(J)}\le 1} \inf_{|\alpha|\le 2\|u\|_{E'(J)}} \|T_{c,J} f - \alpha v\|_{E(J)}\,.$$

ლემა 1.2.3. ვთქვათ E არის ბანახის ფუნქციური სივრცე და E' სივრცეს გააჩნია AC ნორმა. დავუშვათ $J = (c,d)$ არის I ინტერვალის რაიმე ქვეინტერვალი და $u \in E'(J)$, $v \in E(J)$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1. $A(x,d)$ (c,d) ინტერვალზე არაზრდადი და უწყვეტი ფუნქციაა;
2. $A(c,x)$ (c,d) ინტერვალზე არაკლებადი და უწყვეტი ფუნქციაა;
3. $\lim\limits_{x\to c-} A(c,x) = \lim\limits_{x\to d+} A(x,d) = 0$.

დამტკიცება. $A(x,d)$ ფუნქციის არაზრდადობა ავტომატურად გამომდინარეობს მისი განმარტებიდან. დავაფიქსიროთ y, ისეთი, რომ $c < y < d$. ვთქვათ $h_0 > 0$ რაიმე ფიქსირებული რიცხვია ისეთი, რომ $y - h_0 > 0$ და $\|u\|_{E'((y-h,y))} < \varepsilon$, სადაც $0 < h \le h_0$, $\varepsilon > 0$.

ვთქვათ $D_h = \|u\|_{E'((y-h,d))}$ $(0 \le h \le h_0)$ და $\omega(y) = \int\limits_{y-h}^{y} f(t)u(t)dt.$ სამართლიანია შემდეგი შეფასებები:

$$A(y,d) \le A(y-h,d)$$

$$= \sup_{\|f\|_{E((y-h,d))}=1} \inf_{\alpha\in R} \left\|\alpha v - T_{y-h,(y-h,d)} f\right\|_{E((y-h,d))}$$

$$\le \sup_{\|f\|_{E((y-h,d))}=1} \inf_{|\alpha|\le 2D_h} \left\{\left\|\left(\alpha v - T_{y-h,(y-h,d)} f\right)\chi_{(y-h,y)}\right\|_{E((y-h,y))} + \left\|\left(\alpha v - T_{y-h,(y-h,d)} f\right)\chi_{(y,d)}\right\|_{E((y,d))}\right\}$$

$$\le \sup_{\|f\|_{E((y-h,d))}=1} \inf_{|\alpha|\le 2D_h} \left\{\left\|T_{y-h,(y-h,y)} \mid E((y-h,y)) \to E\left((y-h,y)\right)\right\| \cdot \| f\|_{E((y-h,y))}\right.$$

$$\left. + \left\|\left(\alpha v - T_{y,(y-h,d)} f - v\omega(y)\right)\chi_{(y,d)}\right\|_{E((y,d))}\right\}$$

$$\le \sup_{\|f\|_{E((y-h,d))}=1} \inf_{|\alpha|\le 2D_h} \left\{\|u\|_{E'((y-h,y))}\|v\|_{E((y-h,y))}\| f\|_{E((y-h,y))}\right.$$

$$+\|v\|_{E((y,d))}\|u\|_{E'((y-h,y))}\| f\|_{E((y-h,y))}$$

$$\left. + \left\|\left(\alpha v - T_{y,(y,d)} f\right)\chi_{(y,d)}\right\|_{E((y,d))}\right\}$$

$$\le \|v\|_{E((y-h,y))}\,\varepsilon + \|v\|_{E((y,d))}\,\varepsilon$$

$$+ \sup_{\|f\|_{E((y-h,d))}=1} \inf_{|\alpha|\le 2D_h} \left\|T_{y,(y,d)} f - \alpha v\right\|_{E((y,d))} .$$

რადგან $D_0 \le D_h \le D_{h_0}$, გვექნება

$$\sup_{\|f\|_{E((y-h,d))}=1} \inf_{|\alpha|\le 2D_h} \left\|T_{y,(y,d)} f - \alpha v\right\|_{E((y,d))}$$

$$\le \sup_{\|f\|_{E((y-h,d))}=1} \inf_{|\alpha|\le 2D_0} \left\|T_{y,(y,d)} f - \alpha v\right\|_{E((y,d))}$$

$$= \sup_{\|f\|_{E((y,d))}\le 1} \inf_{|\alpha|\le 2D_0} \left\|T_{y,(y,d)} f - \alpha v\right\|_{E((y,d))} = A(y,d).$$

მაშასადამე

$$A(y,d) \le A(y-h,d) \le \|v\|_{E((y-h,y))}\,\varepsilon + \|v\|_{E((y,d))}\,\varepsilon + A(y,d) .$$

მიღებული უტოლობიდან დავასკვნით, რომ

$$\lim_{h\to 0+} A(y-h,d) = A(y,d).$$

ანალოგიურად გვექნება

$$\lim_{h\to 0+} A(y+h,d)=A(y,d).$$

ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ დასამტკიცებელი ლემის 2-ე და 3-ე პუნქტების სამართლიანობა. ლემა 1.2.3 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.4. ვთქვათ E არის ბანახის ფუნქციური სივრცე. დავუშვათ E'-ს გააჩნია AC ნორმა. ვთქვათ $J=(c,d)$ არის I ინტერვალის რაიმე ქვეინტერვალი და $u\in E'(J)$, $v\in E(J)$. მაშინ

$$A(J)\le \inf_{x\in J}\left\|T_{x,J} \mid E(J)\to E(J)\right\| . \tag{2.1}$$

თუ $T_{x,J}$, $T_{x,(c,x)}$, $T_{x,(x,d)}$ ოპერატორებს განვიხილავთ $E(J)$ ბანახის სივრციდან $E(J)$ ბანახის სივრცეში, მაშინ მათი ნორმები $\left\|T_{x,J}\right\|$, $\left\|T_{x,(c,x)}\right\|$, $\left\|T_{x,(x,d)}\right\|$ არიან უწყვეტი ფუნქციები $x\in(c,d)$ ცვლადის მიმართ და არსებობს $e\in J$ ისეთი, რომ

$$\left\|T_{e,(c,e)}\right\|=\left\|T_{e,(e,d)}\right\| . \tag{2.2}$$

ყოველი $x\in J$ -თვის სამართლიანია შემდეგი შეფასებები

$$\left\|T_{x,J}\right\|\approx \max\left\{\left\|T_{x,(c,x)}\right\|,\left\|T_{x,(x,d)}\right\|\right\}, \tag{2.3}$$

ამასთანავე გვაქვს

$$\min_{x\in J}\left\|T_{x,J}\right\|\approx\left\|T_{e,J}\right\|. \tag{2.4}$$

დამტკიცება. ნებისმიერი $x\in(c,d)$ -თვის გვაქვს

$$A(J)\le \sup\left\{\left\|T_{x,J}f\right\|_{E(J)} : \|f\|_{E(J)}=1\right\}=\left\|T_{x,J} \mid E(J)\to E(J)\right\|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (2.1) ტოლობის მართებულობა.

$\left\|T_{x,(x,d)}\right\|$ ნორმის უწყვეტობის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ როცა $z,y\in(c,d), z<y$ მაშინ გვაქვს

$$T_{z,(z,d)}f(x)-T_{y,(y,d)}f(x)=v(x)\chi_{(y,d)}(x)\int_z^y f(t)u(t)dt$$

$$+v(x)\chi_{(z,y)}(x)\int_z^x f(t)u(t)dt \quad .$$

ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left\|T_{z,(z,d)}-T_{y,(y,d)}\right\|\le\|v\|_{E((y,d))}\|u\|_{E'((z,y))}+\|v\|_{E((z,y))}\|u\|_{E'((z,y))}$$

და

$$\left|\left\|T_{z,(z,d)}\right\|-\left\|T_{y,(y,d)}\right\|\right| \le \left\|T_{z,(z,d)}-T_{y,(y,d)}\right\| \le 2\|u\|_{E'((z,y))}\|v\|_{E((z,d))}.$$

მიღებული შეფასებებიდან გამომდინარეობს $\left\|T_{x,(x,d)}\right\|$ ნომის უწყვეტობა. ანალოგიურად დავამტკიცებთ $\left\|T_{x,J}\right\|$, $\left\|T_{x,(c,x)}\right\|$ ნორმების უწყვეტობას.

ვთქვათ $\operatorname{supp} f \subset (y,d)$. შევნიშნოთ, რომ როცა $z<y$ სამართლიანია ტოლობა

$$T_{z,(z,d)}f(x)=T_{y,(y,d)}f(x).$$

მაშასადამე

$$\left\|T_{y,(y,d)}\right\| \le \left\|T_{z,(z,d)}\right\|.$$

ანალოგიურად გვექნება

$$\left\|T_{z,(c,z)}\right\| \le \left\|T_{y,(c,y)}\right\|.$$

(2.2) იგივეობის სამართლიანობა გამომდინარეობს მიღებული უტოლობიდან, $\left\|T_{x,(c,x)}\right\|$ და $\left\|T_{x,(x,d)}\right\|$ ნორმების უწყვეტობიდან.

ვთქვათ $f \in E(J)$, $f_1 = f\chi_{(c,x)}$, $f_2 = f\chi_{(x,d)}$. გვექნება

$$\left(T_{x,J}f\right)(t)=\left(T_{x,(c,x)}f_1\right)(t)+\left(T_{x,(x,d)}f_2\right)(t).$$

სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left\|T_{x,J}f\right\|_{E(J)} \approx \max\left\{\left\|T_{x,(c,x)}f_1\right\|_{E((c,x))},\left\|T_{x,(x,d)}f_2\right\|_{E((x,d))}\right\}$$

$$\le \max\left\{\left\|T_{x,(c,x)}\right\|,\left\|T_{x,(x,d)}\right\|\right\}\max\left\{\|f_1\|_{E((c,x))},\|f_2\|_{E((x,d))}\right\}$$

$$\le C\max\left\{\left\|T_{x,(c,x)}\right\|,\left\|T_{x,(x,d)}\right\|\right\}\|f\|_{E(J)}.$$

მივიღებთ

$$\left\|T_{x,J}\right\| \le C\max\left\{\left\|T_{x,(c,x)}\right\|,\left\|T_{x,(x,d)}\right\|\right\}.$$

მიღებული უტოლობის შებრუნებული უტოლობის მართებულობა ცხადია. ამით (2.3) დამტკიცებულია. (2.2) და (2.3) ტოლობებიდან და ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან მივიღებთ (2.4)-ის სამართლიანობას.

განმარტება 1.2.5. ვთქვათ E არის ბანახის ფუნქციური სივრცე და E' სივრცეს აქვს AC ნორმა. დავუშვათ $J=(c,d)$ არის I ინტერვალის რაიმე ქვეინტერვალი და $u \in E'(J)$, $v \in E(J)$. განვსაზღვროთ შემდეგი ფუნქცია

$$\hat{A}(J)=\left\|T_{e,(c,e)}\right\|_{E(J)},$$

სადაც $e\in J$ განსაზღვრულია (2.2) ტოლობით.

ლემა 1.2.6. ვთქვათ E მკაცრად ამოზნექილი, რეფლექსური ბანახის ფუნქციური სივრცეა და სრულდება (0.3) პირობა. თუ $J=(c,d)$ არის I ინტერვალის რაიმე ქვეინტერვალი და $u\in E'(J)$,$v\in E(J)$, მაშინ

1. $\left\|T_{c,(c,x)}\right\|$ და $\left\|T_{x,(c,x)}\right\|$ (c,d) ინტერვალზე მკაცრად ზრდადი, ხოლო $\left\|T_{x,(x,d)}\right\|$ მკაცრად კლებადი ფუნქციებია;
2. $\hat{A}(c,x)$ არის მკაცრად ზრდადი და $\hat{A}(x,d)$ არის მკაცრად კლებადი (c,d) ინტერვალზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $c<x_1<x_2<d$. დავუშვათ f ფუნქცია ისეთია, რომ $0\le f\in E(J)$, $\|f\|_{E(J)}=1$, $\operatorname{supp} f\subset(c,x_1)$. სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\left\|T_{c,(c,x_2)}f\right\|_{E(J)}>\left\|T_{c,(c,x_1)}f\right\|_{E(J)}. \tag{2.5}$$

მართლაც, დავუშვათ $\left\|T_{c,(c,x_2)}f\right\|_{E(J)}=\left\|T_{c,(c,x_1)}f\right\|_{E(J)}$. განვსაზღვროთ შემდეგი ფუნქციები:

$$f_1(y)=\frac{T_{c,(c,x_1)}f(y)}{\left\|T_{c,(c,x_1)}f\right\|_{E(J)}},\qquad f_2(y)=\frac{T_{c,(c,x_2)}f(y)}{\left\|T_{c,(c,x_2)}f\right\|_{E(J)}}.$$

ცხადია, რომ $\|f_1\|_{E(J)}=\|f_2\|_{E(J)}=1$ და

$$T_{c,(c,x_2)}f(y)=T_{c,(c,x_1)}f(y)+T_{c,(c,x_1)}f(x_1)\chi_{(x_1,x_2)}(y).$$

E სირცის მკაცრად ამოზნექილობიდან გამომდინერეობს, რომ

$$2=\|2f_1\|_{E(J)}\le\|f_1+f_2\|_{E(J)}<2,$$

რაც წინააღმდეგობაა. მაშასადამე სამართლიანია (2.5) ფორმულა. T ოპერატორის კომპაქტურობიდან და E სივრცის რეფლექსურობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს f ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\left\|T_{c,((c,x_1))}\,|\,E\big((c,x_1)\big)\to E\big((c,x_1)\big)\right\|=\left\|T_{c,(c,x_1)}f\right\|_{E((c,x_1))}.$$

მაშასადამე

$$\left\|T_{c,((c,x_1))}\,|\,E\big((c,x_1)\big)\to E\big((c,x_1)\big)\right\|=\left\|T_{c,(c,x_1)}f\right\|_{E((c,x_1))}$$

$$<\left\|T_{c,(c,x_2)}f\right\|_{E((c,x_2))}\le\left\|T_{c,(c,x_2)}\,|\,E\big((c,x_2)\big)\to E\big((c,x_2)\big)\right\|.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $\left\|T_{x,(c,x)}\right\|$ ფუნქცია (c,d) ინტერვალზე მკაცრად ზრდადია, ხოლო $\left\|T_{x,(x,d)}\right\|$ ფუნქცია მკაცრად კლებადი.

ახლა დავუშვათ, რომ $c < x_1 < x_2 < d$. განმარტება 1.2.5-ის ძალით არსებობს $e_1 \in (c, x_1)$ და $e_2 \in (c, x_2)$ ისეთი, რომ

$$\hat{A}(c, x_1) = \left\|T_{e_1,(c,e_1)}\right\| \text{ და } \hat{A}(c, x_2) = \left\|T_{e_2,(c,e_2)}\right\|.$$

რადგან $\left\|T_{e_1,(c,e_1)}\right\| = \left\|T_{e_1,(e_1,x_1)}\right\| < \left\|T_{e_1,(e_1,x_2)}\right\|$ და $\left\|T_{e_2,(c,e_2)}\right\| = \left\|T_{e_2,(e_2,x_2)}\right\| < \left\|T_{e_1,(e_1,x_2)}\right\|$, გვექნება $e_1 < e_2$. მაშასადამე

$$\hat{A}(c, x_1) = \left\|T_{e_1,(c,e_1)}\right\| < \left\|T_{e_2,(c,e_2)}\right\| = \hat{A}(c, x_2).$$

ანალოგიური მსჯელობით დავასკვნით, რომ $\hat{A}(x,d)$ არის მკაცრად კლებადი (c,d) ინტერვალზე. თუ გამოვიყენებთ ლემა 1.2.4-ში გამოყენებულ მსჯელობას, დავამტკიცებთ $\hat{A}(c,x)$-ის უწყვეტობას.

ლემა 1.2.7. ვთქვათ E არის მკაცრად ამოზნექილი ბანახის ფუნქციური სივრცე, მაშინ მოცემული $f, g \in E$ -თვის, სადაც $g \neq 0$, არსებობს ერთადერთი მუდმივი c_f ისეთი, რომ

$$\left\|f - c_f g\right\|_E = \inf_{c \in R} \left\|f - cg\right\|_E .$$

დამტკიცება. c_f -ის არსებობა გამომდინარეობს $\left\|f - cg\right\|_E$ ფუნქციის c -ს მიმართ უწყვეტობიდან, R -ის ლოკალურად კომპაქტურობიდან და იმ ფაქტიდან, რომ როცა $c \to \infty$, $\left\|f - cg\right\|_E \to \infty$. c_f რიცხვის ერთადერთობა გამომდინარეობს E-ს მკაცრად ამოზნექილობიდან. ლემა 1.2.7 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.8. ვთქვათ E არის მკაცრად ამოზნექილი ბანახის ფუნქციური სივრცე და ნებისმიერი $f \in E$ ფუნქციისთვის c_f არის ერთადერთი მუდმივი ისეთი, რომ მართებულია ტოლობა

$$\left\|f - c_f g\right\|_E = \inf_{c \in R} \left\|f - cg\right\|_E, \text{ სადაც } g \neq 0, g \in E.$$

მაშინ $f \to c_f$ ასახვა არის უწყვეტი.

დამტკიცება. დავუშვათ $\left\|f_n - f\right\|_E \to 0$. c_{f_n} მიმდევრობის შემოსაზღვრულობიდან გამომდინარე შეზღუდვის გარეშე შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $c_{f_n} \to c$.

სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left\|f_n - c_f g\right\|_E \geq \left\|f_n - c_{f_n} g\right\|_E .$$

ე.ი

$$\left\|f - c_f g\right\|_E \geq \left\|f - cg\right\|_E ,$$

საიდანაც გვექნება, რომ $c = c_f$. ლემა 1.2.8 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.9. ვთქვათ E არის ბანახის ფუნქციური სივრცე და სრულდება (0.3) პირობა. დავუშვათ E' სივრცეს აქვს AC ნორმა. თუ $J=(c,d)$ არის I ინტერვალის რაიმე ქვეინტერვალი და $u\in E'(J)$, $v\in E(J)$, მაშინ

$$A(J)\approx \min_{x\in J}\left\|T_{x,J}\mid E(J)\to E(J)\right\|\approx\left\|T_{e,J}\mid E(J)\to E(J)\right\|, \tag{2.6}$$

სადაც $e\in I$ განისაზღვრება (2.2) ფორმულით.

დამტკიცება. (2.3) და (2.4)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left\|T_{e,(c,e)}\mid E(J)\to E(J)\right\|=\left\|T_{e,(e,d)}\mid E(J)\to E(J)\right\|$$

$$\le\left\|T_{e,J}\mid E(J)\to E(J)\right\|$$

$$\le C_1\left\|T_{e,(c,e)}\mid E(J)\to E(J)\right\|. \tag{2.7}$$

ვთქვთ $\alpha<\left\|T_{e,J}\right\|$. გვექნება $T_{e,J}=vF$, სადაც

$$Ff(x)=F_{e,J}f(x)=\chi_J(x)\int_e^x f(t)u(t)\chi_J(t)dt\,.$$

(2.7)-დან გამომდინარეობს, რომ არსებობს f_i, $i=1,2,$ ფუნქციები, რომელთა საყრდენები შესაბამისად (c,e) და (e,d) ინტერვალებშია და სრულდება პირობა $\|f_i\|_E=1,\ \left\|T_{e,J}\,f_i\right\|_{E(J)}>\alpha/C_1$. ამასთან f_1 არის არაუარყოფითი, ხოლო f_2 - არადადებითი. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ c_{vFf_1} და c_{vFf_2} რიცხვები არაუარყოფითი და არადადებითი რიცხვებია. ზემოთმოყვანილ მსჯელობაში ვიყენებთ ლემა 1.2.7 - 1.2.8-ს, როცა $g=v$. ლემა 1.2.8-ის გამოყენებით დავასკვნით, რომ არსებობს $\lambda\in(0,1)$ ისეთი, რომ $c_{vFg}=0$, სადაც $g=\lambda f_1+(1-\lambda)f_2$. სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left\|T_{e,J}\,g\right\|_{E(J)}\ge C_2\max\left\{\left\|\lambda T_{e,(c,e)}f_1\right\|_{E((c,e))},\left\|(1-\lambda)T_{e,(e,d)}f_2\right\|_{E((e,d))}\right\}$$
$$\ge C_3\alpha\left\|g\right\|_{E(J)}\ .$$

გვექნება

$$A\left(J\right)\ge\inf_{\alpha\in R}\left\|vFg-\alpha v\right\|_{E(J)}/\left\|g\right\|_{E(J)}=\left\|vFg\right\|_{E(J)}/\left\|g\right\|_{E(J)}\ge C_3\alpha\ .$$

რადგან $\alpha<\left\|T_{e,J}\right\|$ არის ნებისმიერი და $A(J)\ge C_3\left\|T_{e,J}\right\|$, მაშინ (2.1) და (2.4)-ის ძალით გვექნება

$$C_3\left\|T_{e,J}\right\|\le A(J)\le\inf_{x\in J}\left\|T_{x,J}\mid E(J)\to E(J)\right\|\approx\left\|T_{e,J}\right\|.$$

ლემა 1.2.9 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.10. ვთქვათ $J=(c,d)$ არის I ინტერვალის რაიმე ქვეინტერვალი და $u_1,u_2\in E'(J)$ და $v\in E(J)$. მაშინ

$$\left|A\left(J,u_1,v\right)-A\left(J,u_2,v\right)\right|\le\left\|u_1-u_2\right\|_{E'(J)}\left\|v\right\|_{E(J)} .$$

დამტკიცება. სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$A\left(J,u_1,v\right)=\sup_{\|f\|_{E(J)}=1}\inf_{\alpha\in R}\left\|v(x)\left(\int_a^x f(t)(u_1(t)-u_2(t)+u_2(t))dt-\alpha\right)\right\|_{E(J)}$$

$$\le\sup_{\|f\|_{E(J)}=1}\inf_{\alpha\in R}\left[\left\|v(x)\left(\int_a^x f(t)\left(u_1(t)-u_2(t)\right)dt\right)\right\|_{E(J)}+\left\|v(x)\left(\int_a^x f(t)u_2(t)dt-\alpha v(x)\right)\right\|_{E(J)}\right]$$

$$\le\sup_{\|f\|_{E(J)}=1}\inf_{\alpha\in R}\left[\left\|u_1-u_2\right\|_{E'(J)}\left\|v\right\|_{E(J)}+\left\|v(x)\left(\int_a^x f(t)u_2(t)dt-\alpha v(x)\right)\right\|_{E(J)}\right]$$

$$\le\left\|u_1-u_2\right\|_{E'(J)}\left\|v\right\|_{E(J)}+A\left(J,u_2,v\right).$$

ანალოგიური მსჯელობა სამართლიანია თუ u_1 და u_2-ს ადგილებს შევუცვლით. ლემა 1.2.10 დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.11. ვთქვათ $J=(c,d)$ არის I ინტერვალის რიმე ქვეინტერვალი და $u\in E'(I)$ $v_1,v_2\in E(I)$. მაშინ

$$\left|A\left(J,u,v_1\right)-A\left(J,u,v_2\right)\right|\le 3\left\|v_1-v_2\right\|_{E(J)}\left\|u\right\|_{E'(J)}.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი სახის ოპერატორები

$$T_J^1 f(x)=v_1(x)\chi_J(x)\int_a^x f(t)u(t)dt ,$$

$$T_J^2 f(x)=v_2(x)\chi_J(x)\int_a^x f(t)u(t)dt ,$$

$$T_J^3 f(x)=\left(v_1(x)-v_2(x)\right)\chi_J(x)\int_a^x f(t)u(t)dt .$$

დავუშვათ $A\left(J,u,v_1\right)>A\left(J,u,v_2\right)$. ლემა 1.2.2-დან გვექნება

$$A\left(J,u,v_1\right)-A\left(J,u,v_2\right)$$

$$=\sup_{\|f\|_{E(J)}=1}\inf_{\alpha\in R}\left\|T_J^1 f-\alpha v_1\right\|_{E(J)}-A(J,u,v_2)$$

$$= \sup_{\|f\|_{E(J)}=1} \inf_{|\alpha|\le 2\|u\|_{E'(J)}} \left\| T_J^1 f - \alpha v_1 \right\|_{E(J)} - A(J,u,v_2)$$

$$\le \sup_{\|f\|_{E(J)}=1} \inf_{|\alpha|\le 2\|u\|_{E'(J)}} \left(\left\| T_J^3 f - \alpha\left(v_1 - v_2\right) \right\|_{E(J)} + \left\| T_J^2 f - \alpha v_2 \right\|_{E(J)} \right) - A(J,u,v_2)$$

$$\le \sup_{\|f\|_{E(J)}=1} \inf_{|\alpha|\le 2\|u\|_{E'(J)}} \left(3\left\| v_1 - v_2 \right\|_{E(J)} \|u\|_{E'(J)} + \left\| T_J^2 f - \alpha v_2 \right\|_{E(J)} \right) - A(J,u,v_2)$$

$$\le 3\left\| v_1 - v_2 \right\|_{E(J)} \|u\|_{E'(J)} + A(J,u,v_2) - A(J,u,v_2)$$

$$= 3\left\| v_1 - v_2 \right\|_{E(J)} \|u\|_{E'(J)}.$$

ლემა 1.2.11 დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ლემა 1.2.10-1.2.11-ში შესაძლებელია $A(J)$ სიდიდეები შევცვალოთ $\left\|T_{a,J}\right\|$ სიდიდეებით.

ლემა 1.2.12. ვთქვათ $E \in \mathcal{M}$ არის მკაცრად ამოზნექილი ბანახის ფუნქციური სივრცე და E' სივრცეს აქვს AC ნორმა. დავუშვათ u და v მუდმივი ფუნქციებია $J=\left(c,d\right)$ ინტერვალზე. მაშინ

$$A\left(J,u,v\right) \approx uv|J|.$$

დამტკიცება. მაკენჰაუპტის პირობიდან დავასკვნით, რომ, თუ $\tilde{J} \subset J$ და $\left|\tilde{J}\right|/|J| \ge 1/2$, მაშინ $\left\|\chi_{\tilde{J}}\right\|_E \approx \left\|\chi_I\right\|_E$ და $\left\|\chi_{\tilde{J}}\right\|_{E'} \approx \left\|\chi_I\right\|_{E'}$. ვთქვათ $e \in \left(c,d\right)$. გვექნება

$$\max\left\{ \sup_{t\in(c,e)} \left\|\chi_{(c,t)}\right\|_{E'} \left\|\chi_{(t,e)}\right\|_E, \sup_{t\in(e,d)} \left\|\chi_{(e,t)}\right\|_{E'} \left\|\chi_{(t,d)}\right\|_E \right\} \approx |J|.$$

თეორემა 1.1.2 და ლემა 1.2.9-დან გამომდინარეობს

$$A(I,1,1) \approx |J|.$$

მაშასადამე მივიღებთ

$$A\left(J,u,v\right) = \sup_{\|f\|_{E(J)}=1} \inf_{\alpha\in R} \left\| v\left(\int_a^x f(t)u(t)dt - \alpha \right) \right\|_{E(J)}$$

$$= uv \sup_{\|f\|_{E(J)}=1} \inf_{c\in R} \left\| \left(\int_a^x f(t)dt - c \right) \right\|_{E(J)}$$

$$= uvA(I,1,1) \approx uv|J|.$$

ლემა 1.2.12 დამტკიცებულია.

1.3. T ოპერატორისთვის s-რიცხვების შეფასებები

ამ პარაგრაფში ვიგულისხმებთ, რომ $T:E\to E$ შემოსაზღვრული ოპერატორია.

ლემა 1.3.1. ვთქვათ E არის მკაცრად ამოზნექილი ბანახის ფუნქციური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს (0.3) პირობას და E'-ს აქვს AC ნორმა, დავუშვათ $u\in E'(I)$ და $v\in E(I)$. ვთქვათ $a=\tau_0<\tau_1<...<\tau_N=b$ არის დანაწილება ისეთი, რომ $A(\tau_{i-1},\tau_i)\le\varepsilon$, სადაც $i=2,...,N$ და $\left\|T_{a,(a,\tau_1)}\right\|\le\varepsilon$, მაშინ

$$a_N(T)\le C\varepsilon .$$

დამტკიცება. ვთქვათ $I_i=(\tau_{i-1},\tau_i)$, $i=1,2,...,N$ და $Pf=\sum_{i=2}^{N}P_i f$, სადაც

$$P_i f(x)=v(x)\chi_{I_i}\int_a^{e_i}f(t)u(t)dt ,$$

ხოლო e_i რიცხვები განმარტებულია ლემა 1.2.9-ის ძალით.

$$A\left(I_i\right)=\min_{x\in I_i}\left\|T_{x,I_i}\left|E(I_i)\to E(I_i)\right.\right\|\approx\left\|T_{e_i,I_i}\left|E(I_i)\to E(I_i)\right.\right\| .$$

შევნიშნოთ, რომ $rank(P)\le N-1$. თეორემა 0.1-ის ძალით არსებობს ბანახის დისკრეტული სივრცე l ისეთი, რომ E ერთდროულად აკმაყოფილებს როგორც ზედა, ასევე ქვედა l შეფასებას. ლემა 1.2.9-ის გამოყენებით გვექნება

$$\left\|\left(T-P\right)f\right\|_E=\left\|\chi_{I_1}T_{a,I_1}f+\sum_{i=2}^{N}(Tf-P_i f)\chi_{I_i}\right\|_E$$

$$=\left\|\chi_{I_1}T_{a,I_1}f+\sum_{i=2}^{N}\chi_{I_i}T_{e_i,I_i}f\right\|_E$$

$$\le C\left\|\left\{\left\|\chi_{I_1}T_{a,I_1}f\right\|_E,\left\|\chi_{I_i}T_{e_i,I_i}f\right\|_E\right\}\right\|_l$$

$$\le C\max\left\{\left\|T_{a,I_1}\right\|,A(I_2),...,A(I_N)\right\}\left\|\left\{\left\|f\chi_{I_i}\right\|_E\right\}\right\|_l$$

$$\le C_1\varepsilon\left\|f\right\|_E .$$

ლემა 1. 3.1 დამტკიცებულია.

ლემა 1.3.2. ვთქვათ E არის რეფლექსური, მკაცრად ამოზნექილი ბანახის ფუნქციური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს (0.3) პირობას. დავუშვათ E^* სივრცე არის

მკაცრად ამოზნექილი. ვთქვათ $u \in E'(I)$ და $v \in E(I)$. $a=\tau_0<\tau_1<...<\tau_N=b$ დანაწილება აღებულია ისე, რომ $A(\tau_{i-1},\tau_i)\ge\varepsilon$, $i=2,...,N$ და $\left\|T_{a,(a,\tau_1)}\right\|\ge\varepsilon$. მაშინ

$$i_N(T)\ge C\varepsilon .$$

დამტკიცება. ვთქვათ $I_i=(\tau_{i-1},\tau_i)$ $(i=1,...,N)$. ლემა 1.2.9-ის ძალით არსებობს $e_i\in I_i$ რიცხვები ისეთი, რომ

$$A\left(I_i\right)=\min_{x\in I_i}\left\|T_{x,I_i}\left|E(I_i)\to E(I_i)\right.\right\|\approx\left\|T_{e_i,I_i}\mid E(I_i)\to E(I_i)\right\|.$$

შევნიშნოთ ასევე, რომ (იხილეთ ლემა 1.2.4)

$$\left\|T_{e_i,(\tau_{i-1},e_i)}\mid E((\tau_{i-1,}e_i))\to E((\tau_{i-1,}e_i))\right\|=\left\|T_{e_i,(e_i,\tau_i)}\mid E((e_i,\tau_i))\to E((e_i,\tau_i))\right\|$$

$$\approx\left\|T_{e_i,I_i}\left|E(I_i)\to E(I_i)\right.\right\|.$$

რადგან $T_{e_i,(\tau_{i-1},e_i)}$ და $T_{e_i,(e_{i,},\tau_i)}$ არიან კომპაქტური ოპერატორები, არსებობს f_i^1,f_i^2 ისეთი, რომ

$$\text{supp } f_i^1\subset\left(\tau_{i-1},e_i\right),\ \text{supp } f_i^2\subset\left(e_i,\tau_i\right),\quad \left\|f_i^1\right\|_E=\left\|f_i^2\right\|_E=1,$$

$$\left\|T_{e_i,(\tau_{i-1},e_i)}\mid E((\tau_{i-1,}e_i))\to E((\tau_{i-1,}e_i))\right\|=\left\|T_{e_i,(\tau_{i-1},e_i)}f_i^1\right\|_{E((\tau_{i-1},e_i))}$$

და

$$\left\|T_{e_i,(e_i,\tau_i)}\mid E((e_i,\tau_i))\to E((e_i,\tau_i))\right\|=\left\|T_{e_i,(e_i,\tau_i)}f_i^2\right\|_{E((e_i,\tau_i))}.$$

განვსაზღვროთ $J_1=(a_0,e_1)=(e_0,e_1)$, $J_i=(e_{i-1},e_i)$ ინტერვალები, $i=2,...,N$ და $J_{N+1}=(e_N,b)$. შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქცია

$$g_1(x)=f_1^1(x)\chi_{(e_0,e_1)}(x),$$

$$g_i(x)=\left(c_i f_{i-1}^2(x)\chi_{(e_{i-1},\tau_{i-1})}+d_i f_i^1(x)\chi_{(\tau_{i-1},e_i)}(x)\right),\ \text{სადაც } i=2,...,N$$

და

$$g_{N+1}(x)=f_N^2(x)\chi_{J_{N+1}}(x).$$

ამ ფუნქციებისთვის გვაქვს

$$\frac{\left\|T_{e_{i-1},J_i}g_i\right\|_{E((e_{i-1},\tau_{j-1}))}}{\left\|g_i\right\|_{E((e_{i-1},\tau_{j-1}))}}\ge C\varepsilon$$

და

$$\frac{\left\|T_{e_i,J_i} g_i\right\|_{E((\tau_{i-1},e_j))}}{\left\|g_i\right\|_{E((\tau_{i-1},e_j))}} \geq C\varepsilon \text{, სადაც } i=1,\dots,N+1.$$

შევნიშნოთ, რომ $T_{e_{i-1},J_i} g_i$ და $T_{e_i,J_i} g_i$ არ იცვლიან ნიშანს შესაბამისად (e_{i-1},τ_{i-1}) და (τ_{i-1},e_i) ინტერვალებზე. რადგან $T_{e_{i-1},J_i} g_i(x)$ და $T_{e_i,J_i} g_i(x)$ არიან უწყვეტი ფუნქციები, შეგვიძლია ავარჩიოთ c_i და d_i მუდმივები ისეთი, რომ

$$T_{e_{i-1},J_i} g_i(\tau_{i-1}) = T_{e_i,J_i} g_i(\tau_{i-1}) > 0$$

და

$$\left\|g_i\right\|_{E(J_i)} = 1.$$

ამასთანავე გვაქვს

$$\operatorname{supp}(Tg_i) \subset J_i,\ i=1,\dots,N+1.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{\left\|Tg_i\right\|_{E(J_i)}}{\left\|g_i\right\|_{E(J_i)}} = \frac{\left\|T_{e_{i-1},(e_{i-1},\tau_{i-1})} g_i \chi_{(e_{i-1},\tau_{i-1})} + T_{e_i,(\tau_{i-1},e_i)} g_i \chi_{(\tau_{i-1},e_i)}\right\|_{E(J_i)}}{\left\|g_i\right\|_{E(J_i)}}$$

$$\approx \max\left\{\frac{\left\|T_{e_{i-1},(e_{i-1},\tau_{i-1})} g_i\right\|_{E((e_{i-1},\tau_{i-1}))}}{\left\|g_i\right\|_{E(J_i)}}, \frac{\left\|T_{e_i,(\tau_{i-1},e_i)} g_i\right\|_{E((\tau_{i-1},e_i))}}{\left\|g_i\right\|_{E(J_i)}}\right\}$$

$$\geq C_1\varepsilon \text{ , სადაც } i=1,\dots N+1. \tag{3.1}$$

რადგან E და E^* წარმოადგენენ მკაცრად ამოზნექილ ბანახის ფუნქციურ სივრცეს, მოცემული $f \in E/\{0\}$ -თვის არსებობს ერთადერთი ელემენტი $\tilde{J}_E(f)$ E^* სივრციდან, ისეთი, რომ $\left\|\tilde{J}_E(f)\right\|_{E^*} = 1$ და $\langle x, \tilde{J}_E(f)\rangle_E = \|f\|_E$. შევნიშნოთ, რომ ყველა $f \in E/\{0\}$ -თვის, $\tilde{J}_E(f) = grad\|f\|_E$, სადაც $grad\|f\|_E$ აღნიშნავს $\|\cdot\|_E$ ნორმის გატოს წარმოებულს f წერტილში (იხილეთ [11]).

თეორემა 0.1-დან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ბანახის დისკრეტული სივრცე l ისეთი, რომ E ერთდროულად აკმაყოფილებს როგორც ზედა, ასევე ქვედა l შეფასებას I ინტერვალის J_i, $i=1,\dots,N+1$ დანაწილების მიმართ. $A: l \to E$ და $B: E \to l$ ასახვები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$A\left(\left\{d'_i\right\}_{i=1}^{N}\right) = \sum_{i=1}^{N+1} d'_i\ g_i(x)$$

$$Bg(x)=\left\{\frac{\langle g\chi_{J_i},\tilde{J}_E(Tg_i)\rangle_E}{\|Tg_i\|_{E(J_i)}}\right\}_{i=1}^{N+1}.$$

რადგან $\langle Tg_i,\tilde{J}_E(Tg_i)\rangle_E=\|Tg_i\|_E$, გვექნება $BTA\left(\{d_i\}_{i=1}^{N+1}\right)=\{d_i\}_{i=1}^{N+1}$. შევნიშნოთ, რომ $\|B:E\to l\|$ მიიღწევა (მუდმივებამდე სიზუსტით)

$$g(x)=\sum_{i=1}^{N+1}c'_i\,Tg_i(x) \tag{3.2}$$

$g\in E$ სახის ფუნქციაზე. საკმარისია ვიპოვოთ ფუნქცია g ისეთი, რომ $\|g\|_E\le 1$, $\|B:E\to l\|\le C\|Bg\|_l$. თეორემა 0.1-დან გამომდინარეობს, რომ E სივრცე ერთდროულად აკმაყოფილებს ქვედა და ზედა l -შეფასებას C მუდმივის მიმართ. ვთქვათ $h\in E$ ისეთია, რომ $\|h\|_{E(I)}=1$ და $\|B:E\to l\|=\|Bh\|_l$. განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$g=\sum_{i=1}^{N+1}\frac{\left\langle h\chi_{Ji},\tilde{J}_E(Tg_i)\right\rangle_E}{C^2\|Tg_i\|_{E(I)}}Tg_i(x).$$

სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|g\|_{E(I)}\le C\left\|\left\{\frac{\left\langle h\chi_{Ji},\tilde{J}_E(Tg_i)\right\rangle_E}{C^2\|Tg_i\|_{E(I)}}\|Tg_i(x)\|_{E(I)}\right\}_{i=1}^{N+1}\right\|_l$$

$$\le\frac{1}{C}\left\|\left\{\left\langle h\chi_{Ji},\tilde{J}_E(Tg_i)\right\rangle_E\right\}_{i=1}^{N+1}\right\|_l$$

$$\le\frac{1}{C}\left\|\left\{\|h\chi_{Ji}\|_E\left\|\tilde{J}_E(Tg_i)\right\|_{E^*}\right\}_{i=1}^{N+1}\right\|_l$$

$$\le\frac{1}{C}\left\|\left\{\|h\chi_{Ji}\|_E\right\}_{i=1}^{N+1}\right\|_l$$

$$\le\|h\|_E\le 1.$$

ცხადია, რომ

$$Bg=\left\{\frac{\left\langle h\chi_{J_i},\tilde{J}_E(Tg_i)\right\rangle_E}{C^2\|Tg_i\|_{E(I)}}\right\}_{i=1}^{N+1}$$

და

$$Bh = \left\{ \frac{\left\langle h\chi_{J_i}, \tilde{J}_E(Tg_i) \right\rangle_E}{\|Tg_i\|_{E(I)}} \right\}_{i=1}^{N+1}.$$

მაშასადამე გვექნება $Bh = C^2 Bg$ და $\|B: E \to l\| = \|Bh\|_l = C^2 \|Bg\|_l$. (3.1)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\|g\|_E \geq C_2 \varepsilon \left\| \left\{ c_i^{'} \right\}_{i=1}^{N+1} \right\|_l ,$$

სადაც g ფუნქცია განისაზღვრება (3.2) ფორმულით. გვაქვს

$$\sup_{\|f\|_E \leq 1} \|Bf\|_l = \sup_{\|g\|_E \leq 1} \left\| B\left(\sum_{i=1}^{N+1} c_n^{'} Tg_i(x) \right) \right\|_l = \sup_{\|g\|_E \leq 1} \left\| \left\{ c_i^{'} \right\}_{i=1}^{N+1} \right\|_l \leq C_2 / \varepsilon.$$

რადგან $\left\| A\left(\left\{ d_i^{'} \right\} \right)_{i=1}^{N+1} \right\|_E \approx \left\| \left\{ \|d_i^{'} g_i\|_{E(J_i)} \right\} \right\|_l = \left\| \left\{ d_i^{'} \right\} \right\|_l$, ამოტომ $\|A: l \to E\| \approx 1$. მაშასადამე გვექნება

$$i_N(T) \geq \|A\|^{-1} \|B\|^{-1} \geq C_3 \varepsilon.$$

ლემა 1.3.2 დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ლემა 1.3.1. და ლემა 1.3.2.-ის ფორმულირებაში A -ს ნაცვლად შეიძლება გამოყენებულ იქნას $\hat{A}$.

ვთქვათ E არის რეფლექსური ბანახის ფუნქციური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს (0.3) პირობას. დავუშვათ E' სივრცეს აქვს AC ნორმა და $u \in E'(I), v \in E(I)$. შევნიშნოთ რომ საკმარისად მცირე $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს $c, d \in (a,b)$, რომლებისთვისაც $\hat{A}(c,b) = \varepsilon$ და $\|T_{a,(a,d)}\| = \varepsilon$. მართლაც, რადგან T ოპერატორი არის კომპაქტური ლემა 1.2.3 და 1.2.6-ის ძალით არსებობს დადებითი მთელი რიცხვი $N(\varepsilon)$ და $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{N(\varepsilon)} = b$ დანაწილება ისეთი, რომ $\hat{A}(\tau_{i-1}, \tau_i) = \varepsilon$, სადაც $i = 2, \ldots, N(\varepsilon) - 1$, $\hat{A}(\tau_{N(\varepsilon)-1}, b) \leq \varepsilon$ და $\|T_{a,(a,\tau_1)}\| = \varepsilon$. $I_i = (\tau_{i-1,} \tau_i),\ i = 1, \ldots, N(\varepsilon)$ ინტერვალები ქმნიან I ინტერვალის დანაწილებას.

ლემა 1.3.3. ვთქვათ E არის რეფლექსური ბანახის ფუნქციური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს (0.3) პირობას. დავუშვათ $u \in E'(I)$, $v \in E(I)$. მაშინ $N(\varepsilon)$ არის ε -ის მიმართ არაზრდადი ფუნქცია, რომელიც იღებს ნებისმიერად დიდ მთელ მნიშვნელობებს.

დამტკიცება. აღნიშნული ლემის დამტკიცებისთვის გამოვიყენებთ, ლემა 4.19 [11] დამტკიცების სქემას.

დავაფიქსიროთ რიცხვი c, $a < c < b$. გვექნება $\|T_{a,(a,c)}\| = \varepsilon_0 > 0$, ამასთან არსებობს დადებითი მთელი რიცხვი $N(\varepsilon_0)$ და $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{N(\varepsilon_0)} = b$ დანაწილება ისეთი, რომ $\|T_{a,(a,\tau_1)}\| = \varepsilon_0$, $\hat{A}(\tau_{i-1}, \tau_i) = \varepsilon_0$, სადაც $i = 2, \ldots, N(\varepsilon_0) - 1$, $\hat{A}(\tau_{N(\varepsilon_0)-1}, b) \leq \varepsilon_0$. ვთქვათ $d \in (a,c)$. ლემა 1.2.6-ის თანახმად $\hat{A}(a,d) = \varepsilon_0^{'} < \varepsilon_0$. თუ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას გავიმეორებთ ε'_0 -თვის, მივიღებთ, რომ $\infty > N(\varepsilon'_0) \geq N(\varepsilon_0)$. $\hat{A}(c,\cdot)$ -ის და $\|T_{a,(a,\cdot)}\|$ ნორმის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $d \in (a,c)$ ისეთი, რომ $N(\varepsilon'_0) \geq N(\varepsilon_0)$.

თუ $N(\varepsilon'_0)=N(\varepsilon_0)+1$, მაშინ პროცესი შევაჩეროთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში განვსაზღვროთ

$$\varepsilon_1=\sup\left\{\varepsilon:0<\varepsilon<\varepsilon_0 \text{ და } N(\varepsilon)\geq N(\varepsilon_0)+1\right\}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $N(\varepsilon_1)=N(\varepsilon_0)+1$. მართლაც, დავუშვათ $N(\varepsilon_1)\geq N(\varepsilon_0)+2$ და $a=\tau_0<\tau_1<...<\tau_{N(\varepsilon_1)}=b$ დანაწილებისთვის სრულდება $\left\|T_{a,(a,\tau_1)}\right\|=\varepsilon_1$ და $\hat{A}(\tau_i,\tau_{i+1})=\varepsilon_1$ $i=1,2,...,N(\varepsilon_1)-1$ და $\hat{A}(\tau_{N(\varepsilon_1)-1},\tau_{N(\varepsilon_1)})\leq\varepsilon_1$. $\tau_{N(\varepsilon_1)-1}$ მცირედ შევამციროთ $\tau'_{N(\varepsilon_1)-1}$ რიცხვამდე ისე, რომ $\hat{A}(\tau'_{N(\varepsilon_1)-1},b)<\varepsilon_1$ და $\hat{A}(\tau_{N(\varepsilon_1)-2},\tau'_{N(\varepsilon_1)-1})>\varepsilon_1$. ამ პროცესის გაგრძელებით მივიღებთ (a,b) ინტერვალის დანაწილებას $N(\varepsilon_1)$ ცალ ქვეინტერვალად ისეთს, რომ $\left\|T_{a,(a,\tau_1)}\right\|>\varepsilon_1$, $\hat{A}(\tau'_{i-1},\tau'_i)>\varepsilon$, $i=2,...,N(\varepsilon_1)-1$ და $\hat{A}(\tau_{N(\varepsilon_1)-1},b)<\varepsilon_1$. ავიღოთ

$$\varepsilon_2\leq\min\left\{\left\|T_{a,(a,\tau_1)}\right\|,\hat{A}(\tau'_{i-1},\tau'_i);\ i=2,...,N(\varepsilon_1-1)\right\},$$

მივიღებთ $\varepsilon_2>\varepsilon_1$ და $N(\varepsilon_2)\geq N(\varepsilon_0)+2$, რაც წინააღმდეგობაა. ლემა 1.3.3 დამტკიცებულია.

ლემა 1.3.3, ლემა 1.2.6-დან და $\hat{A}(c,\cdot)$-ის და $\left\|T_{a,(a,\cdot)}\right\|$ უწყვეტობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ლემის სამართლიანობა.

ლემა 1.3.4. ვთქვათ E არის რეფლექსური ბანახის ფუნქციური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს (0.3) პირობას. დავუშვათ $u\in E'(I)$ და $v\in E(I)$. მაშინ ყოველი $N>1$-თვის, არსებობს ε_N და $a=\tau_0<\tau_1<...<\tau_N=b$ დანაწილება ისეთი, რომ $\hat{A}(\tau_{i-1},\tau_i)=\varepsilon_N$ სადაც $i=2,...,N$ და

$$\left\|T_{a,(a,\tau_1)}\right\|=\varepsilon_N.$$

ლემა 1.3.1-1.3.4-ის გაერთიანებით მივიღებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 1.3.5. ვთქვათ E არის რეფლექსური მკაცრად ამოზნექილი ბანახის ფუნქციური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს (0.3)-ს. დავუშვათ E^* არის მკაცრად ამოზნექილი და $\|u\chi_I\|_{E'(I)}\|v\chi_I\|_{E(I)}<\infty$. მაშინ ყოველი $N>1$ -თვის არსებობს ε_N და $a=\tau_0<\tau_1<...<\tau_N=b$ დანაწილება ისეთი, რომ $A(\tau_{i-1},\tau_i)=\varepsilon_N$, $i=2,...,N$ და $\left\|T_{a,(a,\tau_1)}\right\|=\varepsilon_N$ და

$$a_N(T)\approx i_N(T)\approx\varepsilon_N.$$

1.4. ასიმპტოტური შედეგები

თეორემა 1.4.1. ვთქვათ E არის რეფლექსური, მკაცრად ამოზნექილი ბანახის ფუნქციური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს (0.3) პირობას. ვთქვათ E^* არის მკაცრად ამოზნექილი და $u\in E'(I), v\in E(I)$. მაშინ არსებობს მუდმივები $C_1=C_1(E),\ C_2=C_2(E)>0$ ისეთი, რომ $T:E\to E$ ასახვისთვის სამართიანია შეფასება

$$C_1\int_a^b u(x)v(x)dx \le \liminf_{n\to\infty} N\varepsilon_N \le \limsup_{n\to\infty} N\varepsilon_N \le C_2\int_a^b u(x)v(x)dx.$$

დამტკიცება. ყოველი $\eta>0$ რიცხვისთვის არსებობს არაუარყოფითი, I ინტევალზე განსაზღვრული u_η , v_η საფეხურა ფუნქციები ისეთი, რომ

$$\|u-u_\eta\|_{E'(I)} < \eta, \quad \|u-v_\eta\|_{E(I)} < \eta .$$

დავუშვათ, რომ

$$u_{\ \eta}=\sum_{j=1}^{m}\xi_j\chi_{W(j)}, \quad v_{\ \eta}=\sum_{j=1}^{m}\eta_j\chi_{W(j)} ,$$

სადაც $W(j)$ არის I ინტერვალის თანაუკვეთი შუალედები ისეთი, რომ $I=\bigcup_{j=1}^m W(j)$.

ვთქვათ N არის 1-ზე მეტი მთელი რიცხვი. ლემა 1.3.4-ის თანახმად არსებობს $\varepsilon_N>0$ და მიმდევრობა $\tau_k, k=0,1,...,N$ ისეთი, რომ $\tau_0=a,\ \tau_N=b$ და $\hat{A}(I_i)=\varepsilon=\varepsilon_N$, $i=2,...,N$ და $\|T_{a,I_1}\|=\varepsilon$, სადაც $I_k=(\tau_{k-1},\tau_k)$. გვექნება

$$\left|\int_I u_\eta(t)v_\eta(t)dt-\int_I uv\right| \le \int_I u(t)\left|v(t)-v_\eta(t)\right|dt+\int_I \left|u(t)-u_\eta(t)\right|v_\eta dt$$

$$\le \|u\|_{E'}\|v-v_\eta\|_E + \|u-u_\eta\|_{E'}\|v_\eta\|_E$$

$$\le \eta\left(\|u\|_{E'}+\|v\|_E+\eta\right). \tag{4.1}$$

ვთქვათ $k=\{k>1$: არსებობს j ისეთი, რომ $I_k\subset W(J)\}$, მაშინ $\#K\ge N-1-m$ (სადაც $\#K$ აღნიშნავს ელემენტების რაოდენობას) და განმარტება 1.2.5-დან, (2.6)-დან, ლემა 1.2.10-1.2.12-დან და (0.5)-დან მივიღებთ

$$\left(N-1-m\right)\varepsilon \le C_1\sum_{k\in K}\hat{A}(I_k,u,v) \le C_2\sum_{k\in K}A(I_k,u,v)$$

$$\le C_3\sum_{k\in K}\left\{A(I_k,u_\eta,v_\eta)+\left(A(I_k,u,v)-A(I_k,u_\eta,v)\right)+\left(A(I_k,u_\eta,v)-A(I_k,u_\eta,v_\eta)\right)\right\}$$

$$\le C_4\sum_j\left\{|\xi_j||\eta_j||W(j)|+\|u-u_\eta\|_{E'(W(j))}\|v\|_{E(W(j))}+\|v-v_\eta\|_{E(W(j))}\|u_\eta\|_{E'(W(j))}\right\}$$

$$\le C_4\left(\int_I u_\eta(t)v_\eta(t)dt+\eta\|v\|_E+\eta\left(\|u\|_{E'}+\eta\right)\right)$$

(4.1)-დან დავასკვნით, რომ

$$\limsup_{N\to\infty} N\varepsilon_N \le C_4\left(\int_I u(t)v(t)dt+2\eta\|v\|_E+2\eta\|u\|_{E'}+2\eta^2\right),$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\limsup_{N\to\infty} N\varepsilon_N \le C_4\int_I u(t)v(t)dt .$$

შებრუნებული უტოლობის დასამტკიცებლად გავაერთიანოთ $W(j),\, j=1,2,\dots,m$ ინტერვალების ბოლო წერტილები და $\tau_k, k=0,1,\dots,N$ წერტილები, მივიღებთ $a=e_0<\dots<e_n=b$ დანაწილებას, სადაც $n\le N+1+m$. შევნიშნოთ, რომ $J_i=(e_k,e_{k+1})$ ინტერვალი არის რომელიღაც $W(j)$ ქვეინტერალი და აქედან მივიღებღ, რომ u_η, v_η იღებენ მუდმივ მნიშვნელობებს თითოეულ J_i ინტერვალზე. მაშასადამე ლემა 1.2.12-ის ძალით გვექნება

$$\int_I u_\eta v_\eta dt=\int_{I_1} u_\eta v_\eta dt+\int_{I\setminus I_1} u_\eta v_\eta dt$$

$$\le C_5\left(\sum_{J_i\subset I_1}\left\|T_{a,J_i,u_\eta,v_\eta}\right\|+\sum_{J_i\not\subset I_1}A(J_i,u_\eta,v_\eta)\right).$$

სამართლიანია შეფასება

$$\sum_{J_i\not\subset I_1}A(J_i,u_\eta,v_\eta)\le\sum_{J_i\not\subset I_1}\left\{A(J_i,u,v)+\left(A(J_i,u_\eta,v)-A(J_i,u,v)\right)+\left(A(J_i,u_\eta,v_\eta)-A(J_i,u_\eta,v)\right)\right\}$$

$$\le\sum_{J_i\not\subset I_1}\left\{A(J_i,u,v)+\|u-u_\eta\|_{E'(J_i)}\|v\|_{E(J_i)}+\|u_\eta\|_{E'(J_i)}\|v_\eta-v\|_{E(J_i)}\right\}$$

$$\le\sum_{J_i\not\subset I_1}A(J_i,u,v)+C_1\left\{\|u-u_\eta\|_{E'(I)}\|v\|_{E(I)}+\|u_\eta\|_{E'(I)}\|v_\eta-v\|_{E(I)}\right\};$$

ანალოგიურად $\left\|T_{a,J,u_\eta,v_\eta}\right\|$ ნორმებისთვის გვექნება

$$\sum_{J_i\subset I_1}\left\|T_{a,J_i,u_\eta,v_\eta}\right\|$$

$$\le\sum_{J_i\subset I_1}\left\{\left\|T_{a,J_i,u,v}\right\|+\left(\left\|T_{a,J_i,u_\eta,v}\right\|-\left\|T_{a,J_i,u,v}\right\|\right)+\left(\left\|T_{a,J_i,u_\eta,v_\eta}\right\|-\left\|T_{a,J_i,u_\eta,v}\right\|\right)\right\}$$

$$\le\sum_{J_i\subset I_1}\left\{\left\|T_{a,J_i,u,v}\right\|+\|u-u_\eta\|_{E'(J_i)}\|v\|_{E(J_i)}+\|u_\eta\|_{E'(J_i)}\|v_\eta-v\|_{E(J_i)}\right\}$$

$$\leq \sum_{J_i \subset I_1} \left\| T_{a,J_i,u,v} \right\| + C_1 \left\{ \left\| u - u_\eta \right\|_{E'(I)} \left\| v \right\|_{E(I)} + \left\| u_\eta \right\|_{E'(I)} \left\| v_\eta - v \right\|_{E(I)} \right\}$$

$\left\| T_{a,I_1,u,v} \right\| \leq \varepsilon$ და $A(J_i, u, v) \leq C_5 \varepsilon$ უტოლობებიდან მივიღებთ

$$\int_I u(t)v(t)dt \leq C_6 \left((N+1+m)\varepsilon + \eta \left\| v \right\|_{E(I)} + \eta \left(\left\| u \right\|_{E'(I)} + \eta \right) \right)$$

და რადგან $\eta > 0$ არის ნებისმიერი, თეორემა 1.4.1-ის დამტკიცება დასრულებულია.

თეორემა 1.1.7-ის დამტკიცება. თეორემა 1.3.5 და თეორემა 1.4.1-დან მივიღებთ დასამტკიცებელ თეორემას.

II თავი

ნორმების ქვედა და ზედა შეფასება ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში

2.1. G' და G'' თვისებები ზოგად ფუნქციურ სივრცეებში

ვთქვათ S არის $[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი ფუნქციათა სივრცე, ხოლო X რაიმე ბანახის ფუნქციური სივრცეა (განსაზღვრული $[0,1]$ სეგმენტზე). X სივრციდან მიღებული მასშტაბირებული სივრცე X^r, $0<r<\infty$ განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$X^r = \left\{ f \in S : |f|^r \in X \right\} ,$$

"ნორმით"

$$\|f\|_{X^r} = \left\| |f|^r \right\|_X^{1/r} .$$

როცა $r \ge 1$, მაშინ $\|\cdot\|_{X^r}$ კვლავ არის ნორმა და X^r წარმოადგენს ბანახის ფუნქციურ სივრცეს, ხოლო როცა $r<1$, X^r შეიძლება არ იყოს ბანახის ფუნქციური სივრცე. მაგალითად, თუ $X = L^p([0;1])$, $(1 \le p < \infty)$ მაშინ $(L^p)^r = L^{pr}$ და მაშასადამე X^r არის ბანახის ფუნქციური სივრცე მხოლოდ მაშინ, როცა $r \ge 1/p$.

შემდგომში $\Im$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $[0,1]$ სეგმენტის ყველა შესაძლო ინტერვალებით დანაწილებათა კლასს. სახელდობრ, ყველა იმ $Q = \{Q_1, Q_2 ...\}$ მიმდევრობებს (შესაძლოა სასრული), სადაც თითოეული $Q_i \subset [0,1]$ არის რაიმე ინტერვალი ისეთი, რომ $Q_i \cap Q_j = \varnothing$, როცა $i \ne j$ და $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ (ნული ზომის სიმრავლემდე სიზუსტით).

განმარტება 2.1.1. ვიტყვით, რომ ბანახის ფუნქციური სივრცე X-ს გააჩნია $G'(\Im)$ ($G''(\Im)$) თვისება, თუ არსებობს მუდმივი $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$) ისეთი, რომ ყოველი $f \in X$ და $\vartheta \in \Im$-თვის გვაქვს

$$\left\| \sum_{Q_i \in Q} \frac{\|f\chi_{Q_i}\|_X}{\|\chi_{Q_i}\|_X} \chi_{Q_i} \right\|_X \le C_1 \|f\|_X \quad \left(\|f\|_X \le C_2 \left\| \sum_{Q_i \in Q} \frac{\|f\chi_{Q_i}\|_X}{\|\chi_{Q_i}\|_X} \chi_{Q_i} \right\|_X \right). \tag{2.1}$$

შევნიშნოთ, რომ (2.1) უტოლობები წარმოაგენენ ლებეგის ნორმის შემდეგი თვისების

$$\|f\|_{L^p} = \left\| \sum_i \frac{\|f\chi_{\Omega_i}\|_{L^p}}{\|\chi_{\Omega_i}\|_{L^p}} \chi_{\Omega_i} \right\|_{L^p}$$

განზოგადებას, სადაც $\{\Omega_i\}$ წარმოადგენს Ω სიმრავლის რაიმე დანაწილებას. შევნიშნოთ, რომ თუ X სივრცისათვის ერთდროულად გვაქვს $G'(\Im)$ და $G''(\Im)$ თვისებები, მაშინ გვაქვს (0.3) და (0.5) შეფასებები (იხილეთ თეორემა (0.1)). მოვიყვანოთ ზოგიერთი მარტივი დებულება $G'(\Im)$ და $G''(\Im)$ თვისებათა შესახებ, რომელთაც მოგვიანებით გამოვიყენებთ.

განმარტება 2.1.2. ვთქვათ X არის ბანახის ფუნქციური სივრცე. ვიტყვით, რომ ბანახის ფუნქციური სივრცე X აკმაყოფილებს მაკენჰაუპტის პირობას, თუ არსებობს მუდმივი $C>0$ ისეთი, რომ ყოველი $I\subset[0,1]$ ინტერვალისთვის

$$\|\chi_I\|_X\cdot\|\chi_I\|_{X'}\le C\cdot|I|.$$

თეორემა 2.1.3. ვთქვათ ბანახის ფუნქციური სივრცე X-ს აქვს G' თვისება და X აკმაყოფილებს მაკენჰაუპტის პირობას. მაშინ X-ის ასოცირებულ სივრცეს აქვს G'' თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ $Q=\{Q_1,Q_2,\dots\}$ აღნიშნავს $[0,1]$- ის დანაწილებას. ვთქვათ $g\in X'$ და $f\in X$ ისეთია, რომ $\|f\|_X\le 1$. მაკენჰაუპტის პირობისა და ჰელდერის უტოლობის ძალით დავასკვნით, რომ $|Q_i|\approx\|\chi_{Q_i}\|_X\cdot\|\chi_{Q_i}\|_{X'}$. ამ ფაქტისა და G' თვისების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int_{[0,1]}|f(x)g(x)|dx=\sum_k\int_{Q_k}|f(x)g(x)|dx\le\sum_k\|f\chi_{Q_k}\|_X\cdot\|g\chi_{Q_k}\|_{X'}$$

$$\le C_1\int_{[0,1]}\sum_k\frac{\|f\chi_{Q_k}\|_X}{\|\chi_{Q_k}\|_X}\frac{\|g\chi_{Q_k}\|_{X'}}{\|\chi_{Q_k}\|_{X'}}\chi_{Q_k}dx$$

$$\le C_1\left\|\sum_k\frac{\|f\chi_{Q_k}\|_X}{\|\chi_{Q_k}\|_X}\chi_{Q_k}\right\|_X\left\|\sum_k\frac{\|g\chi_{Q_k}\|_{X'}}{\|\chi_{Q_k}\|_{X'}}\chi_{Q_k}\right\|_{X'}$$

$$\le C_2\left\|\sum_k\frac{\|g\chi_{Q_k}\|_{X'}}{\|\chi_{Q_k}\|_{X'}}\chi_{Q_k}\right\|_{X'}.$$

მაშასადამე X' აქვს G'' თვისება. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ თუ ბანახის ფუნქციურ სივრცე X-ს აქვს G თვისება (იმ აზრით, რომ (X,X) წყვილს აქვს $G(\Im)$ თვისება), მაშინ X'-ს აქვს G თვისება მაკენჰაუპტის პირობის გარეშე (იხ. [5]).

განმარტება 2.1.4. ვთქვათ $Q\in\Im$. განვსაზღვროთ გასაშუალების ოპერატორი Q დანაწილების მიმართ:

$$T_Q f(x)=\sum_{Q_i\in Q}|f|_{Q_i}\chi_{Q_i}(x),$$

სადაც $|f|_{Q_i}$ აღნიშნავს $|f|$ ის საშუალოს Q_i ინტერვალზე.

თეორემა 2.1.5. ვთქვათ X ბანახის ფუნქციურ სივრცეს აქვს G'' თვისება და $T_Q : X \to X$, $Q \in \Im$ ოპერატორები ერთობლივ შემოსაზღვრულია. მაშინ X სივრცის ასოცირებულ სივრცეს აქვს G' თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ $g \in X$ არის არაუარყოფითი ფუნქცია ისეთი, რომ $\|g\|_X \le 1$. ყოველი $\varepsilon > 0$ -თვის და i ნომრისთვის შევარჩიოთ არაუარყოფით ფუნქცია $h_i \in X$, ისეთი, რომ $\|h_i\|_X \le 1$ და $\|f\chi_{Q_i}\|_{X'} \le (1+\varepsilon)\int_{Q_i} fh_i$. G'' თვისებიდან და ჰელდერის უტოლობიდან მივიღებთ

$$\int_{[0,1]} g(x)\sum_i \frac{\|f\chi_{Q_i}\|_{X'}}{\|\chi_{Q_i}\|_{X'}}\chi_{Q_i}(x)dx \le \int_{[0,1]} g(x)\sum_i \frac{(1+\varepsilon)\int_{Q_i} f(t)h_i(t)dt}{\|\chi_{Q_i}\|_{X'}}\chi_{Q_i}(x)dx$$

$$= (1+\varepsilon)\int_{[0,1]} f(t)\sum_i \frac{h_i(t)\int_{Q_i} g(x)dx}{\|\chi_{Q_i}\|_{X'}}\chi_{Q_i}(t)dt \le (1+\varepsilon)\|f\|_{X'}\left\|\sum_i \frac{h_i(\cdot)\int_{Q_i} g(x)dx}{\|\chi_{Q_i}\|_{X'}}\chi_{Q_i}\right\|_X$$

$$\le C_1(1+\varepsilon)\|f\|_{X'}\left\|\sum_i \frac{\|h_i\|_X \int_{Q_i} g(x)dx}{\|\chi_{Q_i}\|_X\|\chi_{Q_i}\|_{X'}}\chi_{Q_i}\right\|_X$$

$$\le C_2(1+\varepsilon)\|f\|_{X'}\left\|\sum_i \frac{\chi_{Q_i}}{|Q_i|}\int_{Q_i} g(x)dx\right\|_X$$

$$\le C_3(1+\varepsilon)\|f\|_{X'}\|g\|_X$$

$$\le C_3(1+\varepsilon)\|f\|_{X'}.$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ε ნებისმიერად აღებული ძალზედ მცირე, დადებითი სიდიდეა, დავასკვნით, რომ X' სივრცეს აქვს G' თვისება. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ თუ $0 < r < \infty$, მაშინ ყოველი $f \in X$ ფუნქციისთვის გვექნება $\|f\|_X = \|f^{1/r}\|_{X^r}^r$. განმარტება 2.1.1-ში მოყვანილი უტოლობები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\left\|\sum_{Q_i \in Q} \frac{\|f^{1/r}\chi_{Q_i}\|_{X^r}}{\|\chi_{Q_i}\|_{X^r}}\chi_{Q_i}\right\|_{X^r}^r \le C_1\|f^{1/r}\|_{X^r}^r,$$

$$\left\| f^{1/r} \right\|_{X^r}^r \le C_2 \left\| \sum_{Q_i \in Q} \frac{\left\| f^{1/r} \chi_{Q_i} \right\|_{X^r}}{\left\| \chi_{Q_i} \right\|_{X^r}} \chi_{Q_i} \right\|_{X^r}^r .$$

მაშასადამე თუ X ბანახის ფუნქციურ სივრცეს აქვს G'(ან $G"$) თვისება, მაშინ "ნორმებს" $\|\cdot\|_{X^r}$ $(0<r<\infty)$ აქვთ $G'(G")$ თვისება.

2.2. G' და $G"$ თვისებები ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში

ვთქვათ მოცემულია $p(\cdot):[0,1]\to[1,\infty)$ ექსპონენტა. შემოვიღოთ შემდეგი სტანდარტული აღნიშვნები:

$$p\_(I) := \operatorname*{essinf}_{x\in I} \; p(x), \; p_+(I) := \operatorname*{esssup}_{x\in I} \; p(x), \; p\_ = p\_([0,1]), \; p_+ = p_+([0,1]) .$$

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ $1 \le p\_ \le p_+ < \infty$.

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით $L^{p(\cdot)}[0,1]$ სივრცეში G' და $G"$ თვისებებს. ჩვენ განვიხილავთ ექსპონენტების კლასს, რომლებისთვისაც შესაბამის ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეს გააჩნია G' (ან $G"$) თვისება. ასევე ჩვენ ავაგებთ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეს G' ($G"$) თვისებით, რომელსაც არ გააჩნია $G"(G')$ თვისება.

ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემებს:

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ $p(\cdot)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: $1/p(\cdot)\in BLO^{1/\log}$, $1\le p\_ \le p_+ <\infty$, მაშინ $L^{p(\cdot)}[0,1]$ სივრცეს აქვს G'თვისება.

თეორემა 2.2.2. ვთქვათ $p(\cdot)$, $1\le p\_ \le p_+ <\infty$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: $1/p(\cdot)\in BLO^{1/\log}$, მაშინ არსებობს c ისეთი, რომ $L^{(p(\cdot)+c)'}[0,1]$ სივრცეს აქვს $G"$თვისება.

თეორემა 2.2.3. 1) არსებობს ექსპონენტა $p(\cdot)$, $1\le p\_ \le p_+ <\infty$ ისეთი, რომ $1/p(\cdot)\in BLO^{1/\log}$ და $L^{p(\cdot)}[0,1]$ სივრცეს გააჩნია G'თვისება, ხოლო $G"$ თვისება არ აქვს.

2) არსებობს ექსპონენტა $p(\cdot)$, $1\le p\_ \le p_+ <\infty$ ისეთი, რომ $1/p(\cdot)\in BLO^{1/\log}$ და $L^{p(\cdot)}[0,1]$ სივრცეს გააჩნია $G"$თვისება, ხოლო G' თვისება არ აქვს.

მოვიყვანოთ $L^{p(\cdot)}[0,1]$ სივრცის ზოგიერთი თვისება, რომელთაც შემდგომში გაოვიყენებთ.

$L^{p(\cdot)}([0,1])$ სივრცის ასოცირებული სივრცე შედგება ყველა ისეთი f ზომადი ფუნქციებისგან, რომელთათვისაც

$$\|f\|'_{(L^{p(\cdot)})'} = \sup\left\{ \int_{[0,1]} |f(x)g(x)|dx : g\in L^{p(\cdot)}([0,1]),\; \|g\|_{p(\cdot)} \le 1 \right\} < \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ $L^{p(\cdot)}([0,1])$ სივრცის ასოცირებული სივრცე ემთხვევა $L^{p'(\cdot)}([0,1])$ სივრცეს ($\frac{1}{p'(x)}+\frac{1}{p(x)}=1,\; x\in[0,1]$) და $\|f\|'_{(L^{p(\cdot)})'}$ და $\|\cdot\|_{p'(\cdot)}$ ექვივალენტური ნორმები არიან ([1], [2]). ასევე სამართლიანია შემდეგი უტოლობები

$$\int_{[0,1]} |f(x)g(x)|dx \le C\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}, \quad f \in L^{p(\cdot)}[0,1],\ g \in L^{p'(\cdot)}[0,1].$$

პირიქით $f \in L^{p(\cdot)}[0,1]$ ფუნქციისთვის

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le C \sup \int_{[0,1]} |f(x)g(x)|dx,$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა $g \in L^{p'(\cdot)}[0,1]$ ფუნქციის მიმართ, რომლისთვისაც $\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1$ (C აბსოლუტური მუდმივაა).

მოცემული $p(\cdot)$, $1 \le p_- \le p_+ < \infty$ ექსპონენტისთვის და ზომადი f ფუნქციისთვის $E \subset [0,1]$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ მოდულარი:

$$\rho_{p(\cdot),E} f = \int_E |f(x)|^{p(\cdot)} dx .$$

ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში მოდულარსა და ფუნქციის ნორმას შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება (იხილეთ [1], [2]).

წინადადება 2.2.4. დავუშვათ $p(\cdot)$ ექსპონენტისთვის გვაქვს $1 \le p_- \le p_+ < \infty$ და $E \subset [0;1]$ ზომადი სიმრავლეა, მაშინ:

(1) $\|f\chi_E\|_{p(\cdot)} = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\rho_{p(\cdot),E} f = 1$;

(2) თუ $\rho_{p(\cdot),E} f \le C$, მაშინ $\|f\chi_E\|_{p(\cdot)} \le \max(C^{1/p_-(E)}, C^{1/p_+(E)})$;

(3) თუ $\|f\|_{p(\cdot)} \le C$, მაშინ $\rho_{p(\cdot),E} f \le \max(C^{p_+(E)}, C^{p_-(E)})$.

მოვიყვანოთ დებულება, რომელიც უზრუნველყოფს სივრცულ ჩადგმას $L^{q(\cdot)}[0,1] \subset L^{p(\cdot)}[0,1]$ (იხილეთ [1], [2]).

წინადადება 2.2.5. ვთქვათ მოცემულია ექსპონენტები $p(\cdot), q(\cdot)$. დავუშვათ სრულდება პირობა $1 \le p_- \le p_+ < \infty$, $1 \le q_- \le q_+ < \infty$. $L^{q(\cdot)}[0,1] \subset L^{p(\cdot)}[0,1]$ ჩადგმას აქვს ადგილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $p(\cdot) \le q(\cdot)$ თითქმის ყველგან. უფრო მეტიც ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le 2\|f\|_{q(\cdot)} .$$

განვსაზღვროთ $BMO^{1/\log}$ და $BLO^{1/\log}$ ფუნქციური კლასები. ვთქვათ მოცემულია $f \in L^1[0,1]$. განვსაზღვროთ მისი BMO მოდული შემდეგნაირად

$$\gamma(f,r) = \sup_{|I|\le r} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx, \quad 0 < r \le 1 ,$$

სადაც სუპრემუმი აიღება $[0,1]$ სეგმენტის ყველა I ინტერვალის მიმართ. ვიტყვით რომ $f \in BMO^{1/\log}$, თუ $\gamma(f,r) \le C/\log(e+1/r)$ და $f \in VMO^{1/\log}$, თუ $\gamma(f,r)\log(e+1/r) \to 0$, როცა $r \to 0$.

ვთქვათ მოცემულია $f \in L^1[0,1]$. განვსაზღვროთ მისი BLO მოდული შემდეგნაირად

$$\eta(f,r)=\sup_{|I|\le r}\frac{1}{|I|}(f_I-\operatorname*{essinf}_{x\in I} f(x)),\ 0<r\le 1\ ,$$

სადაც სუპრემუმი აიღება [0,1]-ის ყველა ინტერვალის მიმართ. ვიტყვით რომ $f \in BLO^{1/\log}$, თუ $\eta(f,r)\le C/\log(e+1/r)$. მეტი ინფორმაცია ამ კლასების შესახებ იხილეთ [31]

$BMO^{1/\log}$ კლასი ძალიან მნიშვნელოვანია იმ ექსონენტების დახასიათებისთვის, რომლებიც ეკუთვნიან B კლასს. B სიბოლოთი აღვნიშნავთ ყველა ზომად $p(\cdot)$ ფუნქციათა კლასს, რომლისთვისაც ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორი M შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}[0,1]$ სივრცეში.

$BMO^{1/\log}$ და B კლასს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

თეორემა 2.2.6. ([32], [33]) ვთქვათ $p:[0,1]\to[1,\infty)$, მაშინ

1) თუ $p(\cdot)\in B$, მაშინ $1/p(\cdot)\in BMO^{1/\log}$;

2) თუ $p(\cdot)\in VMO^{1/\log}$, მაშინ $p(\cdot)\in B$;

3) თუ $p(\cdot)\in BMO^{1/\log}$, მაშინ არსებობს c ისეთი, რომ $p(\cdot)+c\in B$.

2.3. ძირითადი შედეგების დამტკიცება

თეორემა 2.2.1-ის დამტკიცება. აღნიშნული თეორემის დამტკიცებისთვის დაგვჭირდება შემდეგი ლემა:

ლემა 2.3.1. ვთქვათ $p(\cdot)$ არის [0,1]-ზე განსაზღვრული ექსპონენტა, რომლისთვისაც სრულდება $1\le p_-\le p_+<\infty$. მაშინ ყველა $t\ge 0$ და $I\subset[0,1]$ ინტერვალისთვის გვაქვს

$$\frac{1}{|I|}\int_I t^{p(x)}dx \ge e^{2(p_-(I)-p_+(I))}t^{\bar{p}_I}\ , \tag{2.2}$$

სადაც $\bar{p}_I$ განისაზღვრება შემდეგნაირად $\dfrac{1}{\bar{p}_I}=\dfrac{1}{|I|}\displaystyle\int_I \frac{1}{p(x)}dx$.

აღნიშნული ლემის დამტკიცება, როცა $1<p_-\le p_+<\infty$ მოყვანილია [34]-ში (იხილეთ ლემა 4.1), თუმცა ზემოაღნიშნულ შემთხვევაშიც შეიძლება ანალოგიურად დამტკიცდეს.

თუ (2.2)-ში ავიღებთ $t=\dfrac{1}{\|\chi_I\|_{p(\cdot)}}$, მივიღებთ

$$\|\chi_I\|_{p(\cdot)}\ge C_1|I|^{(1/p(\cdot))_I}\ , \tag{2.3}$$

რომელიღაც $C_1>0$ მუდმივისთვის. ახლა დავუშვათ, რომ $1/p(\cdot)\in BLO^{1/\log}$, მაშინ არსებობს C_2 ისეთი, რომ

$$|I|^{(1/p(\cdot))_I}=|I|^{\frac{1}{|I|}\int_I\frac{1}{p(\cdot)}dx\ -\ \frac{1}{p_+(I)}+\frac{1}{p_+(I)}}$$

$$\geq |I|^{\frac{C}{\ln(e+1/|I|)}+\frac{1}{p_+(I)}} \geq C_2 |I|^{\frac{1}{p_+(I)}} \tag{2.4}$$

(2.3) და (2.4)-დან მივიღებთ

$$C_3 |I|^{1/p_+(I)} \leq \|\chi_I\|_{p(\cdot)} \leq C_4 |I|^{1/p_+(I)}. \tag{2.5}$$

ვთქვათ $Q=\{Q_{1,}Q_2,...\}$ აღნიშნავს $[0,1]$-ის რაიმე დანაწილებას. $[0,1]$-ზე განვსაზღვროთ $\tilde{p}(\cdot)$ ფუნქცია შემდეგნაირად: $\tilde{p}(\cdot)=p_+(Q_i)$ როცა $x\in Q_i$.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\|f\|_p=1$. წინადადება 2.2.4-დან გვაქვს $\int_0^1 |f(x)|^{p(x)}dx=1$. ე.ი. საკმარისია დავამტკიცოთ შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა

$$\left\| \sum_i \frac{\|f\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}}{\|\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}} \chi_{Q_i}(x) \right\|_{p(\cdot)} \leq C.$$

წინადადება 2.2.4.-დან გვაქვს

$$\|f\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)} \leq \left(\int_{Q_i} |f(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/p_+(Q_i)}. \tag{2.6}$$

(2.5) და (2.6)-დან მივიღებთ

$$\int_{[0,1]} \left(\sum_i \frac{\|f\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}}{\|\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}} \chi_{Q_i}(x) \right)^{\tilde{p}(x)} dx = \sum_i \int_{Q_i} \left(\frac{\|f\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}}{\|\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}} \right)^{p_+(Q_i)} \chi_{Q_i}(x)dx$$

$$= \sum_i |Q_i| \left(\frac{\|f\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}}{\|\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}} \right)^{p_+(Q)}$$

$$\leq \sum_i |Q_i| \frac{\int_{Q_i} |f(x)|^{p(x)} dx}{C_1 |Q_i|}$$

$$= \frac{1}{C_1} \int_{[0,1]} |f(x)|^{p(x)} dx = \frac{1}{C_1}.$$

საბოლოოდ გვექნება

$$\left\| \sum_i \frac{\|f\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}}{\|\chi_{Q_i}\|_{p(\cdot)}} \chi_{Q_i}(x) \right\|_{p(\cdot)} \leq C.$$

თუ გავითვალისწინეთ იმ ფაქტს, რომ $p(x) \le \tilde{p}(x)$, $x \in [0,1]$ და წინადადება 2.2.5-ს, მივიღებთ დასამტკიცებელ შედეგს. თეორემა 2.2.1 დამტკიცებულია.

თეორემა 2.2.2-ის დამტკიცება. აღნიშნული თეორემის დამტკიცება შესაძლებელია იმავე გზით, რაც თეორემა 2.2.1 თუმცა ამ თეორემის დამტკიცებას უფრო ზოგადი დებულებიდან გამოვიყვანთ.

განვიხილოთ ექსპონენტა $\frac{1}{p(\cdot)} \in BLO^{1/\log}$, მაშინ თეორემა 2.2.6-ის ძალით არსებობს c ისეთი, რომ $p(\cdot)+c \in B$, თეორემა 2.1.3 და თეორემა 2.2.1-დან ჩვენ მივიღებთ სასურველ შედეგს.

თეორემა 2.2.3-ის დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} \ln\ln(1/x), & თუ\ x \in (0, e^{-1}]; \\ 0, & თუ\ x \in (e^{-1}, 1]. \end{cases}$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს ფუნქსია ეკუთვნის $BLO^{1/\log}$ კლასს.

ვთქვათ $(a,b) \subset [0,1]$. ზოგადობის შეზღუდვის გარეშე ვიგულისხმოთ, რომ $0 \le a < b \le e^{-1}$. $(a,b]$-ზე განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$h(x) = \int_a^x \ln\ln(1/t)dt - (x-a)\ln\ln(1/x) - \frac{2(x-a)}{\ln(1/(x-a))} .$$

გვექნება

$$h'(x) = \frac{(x-a)}{x\ln(1/x)} - 2 \cdot \frac{\ln(1/(x-a))+1}{\left(\ln(1/(x-a))\right)^2}, \quad a < x \le b .$$

რადგან $x\ln(1/x)$ ფუნქცია $(0,1/e)$-ზე ზრდადია, ამიტომ

$$(\ln(1/(x-a)))^2(x-a) - 2x\ln(1/x)(\ln(1/(x-a))+1)$$

$$\le \ln\frac{1}{x-a}\left((x-a)\ln\frac{1}{x-a} - 2x\ln\frac{1}{x}\right) \le -x\ln\frac{1}{x} \cdot \ln\frac{1}{x-a} < 0 .$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია h არის კლებადი. h-ის მონოტონურობიდან და $h(a+) = 0$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_a^b \ln\ln(1/x)dx - (b-a)\ln\ln(1/b) - \frac{2(b-a)}{\ln(1/(b-a))} \le 0 .$$

ბოლო უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\ln(1/x)dx - \ln\ln(1/b) \le \frac{4}{\ln(e+1/(b-a))} . \tag{2.7}$$

მაშასადამე $f \in BLO^{1/\log}$.

ვთქვათ $d_n = e^{-e^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ და

$$c_0 = 2/e, \quad c_{2n+1} = c_{2n} - (d_n - d_{n+1}), \quad c_{2n+2} = c_{2n+1} - (d_n - d_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

განვიხილოთ შემდეგი არაუარყოფითი შემოსაზღვრული ფუნქცია

$$g(x) = \begin{cases} \ln\ln \dfrac{1}{c_{2n} + c_{2n+2} - x - d_n} - n, & \text{თუ} \quad x \in (c_{2n+2}, c_{2n+1}],\ n \in \mathbb{N}_0; \\ \ln\ln \dfrac{1}{x - d_n} - n, & \text{თუ} \quad x \in (c_{2n+2}, c_{2n}],\ n \in \mathbb{N}_0; \\ 0, & \text{თუ} \quad x \in (2/e, 1]. \end{cases}$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს ფუნქცია ეკუთვნის $BLO^{1/\log}$ კლასს, ანუ ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $(a,b) \subset [0,1]$ ინტერვალისთვის სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$\frac{1}{b-a} \int_{(a;b)} g(x)dx - \inf_{x \in (a;b)} g(x) \le \frac{C}{\ln(e + 1/(b-a))}. \tag{2.8}$$

შევნიშნოთ, რომ $g(c_{2n}) = 0$, $g(c_{2n+1}) = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ და ყოველ $[c_{2n+1}, c_{2n}]$ სიმრავლეზე g ფუნქცია არის მკაცრად მონოტონური და უწყვეტი.

ვთქვათ $(a,b) \subset [0,1]$, ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $b \le 2/e$. განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

შემთხვევა 1. სულ მცირე ერთი c_{2n} წერილი მაინც ეკუთვნის (a,b) ინტერვალს, სადაც $n \in \mathbb{N}_0$;

შემთხვევა 2. (a,b) ინტერვალი შეიცავს c_{2n+1} სახის მხოლოდ ერთ წერტილს, სადაც $n \in \mathbb{N}_0$;

შემთხვევა 3. (a,b) ინტერვალი არ შეიცავს c_n წერტილს არცერთი $n \in \mathbb{N}_0$ რიცხვის-თვის.

განვსაზღვროთ $m_a = \sup\{k : a \le c_k\}$, $m_b = \min\{k : c_k \le b\}$. შევნიშნოთ, რომ თუ $a > 0$, მაშინ $m_a = \max\{k : a \le c_k\}$ და $m_a = \infty$, თუ $a = 0$.

შემთხვევა 1. ვიგულისხმოთ, რომ $m_a < \infty$. განვსაზღვროთ

$$m'_a = \max\{k : a \le c_k \wedge g(c_k) = 0\} \quad \text{და} \quad m'_b = \min\{k : c_k \le b \wedge g(c_k) = 0\}.$$

ცხადია, რომ $c_{m_a} \le c_{m'_a} \le c_{m'_b} \le c_{m_b}$. სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\frac{1}{b-a} \int_{(a,b)} g(x)dx - \inf_{x \in (a,b)} g(x) = \frac{1}{b-a} \int_{(a,b)} g(x)dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\int_a^{c_{m'_a}}+\int_{c_{m'_a}}^{c_{m'_b}}+\int_{c_{m'_b}}^{b}\right)g(x)dx$$

$$=A_1+A_2+A_3. \tag{2.9}$$

ვთქვათ $c_{m'_a}<c_{m'_b}$. თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $g(2c_{2k+1}-x)=g(x)$, როცა $x\in[c_{2k+2},c_{2k+1}]$, მივიღებთ

$$(b-a)A_2=\int_{c_{m'_a}}^{c_{m'_b}}g(x)dx=\sum_{k=m'_b/2}^{(m'_a-2)/2}\int_{c_{2k+2}}^{c_{2k}}g(x)dx=\sum_{k=m'_b/2}^{(m'_a-2)/2}\left(\int_{c_{2k+2}}^{c_{2k+1}}+\int_{c_{2k+1}}^{c_{2k}}\right)g(x)dx$$
$$=\sum_{k=m'_b/2}^{(m'_a-2)/2}2\int_{c_{2k+1}}^{c_{2k}}g(x)dx=2\sum_{k=m'_b/2}^{(m'_a-2)/2}\int_{c_{2k+1}}^{c_{2k}}\left(\ln\ln\frac{1}{x-d_k}-k\right)dx.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $c_{2k}-d_k=d_k$ და $c_{2k+1}-d_k=d_{k+1}$, გვექნება

$$(b-a)A_2=2\sum_{k=m'_b/2}^{(m'_a-2)/2}\int_{d_{k+1}}^{d_k}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-k\right)dt\le 2\sum_{k=m'_b/2}^{(m'_a-2)/2}\int_{d_{k+1}}^{d_k}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-\frac{m'_b}{2}\right)dt$$

$$=2\sum_{k=m'_b/2}^{(m'_a-2)/2}\int_{d_{k+1}}^{d_k}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-\ln\ln\frac{1}{d_{m'_b/2}}\right)dt=2\int_{m'_a/2}^{m'_b/2}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-\ln\ln\frac{1}{d_{m'_b/2}}\right)dt.$$

$b-a>(b-a)/2\ge d_{m'_b/2}-d_{m'_a/2}$ შეფასებიდან და (2.7)-დან მივიღებთ

$$A_2\le\frac{1}{d_{m'_b/2}-d_{m'_a/2}}\int_{d_{m'_a/2}}^{d_{m'_b/2}}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-\ln\ln\frac{1}{d_{m'_b/2}}\right)dt$$

$$\le\frac{4}{\ln(e+1/(d_{m'_b/2}-d_{m'_a/2}))}\le\frac{4}{\ln(e+1/(b-a))}. \tag{2.10}$$

თუ $m_a=\infty$, მაშინ

$$A_2\le\frac{1}{d_{m'_b/2}-0}\int_0^{d_{m'_b/2}}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-\ln\ln\frac{1}{d_{m'_b/2}}\right)dt\le\frac{4}{\ln(e+1/(b-a))}. \tag{2.11}$$

განვიხილოთ A_1. ვთქვათ $c_{m_a}=c_{m'_a}$. რადგან $c_{m'_a}-d_{m'_a/2}=d_{m'_a/2}$, (2.7)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$A_1=\frac{1}{b-a}\int_a^{c_{m'_a}}\left(\ln\ln\frac{1}{x-d_{m'_a/2}}-\frac{m'_a}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_{a-d_{m'_a/2}}^{c_{m'_a}-d_{m'_a/2}}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-\frac{m'_a}{2}\right)dx$$

$$\leq\frac{4}{\ln(e+1/(c_{m'_a}-a))}\leq\frac{4}{\ln(e+1/(b-a))}. \tag{2.12}$$

ვთქვათ $c_{m_a}\neq c_{m'_a}$, მაშინ $m_a=m'_a+1$ და $g(c_{m_a})=1$. რადგან $c_{m'_a}-d_{m'_a/2}=d_{m'_a/2}$, მივიღებთ

$$A_1\leq\frac{2}{b-a}\int_{c_{m_a}}^{c_{m'_a}}\left(\ln\ln\frac{1}{x-d_{m'_a/2}}-\frac{m'_a}{2}\right)dx$$

$$=\frac{2}{b-a}\int_{c_{m_a}-d_{m'_a/2}}^{c_{m'_a}-d_{m'_a/2}}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-\ln\ln\frac{1}{d_{m'_a/2}}\right)dx$$

$$\leq\frac{8}{\ln(e+1/(b-a))}. \tag{2.13}$$

განვიხილოთ A_3. ვთქვათ $c_{m_b}=c_{m'_b}$. რადგან $c_{m_b-2}-d_{(m_b-2)/2}=d_{(m_b-2)/2}$, ამიტომ

$$A_3=\frac{1}{b-a}\int_{c_{m_b}}^{b}\left(\ln\ln\frac{1}{c_{m_b}+c_{m_b-2}-x-d_{(m_b-2)/2}}-\frac{m_b-2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_{c_{m_b}+c_{m_b-2}-b-d_{(m_b-2)/2}}^{c_{m_b-2}-d_{(m_b-2)/2}}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-\frac{m_b-2}{2}\right)dt$$

$$\leq\frac{4}{\ln(e+1/(b-a))}. \tag{2.14}$$

თუ $c_{m_b}\neq c_{m'_b}$, მაშინ $m_b=m'_b-1$ და $g(m_b)=1$ და მივიღებთ

$$A_3\leq\frac{2}{b-a}\int_{c_{m'_b}}^{c_{m_b}}\left(\ln\ln\frac{1}{c_{m'_b}+c_{m'_b-2}-x-d_{(m'_b-2)/2}}-\frac{m'_b-2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{2}{b-a}\int_{c_{m'_b}+c_{m'_b-2}-c_{m_b}-d_{(m'_b-2)/2}}^{c_{m'_b-2}-d_{(m'_b-2)/2}}\left(\ln\ln\frac{1}{t}-\frac{m'_b-2}{2}\right)dt$$

$$\leq\frac{8}{\ln(e+1/(b-a))}. \tag{2.15}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $m'_a = m'_b$, სასურველი შედეგის მიღება შესაძლებელია A_1-ის და A_3-ის შეფასებებიდან.

შემთხვევა 2. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში გვაქვს $c_{m_a} = c_{m_b} = c_n$, სადაც n არის კენტი რიცხვი. შევნიშნოთ, რომ g ფუნქციის (c_{n+1}, c_{n-1}) ინტერვალზე შეზღუდვის გრაფიკი სიმეტრიულია $x = c_n$ წრფის მიმართ. მაშასადამე ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $g(a) \ge g(b)$, მაშინ

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx - g(b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (g(x)-g(b))dx$$

$$\le \frac{2}{b-a}\int_{c_n}^b \left(\left(\ln\ln\frac{1}{x-d_{(n-1)/2}} - \frac{n-1}{2}\right) - g(b)\right)dx$$

$$\le \frac{2}{b-c_n}\int_{c_n}^b \left(\ln\ln\frac{1}{x-d_{(n-1)/2}} - \ln\ln\frac{1}{b-d_{(n-1)/2}}\right)dx$$

$$\le \frac{4}{\ln(e+1/(b-a))}.$$

შემთხვევა 3. აღნიშნული შემთხვევა მარტივად მიიღება (2.7)-დან. საბოლოოდ (2.9)-(2.16) შეფასებებიდან და (2.7)-დან მივიღებთ (2.8)-ს.

ახლა ავაგოთ ექსპონენტა $p(x)$ ისეთი, რომ $1/p(\cdot) \in BLO^{1/\log}$, მაგრამ არ სრულდება G'' თვისება.

ავიღოთ ნამდვილი რიცხვები a და b ისეთები, რომ $0 < a < b < 1,\ a + b < 1.$ განვიხილოთ შემდეგი A და B სიმრავლეები:

$$A = \{x : g(x) \le a\}, \quad B = \{x : g(x) \ge b\}.$$

ცხადია, რომ ეს სიმრავლეები წარმოადგენენ თანაუკვეთი ინტერვალების გაერთიანებას. აღვნიშნოთ ეს ინტერვალები შესაბამისად Δ_n^a და Δ_n^b სიმბოლოებით.

$$A = \bigcup_{n\ge1} \Delta_n^a\ ,\ B = \bigcup_{n\ge1} \Delta_n^b\,.$$

ახლა ავაგოთ $p(x)$ ექსპონენტა შემდეგი სახით

$$p(x) = \begin{cases} 1/a, & x \in A; \\ 1/b, & x \in B; \\ 1/g(x), & x \in [0,1]/(A \cup B). \end{cases}$$

ცხადია, რომ $p(\cdot)$ უწყვეტია გარდა 0 წერტილსა და $1/p(\cdot) \in BLO^{1/\log}$. განვიხილოთ A სიმრავლის წარმოდგენაში მონაწილე ინტერვალების მარჯვენა ბოლოებისგან შემდგარი

სიმრავლე. მოვახდინოთ $[0,1]$ ინტერვალის დანაწილება ამ წერტილებით. მივიღებთ Δ_n თანაუკვეთ ინტერვალთა მიმდევრობას ისეთს, რომ $\Delta_n^a \cup \Delta_n^b \subset \Delta_n$.

ვთქვათ $\delta_k = \min\left\{\left|\Delta_k^a\right|, \left|\Delta_k^b\right|\right\}$. რადგან $\delta_k \le \min\left\{\left|\Delta_n^a\right|, \left|\Delta_n^b\right|\right\}$ ყოველი $n \le k$ -თვის, ამიტომ ყოველი n, როცა $n \le k$ შეგვიძლია ავარჩიოთ $\Delta_n^{a'} \subset \Delta_n^a$ და $\Delta_n^{b'} \subset \Delta_n^b$ ინტერვალები ისეთი, რომ $\delta_k = \left|\Delta_n^{a'}\right| = \left|\Delta_n^{b'}\right|$.

ყოველი k-თვის ავაგოთ ფუნქცია f_k და g_k შემდეგნაირად:

$$f_k(x) = \chi_{\bigcup_{n\le k}\Delta_n^{a'}}(x) \qquad \text{და} \qquad g_k(x) = \chi_{\bigcup_{n\le k}\Delta_n^{b'}}(x).$$

შევამოწმოთ G თვისება (იხ. (0.5) უტოლობა) $L^{p(\cdot)}[0,1]$ სივრცისათვის

$$\sum_{n=1}^{k}\left\| f_k \chi_{\Delta_n}\right\|_{L^{1/a}} \cdot \left\| g_k \chi_{\Delta_n}\right\|_{L^{1/b}} = \sum_{n=1}^{k}\left\| \chi_{\Delta_n^{a'}}\right\|_{L^{1/a}} \cdot \left\| \chi_{\Delta_n^{b'}}\right\|_{L^{1/b}}$$

$$= \sum_{n=1}^{k}\left|\Delta_n^{a'}\right|^{a} \cdot \left|\Delta_n^{b'}\right|^{b} = k \cdot \delta_k^{a+b}.$$

მეორეს მხრივ

$$\| f_k \|_{L^{1/a}} \cdot \| g_k \|_{L^{1/b}} = \left(\sum_{n=1}^{k}\left|\Delta_n^{a'}\right|\right)^{a} \cdot \left(\sum_{n=1}^{k}\left|\Delta_n^{b'}\right|\right)^{b} = \left(k \cdot \delta_k\right)^{a+b}.$$

თუ $L^{p(\cdot)}[0,1]$ სივრცეში სრულდება G თვისება, მაშინ C აბსოლუტური მუდმივისთვის გვექნება

$$k \cdot \delta_k^{a+b} \le C \cdot \left(k \cdot \delta_k\right)^{a+b},$$

საიდანაც

$$k^{1-a-b} \le C.$$

ბოლო შეფასებას შეუძლებელია ადგილი ჰქონდეს, რადგან $a+b<1$ და

$$k^{1-a-b} \to +\infty,\ k \to +\infty.$$

თეორემა 0.1-დან, (0.3) და (0.5) შეფასებებიდან დავასკვნით, რომ $L^{p(\cdot)}[0,1]$ სივრცეს არ გააჩნია G"თვისება.

შევნიშნოთ, რომ $1/\left(p(\cdot)+c\right) \in BL'/C$ ყოველი $c>0$ -თვის. მაშასადამე $L^{p(\cdot)+c}[0,1]$ სივრცეს არ გააჩნია G"თვისება.

თეორემა 2.2.3-ის მეორე ნაწილის დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ თეორემა 2.2.6 და თეორემა 2.1.3-დან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $L^{(p(\cdot)+c)}[0,1]$ სივრცეს გააჩნია G"

თვისება რომელიღაცა $c > 0$ მუდმივი რიცხვისთვის. ცხადია, რომ $L^{(p(\cdot)+c)}[0,1]$ სივრცეს არ გააჩნია G' თვისება (რადგან $L^{(p(\cdot)+c)}[0,1]$ სივრცეს არ გააჩნია G'' თვისება).

III თავი

საუკეთესო მიახლოების ოპერატორის შესახებ ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში

3.1. აუცილებელი აღნიშვნები, განმარტებები და ძირითადი თეორემები

ვთქვათ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ რაიმე შემოსაზღვრული ზომადი სიმრავლეა და Π^m არის $\mathbb{R}^n$ -ზე განსაზღვრული ყველა იმ ალგებრული პოლინომების სივრცე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება m-ს. $Q \in \Pi^m$ პოლინომს ეწოდება $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $1 < p_- < p_+ < \infty$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების პოლინომი, თუ

$$\int_\Omega \left| f(x) - Q(x) \right|^{p(x)} dx = \inf_{S \in \Pi^m} \int_\Omega \left| f(x) - S(x) \right|^{p(x)} dx. \tag{3.1}$$

$f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ფუნქციისთვის $E(f)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ყველა ისეთი $Q \in \prod^m$ პოლინომების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (3.1)-ს.

კარგადაა ცნობილია, რომ როცა $p(\cdot) = \text{const}$, $1 < p < \infty$ (იხ. [16], [35]) და $L^{p(\cdot)}([0,1])$, $1 < p_- < p_+ < \infty$, სივრცის შემთხვევაში (იხ. [36]) $Q \in \Pi^m$ არის საუკეთესო მიახლოების პოლინომი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $S \in \Pi^m$ პოლინომისთვის სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$\int_\Omega p(x) \left| f(x) - Q(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q(x)) S(x) dx = 0. \tag{3.2}$$

ასეთი Q პოლინომი ყოველთვის არსებობს და ამასთან ერთადერთია. განვსაზღვროთ ოპერატორი $T : L^{p(\cdot)}(\Omega) \to \Pi^m$, $T(f) = Q$. შემდგომში აღნიშნულ ოპერატორს საუკეთესო მიახლოების ოპერატორს ვუწოდებთ. შევნიშნოთ, რომ როცა $1 < p_- < p_+ < \infty$, (3.2) ტოლობის მარცხენა მხარე განსაზღვრულია მაშინაც კი, როცა $f \in L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$. ბუნებრივად დაისმის კითხვა: ყოველი ფიქსირებული $f \in L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$ ფუნქციისთვის არსებობს თუ არა $Q \in \Pi^m$ პოლინომი ისეთი, რომ (3.2) სამართლიანია ყოველი $S \in \Pi^m$ პოლინომისთვის?

ვთქვათ $p(\cdot)$ =const. ქუენიამ [17]-ში აჩვენა, რომ ყოველი $f \in L^{p-1}(\Omega)$ $\left(1 < p < \infty\right)$ ფუნქციისთვის არსებობს $Q \in \Pi^m$ პოლინომი, რომელიც აკმაყოფილებს (3.2)-ს. ამ პოლინომს ვუწოდებთ $f \in L^{p-1}(\Omega)$ $\left(1 < p < \infty\right)$ ფუნქციის m-ური რიგის პოლინომიურ აპროქსიმანტს. ქუენიამ ასევე აჩვენა, რომ აღნიშნული პოლინომიური აპროქსიმანტი არის ერთადერთი. შემდგომში $\overline{T}(f)$ -ით აღვნიშნოთ (3.2) განტოლების ამონახსნი $f \in L^{p-1}(\Omega)$ $\left(1 < p < \infty\right)$ ფუნქციისთვის. $\overline{T} : L^{p-1} \to \Pi^m$ ოპერატორი არის უწყვეტი და შესაბამისად წარმოადგენს T ოპერატორის ერთადერთ გაგრძელებას, რომელიც ინარჩუნებს უწყვეტობის თვისებას (შევნიშნოთ, რომ $L^p(\Omega) \subset L^{p-1}(\Omega)$. იმ შემთხვევაში, როცა $p - 1 < 1$ ვგულისხმობთ შესაბამის სივრცეში მეტრიკით კრებადობას).

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ საუკეთესო მიახლოების პოლინომიალური ოპერატორის გაგრძელების საკითხს $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრციდან $L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$ სივრცეში, როცა $1 < p\_ \le p_+ < \infty$. სახელდობრ, დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემებს:

თეორემა 3.1.1. ყოველი $f \in L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$ ($1 < p\_ < p_+ < \infty$) ფუნქციისთვის, არსებობს ერთადერთი პოლინომიური აპროქსიმანტი.

თეორემა 3.1.2. ვთქვათ $h_n, h \in L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$ $\left(1 < p\_ < p_+ < \infty\right)$ ფუნქციები ისეთია, რომ

$$\int_\Omega p(x) \,|\, h_n(x) - h(x) \,|^{p(x)-1}\, dx \to 0, \text{ როცა } n \to \infty,$$

მაშინ $\overline{T}(h_n) \to \overline{T}(h)$, როცა $n \to \infty$.

3.2 საუკეთესო მიახლოების პოლინომის არსებობა $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცეში

ქვემოთ ჩვენ დავატმკიცებთ $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცეში საუკეთესო მიახლოების, პოლინომის არსებობის შესახებ დებულებას ზოგადად ნებისმიერი ზომადი, შემოსაზღვრული Ω სიმრავლისათვის. იმ შემთხვევაში, როცა $\Omega = [0,1]$ აღნიშნული საკითხი გამოკვლეული იყო შარაპუდინოვის მიერ [36].

თეორემა 3.2.1. ვთქვათ $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ $(1 \le p_- \le p_+ < \infty)$, მაშინ არსებობს $Q \in \Pi^m$ პოლინომი ისეთი, რომ

$$\int_\Omega \left| f(x) - Q(x) \right|^{p(x)} dx = \inf_{S \in \Pi^m} \int_\Omega \left| f(x) - S(x) \right|^{p(x)} dx.$$

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ $I = \inf_{S \in \Pi^m} \int_\Omega \left| f(x) - S(x) \right|^{p(x)} dx$, მაშინ არსებობს $\left\{ S_n \,|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \Pi^m$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $\int_\Omega \left| f(x) - S_n(x) \right|^{p(x)} dx \to I,\ n \to \infty.$ რადგან $|\,t\,|^{p(x)}$ ფუნქცია ყოველი ფიქსირებული x-თვის t-ს მიმართ ამოზნექილია, ამიტომ გვექნება

$$\int_\Omega |\, S_n(x)/2 \,|^{p(x)}\, dx \le \int_\Omega (|\, S_n(x)/2 - f(x)/2 \,| + |\, f(x)/2 \,|)^{p(x)} dx \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int_\Omega |\, S_n(x) - f(x) \,|^{p(x)}\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\, f(x) \,|^{p(x)} dx.$$

ამ უკანასკნელი შეფასებიდან გვექნება, რომ $\left\| S_n \right\|_{p(\cdot)} \le C_1(f)$ (სადაც $C_1(f)$ არის f ფუნქციაზე დამოკიდებული მუდმივი). რადგან Π^m არის სასრულგანზომილებიანი სივრცე, მასზე განსაზღვრული ყოველი ნორმა არის ექვივალენტური, შესაბამისად გვაქვს $\|\, S_n \,\|_\infty \le C_2(f)$, სადაც $\|\, S_n \,\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |\, S_n(x) \,|$. ამ უკანასკნელი ფაქტის გამოყენებით

დავასკვნით, რომ არსებობს ქვემიმდევრობა $\left\{S_{n_k} \mid k\in\mathbb{N}\right\}$, რომელიც თანაბრად კრებადია $Q\in\Pi^m$ პოლინომისკენ, საიდანაც მივიღებთ

$$I=\lim_{k\to+\infty}\int_{\Omega}|f(x)-S_{n_k}(x)|^{p(x)}dx=\int_{\Omega}|f(x)-Q(x)|^{p(x)}dx.$$

თეორემა 3.2.1 დამტკიცებულია.

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს საუკეთესო მიახლოების პოლინომის არსებობის აუცილებელ და საკმარის პირობას $L^{p(\cdot)}(\Omega), 1<p_{-}<p_{+}<\infty$ სივრცეში.

თეორემა 3.2.2. ვთქვათ $f\in L^{p(\cdot)}(\Omega),\ 1<p_{-}\le p_{+}<\infty$. მაშინ $Q\in\Pi^m$ პოლინომი ეკუთვნის $E(f)$ სიმრავლეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $S\in\Pi^m$ პოლინომისთვის სამართლიანია ტოლობა

$$\int_{\Omega}p(x)\left|f(x)-Q(x)\right|^{p(x)-1}sign(f(x)-Q(x))S(x)dx=0. \tag{3.3}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ აუცილებლობა. ვთქვათ $Q\in E(f)$ და ნებისმიერი $S\in\Pi^m$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_S(t)=\int_{\Omega}|f(x)-Q(x)+tS(x)|^{p(x)}dx,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია 0 წერილში.

თუ ყოველი ფიქსირებული x-თვის გამოვიყენებთ ლაგრანჟის თეორემას და უტოლობას $(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p)$ მივიღებთ

$$\left|\frac{|f(x)-Q(x)+tS(x)|^{p(x)}-|f(x)-Q(x)|^{p(x)}}{t}\right|=$$

$$=\frac{|t|\,p(x)|f(x)-Q(x)+\xi S(x)|^{p(x)-1}|sign(f(x)-Q(x)+\xi S(x))S(x)|}{|t|}\le$$

$$\le C_0|S(x)|(|f(x)-Q(x)|^{p(x)-1}+|S(x)|^{p(x)-1}).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|S(x)|(|f(x)-Q(x)|^{p(x)-1}+|S(x)|^{p(x)-1})$ არის ინტეგრებადი ფუნქცია მივიღებთ

$$F'_S(0)=\int_{\Omega}p(x)|f(x)-Q(x)|^{p(x)-1}sign(f(x)-Q(x))S(x)dx.$$

რადგან $F_S(0)=\min_{t\in R}F_S(t)$, გვექნება $F'_S(0)=0$. ამით აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ საკმარისობა. შევნიშნოთ, რომ $F_S(t)$ არის t-ს მიმართ ამოზნექილი ფუნქცია. მართლაც $a,b>0$, $a+b=1$ რიცხვებისთვის გვექნება

$$\mathrm{F}_S(at_1+bt_2)=\int_\Omega |\, f(x)-Q(x)+(at_1+bt_2)S(x)\,|^{p(x)}\, dx=$$

$$=\int_\Omega |\,(a+b)(f(x)-Q(x))+at_1S(x)+bt_2S(x)\,|^{p(x)}\, dx=$$

$$=\int_\Omega |\, a(f(x)-Q(x)+t_1S(x))+b(f(x)-Q(x)+t_2S(x)\,|^{p(x)}\, dx\le$$

$$\le\int_\Omega (a\,|\, f(x)-Q(x)+t_1S(x)\,|^{p(x)}+b\,|\, f(x)-Q(x)+t_2S(x)\,|^{p(x)})dx=$$

$$=a\int_\Omega |\, f(x)-Q(x)+t_1S(x)\,|^{p(x)}\, dx+b\int_\Omega |\, f(x)-Q(x)+t_2S(x)\,|^{p(x)}dx=$$

$$=a\,\mathrm{F}_S(t_1)+b\,\mathrm{F}_S(t_2).$$

შესაბამისად (3.3) ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $\mathrm{F}'_S(0)=0$. თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $\mathrm{F}'_S(0)=0$ და F_S არის ამოზნექილი ფუნქცია, გვექნება

$$\mathrm{F}_S(0)=\min_{t\in[0,\infty)}\mathrm{F}_S(t)\,.$$

მაშასადამე Q არის საუკეთესო მიახლების პოლინომი. თეორემა 3.2.2 დამტკიცებულია.

თეორემა 3.2.3. ვთქვათ $f\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, ($1<p_-<p_+<\infty$) და $Q\in\Pi^m$ პოლინომი ეკუთვნის $E(f)$ სიმრავლეს. მაშინ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\int_\Omega |Q(x)|^{p(x)-1}|S(x)|dx\le C\int_\Omega |f(x)|^{p(x)-1}|S(x)|dx, \tag{3.4}$$

ყოველი $S\in\Pi^m$ პოლინომისთვის, რომელსაც აქვს თვისება: S-ს (ან $-S$-ს) და Q-ს აქვთ ერთი და იგივე ნიშანი ყოველი $t\in\Omega$ წერტილში, სადაც $Q(t)S(t)\neq 0$.

დამტკიცება. დავუშვათ $S\in\Pi^m$ ისეთია, რომ $Q(t)S(t)>0$, როცა $Q(t)S(t)\neq 0$. ვთქვათ $A=\{x\in\Omega\,|\, f(x)>Q(x)\},\ B=\Omega\setminus A$ და $H(x)=|\, f(x)-Q(x)\,|^{p(x)-1}S(x).$ (3.3)-ის ძალით გვექნება

$$\int_A p(x)H(x)dx=\int_B p(x)H(x)dx.$$

ვთქვათ $A_1=A\cap\{x\in\Omega\,|\,Q(x)\ge 0\},\ A_2=A\setminus A_1,\ B_1=B\cap\{x\in\Omega\,|\,Q(x)\ge 0\},\ B_2=B\setminus B_1$. გვექნება ტოლობები

$$\int_{A_1\cup A_2} p(x)H(x)dx=\int_{B_1\cup B_2} p(x)H(x)dx,$$

$$\int_{A_1} p(x)H(x)dx + \int_{A_2} p(x)H(x)dx = \int_{B_1} p(x)H(x)dx + \int_{B_2} p(x)H(x)dx,$$

$$\int_{A_1} p(x)H(x)dx - \int_{B_2} p(x)H(x)dx = \int_{B_1} p(x)H(x)dx - \int_{A_2} p(x)H(x)dx. \qquad (3.5)$$

თუ ყოველი ფიქსირებული x-თვის

$$\int_{\Omega} p(x)\,|\,Q(x)\,|^{p(x)-1}\,|\,S(x)\,|\,dx = \int_{\Omega} p(x)\,|\,Q(x) - f(x) + f(x)\,|^{p(x)-1}\,|\,S(x)\,|\,dx \qquad (3.6)$$

ტოლობის მაჯვენა მხარეში გამოვიყენებთ $(a+b)^{p-1} \le 2^{p-2}(a^{p-1} + b^{p-1})$ უტოლობას, როცა $p-1 \ge 1$ და $(a+b)^{p-1} \le a^{p-1} + b^{p-1}$ უტოლობას, როცა $0 < p-1 < 1$ და გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $1 < p_- \le p_+ < +\infty$, დავასკვნით

$$\int_{\Omega} p(x)\,|\,Q(x) - f(x) + f(x)\,|^{p(x)-1}\,|\,S(x)\,|\,dx \le$$

$$\le C\left(\int_{\Omega} |\,Q(x) - f(x)\,|^{p(x)-1}\,|\,S(x)\,|\,dx + \int_{\Omega} |\,f(x)\,|^{p(x)-1}\,|\,S(x)\,|\,dx \right) =$$

$$= C\left(\sum_{i=1}^{2} \int_{A_i} |\,H(x)\,|dx + \sum_{i=1}^{2} \int_{B_i} |\,H(x)\,|dx + \int_{\Omega} |\,f(x)\,|^{p(x)-1}\,|\,S(x)\,|\,dx \right). \qquad (3.7)$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი $x \in A_1 \cup B_2$ გვაქვს $|\,Q(x) - f(x)\,| \le |\,f(x)\,|$ უტოლობა, ამიტომ მივიღებთ

$$\int_{A_1 \cup B_2} |H(x)|\,dx \le \int_{A_1 \cup B_2} |\,f(x)\,|^{p(x)-1}\,|S(x)|\,dx. \qquad (3.8)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ყოველი $x \in A_2$ -თვის $Q(x) < 0$ (3.5), (3.8)-დან და $S(x) \cdot Q(x) \ge 0$ უტოლობიდან მივიღებთ

$$\int_{A_2} |\,H(x)\,|\,dx + \int_{B_1} |\,H(x)\,|\,dx = \int_{A_2} (-H(x))dx + \int_{B_1} H(x)dx =$$

$$= \int_{A_1} H(x)dx - \int_{B_2} H(x)dx = \int_{A_1} |\,H(x)\,|\,dx + \int_{B_2} |\,H(x)\,|\,dx \le$$

$$\le \int_{A_1 \cup B_2} |\,f(x)\,|^{p(x)-1}\,|\,S(x)\,|\,dx.$$

(3.6), (3.7) და (3.8)-დან და ბოლო შეფასებიდან მივიღებთ (3.4)-ს.

იმ შემთხვევაში, როცა ყოველი x-თვის $Q(x)S(x) \le 0$, შეფასებები მიიღება ანალოგიური გზით. თეორემა 3.2.3 დამტკიცებულია.

შედეგი 3.2.4. ვთქვათ $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $(1 < p_- \le p_+ < \infty)$. თუ $Q \in E(f)$, მაშინ

$$\int_{\Omega} |Q(x)|^{p(x)}\, dx \le C \,\| Q \|_{\infty} \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)-1}\, dx.$$

დამტკიცება. თუ თეორემა 3.2.3-ში ვიგულისხმებთ, რომ $Q = S$, მივიღებთ სასურველ შედეგს.

3.3. საუკეთესო მიახლოების ოპერატორის გაგრძელების და ერთადერთობის შესახებ $L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$ სივრცეში

განმარტება 3.3.1. ვთქვათ $1 < p_- \le p_+ < \infty$ და $f \in L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$. ვიტყვით რომ $Q \in \Pi^m$ არის საუკეთესო პოლინომიური აპროქსიმანტი, თუ სრულდება (3.2).

თეორემა 3.3.2. ვთქვათ $f \in L^{p(x)-1}(\Omega)$ ($1 < p_- \le p_+ < \infty$), მაშინ არსებობს $Q \in \Pi^m$ პოლინომი ისეთი, რომ ნებისმიერი $S \in \Pi^m$ პოლინომისთვის სრულდება

$$\int_{\Omega} p(x) \left| f(x) - Q(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q(x)) S(x) dx = 0 \tag{3.9}$$

და

$$\int_{\Omega} |Q(x)|^{p(x)}\, dx \le C \,\| Q \|_{\infty} \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)-1}\, dx. \tag{3.10}$$

სანამ დავამტკიცებთ მოყვენილ თეორემას, დავამტკიცოთ დამხმარე დებულებები.

ლემა 3.3.3. ვთქვათ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ წარმოადგენს $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ $\left(1 < p_- \le p_+ < \infty\right)$ სივრცის ელემენტთა მიმდევრობას, რომლისთვისაც არსებობს $C_0 > 0$ მუდმივი, ისეთი რომ ყოველი $n \in \mathbb{N}$-თვის

$$\int_{\Omega} | f_n(x)|^{p(x)-1}\, dx \le C_0,$$

მაშინ $\{\| Q \|_{\infty} : Q \in E(f_n), n \in \mathbb{N}\}$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. შედეგი 3.2.4-ის ძალით გვაქვს

$$\int_{\Omega} |Q(x)|^{p(x)}\, dx \le C \,\| Q \|_{\infty} \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)-1}\, dx \le C \cdot C_0 \,\| Q \|_{\infty}, \tag{3.11}$$

მეორე მხრივ, რადგან Π^m არის სასრულგანზომილებიანი სივრცე, $\|\cdot\|_{\infty}$ და $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ ნორმები არიან ექვივალენტურები. (3.11)-დან მივიღებთ

$$\int_{\Omega} |Q(x)|^{p(x)}\, dx \le C_1 \,\| Q \|_{p(\cdot)}.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $C_1\|Q\|_{p(\cdot)}\ge 1$. სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$1\ge\int_\Omega\left|\frac{Q(x)}{(C_1\|Q\|_{p(\cdot)})^{1/p(x)}}\right|^{p(x)}dx\ge\int_\Omega\left|\frac{Q(x)}{(C_1\|Q\|_{p(\cdot)})^{1/p_-}}\right|^{p(x)}dx,$$

შესაბამისად $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცეში ნორმის განმარტების ძალით მივიღებთ

$$\|Q\|_{p(\cdot)}\le(C_1\|Q\|_{p(\cdot)})^{1/p_-}.$$

მაშასადამე $\{\|Q\|_\infty : Q\in E(f_n), n\in N\}$ სიმრავლე შემოსაზღვრულია. თუ კიდევ ერთხელ გამოვიყენებთ $\|\cdot\|_\infty$ და $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ ნორმების ექვივალენტობას Π^m სივრცეზე, დავასკვნით, რომ ლემა 3.3.3 დამტკიცებულია.

ლემა 3.3.4. ვთქვათ f_n, f ფუნქციები $L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$ სივრციდან ისეთია, რომ

$$\int_\Omega|f_n(x)-f(x)|^{p(x)-1}dx\to 0 \tag{3.12}$$

ასევე, ვთქვათ g_n, g ზომადი ფუნქციებია ისეთი, რომ რაიმე C_0 მუდმივისთვის $|g_n(x)|\le C_0$, $x\in\Omega$, ყოველი n-თვის და $g_n\to g$ თითქმის ყველგან, როცა $n\to\infty$. მაშინ არსებობს n_k ქვემიმდევრობა, ისეთი, რომ

$$\int_\Omega|f_{n_k}(x)|^{p(x)-1}g_{n_k}(x)dx\to\int_\Omega|f(x)|^{p(x)-1}g(x)dx,\ \text{როცა}\ k\to\infty.$$

დამტკიცება. ყოველი ზომადი $E\subset\Omega$ სიმრავლისთვის გვაქვს

$$\int_E|f_n(x)|^{p(x)-1}dx=\int_E|f_n(x)-f(x)+f(x)|^{p(x)-1}dx\le$$

$$\le C\left(\int_E|f_n(x)-f(x)|^{p(x)-1}dx+\int_E|f(x)|^{p(x)-1}dx\right).$$

ბოლო შეფასებისა და (3.12)-ის ძალით ყოველი $\varepsilon>0$-თვის მოიძებნება $\delta>0$ ისეთი, რომ ყოველი $E\subset\Omega$, $|E|<\delta$ სიმრავლისთვის და ყოველი $n\in\mathbb{N}$-თვის გვექნება

$$\int_E|f_n(x)|^{p(x)-1}dx<\varepsilon.$$

რადგან $|f_n(x)-f(x)|^{p(x)-1}$ კრებადია 0-კენ $L^1(\Omega)$ ნორმით, არსებობს ქვემიმდევრობა f_{n_k}, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადია f-კენ. ეგოროვის თეორემის თანახმად $\delta>0$

რიცხვისთვის მოიძებნება $E\subset\Omega$, $|E|<\delta$ სიმრავლე, ისეთი რომ მიმდევრობა $\{|f_{n_k}(x)|^{p(x)-1}g_{n_k}(x)\}$, თანაბრად კრებადია $\{|f(x)|^{p(x)-1}g(x)\}$-კენ $\Omega\setminus E$ სიმრავლეზე. გვაქვს

$$\int_\Omega |f_{n_k}(x)|^{p(x)-1}g_{n_k}(x)dx-\int_\Omega |f(x)|^{p(x)-1}g(x)dx=$$

$$=\int_{\Omega\setminus E}\Big(|f_{n_k}(x)|^{p(x)-1}g_{n_k}(x)-|f(x)|^{p(x)-1}g(x)\Big)dx+$$

$$+\int_E\Big(|f_{n_k}(x)|^{p(x)-1}g_{n_k}(x)-|f(x)|^{p(x)-1}g(x)\Big)dx.$$

ბოლო ტოლობიდან ადვილად დავასკვნით ლემის სამართლიანობას. ლემა 3.3.4 დამტკიცებულია.

თეორემა 3.3.2 -ის დამტკიცება. ვთქვათ $f\in L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$. განვიხილოთ მიმდევრობა

$$f_n=\min(\max(f,-n),n).$$

ცხადია, რომ $f_n\in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ყოველი $n\in\mathbb{N}$-თვის და თეორემა 3.2.1 და 3.2.2-ის ძალით არსებობს $Q_n\in\Pi^m$ ისეთი, რომ ყოველი $n\in\mathbb{N}$ და $S\in\Pi^m$-თვის სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$\int_\Omega p(x)|f_n(x)-Q_n(x)|^{p(x)-1}sign(f_n(x)-Q_n(x))S(x)dx=0.$$

ასევე შედეგი 3.2.4-ის თანახმად გვაქვს

$$\int_\Omega |Q_n(x)|^{p(x)}dx\le C\|Q_n\|_\infty\int_\Omega |f_n(x)|^{p(x)-1}dx.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n(x)-f(x)|^{p(x)-1}dx=0.$$

საბოლოოდ გვექნება, რომ არსებობს დადებითი რიცხვი $C_0>0$ ისეთი, რომ

$$\int_\Omega |f_n(x)|^{p(x)-1}dx\le C_0.$$

ლემა 3.3.3-ის ძალით დავასკვნით, რომ $\|Q_n\|_\infty$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია. მაშასადამე არსებობს Q_{n_k} პოლინომების ქვემიმდევრობა, რომელიც თანაბრად კრებადია Ω არეზე $Q\in\Pi^m$ პოლინომისაკენ. ლემა 3.3.4-ის გამოყენებით მივიღებთ (3.9) და (3.10)-ს.

თეორემა 3.1.1-ის დამტკიცება. ვთქვათ $f \in L^{p(\cdot)-1}(\Omega)$ $\left(1 < p_{-} \le p_{+} < \infty\right)$ და Q_1, Q_2 წარმოადგენენ საუკეთესო პოლინომიურ აპროქსიმანტებს. ვთქვათ $Q_1 \ne Q_2$. (3.9) ის ძალით, ყოველი $S \in \Pi^m$ -თვის გვექნება

$$\int_{\Omega} p(x) \left| f(x) - Q_1(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_1(x)) S(x) dx =$$

$$= \int_{\Omega} p(x) \left| f(x) - Q_2(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_2(x)) S(x) dx = 0.$$

განვიხილოთ $Q = Q_1 - Q_2$ პოლინომი და შემდეგი სიმრავლეები:

$$D = \left\{ x \in \Omega \,|\, Q_1(x) > Q_2(x) \right\},$$

$$F = \left\{ x \in \Omega \,|\, Q_1(x) < Q_2(x) \right\},$$

$$G = \left\{ x \in \Omega \,|\, Q_1(x) = Q_2(x) \right\},$$

თუ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ D სიმრავლეზე $Q(x) > 0$ და $f(x) - Q_1(x) < f(x) - Q_2(x)$, მაშინ $|z|^{p(x)-1} sign(z)$ -ის მონოტონურობიდან გვექნება

$$\left| f(x) - Q_1(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_1(x)) Q(x) <$$

$$< \left| f(x) - Q_2(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_2(x)) Q(x).$$

საიდნაც მივიღებთ

$$\int_{D} p(x) \left| f(x) - Q_1(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_1(x)) Q(x) dx <$$

$$< \int_{D} p(x) \left| f(x) - Q_2(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_2(x)) Q(x) dx. \tag{3.13}$$

ანალოგიურად F სიმრავლეზე $Q(x) < 0$ და $f(x) - Q_2(x) < f(x) - Q_1(x)$ და შესაბამისად

$$\left| f(x) - Q_1(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_1(x)) Q(x) <$$

$$< \left| f(x) - Q_2(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_2(x)) Q(x).$$

მაშასადამე

$$\int_{F} p(x) \left| f(x) - Q_1(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_1(x)) Q(x) dx <$$

$$< \int_{F} p(x) \left| f(x) - Q_2(x) \right|^{p(x)-1} sign(f(x) - Q_2(x)) Q(x) dx. \tag{3.14}$$

შევნიშნოთ, რომ $|G|=0$. (3.13) და (3.14)-ის ძალით მივიღებთ

$$0=\int_{\Omega} p(x)\left|f(x)-Q_1(x)\right|^{p(x)-1} sign(f(x)-Q_1(x))Q(x)dx<$$

$$=\int_{\Omega} p(x)\left|f(x)-Q_2(x)\right|^{p(x)-1} sign(f(x)-Q_2(x))Q(x)dx=0.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე $Q_1=Q_2$. თეოემა 3.1.1 დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ საუკეთესო პოლინომიური აპროქსიმანტის ოპერატორი $\overline{T}:L^{p(\cdot)-1}\to\Pi^m$ არის არაწრფივი. შემდეგში ვაჩვენებთ, რომ ეს ოპერატორი არის უწყვეტი.

თეორემა 3.1.2-ის დამტკიცება. განვიხილოთ $\{Q_n\}$ პოლინომთა მიმდევრობა, რომელიც ყოველი h_n ფუნქციისთვის წარმოადგენს $Q_n=\overline{T}(h_n)$ პოლინომიურ აპროქსიმანტების მიმდევრობას. როგორც ლემა 3.3.3-ის დამტკიცებისას, ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\{Q_n\}$ მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია. შესაბამისად შეგვიძლია გამოვყოთ $\{Q_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც თანაბრად კრებადი იქნება Q პოლინომისკენ. ასევე შესაძლებელია გამოვყოთ h_{n_k} ქვემიმდევრობა, რომელიც თითქმის ყველგან კრებადი იქნება h ფუნქციისკენ. რადგან $Q_{n_k}=\overline{T}(h_{n_k})$, ამიტომ ყოველი $S\in\Pi^m$-თვის თორემა 3.3.2-ის თანახმად გვექნება

$$\int_{\Omega} p(x)\left|h_{n_k}(x)-Q_{n_k}(x)\right|^{p(x)-1} sign(h_{n_k}(x)-Q_{n_k}(x))S(x)dx=0.$$

ლემა 3.3.4-ის ძალით გვექნება

$$\int_{\Omega} p(x)\left|h(x)-Q(x)\right|^{p(x)-1} sign(h(x)-Q(x))S(x)dx=0.$$

თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 3.1.1-ს , $Q=\overline{T}(h)$ და იმ ფაქტს, რომ $\{Q_n\}$ მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობის ზღვარი $L^{\infty}(\Omega)$-ს ნორმით არის Q, მივიღებთ დასამტკიცებელს. თეორემა 3.1.2 დამტკიცებულია.

თავი IV

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის დახასიათება ვეივლეტ ბაზისების საშუალებით

4.1 აუცილებელი აღნიშვნები, განმარტებები და ძირითადი თეორემები უპირობო ბაზისების არსებობისთვის ზოგად ფუნქციონალურ სივრცეებში

ვთქვათ $(X, \|.\|)$ რაიმე ბანახის სივრცეა. ხოლო $e_1 \dots, e_n \dots$ X სივრცის ელემენტთა რაიმე ერთობლიობაა. ვიტყვით რომ აღნიშნული სისტემა წარმოადგენს X სივრცის ბაზისს, თუ ამ სივრცის ნებისმიერი x ელემენტი ცალსახად წარმოიდგინება

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \dots$$

სახით. თუ აღნიშნული მწკრივი კრებადია წევრების ნებისმიერი გადანაცვლებისთვის, მაშინ ბაზისს ვუწოდებთ უპირობო ბაზისს.

ფუნქციონალური სივრცის სხვადასხვა თვისებების შესწავლისათვის მნიშვნელოვანია აგებული იქნას ამ სივრცის ბაზისები და უპირობო ბაზისები, რომლებსაც გარკვეული თვისებები ექნებათ. თუმცა ეს ამოცანა საკმაოდ რთულია. გავიხსენოთ, რომ არსებობს ბანახის სივრცეები, რომლებსაც არ გააჩნიათ ბაზისი. პირველად 1972 წელს ენფლოს მიერ აგებულ იქნა სივრცე, რომელსაც არ გააჩნია ბაზისი, მითუმეტეს უპირობო ბაზისი. შესაძლებელია სივრცეს გააჩნდეს ბაზისი და არ გააჩნდეს უპირობო ბაზისი, მაგალითად: $L^1[0,1]$, $C[0,1]$ სივრცეები.

ჩვენს ამოცანას წარმოადგენს ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეში უპირობო ბაზისების საკითხების გარკვევა.

განმარტება 4.1.1. $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ ფუნქციას ეწოდება მასშტაბის ფუნქცია, ხოლო $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ფუნქციას ვეივლეტ ფუნქცია თუ სისტემა

$$(\Phi, \Psi) = \{\varphi_m;\ m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{jk},\ j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\},$$

არის $L^2(\mathbb{R})$ სივრცის უპირობო ბაზისი, სადაც $\varphi_m(x) = \varphi(x-m)$ და $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$.

ქვემოთ სიმარტივისთვის ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi_m = \psi_{0,m}$, $m \in \mathbb{Z}$ და (Φ, Ψ) სიმრავლეს ასე ჩავწერთ

$$(\Phi, \Psi) = \{\psi_{jm},\ j \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{Z}\}.$$

ცნობილია, რომ არ არსებობს ისეთი კომპაქტურსაყრდენიანი ვეივლეტები, რომლებიც ეკუთვნიან C^∞ კლასს. თუმცა დობეშის მიერ აგებულ იქნა სასრული სიგლუვის კომპაქტურსაყრდენიანი ვეივლეტების სისტემა [37]. კერძოდ, სამართლიანი შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4.1.2. ([37]) არსებობს დადებითი რიცხვი $c>0$, ისეთი, რომ ყოველი $k=1,2,...$ ნატურალური რიცხვისთვის არსებობს მასშტაბის ფუნქცია φ და ვეივლეტ ფუნქცია ψ ისეთი, რომ

(i) $\varphi,\psi\in C^k(\mathbb{R})$,

(ii) φ და ψ არიან კომპაქტურსაყრდენიანი ფუნქციები და supp φ და supp ψ წარმოადგენენ $[-kc,\,kc]$ სეგმენტის ქვესიმრავლეებს.

ასეთ სისტემას ვუწოდებთ დობეშის სისტემას. აღნიშნული სისტემის გამოყენებით შესაძლებელია ფუნქციური სივრცეების (ლებეგის, ორლიჩის, H^p ჰარდის, ლიზორკინ-ტრიბელის ტიპის) სტრუქტურული დახასიათება.

ვთქვათ მოცემულია $\mathbb{R}$-ზე განსაზღვრული ლოკალურად ინტეგრებადი f ფუნქცია. ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქცია M განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$Mf(x)=\sup\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|dy,$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა x-ის შემცველ ინტერვალის მიმართ.

ვთქვათ მოცემულია $\mathbb{R}$-ზე ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია f. ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქციის ლოკალური ვარიანტი M^{loc} განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$M^{loc}f(x)=\sup_{x\in Q,|Q|\le 1}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|dy.$$

$B(\mathbb{R})$ -ით ($B^{loc}(\mathbb{R})$ -ით) აღვნიშნავთ ყველა ზომად $p:\mathbb{R}\to[1,\infty)$, $1<p_-\le p_+<\infty$ ფუნქციათა კლასს, რომლისთვისაც M ოპერატორი (M^{loc} ოპერატორი) შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$, სივრცეში.

კოპალიანისა [18] და იძუკის [19] მიერ მიღებულ იქნა $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის ვეივლეტ დახასიათება იმ შემთხვევაში, როცა $p(\cdot)\in B(\mathbb{R})$. ჩვენ გამოვიკვლიეთ იგივე საკითხი იმ შემთხვევაში, როცა $p(\cdot)\in B^{loc}(\mathbb{R})$.

დობეშის მასშტაბის φ ფუნქციისთვის და ვეივლეტ ψ ფუნქციისთვის განვსაზღროთ შემდეგი კვადრატული ფუნქცია:

$$W(f)(x)=\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^j\,|a_{j,k}\chi_{j,k}(x)|^2\right)^{1/2},\ \ f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}),$$

სადაც

$$a_{0k}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi_k(x)dx\,,\quad a_{jk}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\psi_{jk}(x)dx$$

და $\chi_{j,k}$ აღნიშნავს ორადული $Q_{jk}=\left(\frac{k}{2^j};\frac{k+1}{2^j}\right)$ ინტერვალების მახასიათებელ ფუნქციას.

შემდგომში $A_p^{loc}(\mathbb{R})$, $(1<p<\infty)$-ით აღვნიშნავთ $\mathbb{R}$-ზე განსაზღვრულ, არაუარყოფით, ლოკალურად ინტეგრებად ω ფუნქციათა კლასს, რომელთათვისაც სრულდება

$$A_p^{loc}(\omega)=\sup\frac{1}{|Q|^p}\int_Q\omega(x)dx\left(\int_Q\omega(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right)^{p-1}<\infty,$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა Q , $|Q|\le 1$ ინტერვალის მიმართ.

ვიტყვით, რომ $\omega\in A_\infty^{loc}(\mathbb{R})$, თუ ყოველი $0<\alpha<1$ -თვის

$$\sup_{|Q|\le 1}\left(\sup_{F\subset Q,|F|>\alpha|Q|}\frac{\int_Q\omega(x)dx}{\int_E\omega(x)dx}\right)<\infty.$$

წონათა აღნიშნული კლასები წარმოადგენენ კარგად ცნობილ მაკენჰაუპტის A_p წონების ლოკალურ ვარიანტს. ეს კლასები პირველად შემოღებულ იქნა რიჩკოვის [38] მიერ. შევნიშნოთ, რომ თუ $\omega\in A_\infty^{loc}(\mathbb{R})$, მაშინ $\omega\in A_p^{loc}(\mathbb{R})$ რომელიღაც $p<\infty$ -თვის. შესაბამისად $\omega\in A_\infty^{loc}(\mathbb{R})$ წონისთვის შეგვიძლია განვსაზღვროთ r_ω დადებითი რიცხვი (იხ. [38]) შემდეგი სახით

$$r_\omega:=\inf\{1\le p<\infty:\omega\in A_p^{loc}(\mathbb{R})\}.$$

ქვემოთ $\mathcal{F}$-ით ავღნიშნავთ არაუარყოფით, ზომად ფუნქციათა $(f,g)\in\mathcal{F}$ წყვილების რაიმე ოჯახს. ვთქვათ რომელიმე $p, 1<p<\infty$ და ყოველი $\omega\in A_p^{loc}$ წონისთვის სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^p\omega(x)dx\le C\int_{\mathbb{R}} g(x)^p\omega(x)dx, \tag{4.1}$$

ყოველი $(f,g)\in\mathcal{F}$ წყვილისთვის, სადაც C კონსტანტა დამოკიდებულია მხოლოდ p -ზე და $A_p^{loc}(\omega)$ მუდმივზე.

თეორემა 4.1.3. **([39])** ვთქვათ მოცემულია $\mathcal{F}$ ოჯახი. დავუშვათ სრულდება (4.1) უტოლობა რომელიღაც $1<p_0<\infty$ -თვის და ყოველი $\omega\in A_{p_0}^{loc}(\mathbb{R})$ -თვის. ვთქვათ $p(\cdot)$ ისეთია, რომ არსებობს $1<p_1<p_-$ ისეთი, რომ $(p(\cdot)/p_1)'\in B^{loc}(\mathbb{R})$ (სადაც p' არის p-ს შეუღლებული ექსპონენტა). მაშინ

$$\|f\|_{p(\cdot)}\le C\|g\|_{p(\cdot)}$$

ყოველი $(f,g)\in\mathcal{F}$ წყვილებისათვის , რომელთათვისაც $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$.

$S_e(\mathbb{R})$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ სიმრავლე ყველა იმ $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ ფუნქციებისა, რომლებისთვისაც

$$q_N(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}}e^{N|x|}\sum_{0\le k\le N}|f^{(k)}(x)|<\infty \text{ , ყოველი } N\in\mathbb{N}_0 \text{-თვის.}$$

$S_e(\mathbb{R})$ აღვჭურვოთ ლოკალურად ამოზნექილი ტოპოლოგიით, რომელიც განისაზღვრება q_N ნახევრნორმების საშუალებით. $S'_e(\mathbb{R})$ -ით აღვნიშნოთ $S_e(\mathbb{R})$ -ზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციონალების სიმრავლე. რიჩკოვის მიერ [38] განვსაზღვრული იყო ტრიბელ-ლიზორკინის სივრცეები ლოკალური მაკენჰაუპტის წონით.

განმარტება 4.1.4. ([38]) ვთქვათ $0<p<\infty$, $0<q<\infty$, $s\in\mathbb{R}$ და $\omega\in A_\infty^{loc}(\mathbb{R})$. ვთქვათ $\varphi_0\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi_0(x)dx\neq 0,$$

და

$$\int_{\mathbb{R}}x^k\varphi(x)dx=0,\quad 0\le k\le B,$$

სადაც $\varphi(x)=\varphi_0(x)-\frac{1}{2}\varphi_0(\frac{x}{2})$ და $B>[s]$ (სადაც[s] აღნიშნავს s რიცხვის მთელ ნაწილს). განვსაზღვროთ წონიანი ტრიბელ-ლიზორკინის სივრცე $F_{p,q}^{s,\omega}(\mathbb{R})$, როგორც $f\in S'_e(\mathbb{R})$ ფუნქციების სიმრავლე , რომლებისთვისაც

$$\left\|f\mid F_{p,q}^{s,\omega}(\mathbb{R})\right\|_{\varphi_0}=\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsq}\,|\varphi_j*f|^q\right)^{1/q}\mid L_p^\omega(\mathbb{R})\right\|<\infty,$$

სადაც $\varphi_j(x)=2^j\varphi(2^jx)$.

განმარტება 4.1.5. ([40]) ვთქვათ $0<p<\infty$, $0<q\le\infty$, $s\in\mathbb{R}$ და $\omega\in A_\infty^{loc}(\mathbb{R})$. $f_{p,q}^{s,\omega}(\mathbb{R})$ აღვნიშნოთ სიმრავლე ყველა ისეთი $\lambda=\{\lambda_{jm}\in R,\ j\in\mathbb{N}_0,\ m\in\mathbb{Z}\}$ მიმდევრობის, რომლისთვისაც

$$\left\|\lambda\mid f_{p,q}^{s,\omega}(\mathbb{R})\right\|=\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}}2^{jsq}\,|\lambda_{jk}\chi_{jm}|^q\right)^{1/q}\mid L_\omega^p(\mathbb{R})\right\|<\infty.$$

ყოველი $\omega\in A_\infty^{loc}(\mathbb{R})$ -თვის განვსაზღვროთ

$$\sigma_p(\omega)=\left(\frac{r_\omega}{\min(p,r_\omega)}-1\right)+(r_\omega-1),$$

$$\sigma_p=\frac{1}{\min(1,q)}-1,\quad \sigma_{pq}(\omega)=\max(\sigma_p(\omega),\sigma_q).$$

თეორემა 4.1.6. ([40]) ვთქვათ $0<p<\infty$, $0<q\le\infty$, $s\in\mathbb{R}$ და $\omega\in A_\infty^{loc}(\mathbb{R})$. ვთქვათ k სიგლუვის მქონე დობეშის ვეივლეტ $\{\Phi,\Psi\}$ სისტემისთვის სრულდება შემდეგი

$$k>\max(0,[s]+1,[r_\omega/p-1/p-s]+1,[\sigma_{pq}(\omega)-s]).$$

ვთქვათ $f\in S'_e(\mathbb{R})$. $f\in F_{p,q}^{s,\omega}(\mathbb{R})$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$f=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\lambda_{jm}2^{-j/2}\psi_{jm},$$

სადაც $\{\lambda_{jm}\}\in f_{p,q}^{s,\omega}$ და მწკრივი კრებადია $S'_e(\mathbb{R})$-ში. ამასთან ეს წარმოდგენა არის ერთადერთი, სადაც

$$\lambda_{om}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi(x-m)dx,\ m\in\mathbb{Z},\quad \lambda_{jm}=\int_{\mathbb{R}}f(x)\psi_{jm}dx,\ j\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{Z}$$

ამასთანავე

$$I:f\to\{2^{j/2}\lambda_{jm}\}$$

არის წრფივი და წარმოადგენს იზომორფიზმს $F_{p,q}^{s,\omega}(\mathbb{R})$ სივრციდან $f_{p,q}^{s,\omega}(\mathbb{R})$ სივრცეში.

4.2. თეორემა ვეივლეტ ბაზისების საშუალებით ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის დახასიათების შესახებ

ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 4.2.1. ვთქვათ $p(\cdot)\in B^{loc}(\mathbb{R})$ და $\{\Phi,\Psi\}$ წარმოადგენს φ დობეშის მაშტაბის ფუნქციისა და ψ ვეივლეტ ფუნქციის საშუალებით მიღებულ სისტემას $k\ge1$ სიგლუვით. მაშინ

(i) $\{\Phi,\Psi\}$ სისტემა არის უპირობო ბაზისი $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ სივრცეში;

(ii) არსებობს მუდმივები $c,C>0$ ისეთი, რომ ყოველი $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$-თვის სრულდება შემდეგი ორმაგი უტოლობა

$$c\|f\|_{p(\cdot)}\le\|W(f)\|_{p(\cdot)}\le C\|f\|_{p(\cdot)}\,. \tag{4.2}$$

დამტკიცება. ცნობილია, რომ [39] თუ $1<p<\infty$ და $\omega\in A_p^{loc}(\mathbb{R})$, მაშინ $L_p^\omega(\mathbb{R})=F_{p,2}^{0,\omega}(\mathbb{R})$. თეორემა 4.1.6-დან გამომდინარეობს, რომ თუ $1<p<\infty$, $\omega\in A_p^{loc}(\mathbb{R})$ და $k\ge\max\{1,p-1\}$, მაშინ დობეშის $\{\Phi,\Psi\}$ ვეივლეტ სისტემა, სიგლუვით k არის უპირობო ბაზისი $L_p^\omega(\mathbb{R})$

სივრცეში და მოიძებნება ისეთი დადებითი მუდმივები $c, C > 0$, რომ სამართლიანია შემდეგი ექვივალენტობა

$$c \| f \|_{L_p^\omega(\mathbb{R})} \leq \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j \, | a_{jk} \chi_{jk}(x) |^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p^\omega(\mathbb{R})} \leq C \| f \|_{L_p^\omega(\mathbb{R})} . \tag{4.3}$$

დავაფიქსიროთ $1 < p_0 < 2$. მაშინ $\max\{p_0 - 1$; და მაშასადამე, გვაქვს (4.3) $L_{p_0}^\omega(\mathbb{R})$, $\omega \in A_{p_0}$. თუ $p(\cdot) \in B^{loc}(\mathbb{R})$, მაშინ არსებობს $1 < p_1 < p_-$ ისეთი, რომ $(p(\cdot)/p_1)' \in B^{loc}(\mathbb{R})$ ([41]). თუ გავითვალისწინებთ ამ ფაქტს და გამოვიყენებთ თეორემა 4.1.3-ს $(W f, |\,)$ და $(|f|, Wf)$ წყვილებისთვის როცა $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ მივიღებთ (4.2) უტოლობებს. შევნიშნოთ, რომ $C_0^\infty(R)$ არის ყველგან სიმკვრივე $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ სივრცეში. ელემენტარული ზღვრული გადასვლებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ (4.2) უტოლობის სამართლიანობა ნებისმიერი $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ ფუნქციისთვის.

ბოლოს დავამტკიცოთ, რომ $\{\Phi, \Psi$ სისემა არის უპირობო ბაზისი $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ -ში. ვთქვათ $\Lambda_n \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ არის სასრულ სიმრავლეთა ზრდადი მიმდევრობა, ისეთი რომ $\Lambda_n \uparrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$. რადგან

$$\left(\sum_{(j,k) \in \Lambda_n}^{\infty} 2^j \, | a_{j,k} \chi_{jk}(x) |^2 \right)^{1/2} \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}),$$

ამიტომ მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან. ასე, რომ

$$\left(\sum_{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \setminus \Lambda_n} 2^j \, | a_{j,k} \chi_{jk}(x) |^2 \right)^{1/2} \to 0 \text{ თითქმის ყველგან , როცა } n \to \infty.$$

(4.2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left\| f - \sum_{(j,k) \in \Lambda_n}^{\infty} a_{j,k} \psi_{jk} \right\|_{p(\cdot)} \leq C \left\| \left(\sum_{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \setminus \Lambda_n} 2^j \, | a_{j,k} \chi_{jk}(x) |^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)} .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Diening, L., Harjulechto, P., Hästö, P. and Růžička, M., Heidelberg, Springer, vol. 2017 of Lecture Notes in Mathematics. 2011,

[2] Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis, Fiorenza, A., Cruz-Uribe, D., Basel, Springer, 2013.

[3] Interpolation of operators, Bennett, C., Sharpley, R., New York, Pure and Appl. Math.129, Academic Press, 1988.

[4] Classical Banach spaces I and II, Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg - New York, 1977 and 1979.

[5] Kopaliani, T., On some structural properties of Banach function spaces and boundedness of certain integral operators, Czechoslovak Math. J., 2004, 54 (129) (3): 791–805.

[6] Bereznhoi, E. I., Sharp estimates for operators on cones in ideal spaces (in Russian), Trudy Math. Inst. Steklov., 1993, 204, 3-36.

[7] Vector lattices and integral operatos, Bukhvalov, A. V., Korotkov, V. B., Kusraev, A. G., Kutateladze S.S. and Makarov, B. M., Novosibirsk, Nauka, 1992.

[8] Kopaliani, T., A characterization of some weighted norm inequalities for maximal operators, Journal for Analysis and its applications, 2010, V.29, 401-412.

[9] Kapanadze, E. and Kopaliani, T., On the Volterra-type integral operators in Banach function spaces, Indian J. Math., 2008, 50 (2), 257-270.

[10] Berezhnoi, E. I., Two–weighted estimations for the Hardy–Littlewood maximal function in ideal Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc, 1999, 127: 79–87.

[11] Embeddings and Generalised Trigonometric Functions, Lang, J., Edmunds, D., Eigenvalues, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2011.

[12] Hardy operators, function spaces and embeddings,Springer Monographs in Mathematics, Edmunds, D.E. and Evans, W.D., Berlin-Heidelberg-New York,Springer-Verlag, 2004.

[13] Spectral theory and differential operators, Oxford Mathematical Monographs, Edmunds, D.E. and Evans, W.D., Oxford, Oxford University Press, 1987.

[14] Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion, Lifshits, M.A. and Linde,W., Mem. Amer. Math. Soc. 157, no. 745, 2002.

[15] Kopaliani, T., Zviadadze, Sh., Hardy-Littlewood maximal operator and BLO^{1/log} class of exponents, Georgian Mathematical Journal, 2016, 23 (3), 393-398.

[16] Exact constants in approximation theory, N. korneichuk, Cambridge ueniversity press, 2005.

[17] Cuenya, H., Extension of the operator of best polynomial approximation in $L^p(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl., 2011, 376, 565-575.

[18] Kopaliani, T.S., Greediness of the wavelet system in $L^{p(\cdot)}(R)$ spaces, East J. Approx., 2008, 14, no. 1, 59–67.

[19] Idzuki, M., Wavelets and modular inequalities in variable $L^{p(\cdot)}$ spaces, Georgian Math. J., 2008, 15(2), 281-293.

[20] Edmunds, D.E., Gurka, P., Pick, L., Compactness of Hardy-type integral operators in weighted Banach function spaces, Studia Math., 1994, 109, 73–90.

[21] Edmunds, D.E., Evans, W.D., Harris, D.J., Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators, Studia Math., 1997, 124, 59–80.

[22] Lomakina, E., Stepanov, V., On the Hardy-type integral operators in Banach function spaces, Publ. Mat., 1998, 42, 165–194.

[23] Evans, W.D., Harris, D.J., Lang, J., The approximation numbers of Hardy-type operators on trees, Proc. Lond. Math. Soc., 2001, (3) 83, 390–418.

[24] Edmunds, D.E., Kerman, R., Lang, J., Remainder estimates for the approximation numbers of weighted Hardy operators acting on L^2, J. Anal. Math., 2001, 85, 225–243.

[25] Lang, J., Improved estimates for the approximation numbers of the Hardy-type operators, J. Approx. Theory, 2003, 121, 61–70.

[26] Bounded and compact integral operators, Edmunds, D. E., Kokilashvili, V., Meskhi, A., Dordrecht, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, 2002, 543.

[27] Measure of non-compactness for integral operators in weighted lebesgue space, Meskhi, A., New York, Nova Science Publishers, Inc. 2009.

[28] Oniani, G. G., On the non-compactness of maximal operators, Real Anal. Exchange 28, 2001/03, No. 2, 439-446.

[29] Oniani, G. G., On non-compact operators in weighted ideal and symmetric function spaces, Georgian Math. J., 2006, 13, No. 3, 501–514.

[30] Edmunds, D.E., Lang, J., Nekvinda, A., Some s-numbers of an integral operator of Hardy type on $L^{p(.)}$ spaces, J. Funct. Anal., 2009, 257 (1), 219–242.

[31] Korenovski, A., Mean Oscillations and Equimeasurable Rearrangements of Functions, Springer, 2007.

[32] Lerner, A., Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L^p spaces, Math.Z., 2005, (251), 509–521.

[33] Kapanadze, E., Kopaliani, T., A note on maximal operator on $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ spaces, Georgian Math. J., 2008, 16, no. 2, 307–316.

[34] Diening, L., Maximal function on Orlicz-Musielak spaces and generalized Lebesgue spaces, Bull. Sci. Math., 2005, (129), 657–700.

[35] Best Approximations in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces, Singer, I., Berlin, Springer, 1970, 304.

[36] Sharapudinov, I. I.,Topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$, Math. Notes, 1979, 26, 3–4, 796–806.

[37] Ten Lectures on Wavelets, Daubechies, I., Philadelphia, SIAM, 1992, 532.

[38] Rychkov, V. S., Littlewood-Paley Theory and function spaces with A_p^{loc} weights, Math. Nach., 2001, 224, 145-180.

[39] Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia, Series: Operator Theory Advances and Applications, Cruz-Uribe, D., SFO, J., Martell, M. and Perez, C., Birkhauser, 2011, 456.

[40] Wojciechowska, A., A remark on wavelet bases in weighted L_p spaces, Journal of function spaces and aplications, 2012, 2012.

[41] Gogatishvili, A., Danelia, A., Kopaliani, T., Local Hardy-Littlewood maximal operatorvariable Lebesgue spaces, Banach Journal of Mathematical Analysis, 2014, 8, no.2, 229-244.

სადისერტაციო ნაშრომის შინაარსი გადმოცემული შემდეგ სტატიებში

1. Kopaliani, T., Samashvili, N., Zviadadze, Sh., Extension of the best polynomial approximation operator in variable exponent Lebesgue space, Ann. Funct. Anal. 7, 2016, no. 2, 303-313.

2. Kopaliani, T., Samashvili, N., Zviadadze, Sh., On the upper and lower estimates of norms in variable exponent spaces. Mathematical Inequalities & Applications, Volume 19, Number 1, 2016, 85–100.

3. Edmunds, D., Govatishvili, A., Kopaliani, T., Samashvili, N., Some s-numbers of an integral operator of Hardy type in Banach function spaces, Journal of Approximation Theory, 2016, 76-97

4. Samashvili, N., The wavelet characterization of variable exponent Lebesgue space, Bull. TICMI v. 19, #2, 2015, 3-9.