ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ირაკლი ჩიტაია

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ძლიერი დაყვანადობების სტრუქტურული თვისებები

სადოქტორო დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

თსუ-ს პროფესორი **როლანდ ომანაძე**

ფილოსოფიის დოქტორი, სიენას (იტალია)

უნივერსიტეტის პროფესორი **ანდრეა სორბი**

თბილისი

2017

აბსტრაქტი

ნაშრომში გამოკვლეულია და დადგენილია ძლიერი დაყვანადობების ზოგიერთი სტრუქტურული თვისება და მიღებულია რიგი საინტერესო და მნიშვნელოვანი შედეგებისა. კერძოდ, პირველ თავში, რომელიც ეძღვნება იმუნურობის თვისებების კვლევას ძლიერი დაყვანადობების ტერმინებში, გაცემულია პასუხი [30]-ში დასმულ კითხვაზე და დამტკიცებულია, რომ ჰიპერჰიპერიმუნური s-ხარისხები არ არიან მემკვიდრეობით ზევით გაგრძელებადი. ამავე თავში მოცემულია ჰიპერიმუნური და ჰიპერჰიპერიმუნური სიმრავლეების დახასიათებები s-დაყვანადობის ტერმინებში. მეორე თავში, რომელიც ეთმობა Q_1-დაყვანადობის სტრუქტურული თვისებების კვლევას ნაჩვენებია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხები არ არის მკვრივად დალაგებული. აგრეთვე განხილულია მარტივ სიმრავლეთა კლასები და დადგენილია მათი კავშირები Q_1-დაყვანადობასთან. მესამე თავში განიხილება მაქსიმალური სიმრავლეების და მათი ზოგიერთი ქვესიმრავლის Q_1-ხარისხი და ნაჩვენებია მათი კავშირი 1-დაყვანადობასთან. მეოთხე თავი კი ეძღვნება c_1-დაყვანადობის სტრუქტურული თვისებების კვლევას და მიღებულია მეორე თავში Q_1-დაყვანადობისთვის მოცემული ზოგიერთი შედეგის ანალოგი c_1-დაყვანადობისთვის. გარდა, ამისა ნაჩვენებია, რომ ჰემიმაქსიმალური სიმრავლეს გააჩნია მინიმალური c_1-ხარისხი.

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Irakli Chitaia

Faculty of Exact and Natural Sciences

Department of Mathematics

Structural Properties of Strong Reducibilities

Thesis submitted for the degree of PhD in Mathematics

Scientific advisers:

Roland Omanadze - Professor of Mathematics,

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Andrea Sorbi - Professor of Mathematical Logic,

University of Siena (Italy)

Tbilisi

2017

Abstract

This work studies structural properties of some of the strong reducibilities and shows some interesting and important results. Namely, the first chapter,which is dedicated to study of immunity properties in terms of strong reduciblities, answers the question raised in [30] and it is proved that hyperhyperimmune s–degrees are not upwards closed. In the same chapter given are characterizations of hyperimmune and hyperhyperimmune sets in terms of s–reducibility. The second chapter, which covers study of structural properties of Q_1–reducibility, shows that the computably enumerable Q_1–degrees are not densely ordered. In addition to this, classes of simple sets are considered and their relations to Q_1–reducibilitiy are discovered. The third chapter covers Q_1–degrees of maximal sets and some of their subsets, and explains their relations to 1-reducibility. The fourth chapter explores structural properties of c_1–reducibility and gives results for c_1–reducibility, which are analogous to some results for Q_1–reducibility from chapter 2. Furthermore, it is shown that a hemimaximal set has a minimal c_1–degree.

შინაარსი

შესავალი

ნაშრომში განხილული თემატიკა ეკუთვნის გამოთვლადობის (რეკურსიის) თეორიას, რომელიც მათემატიკური ლოგიკის ერთ-ერთ მთავარ მიმართულებას წარმოადგენს. დიდი ხანია, რაც გამოთვლადობის თეორიის კვლევის ძირითადი საგანი ნატურალურ რიცხვებზე ფუნქციებისა და სიმრავლეების შესწავლაა, რომლებიც უშუალოდ უკავშირდება ალგორითმის ცნებას. ამ ბოლო ხანს ინტერესი გამძაფრდა მათემატიკური სტრუქტურების ეფექტური ვარიანტების მიმართ, რამაც რიგი კითხვებისა წარმოშვა ალგებრაში, ანალიზსა და ტოპოლოგიაში. ხშირ შემთხვევაში, კლასიკურ გამთვლადობის თეორიაში არსებული მეთოდები ეფექტური მათემატიკის ძირეულ პრობლემებს სცემს პასუხს და პირიქით. მათემატიკური სტრუქტურების ეფექტური ვარიანტების ანალიზი და შესწავლა, გვაძლევს საშუალებას ჩავწვდეთ გამოთვლისა და გამოთვლადობის სხვა მნიშვნელოვანი კონცეფციების შინაარსს. გამოთვლადობის თეორიის ერთ-ერთ ყველაზე მთავარ მიმართულებას კი წარმოადგენს დაყვანადობის თეორია, რომელიც სწავლობს ალგორითმული დაყვანადობების სხვადასხვა სახეობას. დაყვანადობის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ტიპს წარმოადგენს კვაზი ტიპის დაყვანადობები (Q-, s-, c-, m-) რომლებიც რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეებზე წარმოადგენენ ტიურინგის დაყვანადობის შეზღუდული ვარიანტებს. კვაზი ტიპის დაყვანადობებს შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს Q-დაყვანადობას (და მის დუალურ s-დაყვანადობას). Q-დაყვანადობის ცნება არის ძალიან ბუნებრივი და მნიშვნელოვანი ალგორითმების თეორიისთვის; მისი დახმარებით მიიღება რიგი საინტერესო და მნიშვნელოვანი შედეგებისა. მაგალითად, მარჩენკოვმა (იხ. [18]) Q-დაყვანადობის დახმარებით გადაწყვიტა პოსტის ცნობილი პრობლემა. Q-დაყვანადობას აქვს ძალიან მნიშვნელოვანი გამოყენება ალგორითმების თეორიის სხვადასხვა დარგში, მაგალითად სიტყვათა პრობლემისა და გამოთვლადობის სირთულეების შესწავლისას. Q-დაყვანადობის მიმართება სიტყვათა პრობლემასთან ნათლად ჩანს დობრიცას თეორემაში (იხ. [9]) რომელიც ამბობს, რომ ნატურალურ რიცხვთა ყოველი A სიმრავლისთვის არსებობს სიტყვათა პრობლემა, რომელსაც აქვს იგივე Q-ხარისხი, რაც აქვს A-ს. ბლამმა და მარქუსმა (იხ. [3]) შემოიტანეს სუბკრეატიული და ეფექტურად აჩქარებადი სიმრავლეების ცნებები და აჩვენეს, რომ სიმრავლე არის სუბკრეატიული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არის ეფექტურად აჩქარებადი. ჯილმა და მორისმა (იხ. [12]) მოგვცეს მარტივი დახასიათება ეფექტურად აჩქარებადი სიმრავლეებისა Q-დაყვანადობის ტერმინებში. მათ დაამტკიცეს, რომ სიმრავლე არის ეფექტურად აჩქარებადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ის არის Q-სრული. აქ მოყვანილი შედეგებიდან ჩანს, რომ Q-დაყვანადობა არის ერთ-ერთი დამაკავშირებელი ხიდი, რომელიც აერთებს ალგორითმების დესკრიფციულ და მეტრიკულ თეორიებს.

Q-დაყვანადობის გამოკვლევისას მიღებულია რამდენიმე მნიშვნელოვანი შედეგი. კერძოდ, დამტკიცებულია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი Q-ხარისხებისა და რეკურსიულად ადათვლადი T-ხარისხების ზედა ნახევარმესერების ელემენტარული თეორიები არიან ერთმანეთისაგან განსხვავებულები (იხ. [23]). ნაჩვენებია, რომ რ.გ. Q-ხარისხების ზედა ნახევარმესერი მკვრივადაა დალაგებული (იხ. [10]). ცოტა ხნის წინ ბატირშინმა [2] დაამტკიცა, რომ არსებობს რეკურსიულად გადათვლადი Q-ხარისხი, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ერთ m-ხარისხს. ამავე დროს, დღეისთვის გადაუჭრელია ბევრი აქტუალური და მნიშვნელოვანი ამოცანა.

Q-დაყვანადობის ცნებაზე სხვადასხვა ბუნებრივი მოთხოვნის დამატებით მიიღება ძლიერი Q-დაყვანადობის (ძლიერი კვაზი-დაყვანადობის) სხვადასხვა ცნება. კერძოდ, Q_1-, Q_k-, Q_{k1}-, c_1-

დაყვანადობა. მოცემული ძლიერი კვაზი-დაყვანადობების ზოგიერთი საინტერესო და მნიშვნელოვანი შედეგი მიღებულია სხვადასხვა ავტორთა მიერ. კერძოდ, $r \in \{Q, c\}$-სთვის ნაჩვენებია, რომ რ.გ. სიმრავლე არის r-სრული მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ის არის r_1-სრული (იხ. [12] და [22]).

ნაშრომში განხილული ნებისმიერი r-დაყვანადობისთვის იმ ფაქტს, რომ A სიმრავლე r-დაყვანადია B-ზე ჩავწერთ შემდეგნაირად: $A \leq_r B$. ჩვენს მიერ განხილული დაყვანადობის მიმართებები აკმაყოფილებენ რეფლექსურობისა და ტრანზიტულობის თვისებებს, ანუ ყოველი A სიმრავლისთვის $A \leq_r A$ და $[A \leq_r B \,\&\, B \leq_r C] \;\Rightarrow\; A \leq_r C$ ყოველი A, B და C-სთვის. თუ $A \leq_r B$ და $B \leq_r A$ მაშინ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე r-ექვივალენტურია B-სი და ჩავწერთ: $A \equiv_r B$ (რეფლექსურობისა და ტრანზიტულობის გამო ცხადია, რომ $\equiv_r$ არის ექვივალენტობის მიმართება). დაყვანადობის r-მიმართება კი გვაძლევს ნაწილობრივ დალაგებას $\equiv_r$-ის ექვივალენტობის კლასების და ამ კლასებს ვუწოდებთ ამოუხსნადობის ხარისხებს r-დაყვანადობის მიმართ.

დისერტაცია შედგება ოთხი თავისგან და მასში გადმოცემული შედეგების ძირითადი ნაწილი გამოქვეყნებულია [4], [5], [27] და [28] შრომებში.

ნაშრომის პირველ თავი ეძღვნება იმუნურობის თვისებების კვლევას ძლიერი დაყვანადობების ტერმინებში და მიღებულია რიგი საინტერესო შედეგებისა. კერძოდ, შესწავლილია Q-დაყვანადობის ერთ-ერთი შეზღუდული ვარიანტი -Q_k-დაყვანადობა. ნაჩვენებია, რომ Q_k-სრული სიმრავლე Q_k-დაყვანადია რაიმე A სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის Q_{k1}-დაყვანადია იმავე A სიმრავლეზე. ამ შედეგის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ ჰიპერჰიპერიმუნური s-ხარისხები არ არიან მემკვიდრეობით ზევით გაგრძელებადი, რაც იძლევა პასუხს ომანაძის და სორბის (იხ. [30]) კითხვაზე. გარდა ამისა მოცემულია ჰიპერიმუნური და ჰიპერჰიპერიმუნური სიმრავლეების დახასიათებები s-დაყვანადობის ტერმინებში.

მეორე თავში შესწავლილია Q_1-დაყვანადობის სტრუქტურულ თვისებები. კერძოდ ნაჩვენებია, რომ ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლის Q-ხარისხი შეიცავს $\leq_{Q_1}$-ის მიმართ მთელ რიცხვთა ტიპით წრფივად დალაგებული Q_1-ხარისხების უსასრულო ერთობლიობას, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეებს. კარგადაა ცნობილი (იხ. [10]) თეორემა, რომ რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა Q-ხარისხები დალაგებულია მკვრივად. ამის საპირწონედ ჩვენს მიერ ნაჩვენებია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხები არ არის მკვრივად დალაგებული. გარდა ამისა დამტკიცებულია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხები არ ქმნიან ზედა ნახევარმესერს.

მესამე თავში განიხილება მაქსიმალური სიმრავლეების და მათი ზოგიერთი ქვესიმრავლის Q_1-ხარისხი და ნაჩვენებია მათი კავშირი 1-დაყვანადობასთან. უნდა აღინიშნოს, რომ მაქსიმალური სიმრავლის ცნებას განსაკუთრებული ადგილი უკავია რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა თეორიაში. მაქსიმალური სიმრავლეების კვლევის შედეგად მიღებულია ბევრი საინტერესო და მნიშვნელოვანი თეორემა. მაგალითისათვის საკმარისია მოვიყვანოთ სოარის (იხ. [34]) ცნობილი შედეგი იმის შესახებ, რომ ნებისმიერი ორი მაქსიმალური სიმრავლისთვის არსებობს რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა მესერის ისეთი ავტომორფიზმი, რომელსაც ერთი გადაჰყავს მეორეში.

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით მაქსიმალური სიმრავლის თვისებებს Q_1-დაყვანადობის მიმართ. ნაჩვენები იქნება, რომ თუ ორი მაქსიმალური სიმრავლე Q_1-ექვივალენტურია, მაშინ მათგან ერთ-ერთი მეორეზე 1-დაყვანადია. დამტკიცებულია, რომ ჰემიმაქსიმალური სიმრავლის Q_1-ხარისხი შეიცავს ერთადერთ რეკურსიულად გადათვლად 1-ხარისხს. გამოკვლეულია მაქსიმალური სიმრავლეების არატრივიალური გახლეჩვები და ნაჩვენებია, რომ თუ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო M_1^0, M_1^1 და M_2^0, M_2^1 კი წარმოადგენენ, შესაბამისად, M_1 და M_2 სიმრავლეების არატრივიალურ გახლეჩვებს და $M_1^0 \equiv_{Q_1} M_2^0$, მაშინ (i) $M_1^1 \equiv_1 M_2^1$, $M_1^1 \equiv_1 M_2^1$, $M_1 \equiv_m M_2$ და (ii) $M_1 \leq_1 M_2$ ან $M_2 \leq_1 M_1$. შესწავლილია მაქსიმალური სიმრავლის მაჟორული ქვესიმრავლის თვისებები და ნაჩვენებია, რომ თუ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო A და B არის შესაბამისად M_1 და M_2-ის მაჟორული ქვესიმრავლეები და $M_1 \backslash A \equiv_{Q_1} M_2 \backslash B$, მაშინ $M_1 \backslash A \equiv_m M_2 \backslash B$, $A \equiv_m B$ და $M_1 \equiv_m M_2$.

მეოთხე თავში შესწავლილია c_1-ხარისხების სტრუქტურული თვისებები და ნაჩვენებია, რომ ჰიპერმარტივი სიმრავლის c-ხარისხი შეიცავს $\leq_{c_1}$-ის მიმართ მთელ რიცხვთა ტიპით წრფივად დალაგებულ c_1-ხარისხების უსასრულო ერთობლიობას, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ჰიპერმარტივ სიმრავლეებს. დამტკიცებულია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი c_1-ხარისხები არაა მკვრივად დალაგებული. აგრეთვე ნაჩვენებია, რომ არსებობს მინიმალური c_1-ხარისხი.

ჩვენს მიერ გამოყენებული ყველა ცნება და აღნიშვნა არის სტანდარტული და შეგიძლიათ იპოვოთ [6], [21], [32] და [34]-ში.

თავი 1. იმუნურობის თვისებები და ძლიერი დაყვანადობები

ამ თავში შესწავლილია Q-დაყვანადობის ერთ-ერთი შეზღუდული ვარიანტი - Q_k-დაყვანადობა. ნაჩვენებია, რომ Q_k-სრული სიმრავლე Q_k-დაყვანადია რაიმე A სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ის Q_{k1}-დაყვანადია იმავე A სიმრავლეზე. ამ შედეგის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ ჰიპერჰიპერიმუნური s-ხარისხები არ არიან მემკვიდრეობით ზევით გაგრძელებადი, რაც იძლევა პასუხს ომანაძის და სორბის (იხ. [30]) კითხვაზე. გარდა ამისა მოცემულია ჰიპერმარტივი და ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეების დახასიათება s-დაყვანადობის ტერმინებში.

§1.1. კავშირი Q-დაყვანადობასა და s-დაყვანადობას შორის

Q-დაყვანადობის ცნება არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეებზე განსაზღვრა ტენენბაუმმა [32] შემდეგი სახით:

A სიმრავლე Q-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_Q B$) თუ არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი $x \in \omega$-სთვის (სადაც ω აღნიშნავს არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეს, $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$)

$$x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B,$$

(ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე Q-დაყვანადია B სიმრავლეზე f ფუნქციით).

თუ $A \leq_Q B$ ისეთი გამოთვლადი f ფუნქციით, რომ ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის,

$$x \neq y \ \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset,$$

მაშინ ვამბობთ, რომ A სიმრავლე Q_1-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{Q_1} B$).

რეკურსიულად გადათვლად A სიმრავლეს ეწოდება Q-სრული (შესაბამისად, Q_1-სრული), თუ ნებისმიერი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე Q-დაყვანადია (შესაბამისად, Q_1-დაყვანადია) A სიმრავლეზე.

ჯილმა და მორისმა [12] აჩვენეს, რომ ეს ორი ცნება არის ერთმანეთის ექვივალენტური, ე.ი. რეკურსიულად გადათვლადი A სიმრავლე Q-სრულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის Q_1-სრული.

თუ $A \leq_Q B$ ისეთი გამოთვლადი f ფუნქციით, რომ ყოველი $x \in \omega$-სთვის, $W_{f(x)}$-სასრულია, მაშინ ვამბობთ, რომ A სიმრავლე Q_k-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{Q_k} B$).

სოლოვიევმა [35] დაამტკიცა, რომ თუ A და B რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებია, მაშინ $A \leq_Q B$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $A \leq_{Q_k} B$.

თუ $A \leq_{Q_k} B$ გამოთვლადი f ფუნქციით და ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის,

$$x \neq y \ \Rightarrow \ W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset,$$

მაშინ ვამბობთ, რომ A სიმრავლე Q_{k1}-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{Q_{k1}} B$).

დაყვანადობა, ცნობილი როგორც s-დაყვანადობა, არის შეზღუდული ვერსია e-დაყვანადობის.

ვიტყვით, რომ A სიმრავლე e-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_e B$), თუ არსებობს ისეთი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე W, რომ $A = \Phi^B$, სადაც

$$\Phi^B = \{x : (\exists u)(\langle x, u\rangle \in W \ \& \ D_u \subseteq A)\}$$

და D_u არის სასრული სიმრავლე კანონიკური ინდექსით u. თუ დამატებით, რეკურსიულად გადათვლადი W სიმრავლე ისეთია, რომ

$$(\forall u)(\forall x)(\langle x, u\rangle \in W \ \Rightarrow |\, D_u \,| \leq 1)$$

(სადაც $|\, X \,|$ სიმბოლო აღნიშნავს X სიმრავლის სიმძლავრეს), მაშინ ვამბობთ, რომ A სიმრავლე s-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_s B$).

შემდეგი ლემა, რომელიც ამყარებს კავშირს Q-დაყვანადობასა და s-დაყვანადობას შორის, ეკუთვნის ჯილს და მორისს.

ლემა 1.1.1 (იხ. [12]) თუ $B \neq \omega$, მაშინ $A \leq_Q B$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\bar{A} \leq_s \bar{B}$.

დამტკიცება. ვთქვათ $B \neq \omega$ და $A \leq_Q B$ გამოთვლადი f ფუნქციით.

განვსაზღვროთ

$$\Gamma = \{\langle x, \{y\}\rangle : \ y \in W_{f(x)}\}.$$

მაშინ Γ არის s-ოპერატორი და ცხადია, რომ $\bar{A} = \Gamma^{\bar{B}}$.

მეორე მხრივ, თუ $\bar{A} \leq_s \bar{B}$ რაღაც s-ოპერატორი Γ-თი, მაშინ ავიღოთ რაიმე $b \in \bar{B}$ და განვსაზღვროთ გამოთვლადი f ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$W_{f(x)} = \begin{cases} \{y : \ \langle x, \{y\}\rangle \in \Gamma\}, & \text{თუ } \ \langle x, \emptyset\rangle \notin \Gamma, \\ \{y : \ \langle x, \{y\}\rangle \in \Gamma\} \cup \{b\}, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში;} \end{cases}$$

მაშინ $A \leq_Q B$ გამოთვლადი f ფუნქციით.

■

შედეგი 1.1.2 თუ $B \neq \emptyset$, მაშინ $A \leq_s B$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს გამოთვლადი f ფუნქცია ისეთი, რომ

$$(\forall x)(x \in A \ \Leftrightarrow \ W_{f(x)} \cap B \neq \emptyset).$$

დამტკიცება. პირდაპირ მიიღება ლემა 1.1.1-დან.

■

ლემა 1.1.1-ის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია მოვიყვანოთ $\bar{s}$, s_1 და $\overline{s_1}$ დაყვანადობების განმარტებები Q-დაყვანადობის ტერმინებში.

თუ არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის,

1. $x \in A \;\Leftrightarrow\; W_{f(x)} \cap B \neq \emptyset$;
2. $x \neq y \;\Rightarrow\; W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$,

მაშინ ვამბობთ, რომ A არის s_1-დაყვანადი B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{s_1} B$).

თუ დამატებით, ყოველი $x \in \omega$-სთვის, სრულდება შემდეგი პირობა

3. $W_{f(x)}$-სასრულია,

მაშინ ვამბობთ, რომ A არის $\overline{s_1}$-დაყვანადი B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{\overline{s_1}} B$).

თუ სრულდება 1. და 3. პირობები, მაშინ ვამბობთ, რომ A არის $\bar{s}$-დაყვანადი B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{\bar{s}} B$).

ლემა 1.1.3 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი სიმრავლეა. მაშინ $K \leq_{Q_k} A$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი $x \in \omega$-სთვის:

1. $W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; W_{f(x)} \subseteq A$;
2. $W_{f(x)}$-სასრულია.

დამტკიცება. ვინაიდან ნებისმიერი კრეატიული C სიმრავლე რეკურსიულად იზომორფულია $\{x : x \in W_x\}$ სიმრავლის და შესაბამისად $C \equiv_Q \{x : x \in W_x\}$, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $K = \{x : x \in W_x\}$.

ვთქვათ $K \leq_{Q_k} A$ გამოთვლადი g ფუნქციით.

განვიხილოთ სიმრავლე

$$W_{h(x)} = \{y : W_{g(y)} \cap W_x \neq \emptyset\}$$

მაშინ ყოველი $x \in \omega$-სთვის,

$$W_{gh(x)} \cap W_x \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad h(x) \in W_{h(x)}.$$

მეორე მხრივ, K სიმრავლის განსაზღვრით და იმ ფაქტით, რომ g არის K სიმრავლის A სიმრავლეზე Q_k-დამყვანი ფუნქცია, გვექნება:

$$h(x) \in K \quad \Leftrightarrow \quad W_{gh(x)} \subseteq A.$$

ვთქვათ $f = g \circ h$, მაშინ ყოველი $x \in \omega$-სთვის გვექნება, რომ

$$W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad W_{f(x)} \subseteq A.$$

და $W_{f(x)}$-სასრულია.

ახლა პირიქით, ვთქვათ არსებობს ისეთი გამოთვლადი f ფუნქცია, რომ ყოველი $x \in \omega$-სთვის

$$W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad W_{f(x)} \subseteq A.$$

და $W_{f(x)}$-სასრულია.

შევნიშნოთ,რომ $W_{f(x)} \neq \emptyset$, ყოველი $x \in \omega$-სთვის, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში $W_{f(x)} \subseteq A$ და $W_{f(x)} \cap W_x = \emptyset$, რაც არ შეიძლება.

ვთქვათ α არის ისეთი გამოთვლადი ფუნქცია, რომ

$$W_{\alpha(x)} = \begin{cases} \omega, & \text{თუ} \quad x \in K, \\ \emptyset, & \text{თუ} \quad x \in \overline{K}, \end{cases}$$

მაშინ ყოველი $x \in \omega$-სთვის:

$$x \in K \quad \Leftrightarrow \quad W_{f\alpha(x)} \subseteq A.$$

ე.ი. $K \leq_{Q_k} A$ გამოთვლადი $f \circ \alpha$ ფუნქციით.

■

შედეგი 1.1.4 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი სიმრავლეა. მაშინ $K \leq_{Q_{k1}} A$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის:

1. $W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset \;\; \Leftrightarrow \;\; W_{f(x)} \subseteq A$;
2. $x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$;
3. $W_{f(x)}$-სასრულია.

დამტკიცება. მარჯვნიდან-მაცხნივ იმპლიკაცია ცხადია. იმისთვის, რომ ვაჩვენოთ მარცხნიდან-მარჯვნივ იმპლიკაცია შევნიშნოთ, რომ წინა ლემის მტკიცებაში მოყვანილი h ფუნქცია $s - m - n$ თეორემის [34] ძალით შეიძლება ავიღოთ ცალსახა.

■

ლემა 1.1.1, ლემა 1.1.3 და შედეგი 1.1.4-ის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგ ორ შედეგს:

შედეგი 1.1.5 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი სიმრავლეა. მაშინ $\overline{K} \leq_{\bar{s}} A$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის:

1. $W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset \iff W_{f(x)} \subseteq \bar{A}$;
2. $W_{f(x)}$-სასრულია.

დამტკიცება. ცხადია.

■

შედეგი 1.1.6 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი სიმრავლეა. მაშინ $\overline{K} \leq_{\overline{s_1}} A$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის:

1. $W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset \iff W_{f(x)} \subseteq \bar{A}$;
2. $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$;
3. $W_{f(x)}$-სასრულია.

დამტკიცება. ცხადია.

■

§1.2. კავშირი Q_k-დაყვანადობასა და Q_{k1}-დაყვანადობას შორის

როგორც წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ რეკურსიულად გადათვლადი A სიმრავლე Q-სრულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის Q_1-სრული. შევნიშნოთ, რომ ანალოგიური დებულება სამართლიანია Q_k- და Q_{k1}-დაყვანადობებისთვისაც და ის წარმოადგენს შემდეგი თეორემის უშუალო შედეგს.

თეორემა 1.2.1 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი სიმრავლეა. მაშინ

$$K \leq_{Q_k} A \iff K \leq_{Q_{k1}} A$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $K \leq_{Q_k} A$. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია ρ, რომელიც აკმაყოფილებს შედეგი 1.1.4-ში მოცემულ სამივე პირობას და მაშინ ამით ნაჩვენები იქნება, რომ $K \leq_{Q_{k1}} A$.

ლემა 1.1.3-ის ძალით, ვთქვათ f არის გამოთვლადი ფუნქცია, რომელიც ყოველი $x \in \omega$-სთვის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

3. $W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset \iff W_{f(x)} \subseteq A$;
4. $W_{f(x)}$-სასრულია.

ვთქვათ,

$$B = \cup_x \{W_{f(x)} : W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset\}.$$

შევნიშნოთ, რომ B რეკურსიულად გადათვლადია, ვინაიდან $B = \cup_{x \in I} W_{f(x)}$, სადაც

$$I = \{x : W_{f(x)} \cap W_x \neq \emptyset\}.$$

$s-m-n$ თეორემის ძალით არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია τ ისეთი, რომ ყოველი i და n-სთვის

$$W_{\tau(i,n)} = \begin{cases} W_i - \{a_0, \dots, a_{n-1}\}, & \text{თუ } |W_i \cap B| \geq n; \\ \emptyset, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში;} \end{cases}$$

სადაც, $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ არის $W_i \cap B$ სიმრავლის გადათვლაში პირველი n ელემენტი.

ინდუქციურად განვსაზღვროთ f_1, λ და γ გამოთვლადი ფუნქციების მნიშვნელობები შემდეგნაირად:

$$W_{\lambda(n)} = \cup_{i<n} W_{f_1(i)};$$

$$W_{\gamma(n)} = W_{\lambda(n)} \cup W_n;$$

$$W_{f_1(n)} = \begin{cases} W_{f(\gamma(n))} \cup \left(\cup \{W_{f(\tau(\gamma(n),j))} : j \leq |W_{\lambda(n)} \cap B|\}\right), & \text{თუ } W_n \neq \emptyset; \\ \bigcup \{W_{f(\tau(\gamma(n),j))} : j \leq |W_{\lambda(n)} \cap B|\}, & \text{თუ } W_n = \emptyset. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი n-სთვის, $W_{\lambda(n)}$-სასრულია, ვინაიდან $W_{f_1(i)}$ არის სასრული ყოველი i-სთვის. მაშასადამე, ყოველი n-სთვის, $W_{\lambda(n)} \cap B$-სასრულია.

ლემა 1.2.2 თუ $k < n$, მაშინ

$$W_{f_1(k)} \cap \left(\cup \{W_{f(\tau(\gamma(n),j))}: j \leq \mid W_{\lambda(n)} \cap B \mid\}\right) \cap \bar{A} = \emptyset.$$

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ არსებობს $k < n$, ისეთი, რომ ლემა 1.2.2-ის მოთხოვნა არ სრულდება. მაშინ არსებობს $j \leq \mid W_{\lambda(n)} \cap B \mid$ ისეთი, რომ

$$W_{f_1(k)} \cap W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \cap \bar{A} \neq \emptyset.$$

B სიმრავლის განსაზღვრიდან გვაქვს, რომ $B \subseteq A$, ანუ $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ და მაშინ

$$W_{f_1(k)} \cap W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \cap \bar{B} \neq \emptyset.$$

აქიდან მივიღებთ, რომ

$$W_{f_1(k)} \cap \bar{B} \subseteq W_{\tau(\gamma(n),j)}.$$

იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ ამ უკანასკნელის სამართლიანობაში, უპირველეს ყოვლისა, შევნიშნოთ, რომ γ ფუნქციის განსაზღვრის ძალით $W_{\lambda(n)} \subseteq W_{\gamma(n)}$. აქიდან გამომდინარე $\mid W_{\gamma(n)} \cap B \mid \geq j$, ხოლო τ-ს განსაზღვრის თანახმად კი,

$$W_{\tau(\gamma(n),j)} = W_{\gamma(n)} - \{a_0, \dots, a_{j-1}\}.$$

ახლა, თუ $z \in W_{f_1(k)} \cap \bar{B}$, მაგრამ $z \notin W_{\tau(\gamma(n),j)}$, მაშინ გამოდის, რომ $z \in \{a_0, \dots, a_{j-1}\} \subseteq B$, რაც წინააღმდეგობაა.

ე.ი.

$$W_{f_1(k)} \cap \bar{A} \subseteq W_{\tau(\gamma(n),j)},$$

საიდანაც

$$W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \cap W_{\tau(\gamma(n),j)} \neq \emptyset.$$

მაშინ f ფუნქციის პირველი თვისებიდან ვღებულობთ, რომ $W_{\tau(\gamma(n),j)} \subseteq A$, რაც წინააღმდეგობაა.

■

ლემა 1.2.3 თუ $k \neq n$, მაშინ

$$W_{f_1(k)} \cap \bar{A} \cap W_{f_1(n)} = \emptyset.$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $k < n$ -სთვის გვაქვს

$$W_{f_1(k)} \cap \bar{A} \cap W_{f_1(n)} \neq \emptyset.$$

მაშინ f_1-ის განსაზღვრით და ლემა 1.2.2-ის ძალით გვექნება, რომ

$$W_{f_1(k)} \cap \bar{A} \cap W_{f(\gamma(n))} \neq \emptyset.$$

მაგრამ γ-ს განსაზღვრის ძალით $W_{f_1(k)} \subseteq W_{\gamma(n)}$, საიდანაც

$$W_{\gamma(n)} \cap W_{f(\gamma(n))} \neq \emptyset,$$

და მაშინ f ფუნქციის პირველი თვისების ძალით $W_{f(\gamma(n))} \subseteq A$, რაც წინააღმდეგობაა.

■

ლემა 1.2.4 თუ $W_n = \omega$, მაშინ

$$\bigcup\{W_{f(\tau(\gamma(n),j))} : j \leq \mid W_{\lambda(n)} \cap B \mid\} \subseteq A.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $W_n = \omega$. მაშინ $W_{\gamma(n)} = \omega$ და τ-ს განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ, რომ $W_{\tau(\gamma(n),j)} \supseteq \bar{B}$ ყოველი $j \leq \mid W_{\gamma(n)} \cap B \mid$-სთვის.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს $j \leq \mid W_{\gamma(n)} \cap B \mid$ ისეთი, რომ $W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \cap \bar{A} \neq \emptyset$: $W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \cap W_{\tau(\gamma(n),j)} \neq \emptyset$, ვინაიდან $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. f ფუნქციის პირველი თვისების ძალით კი გამოდის, რომ $W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \subseteq A$, რაც წინააღმდეგობაა.

■

ლემა 1.2.5 თუ $W_n = \emptyset$, მაშინ

$$\bigcup\{W_{f(\tau(\gamma(n),j))} : j \leq \mid W_{\lambda(n)} \cap B \mid\} \nsubseteq A.$$

დამტკიცება. თუ $W_n = \emptyset$, მაშინ $W_{\gamma(n)} = W_{\lambda(n)}$. ე.ი. $W_{\gamma(n)} \cap B$-სასრულია: ვთქვათ, $j = \mid W_{\gamma(n)} \cap B \mid$. ვაჩვენოთ, რომ $W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \nsubseteq A$: თუ $W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \subseteq A$, მაშინ

$$W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \cap W_{\tau(\gamma(n),j)} \neq \emptyset,$$

და B სიმრავლის განსაზღვრით $W_{f(\tau(\gamma(n),j))} \subseteq B$, საიდანაც ვღებულობთ, რომ $W_{\tau(\gamma(n),j)} \cap B \neq \emptyset$, რაც ეწინააღმდეგება τ-ს განსაზღვრას.

■

ვთქვათ, g არის გამოთვლადი ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი i და j-სთვის სრულდება შემდეგი სამი პირობა:

1. $i \neq j \;\Rightarrow\; W_{g(i)} \cap W_{g(j)} = \emptyset$;
2. $W_{g(i)} \subseteq W_{f_1(i)}$;

3. $\bigcup_{r\in\omega} W_{g(r)} = \bigcup_{r\in\omega} W_{f_1(r)}$.

ვთქვათ, μ არის ისეთი გამოთვლადი ფუნქცია, რომ

$$W_{\mu(e,i)} = \begin{cases} \omega, & \text{თუ } W_{g(e)} \cap W_i \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{თუ } W_{g(e)} \cap W_i = \emptyset. \end{cases}$$

რეკურსიის თეორემის თანახმად არსებობს 1:1 გამოთვლადი h ფუნქცია ისეთი, რომ

$$W_{h(i)} = \begin{cases} \omega, & \text{თუ } W_{g(h(i))} \cap W_i \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{თუ } W_{g(h(i))} \cap W_i = \emptyset. \end{cases}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი i-სთვის

$$W_{g(h(i))} \cap W_i \neq \emptyset \iff W_{g(h(i))} \subseteq A.$$

ჯერ დავუშვათ, რომ $W_{g(h(i))} \cap W_i \neq \emptyset$, მაშინ $W_{h(i)} = \omega$ და აქიდან გამომდინარე $W_{\gamma(h(i))} = \omega$. მაშასადამე, f ფუნქციის პირველი თვისების ძალით $W_{f(\gamma(h(i)))} \subseteq A$, ვინაიდან თუ $W_{f(\gamma(h(i)))} \neq \emptyset$, მაშინ $W_{f(\gamma(h(i)))} \cap W_{\gamma(h(i))} \neq \emptyset$. აქიდან ლემა 1.2.4-ის გამო გვექნება, რომ $W_{f_1(h(i))} \subseteq A$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $W_{g(h(i))} \subseteq A$.

მეორე მხრივ, თუ $W_{g(h(i))} \cap W_i = \emptyset$, მაშინ $W_{h(i)} = \emptyset$ და მაშასადამე,

$$W_{f_1(h(i))} = \bigcup \{W_{f(\tau(\gamma(h(i),j)))} : j \leq \mid W_{\lambda(h(i)} \cap B \mid\}.$$

მაგრამ მაშინ ლემა 1.2.5-ის გამო $W_{f_1(h(i))} \nsubseteq A$ და ლემა 1.2.3-ის გამო სიმრავლეები $\{W_{f_1(j)} \cap \bar{A}\}_{j\in\omega}$ არიან წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი. g ფუნქციის მეორე თვისების გამო, ყოველი j-სთვის $W_{g(j)} \subseteq W_{f_1(j)}$ და მაშინ g-ს მესამე თვისებიდან მივიღებთ, რომ $W_{g(j)} \cap \bar{A} = W_{f_1(j)} \cap \bar{A}$. მაშასადამე $W_{g(h(i))} \nsubseteq A$.

ბოლოს კი განვსაზღვროთ ფუნქცია $\rho = g \circ h$. ჩვენ ეს-ესაა ვაჩვენეთ, რომ ყოველი i-სთვის,

$$W_{\rho(i)} \cap W_i \neq \emptyset \iff W_{\rho(i)} \subseteq A.$$

მეორე მხრივ, ვინაიდან $W_{g(h(i))} \subseteq W_{f_1(h(i))}$ და $W_{f_1(h(i))}$-სასრულია, გამოდის რომ ყოველი i-სთვის, $W_{\rho(i)}$-სასრულია. ამასთან რადგან h არის ცალსახა ფუნქცია და ყოველი i და j-სთვის $i \neq j \Rightarrow W_{g(i)} \cap W_{g(j)} = \emptyset$, მივიღებთ, რომ $W_{g(h(i))} \cap W_{g(h(j))} = \emptyset$, როცა $i \neq j$. ე.ი.ყოველი i და j-სთვის

$$i \neq j \Rightarrow W_{\rho(i)} \cap W_{\rho(j)} = \emptyset.$$

ამით ნაჩვენებია, რომ ρ ფუნქცია A სიმრავლის მიმართ აკმაყოფილებს შედეგი 1.1.4-ში მოცემულ სამივე პირობას, რაც ნიშნავს იმას, რომ ρ ფუნქციით $K \leq_{Q_{k1}} A$.

■

თეორემა 1.2.1-დან ლემა 1.1.1-ზე დაყრდნობით ადვილად მიიღება

შედეგი 1.2.6 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი სიმრავლეა. მაშინ

$$\overline{K} \leq_{\bar{s}} A \ \Leftrightarrow \ \overline{K} \leq_{\bar{s}_1} A.$$

დამტკიცება. ცხადია.

$\blacksquare$

§ 1.3. იმუნურობის თვისებები s-დაყვანადობის ტერმინებში

იმუნური სიმრავლის ცნება განსაზღვრა პოსტმა შემდეგი სახით: უსასრულო A სიმრავლეს ეწოდება იმუნური, თუ A უსასრულოა და მისი დამატება არ შეიცავს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად ქვესიმრავლეს. მანვე ძლიერი და სუსტი ცხრილების დახმარებით განსაზღვრა [31] ჰიპერიმუნური და ჰიპერჰიპერიმუნური სიმრავლეები, რომელთაც აღმოაჩნდათ რიგი საინტერესო და ძალზე მნიშვნელოვანი თვისებები.

განსაზღვრება 1.3.1 თანაუკვეთი ცხრილი (ან ცხრილი თანაკვეთების გარეშე) ეწოდება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სასრული სიმრავლეების $\{F_n\}_{n\in\omega}$ მიმდევრობას. თუ არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი $n \in \omega$-სთვის $F_n = D_{f(n)}$, მაშინ ასეთ თანაუკვეთ ცხრილს ეწოდება ძლიერი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე და ეწოდება სუსტი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე თუ არსებობს ისეთი გამოთვლადი ფუნქცია f, რომ ყოველი $n \in \omega$-სთვის $F_n = W_{f(n)}$.

განსაზღვრება 1.3.2 უსასრულო A სიმრავლეს ეწოდება ჰიპერიმუნური (შესაბამისად, ჰიპერჰიპერიმუნური) თუ არ არსებობს ისეთი $\{F_n\}_{n\in\omega}$ ძლიერი (შესაბამისად, სუსტი) ცხრილი თანაკვეთების გარეშე, რომ $F_n \cap A \neq \emptyset$ ყოველი $n \in \omega$-სთვის.

ჰიპერჰიპერიმუნური სიმრავლის განსაზღვრებიდან შედეგი 1.2.6-ს გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი

თეორემა 1.3.3 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი ისეთი სიმრავლე, რომ $\overline{K} \leq_{\bar{s}} A$. მაშინ A არ არის ჰიპერჰიპერიმუნური.

დამტკიცება. დავუშვათ $\overline{K} \leq_{\bar{s}} A$. მაშინ შედეგი 1.2.6-ს ძალით $\overline{K} \leq_{\bar{s}_1} A$ რაიმე გამოთვლადი f ფუნქციით. ვთქვათ W არის $\overline{K}$-ის უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადი ქვესიმრავლე და h არის ისეთი ცალსახა გამოთვლადი ფუნქცია, რომ $range(h) = W$. მაშინ ცხადია, რომ $\{W_{f(h(x))}\}_{x\in\omega}$ არის სუსტი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე, რომელიც ეწინააღმდეგება A-ს ჰიპერჰიპერიმუნურობას.

■

[30]-ში დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1.3.4 (იხ. [30], თეორემა 1.5) თუ $A \in \Delta_2^0$, $B \in \Sigma_2^0$ და $A \leq_s B$, მაშინ $A \leq_{\bar{s}} B$, ან რაც ექვივალენტურია იმის, რომ არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი x-სთვის, $W_{f(x)}$ სასრულია და

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad W_{f(x)} \cap B \neq \emptyset.$$

[29]-ში დამტკიცებულია, რომ თუ K არის კრეატიული სიმრავლე მაშინ ყოველი $A \in \Delta_2^0$ სიმრავლისთვის, $K \leq_Q A$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $K \leq_{Q_1} A$, ან რაც ექვივალენტურია იმისა, რომ ყოველი $A \in \Delta_2^0$ სიმრავლისთვის $\overline{K} \leq_s A$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $\overline{K} \leq_{s_1} A$.

შემდეგი შედეგი, რომელიც თეორემა 1.3.4-ის განზოგადებას წარმოადგენს პირდაპირ მიიღება თეორემა 1.3.3-ის გათვალისწინებით.

შედეგი 1.3.5 თუ K კრეატიული სიმრავლეა და $A \in \Sigma_2^0$, მაშინ

$$\bar{K} \leq_s A \iff \bar{K} \leq_{s_1} A.$$

დამტკიცება. ცხადია.

∎

[30]-ში ომანაძისა და სორბის მიერ დასმულია კითხვა: არის თუ არა $deg_s(\bar{K})$ ჰიპერჰიპერიმუნურად ცარიელი? ამ კითხვაზე უარყოფით პასუხს იძლევა შემდეგი:

შედეგი 1.3.6 თუ K კრეატიული სიმრავლეა, $A \in \Sigma_2^0$ და $\bar{K} \leq_s A$, მაშინ A არ არის ჰიპერჰიპერიმუნური; ან რაც ექვივალენტურია იმისა, რომ $deg_s(\bar{K})$ არის ჰიპერჰიპერიმუნურად ცარიელი(ანუ, $deg_s(\bar{K})$ არ შეიცავს ჰიპერჰიპერიმუნურ სიმრავლეს).

დამტკიცება. დებულების მეორე ნაწილი გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ნებისმიერი A სიმრავლისთვის, $A \in \Sigma_2^0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $A \leq_s \bar{K}$.

∎

[30]-ში ნაჩვენებია, რომ არც იმუნური და არც ჰიპერიმუნური s-ხარისხები არ არიან მემკვიდრეობით ზევით გაგრძელებადი. ჩვენ ახლა ვაჩვენებთ, რომ ჰიპერჰიპერიმუნური s-ხარისხებიც აგრეთვე არ არიან მემკვიდრეობით ზევით გაგრძელებადი.

შედეგი 1.3.7 ჰიპერჰიპერიმუნური s-ხარისხები არ არიან მემკვიდრეობით ზევით გაგრძელებადი.

დამტკიცება. ავიღოთ რაიმე ჰიპერჰიპერიმუნური $A \in \Sigma_2^0$ სიმრავლე; გარკვეულობისთვის A იყოს ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლის დამატება. მაშინ $A \leq_s \bar{K}$, მაგრამ $deg_s(\bar{K})$ არის ჰიპერჰიპერიმუნურად ცარიელი, ანუ არ შეიცავს ჰიპერჰიპერიმუნურ სიმრავლეს.

∎

ვიტყვით, რომ A სიმრავლე ძლიერად Q-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{sQ} B$) თუ არსებობს გამოთვლადი ფუნქციები f და k ისეთი, რომ ყოველი $x \in \omega$-სთვის

1. $x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B$;
2. $\max(W_{f(x)}) < k(x)$ (ვიგულისხმოთ, რომ $\max(\emptyset) = -1$);

თუ დამატებით ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის,

3. $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$,

მაშინ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე sQ_1-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{sQ_1} B$).

ანალოგიურად, A სიმრავლე ძლიერად s-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{ss} B$) თუ არსებობს გამოთვლადი ფუნქციები f და k ისეთი, რომ ყოველი $x \in \omega$-სთვის

1. $x \in A \ \Leftrightarrow\ W_{f(x)} \cap B \neq \emptyset$;
2. $\max(W_{f(x)}) < k(x)$;

თუ დამატებით ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის,

3. $x \neq y \ \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$,

მაშინ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე ss_1-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{ss_1} B$).

[26]-ში ნაჩვენებია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე არის sQ-სრული, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის sQ_1-სრული. შემდეგი თეორემა იძლევა იმავე ფაქტის განზოგადებას ნებისმიერ სიმრავლეებზე.

თეორემა 1.3.8 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი სიმრავლეა. მაშინ

$$K \leq_{sQ} A \ \Leftrightarrow\ K \leq_{sQ_1} A.$$

დამტკიცება. დამტკიცება მიიღება თეორემა 1.2.1-ის მტკიცების მარტივი მოდიფიცირებით. დავუშვათ, რომ $K \leq_{sQ} A$ გამოთვლადი f და k ფუნქციებით. მარტივია იმის ჩვენება, რომ თეორემა 1.2.1-ის დამტკიცებაში აგებულ ρ ფუნქციასთან ერთად, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი გამოთვლადი k_1 ფუნქცია, რომ $\max(W_{\rho(x)}) < k_1(x)$, ყოველი $x \in \omega$-სთვის. შევნიშნოთ, რომ $\rho = g \circ h$ და $W_{g(j)} \subseteq W_{f_1(j)}$. ერთდროულად ინდუქციით განვსაზღვროთ გამოთვლადი ფუნქციები k_1 ($\max(W_{\rho(x)})$-ის შემომსაზღვრელი) და l ($| W_{\lambda(n)} \cap B |$-ის შემომსაზღვრელი) შემდეგნაირად:

- $l(0) = 0$ და $k_1(0) = k(\gamma(0)) + k(\tau(\gamma(n), j))$;
- თუ $n > 0$, მაშინ ვთქვათ,

$$l(n) = \sum_{j<n} k_1(j)$$

და

$$k_1(n) = k(\gamma(n)) + \sum_{j \leq l(n)} k(\tau(\gamma(n), j)).$$

მარტივია იმის ჩვენება, რომ k_1 ფუნქცია აკმაყოფილებს მოთხოვნილ თვისებას.

■

შედეგი 1.3.9 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი სიმრავლეა. მაშინ

$$\overline{K} \leq_{ss} A \ \Leftrightarrow\ \overline{K} \leq_{ss_1} A.$$

თეორემა 1.3.10 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი ისეთი სიმრავლე, რომ $\overline{K} \leq_{ss} A$. მაშინ A არ არის ჰიპერიმუნური.

დამტკიცება. ვთქვათ $\overline{K} \leq_{ss} A$. მაშინ შედეგი 1.3.9-ის გამო $\overline{K} \leq_{ss_1} A$; ვთქვათ $\overline{K} \leq_{ss_1} A$ გამოთვლადი f და k ფუნქციებით ისე, რომ $\max(W_{f(x)}) < k(x)$. ვთქვათ, W არის $\overline{K}$-ის უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადი ქვესიმრავლე და h არის ისეთი ცალსახა გამოთვლადი ფუნქცია, რომ $range(h) = W$.

ინდუქციით განვსაზღვროთ გამოთვლადი t ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$D_{t(0)} = [0, k(h(0))],$$

$$D_{t(n+1)} = \left[p, \sum_{i \leq p+1} k(h(i))\right],$$

სადაც,

$$p = 1 + \max(\bigcup_{i \leq n} D_{t(i)})$$

და $[x, y] = \{z : z \in \omega \ \& \ x \leq z \leq y\}$.

მაშინ ცხადია, რომ $\{D_{t(x)}\}_{x \in \omega}$ ძლიერი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე, რაც ეწინააღმდეგება A სიმრავლის ჰიპერიმუნურობას.

■

შედეგი 1.3.11 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლე. მაშინ A სიმრავლე ჰიპერიმუნურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\overline{K}$ არაა ss-დაყვანადი B-ზე, A-ს ყოველი უსასრულო B ქვესიმრავლისთვის.

დამტკიცება. დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 1.3.10-დან და იმ ფაქტიდან, რომ ჰიპერიმუნური სიმრავლის ნებისმიერი უსასრულო ქვესიმრავლე აგრეთვე ჰიპერიმუნურია.

■

შემდეგი თეორემები გვაძლევენ ჰიპერჰიპერიმუნური სიმრავლის დახასიათებას $\bar{s}$-დაყვანადობის ტერმინებში.

თეორემა 1.3.12 ვთქვათ K არის კრეატიული სიმრავლე და A ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლე. მაშინ A სიმრავლე ჰიპერჰიპერიმუნურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\overline{K}$ არაა $\bar{s}$-დაყვანადი B-ზე, A-ს ყოველი უსასრულო B ქვესიმრავლისთვის.

დამტკიცება. თუ A სიმრავლე ჰიპერჰიპერიმუნურია და $\bar{K} \leq_{\bar{s}} B$, A-ს რაიმე უსასრულო B ქვესიმრავლისთვის, მაშინ თეორემა 1.3.3-ის ძალით B არ არის ჰიპერჰიპერიმუნური, რაც ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ ჰიპერჰიპერიმუნური სიმრავლის ნებისმიერი უსასრულო ქვესიმრავლე აგრეთვე ჰიპერჰიპერიმუნურია.

თუ A უსასრულოა და არ არის ჰიპერჰიპერიმუნური, მაშინ არსებობს ისეთი გამოთვლადი f ფუნქცია, რომ ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის,

1. $x \neq y \;\Rightarrow\; W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$,
2. $W_{f(x)} \cap A \neq \emptyset$,
3. $W_{f(x)}$ -სასრულია.

განვიხილოთ სიმრავლე

$$B = A \cap \left(\bigcup_{x \in \bar{K}} W_{f(x)} \right).$$

მაშინ B არის A-ს უსასრულო ქვესიმრავლე და ყოველი $x \in \omega$-სთვის,

$$x \in \bar{K} \quad \Leftrightarrow \quad W_{f(x)} \cap B \neq \emptyset,$$

ე.ი. $\bar{K} \leq_{\bar{s}} B$.

■

შემდეგი თეორემა რომელიც წარმოადგენს წინა თეორემის შეზღუდვას Σ_2^0 სიმრავლეებზე, შეიძლება განვიხილოთ როგორც [29, თეორემა 3.4]-ის დაზუსტებული ვარიანტი.

თეორემა 1.3.13 ვთქვათ A არის Σ_2^0 კლასის უსასრულო სიმრავლე და K კრეატიული სიმრავლეა. მაშინ A სიმრავლე ჰიპერჰიპერიმუნურია თუ $\bar{K}$ არაა s-დაყვანადი B-ზე, A-ს ყოველი უსასრულო $B \in \Sigma_2^0$ (Δ_2^0) ქვესიმრავლისთვის.

დამტკიცება. თუ A არის ჰიპერჰიპერიმუნური და $\bar{K} \leq_{\bar{s}} B$, A-ს რაიმე უსასრულო $B \in \Sigma_2^0$ ქვესიმრავლისთვის, მაშინ შედეგი 1.3.6-ის ძალით, B არ არის ჰიპერჰიპერიმუნური, რაც ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ A სიმრავლე არის ჰიპერჰიპერიმუნური და $B \subseteq A$.

შებრუნებული იმპლიკაციის საჩვენებლად შევნიშნოთ, რომ თეორემა 1.3.12-ის მტკიცებაში განხილული $B = A \cap \left(\bigcup_{x \in \bar{K}} W_{f(x)} \right)$ სიმრავლე (გამომდინარე ტარსკი-კურატოვსკის ალგორითმიდან, იხ. [32, §14.3]) ეკუთვნის Σ_2^0 კლასს. რადგან $\bar{K} \leq_s B$ მაშინ $\bar{K} \leq_{s_1} B$ გამოთვლადი f ფუნქციით, საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი. ფაქტიურად, ჩვენ აგრეთვე შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს B სიმრავლის უსასრულო ქვესიმრავლე $\hat{B}$, რომელიც ეკუთვნის Δ_2^0 კლასს ისეთი, რომ $\bar{K} \leq_{s_1} \hat{B}$, გამოთვლადი f ფუნქციით. თავდაპირველად ვსაზღვრავთ $\emptyset'$-გამოთვლად გადათვლას $\hat{B}$-ის შემდეგნაირად: პოსტის თეორემით (იხ. მაგალითად [34, თეორემა

IV.2.2]) ვთქვათ φ არის ნაწილობრივად $\emptyset'$-გამოთვლადი ფუნქცია ისეთი, რომ $A = domain(\varphi)$. ინდუქციურად განვსაზღვროთ სასრული V_x სიმრავლე შემდეგნაირად:

1. თუ $x \in K$, მაშინ $V_x = V_{x-1}$ (ვიგულისხმოთ, რომ $V_{-1} = \emptyset$);
2. თუ $x \in \overline{K}$, მაშინ ვიპოვოთ პირველი ისეთი z_x, რომ $\varphi(z_x)$ განსაზღვრულია და $z_x \in W_{f(x)} - \bigcup_{u<x} W_{f(u)}$. (ასეთი z_x არსებობს f-ის თვისებების გამო). ასეთ შემთხვევაში განვსაზღვროთ $V_x = V_{x-1} \cup \{z_x\}$.

ვთქვათ $\hat{B} = \bigcup_x V_x$: იმის საჩვენებლად, რომ $B \in \Delta_2^0$ მოვიყვანოთ გადაწყვეტის შემდეგი პროცედურა, რომელიც ცხადია, რომ $\emptyset'$-გამოთვლადია: მოცემული z-სთვის შევამოწმოთ z ეკუთვნის თუ არა $\bigcup_x W_{f(x)}$ სიმრავლეს: თუ არა, მაშინ $z \in \bar{\hat{B}}$. სხვა შემთხვევაში კი ვიპოვოთ ისეთი უმცირესი x, რომ $z \in W_{f(x)}$: თუ $x \in K$, მაშინ $z \in \bar{\hat{B}}$; თუ $x \in \overline{K}$, მაშინ $z \in \hat{B}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $z = z_x$.

∎

თავი 2. Q_1-დაყვანადობის სტრუქტურული თვისებები

ამ თავში შევისწავლით Q_1-დაყვანადობის სტრუქტურულ თვისებებს. კერძოდ, ვაჩვენებთ, რომ ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლის Q-ხარისხი შეიცავს $\leq_{Q_1}$-ის მიმართ მთელ რიცხვთა ტიპით წრფივად დალაგებულ Q_1-ხარისხების უსასრულო ერთობლიობას, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეებს. კარგადაა ცნობილი თეორემა (იხ. [10]), რომ რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა Q-ხარისხები დალაგებულია მკვრივად. ამის საპირწონედ ვაჩვენებთ, რომ რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხები არ არის მკვრივად დალაგებული. გარდა ამისა დამტკიცებულია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხები არ ქმნიან ზედა ნახევარმესერს.

§ 2.1. მარტივი სიმრავლეები და Q_1-დაყვანადობა

ამ პარაგრაფში ჩვენ ვაჩვენებთ რამდენიმე კავშირს მარტივი სიმრავლის ცნებასა და Q_1-დაყვანადობას შორის.

განსაზღვრება 2.1.1 უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს ეწოდება მარტივი, თუ მისი დამატება არ შეიცავს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად ქვესიმრავლეს.

[1]-ში ნაჩვენებია, რომ თუ A და B რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებია, მაშინ $A\backslash B \leq_Q A$. აღმოჩნდა, რომ თუ დამატებით A არ არის მარტივი სიმრავლე, მაშინ ანალოგიური თეორემა სამართლიანია Q_1-დაყვანადობისთვის.

თეორემა 2.1.2 თუ A და B რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები ისეთია, რომ A არ არის მარტივი და $|\,\bar{A}\,| = \infty$, მაშინ $A\backslash B \leq_{Q_1} A$.

დამტკიცება. თუ A არ არის მარტივი და $|\,\bar{A}\,| = \infty$, მაშინ არსებობს უსასრულო რეკურსიული R სიმრავლე ისეთი, რომ $R \subseteq \bar{A}$. განვსაზღვროთ გამოთვლადი f ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$W_{f(x)} = \begin{cases} \left\{\mu y \in \left(R\backslash \bigcup_{z<x} W_{f(z)}\right)\right\}, & \text{თუ } x \in R, \\ \{x\}, & \text{თუ } x \in \bar{R} \text{ და } x \in \bar{B}, \\ \left\{x, \mu y \in \left(R\backslash \bigcup_{z<x} W_{f(z)}\right)\right\}, & \text{თუ } x \in \bar{R} \text{ და } (\exists s)(x \in B_s). \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ

(1) თუ $x \in A\backslash B$, მაშინ $W_{f(x)} = \{x\}$ და შესაბამისად $W_{f(x)} \nsubseteq A$;

(2) თუ $x \notin A\backslash B$, მაშინ:

(a) თუ $x \in A \cap B$, მაშინ $W_{f(x)}$ შეიცავს ელემენტს $y \in R$ და შესაბამისად $W_{f(x)} \nsubseteq A$;

(b) თუ $x \in \bar{A}$,მაშინ $W_{f(x)}$ ან შეიცავს ელემენტს $y \in R$, ან შეიცავს ელემენტს x, რომელიც ისევ იწვევს რომ $W_{f(x)} \nsubseteq A$.

ცხადია, რომ $W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$, როდესაც $x \neq y$. ე.ი. $A \setminus B \leq_{Q_1} A$ გამოთვლადი f ფუნქციით.

■

შედეგი 2.1.3 თუ A და B რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები ისეთია, რომ A არ არის მარტივი, $|\bar{A}| = \infty$ და $B \subseteq A$, მაშინ $A \setminus B \leq_{Q_1} A$.

დამტკიცება. პირდაპირ გამომდინარეობს თეორემა 2.1.2-დან.

■

განსაზღვრება 2.1.4 არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი A სიმრავლის არატრივიალური გახლეჩა ეწოდება არარეკურსიულ რეკურსიულად გადათვლად თანაუკვეთ A_0 და A_1 სიმრავლეთა ისეთ წყვილს, რომ $A = A_0 \cup A_1$.

განმარტება 2.1.5 რ.გ. სიმრავლეს ეწოდება ჰიპერჰიპერმარტივი, თუ მისი დამატება ჰიპერჰიპერიმუნურია.

წინადადება 2.1.6 ვთქვათ A არის ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, ხოლო B და C სიმრავლეების წყვილი კი წარმოადგენს A სიმრავლის არატრივიალურ გახლეჩას. მაშინ $A \setminus B \nleq_{Q_1} A$.

დამტკიცება. პირობაში მოცემული A, B და C სიმრავლეებისთვის დავუშვათ, რომ $A \setminus B \leq_{Q_1} A$ გამოთვლადი f ფუნქციით. ვთქვათ, B სიმრავლე გადათვლადია ცალსახა რეკურსიული h ფუნქციით და ვთქვათ g არის ისეთი გამოთვლადი ფუნქცია, რომ

$$W_{g(n)} = W_{f(h(n))}.$$

მაშინ, $\{W_{g(i)}\}_{i \in \omega}$ ცხრილი არის თანაუკვეთი და ყოველი i-სთვის,

$$W_{g(i)} \cap \bar{A} \neq \emptyset.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება A სიმრავლის ჰიპერჰიპერმარტივობას.

■

§ 2.2. რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხები ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლის Q-ხარისხში

ჩვენ ახლა განვიხილავთ რეკურსიულად გადათვლად Q_1-ხარისხებს რეკურსიულად გადათვლად Q-ხარისხებში და დავამტკიცებთ, რომ ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლის Q-ხარისხი შეიცავს $\leq_{Q_1}$-ის მიმართ მთელ რიცხვთა ტიპით წრფივად დალაგებულ Q_1-ხარისხების უსასრულო ერთობლიობას, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეებს.

Q-დაყვანადობისა და Q_1-დაყვნადობის ცნებები რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა კლასზე განსხვავებულია. მართლაც, ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ A_0 და A_1 არის ჰიპერჰიპერმარტივი A სიმრავლის არატრივიალური გახლეჩა, მაშინ $A_0 \leq_Q A$ და $A_1 \leq_Q A$, და წინადადება 2.1.6-ის ძალით $A_0 \nleq_{Q_1} A$ და $A_1 \nleq_{Q_1} A$.

[30]-ში დამტკიცებულია, რომ თუ A არის $\sum_2^0$ სიმრავლე, C არის $\prod_2^0$ სიმრავლე, B ნებისმიერი სიმრავლეა და $A \leq_Q B \leq_Q C$, მაშინ $A \leq_{Q_k} B$. ანალოგიური დებულება სამართლიანია Q_1-დაყვანადობისთვის.

თეორემა 2.2.1 ვთქვათ A არის $\sum_2^0$ სიმრავლე. C არის $\prod_2^0$ სიმრავლე, B ნებისმიერი სიმრავლეა და $A \leq_{Q_1} B \leq_{Q_1} C$, მაშინ არსებობს გამოთვლადი h ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი x და y-სთვის:

$$x \in A \iff W_{h(x)} \subseteq B,$$

$$x \neq y \Rightarrow W_{h(x)} \cap W_{h(y)} = \emptyset,$$

$$W_{h(x)} \text{ სასრულია.}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\{A_s\}_{s\in\omega}$ და $\{\bar{C}_s\}_{s\in\omega}$ არის, შესაბამისად, A და C სიმრავლეების Σ_2^0 აპროქსიმაციები. ვთქვათ $A \leq_{Q_1} B$ გამოთვლადი f ფუნქციით და $B \leq_{Q_1} C$ გამოთვლადი g ფუნქციით.

გამოთვლადი h ფუნქცია ავაგოთ ეტაპობრივად ისე,რომ

$$(\forall x)(|W_{h(x)}| < \infty \;\&\; (x \in A \iff W_{h(x)} \subseteq B))$$

და

$$(\forall x)(\forall y)\big(x \neq y \Rightarrow W_{h(x)} \cap W_{h(y)} = \emptyset\big).$$

ბიჯი 0. დავიწყოთ $W_{f(x)}$-ის გადათვლა და პირველი ელემენტი y რომელიც გამოჩნდება $W_{f(x)}$-ში (შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $(\forall x)(W_{f(x)} \neq \emptyset)$) გადავცეთ $W_{h(x)}$-ს.

ბიჯი $s+1$. ვთქვათ $W_{h(x),s} = \{y_1^x, \dots, y_k^x\}$

და სიმრავლეები $F_{y_1^x,s+1}, \dots, F_{y_k^x,s+1}$,

სადაც $F_{y_i^x,s+1} \subseteq W_{g(y_i^x,s+1)}$, $i = 1, \dots, k$,

უკვე აგებულია.

შევამოწმოთ x ეკუთვნის თუ არა A_{s+1}-ს. თუ $x \in A_{s+1}$, მაშინ არ ვაკეთებთ არაფერს და გადავდივართ შემდეგ ბიჯზე. თუ $x \notin A_{s+1}$, მაშინ შევამოწმოთ სრულდება თუ არა შემდეგი მიმართება:

$$(\forall i)(1 \leq i \leq k \;\; \Rightarrow \;\; F_{y_i^x,s+1} \subseteq C_{s+1})$$

თუ ეს მიმართება სრულდება, მაშინ ვთქვათ y_{k+1}^x იყოს პირველი ელემენტი რომელიც გამოჩნდება $W_{f(x)}$-ში y_k^x ელემენტის შემდეგ და y_{k+1}^x გადავცეთ $W_{h(x)}$-ს.

ყოველი i-სთვის, $1 \leq i \leq k$, ვიპოვოთ

$$z_i = \min\left\{z \in W_{g(y_i^x),s+1} - F_{y_i^x,s+1}\right\},$$

და z_i გადავცეთ $F_{y_i^x,s+1}$-ს და გადავიდეთ შემდეგ ბიჯზე.

თუ ზემოთ ნახსენები მიმართება არ სრულდება მაშინ არ ვაკეთებთ არაფერს და ისევ გადავდივართ შემდეგ ბიჯზე. ამით h ფუნქციის აგება დასრულებულია.

ახლა შევამოწმოთ, რომ ასეთნაირად აგებული h ფუნქცია აკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს.

თუ $x \in A$, მაშინ რადგან $A \in \Sigma_2^0$ აქიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(\exists s)(\forall t \geq s)(x \in A_t)$$

და s-ბიჯის მერე არცერთი ელემენტი არ გადაეცემა $W_{h(x)}$-ს, რაც იმას ნიშნავს, რომ $W_{h(x)}$ სასრულია და $W_{h(x)} \subseteq W_{f(x)} \subseteq A$.

თუ $x \notin A$და $W_{h(x)}$-უსასრულოა, მაშინ არსებობს უსასრულოდ ბევრი t ისეთი, რომ $x \notin A_t$ და

$$(\forall i)(1 \leq i \leq k \;\; \Rightarrow \;\; F_{y_i^x,t} \subseteq C_t).$$

მაგრამ

$$x \in \bar{A} \;\; \Rightarrow \;\; (\exists u)(u \in W_{f(x)} \cap \bar{B})$$

და რაღაც t_0 ბიჯზე პირველი ასეთი u გადაეცემა $W_{h(x)}$-ს და რადგან $\bar{C} \in \Sigma_2^0$, ამიტომ არსებობს ბიჯი $t_1 > t_0$ ისეთი, რომ

$$(\forall t \geq t_1)(C_{t_1} \nsubseteq C_t),$$

რაც წინააღმდეგობაა. ე.ი. თუ $x \notin A$ მაშინ $W_{h(x)}$-სასრულია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ $x \notin A$ მაშინ $W_{h(x)} \nsubseteq B$. დავუშვათ $x \notin A$ და $W_{h(x)} \subseteq B$, ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში როდესაც თითქმის ყველა ისეთი t-სთვის რომ $x \in \bar{A}_t$, არ სრულდება შემდეგი მიმართება:

$$(\forall i)\left(1 \leq i \leq k \;\; \Rightarrow \;\; F_{y_i^x,t} \subseteq C_t\right).$$

მაშინ არსებობს j, $1 \leq j \leq k$, ისეთი, რომ უსასრულოდ ბევრი t-სთვის

$$x \in \bar{A}_t \;\; \& \;\; F_{y_j^x,t} \nsubseteq C_t.$$

მაგრამ, მაშინ უსასრულოდ ბევრი t-სთვის არსებობს $z_j \in F_{y_j^x,t} \cap \bar{C}_t$.

რადგან $\bar{C} \in \Sigma_2^0$, ამიტომ $z_j \notin C$ და

$$(\exists t_2)(\forall t \geq t_2)\left(z_j \in \bar{C}_t\right).$$

მაშინ გამოდის, რომ

$$y_i^x \in W_{h(x)} \cap \bar{B},$$

რაც წინააღმდეგობაა. მაშასადამე თუ $x \notin A$ მაშინ $W_{h(x)}$-სასრულია, $W_{h(x)} \cap \bar{B} \neq \emptyset$ და $W_{h(x)} \subseteq W_{f(x)}$.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ რადგან

$$(\forall x)(W_{h(x)} \subseteq W_{f(x)})$$

და

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset),$$

აქიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(\forall x)(\forall y)\left(x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; W_{h(x)} \cap W_{h(y)} = \emptyset\right).$$

■

შედეგი 2.2.2 თუ A და B რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებია და $A \leq_{Q_1} B$, მაშინ არსებობს ისეთი გამოთვლადი ფუნქცია h, რომ ყოველი x და y-სთვის:

$$x \in A \;\Leftrightarrow W_{h(x)} \subseteq B,$$

$$x \neq y \;\Rightarrow W_{h(x)} \cap W_{h(y)} = \emptyset,$$

$$W_{h(x)} \text{ სასრულია.}$$

დამტკიცება. ცხადია.

■

შემდეგი თეორემა არის დეკერის ცნობილი თეორემის ანალოგი (იხ., მაგ.,[32, თეორემა 8. XIV]) და ის წარმოადგენს ამ თავის ერთ-ერთ ძირითად შედეგს.

თეორემა 2.2.3 ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლის Q-ხარისხი შეიცავს უსასრულო ერთობლიობას Q_1-ხარისხებისა, რომლებიც წრფივადაა დალაგებული $\leq_{Q_1}$-ის მიმართ მთელ რიცხვთა ტიპით და რომელთაგან თითოეული შეიცავს მხოლოდ ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეებს.

დამტკიცება. დავიწყოთ შემდეგი ლემით,

ლემა 2.2.4 ვთქვათ A და B რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებია ისეთი, რომ

$$B = A \cup \{m\},$$

სადაც $m \in \overline{A}$. მაშინ

(I) A არის ჰიპერჰიპერმარტივი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც B არის ჰიპერჰიპერმარტივი;

(II) თუ A არის ჰიპერჰიპერმარტივი, მაშინ $B \leq_1 A$, $A \leq_m B$ და $A \nleq_{Q_1} B$.

ლემა 3.2-ის **დამტკიცება:** (I)

(⇒) ვთქვათ, B არ არის ჰიპერჰიპერმარტივი, მაშინ არსებობს სუსტი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე $\{W_{f(x)}\}_{x\in\omega}$ ისეთი, რომ

$$(\forall x)\big(W_{f(x)} \cap \bar{B} \neq \emptyset\big),$$

ანუ

$$(\forall x)\big(W_{f(x)} \cap (\bar{A}\backslash\{m\}) \neq \emptyset\big)$$

და აქიდან გამომდინარე

$$(\forall x)\big(W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset\big)$$

ეს კი ეწინააღმდეგება A სიმრავლის ჰიპერჰიპერმარტივობას.

(⇐) ვთქვათ, A არ არის ჰიპერჰიპერმარტივი, მაშინ არსებობს სუსტი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე $\{W_{f(x)}\}_{x\in\omega}$ ისეთი, რომ

$$(\forall x)\big(W_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset\big).$$

განვსაზღვროთ გამოთვლადი g ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$W_{g(x)} = \begin{cases} W_{f(x)}, & \text{თუ} \quad x < m, \\ W_{f(x+1)}, & \text{თუ} \quad x \geq m. \end{cases}$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$(\forall x)\big(W_{f(x)} \cap \bar{B} \neq \emptyset\big).$$

ეს კი ეწინააღმდეგება B სიმრავლის ჰიპერჰიპერმარტივობას.

ვაჩვენოთ (II). დაყვანადობები $B \leq_1 A$ და $A \leq_m B$ მტკიცდება ისევე, როგორც მარტივ ხარიხებზე ზემოთ აღნიშნულ დეკერის თეორემაში (იხ. [32], თეორემა 8.XIV).

დავუშვათ, რომ $A \leq_{Q_1} B$, მაშინ შედეგი 2.2.2 − ის ძალით, არსებობს ისეთი გამოთვლადი f ფუნქცია, რომ ყოველი x და y-სთვის,

$$x \in A \;\; \Leftrightarrow \;\; W_{f(x)} \subseteq B$$

$$x \neq y \;\; \Rightarrow \;\; W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset.$$

და

$W_{f(x)}$-სასრულია.

გამოთვლადი g ფუნქცია განვსაზღვროთ ინდუქციით, შემდეგნაირად:

$$W_{g(0)} = W_{f(m)} \backslash \{m\},$$

$$W_{g(n+1)} = \bigcup_{i \in W_{g(n),} i \neq m} W_{f(i)}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი x და y-სათვის,

$$x \neq y \;\Rightarrow\; W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset.$$

g ფუნქციის განსაზღვრის ძალით, ყოველი i>0-სთვის

$$W_{g(i)} \cap W_{g(0)} = \emptyset.$$

დავუშვათ, რომ ყოველი i-სთვის, $0 \leq i < n$,

$$W_{g(i)} \cap W_{g(n)} = \emptyset.$$

და ვაჩვენოთ, რომ ყოველი k-სთვის, $0 \leq k \leq n$,

$$W_{g(k)} \cap W_{g(n+1)} = \emptyset.$$

ვთქვათ, რომელიღაც k-სთვის, $0 < k \leq n$,

$$W_{g(k)} \cap W_{g(n+1)} \neq \emptyset\,.$$

მაშინ

$$\left(\bigcup_{i\in W_{g(k-1)}, i\neq m} W_{f(i)}\right)\cap\left(\bigcup_{i\in W_{g(n)}, i\neq m} W_{f(i)}\right)\neq\emptyset.$$

ვინაიდან ყოველი x და y-სთვის, გვაქვს

$$x\neq y \;\Rightarrow\; W_{f(x)}\cap W_{f(y)}=\emptyset,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(\exists i)\big(i\in W_{g(n)}\cap W_{g(k-1)}\big)\,,$$

რაც წინააღმდეგობაა.

მაშასადამე, ყოველი x და y-სთვის, გვაქვს

$$x\neq y\Rightarrow W_{g(x)}\cap W_{g(y)}=\emptyset.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი x-სთვის,

$$W_{g(x)}\cap\overline{B}\neq\emptyset.$$

$n=0$-სთვის გვაქვს

$$W_{g(0)}\cap\overline{B}=W_{f(m)}\cap\overline{B}\neq\emptyset\ .$$

ახლა დავუშვათ, რომ $W_{g(n)}\cap\overline{B}\neq\emptyset$, მაშინ არსებობს $x\in W_{g(n)}\cap\overline{B}$, და მაშინ g ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს

$$W_{g(n+1)}\cap\overline{B}\supseteq W_{f(x)}\cap\overline{B}\neq\emptyset.$$

მაშასადამე, $\{W_{g(x)}\}_{x\in\omega}$ არის სასრულ სიმრავლეთა სუსტი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე, რომელიც არღვევს B-ს ჰიპერჰიპერმარტივობას, რაც წინააღმდეგობაა.

■

ვთქვათ, A არის ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, $\{a_0,a_1,\dots\}$ არის A-ს უსასრულო ქვესიმრავლე და $\{b_0,b_1,\dots\}$ არის $\overline{A}$ -ის უსასრულო ქვესიმრავლე. მაშინ, ლემა 2.2.4-ის ძალით:

$$\dots, A\ \cup\ \{b_0,b_1\}, A\ \cup\{b_0\}, A, A\backslash\{a_0\}, A\backslash\{a_0,a_1,\dots\}\,,\dots$$

გვაძლევს Q_1-ხარისხების წრფივ დალაგებას მთელ რიცხვთა ტიპით. უფრო მეტიც, (I)-ის თანახმად, ამ ერთობლიობის ყოველი Q_1-ხარისხი შედგება მხოლოდ ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეებისაგან.

■

შედეგი 2.2.5 $\prod_1^0$ ჰიპერჰიპერიმუნური სიმრავლის s –ხარისხი შეიცავს უსასრულო ერთობლიობას s_1-ხარისხებისა, რომლებიც წრფივადაა დალაგებული $\leq_{s_1}$-ის მიმართ მთელ რიცხვთა ტიპით და რომელთაგან თითოეული შეიცავს მხოლოდ ჰიპერჰიპერიმუნურ სიმრავლეებს.

დამტკიცება. ცხადია.

■

§ 2.3. რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხების სიმკვრივის შესახებ

დაუნიმ, ლაფორტემ და ნისმა [10] აჩვენეს, რომ რეკურსიულად გადათვლადი Q –ხარისხების ზედა ნახევარმესერი მკვრივადაა დალაგებული. რეკურსიულად გადათვლადი Q_1 ხარისხებისთვის კი გვაქვს განსხვავებული სიტუაცია, რაც აჩვენებს, რომ როგორც ნაწილობრივი დალაგებები, ეს ორი სტრუქტურა არ არის ერთმანეთის ელემენტალურად ექვივალენტური.

თეორემა 2.3.1 რეკურსიულად გადათვლადი Q_1 –ხარისხები არ არის მკვრივად დალაგებული.

დამტკიცება. ვთქვათ A ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეა. ავიღოთ $B = A \cup \{m\}$, სადაც $m \notin A$. მაშინ ლემა 2.2.4-ის გამო $B <_{Q_1} A$. ვთქვათ C იყოს ისეთი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, რომ $B \leq_{Q_1} C$ გამოთვლადი f ფუნქციით და $C \leq_{Q_1} A$ გამოთვლადი g ფუნქციით. შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან A სიმრავლე არის მარტივი, ამიტომ არ არსებობს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადი $\{x_n\}_{n\in\omega}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ ყოველი i და j-სთვის,

(i) $x_0 = m$,

(ii) თუ $i \neq j$, მაშინ $x_{2i} \neq x_{2j}$ და $x_{2i+1} \neq x_{2j+1}$,

(iii) $x_{2i} \epsilon W_{g\,(x_{2i+1})}$ და $x_{2i+1} \epsilon W_{f\,(x_{2i+2})}$.

გვექნება ორი შემთხვევა:

შემთხვევა 1. არსებობს ისეთი n, რომ

$$(\forall i \leq n)\left[x_{2i} \epsilon W_{g\,(x_{2i+1})}\right] \& (\forall i < n)\left[x_{2i+1} \epsilon W_{f\,(x_{2i+2})}\right]$$

მაგრამ არ არსებობს ისეთი x, რომ $x_{2n+1} \in W_{f(x)}$.

ასეთ შემთხვევაში განვსაზღვროთ გამოთვლადი h_1 ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$W_{h_1(x)} = \begin{cases} W_{f(x)}, & \text{თუ } x \notin \{x_0, x_2, \dots, x_{2n}\}, \\ \{x_{2i+1}\}, & \text{თუ } x = x_{2i} \text{ რაიმე } i \leq n - \text{სთვის}. \end{cases}$$

ადვილი დასანახია, რომ $A \leq_{Q_1} C$ გამოთვლადი h_1 ფუნქციით. ე.ი. $A \equiv_{Q_1} C$.

შემთხვევა 2. არსებობს ისეთი n, რომ

$$(\forall i < n)\left[x_{2i} \epsilon W_{g\,(x_{2i+1})}\right] \& (\forall i < n)\left[x_{2i+1} \epsilon W_{f\,(x_{2i+2})}\right],$$

მაგრამ არ არსებობს ისეთი x, რომ $x_{2n} \in W_{g(x)}$.

ასეთ შემთხვევაში განვსაზღვროთ გამოთვლადი h_2 ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$W_{h_2(x)} = \begin{cases} W_{g(x)}, & \text{თუ } x \notin \{x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}\}, \\ \{x_{2i+2}\}, & \text{თუ } x = x_{2i+1} \text{ რაიმე } i < n - \text{სთვის}. \end{cases}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $C \leq_{Q_1} B$ გამოთვლადი h_2 ფუნქციით, ე.ი. $C \equiv_{Q_1} B$.

■

§ 2.4. Q_1-ხარისხების არაცარიელი ღია ინტერვალები

ამ პარაგრაფის პირველ თეორემაში ჩვენ ვაჩვენებთ,რომ თუ I არის Q_1-ხარისხების რაღაც ღია ინტერვალი განსაზღვრული $A <_{Q_1} B$ პირობით, სადაც A არის მაქსიმალური სიმრავლე, ხოლო B არის არა-მაქსიმალური, მაგრამ ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, მაშინ $I \neq \emptyset$.

ლემა 2.4.1 თუ A და B რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებია და $A \leq_{Q_1} B$, მაშინ არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი,რომ ყოველი x და y-სთვის

(i) $A \leq_{Q_1} B,$ f ფუნქციით,

(ii) თუ $x \epsilon \overline{A}$, მაშინ $\left| W_{f\,(x)} \cap \overline{B} \right| = 1$.

დამტკიცება. ვთქვათ $A \leq_{Q_1} B$ გამოთვლადი g ფუნქციით. $s-m-n$ თეორემით განვსაზღვროთ გამოთვლადი f ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$W_{f\,(x)} = \{n: (\exists s)\left[n \epsilon W_{g(x),s} \;\&\; W_{g(x),s-1} \subseteq B\right]\}$$

ცხადია, რომ f აკმაყოფილებს ლემა 2.4.1-ში მოცემულ (i)-(ii) პირობებს.

■

განსაზღვრება 2.4.2 რეკურსიულად გადათვლად M სიმრავლეს ეწოდება მაქსიმალური, თუ $\overline{M}$ უსასრულოა და არ არსებობს ისეთი რეკურსიულად გადათვლადი W სიმრავლე, რომ $|W \cap \overline{M}| = |\overline{W} \cap \overline{M}| = \infty$, (სადაც სიმბოლო $|X|$ აღნიშნავს მოცემული X სიმრავლის სიმძლავრეს)

ლემა 2.4.3 ვთქვათ A მაქსიმალური სიმრავლეა, ხოლო B არის ისეთი ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, რომ $A \leq_{Q_1} B$. ვთქვათ f არის ისეთი გამოთვლადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ლემა 2.4.1-ის (i), (ii) პირობებს. თუ $\overline{B} \subseteq \bigcup_{x \epsilon \overline{A}} W_{f(x)}$, მაშინ B არის მაქსიმალური სიმრავლე.

დამტკიცება. ლემის მოცემულობიდან გამომდინარე, ვთქვათ $\overline{B} \subseteq \bigcup_{x \epsilon \overline{A}} W_{f(x)}$. ვთქვათ φ არის ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\varphi(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y \in W_{f(x)}:$$

ასე φ ფუნქციის მნიშვნელობები განისაზღვრება ცალსახად, ვინაიდან $\left\{W_{f(x)}\right\}_{x \in \omega}$ ცხრილი თანაუკვეთია და გვექნება:

$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad W_{f(x)} \cap \overline{B} \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists y)[y \in W_{f(x)} \cap \overline{B}]$$

$$\Leftrightarrow \quad (\exists y)[y \in \overline{B} \;\; \& \; \varphi(y) \downarrow = x].$$

მაშასადამე, $\varphi(\overline{B}) = \overline{A}$.

განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული ρ ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$\rho(x) = \begin{cases} a, & \text{თუ } (\exists s)(x \in B_s), \\ \uparrow, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

სადაც a არის A სიმრავლის რაიმე ფიქსირებული ელემენტი. ახლა განვსაზღვროთ გამოთვლადი h ფუნქცია შემდეგნაირად: ერთდროულად დავიწყოთ $\varphi(x)$ და $\rho(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობების გამოთვლა და რომელიც გამოითვლება პირველად ის განვსაზღვროთ h-ის მნიშვნელობად. ცხადია, რომ ყოველი x-სთვის,

$$x \in \bar{B} \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = \varphi(x).$$

დავუშვათ B არ არის მაქსიმალური სიმრავლე. მაშინ [34, წინადადება 10.4.5.]-ის გამო B არ არის r-მაქსიმალური. ვთქვათ, R არის ისეთი რეკურსიული სიმრავლე, რომ

$$| R \cap \bar{B} | = | \bar{R} \cap \bar{B} | = \infty.$$

მაშინ,

$$| h(R) \cap \bar{A} | = | h(\bar{R}) \cap \bar{A} | = \infty,$$

ვინაიდან $\left| W_{f\,(x)} \cap \bar{B} \right| = 1$, თუ $x \in \bar{A}$. შევნიშნოთ, რომ $h(\bar{R}) \cup \{a\} \subseteq \overline{h(R)} \cup \{a\}$ და მაშინ გვექნება, რომ $| h(R) \cap \bar{A} | = | \overline{h(R)} \cap \bar{A} | = \infty$. მაგრამ $h(R)$ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, ეს კი ეწინააღმდეგება A სიმრავლის მაქსიმალურობას. ე.ი. B მაქსიმალური სიმრავლეა.

■

ლემა 2.4.4 ვთქვათ A და B ისეთი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებია, რომ $A \leq_{Q_1} B$. თუ B მაქსიმალური სიმრავლეა, მაშინ A სიმრავლეც მაქსიმალურია.

დამტკიცება. ვთქვათ A არ არის მაქსიმალური სიმრავლე, მაშინ არსებობს ისეთი რეკურსიულად გადათვლადი C სიმრავლე, რომ

$$| C \cap \bar{A} | = | \bar{C} \cap \bar{A} | = \infty.$$

ვთქვათ $A \leq_{Q_1} B$ გამოთვლადი f ფუნქციით. მაშინ ცხადია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი $\bigcup_{x \in C} W_{f(x)}$ სიმრავლე გახლეჩს $\bar{B}$-ს ორ უსასრულო ნაწილად, რაც ეწინააღმდეგება B სიმრავლის მაქსიმალურობას.

■

თეორემა 2.4.5 თუ A მაქსიმალური სიმრავლეა და B არის არა-მაქსიმალური ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, მაშინ $A \mid_{Q_1} B$ ან არსებობს არა-მაქსიმალური ჰიპერჰიპერმარტივი C სიმრავლე და მაქსიმალური D სიმრავლე ისეთი, რომ

$$A <_{Q_1} D <_{Q_1} C <_{Q_1} B.$$

დამტკიცება. დავუშვათ A და B ისეთი სიმრავლეებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემის პირობას და არ არიან Q_1-ით არასადარი. მაშინ ლემა 2.4.4-ის გამო $A <_{Q_1} B$ და ლემა 2.4.1-ის ძალით კი არსებობს ისეთი გამოთვლადი f ფუნქცია, რომ

(i) $A <_{Q_1} B$, f ფუნქციით, და
(ii) თუ $x \in \bar{A}$, მაშინ $\left| W_{f\,(x)} \cap \overline{B} \right| = 1$.

ვინაიდან A მაქსიმალური სიმრავლეა, ხოლო B არა-მაქსიმალური ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, ამიტომ ლემა 2.4.3-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\bar{B} \setminus \left(\bigcup_{x \in \bar{A}} W_{f(x)} \right) \neq \emptyset.$$

ვთქვათ $m \in \bar{B} \setminus \left(\bigcup_{x \in \bar{A}} W_{f(x)} \right)$. განვსაზღვროთ რეკურსიულად გადათვლადი C სიმრავლე შემდეგნაირად: $C = B \cup \{m\}$. მაშინ ცხადია, რომ C არ არის მაქსიმალური და ლემა 2.2.4-ის ძალით $C <_{Q_1} B$ და C ჰიპერჰიპერმარტივია. ადვილი დასანახია რომ $A \leq_{Q_1} C$ იგივე f ფუნქციით. ვინაიდან A არის მაქსიმალური და C არის არა-მაქსიმალური ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, ისევ ლემა 2.4.3-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\bar{C} \setminus \left(\bigcup_{x \in \bar{A}} W_{f(x)} \right) \neq \emptyset.$$

ვთქვათ $n \in \bar{C} \setminus \left(\bigcup_{x \in \bar{A}} W_{f(x)} \right)$ და $p \in A$. განვსაზღვროთ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე $D = A \setminus \{p\}$. ცხადია D მაქსიმალური სიმრავლეა და $D \leq_{Q_1} C$ გამოთვლადი g ფუნქციით, სადაც

$$W_{g(x)} = \begin{cases} W_{f(x)}, & \text{თუ } x \neq p, \\ W_{f(x)} \cup \{n\}, & \text{თუ } x = p. \end{cases}$$

რადგან D მაქსიმალური სიმრავლეა, ხოლო C არის არა-მაქსიმალური ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე, ამიტომ ლემა 2.4.4-ის ძალით $C \nleq_{Q_1} D$ და ლემა 2.2.4-ის ძალით $A <_{Q_1} D$. ე.ი. $A <_{Q_1} D <_{Q_1} C <_{Q_1} B$.

■

შენიშვნა 2.4.6 შევნიშნოთ, რომ არსებობს ისეთი რეკურსიულად გადათვლადი A და B სიმრავლეები, რომ A არის მაქსიმალური, B არის არა-მაქსიმალური ჰიპერჰიპერმარტივი და $A <_{Q_1} B$. მართლაც, ვთქვათ A და X მაქსიმალური სიმრავლეებია. მაშინ გვაქვს, რომ $A \leq_{Q_1} A \oplus X$ და $A \oplus X$ ჰიპერჰიპერმარტივია, სადაც $A \oplus X = \{2x : x \in A\} \cup \{2x+1 : x \in X\}$. მეორე მხრივ, ვინაიდან რეკურსიულად გადათვლადი $\{2x : x \in \omega\}$ სიმრავლე ხლეჩს$\overline{A \oplus X}$-ს ორ უსასრულო ნაწილად გამოდის, რომ $A \oplus X$ არ არის მაქსიმალური და მაშინ ლემა 2.4.4-ის ძალით $A \oplus X \nleq_{Q_1} A$. მაშასადამე თუ $B = A \oplus X$, მაშინ გვექნება რომ $A <_{Q_1} B$.

შედეგი 2.4.7 არსებობს Q_1-ხარისხების ისეთი უსასრულო ერთობლიობები $\{\boldsymbol{a_i}\}_{i \in \omega}$ და $\{\boldsymbol{b_i}\}_{i \in \omega}$, რომ ყოველი i, j-სთვის:

(i) $\boldsymbol{a_i} <_{Q_1} \boldsymbol{a_{i+1}}$, $\boldsymbol{b_{j+1}} <_{Q_1} \boldsymbol{b_j}$, $\boldsymbol{a_i} <_{Q_1} \boldsymbol{b_j}$;

(ii) ყოველი $\boldsymbol{a_i}$ მთლიანად შედგება მაქსიმალური სიმრავლეებისგან.

(iii) ყოველი $\boldsymbol{b_j}$ მთლიანად შედგება არა-მაქსიმალური ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეებისგან.

თეორემა 2.4.8 თუ A არის ჰიპეჰიპერმარტივი სიმრავლე, მაშინ არცერთი არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლად $B \leq_{Q_1} A$ სიმრავლეს არ გააჩნია მინიმალური Q_1-ხარისხი.

დამტკიცება. თუ A ჰიპერჰიპერმარტივია და B არის ისეთი არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, რომ $B \leq_{Q_1} A$, მაშინ B არის ჰიპერჰიპერმარტივი (იხ. შენიშვნა 2.5.2) და მაშინ B სიმრავლეს ვერ ექნება მინიმალური Q_1-ხარისხი ვინაიდან ლემა 2.2.4-ის გამო $B \cup \{m\} <_{Q_1} B$.

■

§ 2.5. რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხების ნაწილობრივად დალაგების შესახებ

ცნობილია, რომ რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა 1-ხარისხები არ ქმნიან ზედა ნახევარმესერს (იხ.[32], თეორემა 10.IV). ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხები გვაძლევს კიდევ ერთ მაგალითს რეკურსიულად გადათვლადი ხარისხების ისეთი ალგებრული სტრუქტურისა, რომელიც არ წარმოადგენს ზედა ნახევარმესერს.

თეორემა 2.5.1 არსებობს ორი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, რომელთაც არ გააჩნიათ რეკურსიულად გადათვლადი უმცირესი ზედა საზღვარი $\leq_{Q_1}$ დალაგების მიმართ.

დამტკიცება. ვთქვათ A და B ტიურინგის აზრით არასადარი მაქსიმალური სიმრავლეებია (იხ.[36]) და ვთქვათ $C = A \oplus B$, მაშინ როგორც [20]-შია დამტკიცებული C არის ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ $deg_{Q_1}(A)$-ს და $deg_{Q_1}(B)$-ს აქვთ უმცირესი ზედა საზღვარი რეკურსიულად გადათვლად Q_1-ხარისხებში, და ვთქვათ, D არის ამ უმცირეს ზედა საზღვარში შემავალი სიმრავლე, მაშინ $D \leq_{Q_1} C$ და ჩვენ შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ D არის ჰიპერჰიპერმარტივი. მართლაც, ვინაიდან არსებობს $\{W_{\alpha(x)}\}_{x\in\omega}$ სუსტი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე ისეთი, რომ ყოველი x-სთვის, $W_{\alpha(x)} \cap \overline{D} \neq \emptyset$, განვსაზღვროთ გამოთვლადი β ფუნქცია, შემდეგი სახით:

$$W_{\beta(x)} = U_{i\in W_{\alpha(x)}} W_{\gamma(i)}\,,$$

სადაც γ არის ისეთი გამოთვლადი ფუნქცია, რომ $D \leq_{Q_1} C$, γ ფუნქციით, მაშინ C არ არის ჰიპერჰიპერმარტივი, რაც წინააღმდეგობაა.

შენიშვნა 2.5.2 D სიმრავლის ჰიპერჰიპერმარტივობის დამტკიცებისას ჩვენ ფაქტიურად ვაჩვენეთ, რომ თუ Y არის ჰიპერჰიპერმარტივი, X არის რ.გ. და $X \leq_{Q_1} Y$, მაშინ X არის ჰიპერჰიპერმარტივი, ე.ი. ჰიპერჰიპერმარტივი ხარისხები რ.გ. ხარისხებში არიან მემკვიდრეობით ქვევით გაგრძელებადი $\leq_{Q_1}$-ის მიმართ.

რადგანაც $A \leq_{Q_1} D$, და $B \leq_{Q_1} D$, ამიტომ ლემა 2.4.1–ის ძალით არსებობს გამოთვლადი f და g ფუნქციები, ისეთი, რომ

$$x \in \overline{A} \;\Rightarrow\; \left|W_{f(x)} \cap \overline{D}\right| = 1$$

და

$$x \in \overline{B} \;\Rightarrow\; \left|W_{f(x)} \cap \overline{D}\right| = 1..$$

ვთქვათ, $\overline{D} \subseteq \bigcup_{x\in\overline{A}} W_{f(x)}$ ან $\overline{D} \subseteq \bigcup_{x\in\overline{B}} W_{g(x)}$, მაშინ ლემა 2.4.3-ის ძალით D არის მაქსიმალური სიმრავლე. ვინაიდან $deg_Q(A\oplus B)$ არის $deg_Q(A)$-ს და $deg_Q(B) -$ ს უმცირესი ზედა საზღვარი Q-ხარისხებში, ამიტომ მივიღებთ, რომ $D \equiv_Q A\oplus B$ $[23, \text{თეორემა } 1] -$ ის ძალით, (რომელიც ამბობს,

რომ თუ M მაქსიმალური სიმრავლეა, A ნებისმიერი სიმრავლეა და $M \equiv_Q A$, მაშინ $M \leq_m A$.) $D \leq_m A$ ან $D \leq_m B$. მაშინ $B \leq_Q A$ ან $A \leq_Q B$, რაც წინააღმდეგობაა. მაშასადამე გვაქვს

$$\overline{D} \setminus \bigcup_{x \in \overline{A}} W_{f(x)} \neq \emptyset ,$$

და

$$\overline{D} \setminus \bigcup_{x \in \overline{B}} W_{g(x)} \neq \emptyset .$$

ვთქვათ $a \in \overline{D} \setminus \bigcup_{x \in \overline{A}} W_{f(x)}$ და $b \in \overline{D} \setminus \bigcup_{x \in \overline{B}} W_{g(x)}$.

განვსაზღვროთ გამოთვლადი h ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$W_{h(x)} = \begin{cases} W_{g(x)} \cup \{b\}, & \text{თუ } a \in W_{g(x)} \\ W_{g(x)}, & \text{თუ } a \in \overline{W_{g(x)}} \end{cases}.$$

მაშინ $A \leq_{Q_1} D \cup \{a\}$, გამოთვლადი f ფუნქცით, და $B \leq_{Q_1} D \cup \{a\}$ გამოთვლადი h ფუნქციით. მაგრამ ლემა 2.2.4-ის გამო, $D \nleq_{Q_1} D \cup \{a\}$, რაც წინააღმდეგობაა.

■

შედეგი 2.5.3 არსებობს ორი $\prod_1^0$ -სიმრავლე, რომელთაც $\prod_1^0$ -სიმრავლეებში არ გააჩნიათ უმცირესი ზედა საზღვარი $\leq_{s_1}$ დალაგების მიმართ.

დამტკიცება. უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 2.5.1-დან.

■

თავი 3. მაქსიმალური სიმრავლეები, მათი ქვესიმრავლეები და Q_1-დაყვანადობა

მაქსიმალურ სიმრავლეებს განსაკუთრებული ადგილი უკავია რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა თეორიაში. ამ სიმრავლეების კვლევის შედეგად მიღებულია მრავალი საინტერესო და მნიშვნელოვანი თეორემა. მაგალითისათვის საკმარისია მოვიყვანოთ სოარის ცნობილი შედეგი იმის შესახებ, რომ ნებისმიერი ორი მაქსიმალური სიმრავლისთვის არსებობს რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეთა მესერის ისეთი ავტომორფიზმი, რომელსაც ერთი გადაჰყავს მეორეში.

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით მაქსიმალური სიმრავლის თვისებებს Q_1-დაყვანადობის მიმართ. ნაჩვენები იქნება, რომ თუ ორი მაქსიმალური სიმრავლე Q_1-ექვივალენტურია, მაშინ მათგან ერთ-ერთი მეორეზე 1-დაყვანადია. დამტკიცებულია, რომ ჰემიმაქსიმალური სიმრავლის Q_1-ხარისხი შეიცავს ერთადერთ რეკურსიულად გადათვლად 1-ხარისხს. გამოკვლეულია მაქსიმალური სიმრავლეების არატრივიალური გახლეჩვები და ნაჩვენებია, რომ თუ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო $M_1^0,\ M_1^1$ და $M_2^0,\ M_2^1$ კი წარმოადგენენ, შესაბამისად, M_1 და M_2 სიმრავლეების არატრივიალურ გახლეჩვებს და $M_1^0 \equiv_{Q_1} M_2^0$, მაშინ (i) $M_1^1 \equiv_1 M_2^1,\ \ M_1^0 \equiv_1 M_2^0,\ M_1 \equiv_m M_2$ და (ii) $M_1 \leq_1 M_2$ ან $M_2 \leq_1 M_1$. შესწავლილია მაქსიმალური სიმრავლის მაჟორული ქვესიმრავლის თვისებები და ნაჩვენებია, რომ თუ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო A და B არის შესაბამისად M_1 და M_2-ის მაჟორული ქვესიმრავლეები და $M_1 \backslash A \equiv_{Q_1} M_2 \backslash B$, მაშინ $M_1 \backslash A \equiv_m M_2 \backslash B,\ A \equiv_m B$ და $M_1 \equiv_m M_2$.

§3.1. რეკურსიულად გადათვლადი Q_1-ხარისხები და 1-დაყვანადობა

ამ პარაგრაფში დავამტკიცებთ, რომ თუ ორი მაქსიმალური სიმრავლე Q_1-ექვივალენტურია, მაშინ ერთ-ერთი 1-დაყვანადია მეორეზე.

წინა თავში ჩვენ მოვიყვანეთ მაქსიმალური სიმრავლის ცნება, ახლა კი განვსაზღვროთ r-მაქსიმალური სიმრავლე.

განსაზღვრება 3.1.1 რეკურსიულად გადათვლად M სიმრავლეს ეწოდება r-მაქსიმალური, თუ $\bar{M}$ უსასრულოა და არ არსებობს ისეთი რეკურსიული W სიმრავლე, რომ $|W \cap \bar{M}\ | = |\bar{W}\ \cap \bar{M}| = \infty$, (სადაც სიმბოლო $|X|$ აღნიშნავს მოცემული X სიმრავლის სიმძლავრეს).

ქვემოთ მოცემული ლემა 3.1.2 დამტკიცებულია [17]-ში. გადმოცემის სისრულისთვის ამ ლემას მოვიყვანთ დამტკიცებით.

ლემა 3.1.2 ვთქვათ M მაქსიმალური სიმრავლეა, მაშინ ყოველი ნაწილობრივად რეკურსიული φ ფუნქციისათვის, თუ $\varphi(\bar{M}\ ) \cap \bar{M}$ უსასრულოა, მაშინ

$$\{x:\ x \in \bar{M}\ \ \& \varphi(x) \in \bar{M}\ \ \&\ \varphi(x) \neq x\}$$

სიმრავლე სასრულია.

დამტკიცება. M სიმრავლის მაქსიმალურობის გამო საკმარისია ლემა დავამტკიცოთ ყოველი გამოთვლადი f ფუნქციისთვის. მართლაც, ვინაიდან M მაქსიმალური სიმრავლეა და $\varphi(\bar{M}) \cap \bar{M}$ უსასრულოა, ამიტომ გვექნება, რომ $dom\ \varphi \cap \bar{M}$ უსასრულოა. მაშასადამე თითქმის ყველა $x \in \bar{M}$ -სთვის $x \in dom\ \varphi$, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია, რომელიც ემთხვევა φ-ს თითქმის ყველა $x \in \bar{M}$ -ზე.

დავუშვათ $|f(\bar{M}) \cap \bar{M}| = \infty$.

კობზევმა [14] აჩვენა, რომ თუ N არის r-მაქსიმალური სიმრავლე, მაშინ ნებისმიერი გამოთვლადი g ფუნქციისთვის

$$|\{ g(x): x \in \bar{N}\ \&\ g(x) \in \bar{N}\ \&\ g(x) \neq x\}| < \infty,$$

ჩვენი დაშვების და კობზევის ამ შედეგის გამოყენებით M სიმრავლეზე გამოვა, რომ:

$$|\{ f(x):\ x \in \bar{M}\ \&\ f(x) \in \bar{M}\ \&\ f(x) = x\}| = \infty.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$|\{ x:\ x \in \overline{M}\ \&\ f(x) \in \bar{M}\ \&\ f(x) = x\}| = \infty,$$

მაგრამ თუ

$$|\{ x:\ x \in \bar{M}\ \&\ f(x) \in \bar{M}\ \&\ f(x) \neq x\}| = \infty,$$

მაშინ გამოვა, რომ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები

$$\{x: f(x) = x\} \quad \text{და} \quad \{x: f(x) \neq x\}$$

ხლეჩენ $\bar{M}$ -ს ორ უსასრულო სიმრავლედ, რაც ეწინააღმდეგება M სიმრავლის მაქსიმალურობას, ე.ი.

$$|\{ x:\ x \in \bar{M}\ \&\ f(x) \in \bar{M}\ \&\ f(x) \neq x\}| < \infty.$$

■

თეორემა 3.1.3 თუ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია და $M_1 \equiv_{Q_1} M_2$, მაშინ $M_1 \leq_1 M_2$ ან $M_2 \leq_1 M_1$.

დამტკიცება. ვთქვათ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია და $M_1 \equiv_{Q_1} M_2$, მაშინ შედეგი 2.2.2-ის გამო, არსებობს გამოთვლადი f და g ფუნქციები ისეთი, რომ $M_1 \leq_{Q_1} M_2$ გამოთვლადი f ფუნქციით, $M_2 \leq_{Q_1} M_1$ გამოთვლადი g ფუნქციით და ორივე სიმრავლე $W_{f(x)}$ და $W_{g(x)}$ სასრულია ყოველი $x \in \omega$-სთვის.

ლემა 3.1.4 $\overline{M_1} \subseteq^* \bigcup_{x\in\bar{M}_2} W_{g(x)}$ და $\overline{M_2} \subseteq^* \bigcup_{x\in\bar{M}_1} W_{f(x)}$ (სადაც მოცემული X და Y სიმრავლეებისთვის სიმბოლო $X \subseteq^* Y$ ნიშნავს იმას, რომ $X\backslash Y$ სასრულია).

დამტკიცება. დავუშვათ $R = \bar{M}_2 \cap (\bigcup_{x\in\overline{M_1}} W_{f(x)})$ სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$x \in \overline{M_1} \quad <=> \quad W_{f(x)} \cap R \neq \emptyset,$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ $\overline{M_1}$ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, რაც წინააღმდეგობაა ე.ი. R სიმრავლე უსასრულოა. თუ $\overline{M_2}/R$ უსასრულოა, მაშინ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე $\bigcup_{x\in w} W_{f(x)}$ გახლეჩს $\overline{M_2}$-ს ორ უსასრულო ნაწილად. რაც არ შეიძლება. ე.ი. $\overline{M_2} \subseteq^* \bigcup_{x\in\bar{M}_1} W_{f(x)}$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $\overline{M_1} \subseteq^* \bigcup_{x\in\bar{M}_2} W_{g(x)}$.

■

ახლა განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული φ ფუნქცია შემდეგნაირად: ერთდროულად გადავთვალოთ $\{W_{g(i)}\}_{i\in\omega}$ და $\{W_{f(j)}\}_{j\in\omega}$ სიმრავლეები და მოცემული z-სთვის ვიპოვოთ ისეთი x და y რიცხვები (თუ არსებობენ), რომ

$$z \in W_{g(y)} \ \& \ y \in W_{f(x)},$$

თუ ვიპოვით ასეთ x და y წყვილს, მაშინ განვსაზღვროთ $\varphi(z) = x$.

ლემა 3.1.5 $\varphi(\overline{M_1}) \cap \overline{M_1}$ უსასრულო სიმრავლეა.

დამტკიცება. ლემა 3.1.4-დან გამომდინარე თითქმის ყოველი x-სათვის , თუ $x \in \overline{M_1}$ მაშინ $\varphi(x)$ განსაზღვრულია და $\varphi(x) \in \overline{M_1}$.

დამყვანი f და g ფუნქციები კი ისეთია, რომ ყოველი x და y-სთვის გვაქვს, რომ

- $W_{g(x)} \cap \overline{M_1}$ სასრულია,
- $x \neq y$ => $W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset$,

და

- $W_{f(x)} \cap \overline{M_2}$ სასრულია,
- $x \neq y$ => $W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$,

მაშინ φ ფუნქციის განსაზღვრით გვაქვს, რომ $\varphi(\overline{M_1}) \cap \overline{M_1}$ უსასრულოა.

ლემა 3.1.2 -ის ძალით

$$\{x\colon\ x \in \overline{M_1} \quad \&\ \varphi(x) \in \overline{M_1} \quad \&\ \varphi(x) \neq x\}$$

სასრული სიმრავლეა, რაც იმას ნიშნავს, რომ თითქმის ყველა $x \in \overline{M_1}$ -სათვის $\varphi(x)$ კრებადია და $\varphi(x) = x$. მაშინ φ ფუნქციის განსაზღვრით არსებობს (ერთადერთი) y ისეთი, რომ

$$x \in W_{g(y)} \ \& \ y \in \ W_{f(x)} \ .$$

მაშინ თითქმის ყველა x-სთვის გვექნება:

$$x \in \overline{M_1} \Rightarrow x \in W_{g(y)} \ \& \ y \in W_{f(x)}$$

$$\Rightarrow \quad y \in \overline{M_2}.$$

ვთქვათ

$$A = \overline{M_1} \backslash \{x\colon \ (\exists y)[y \in W_{f(x)} \ \ \& \ \ x \in W_{g(y)}]\}$$

და

$$B = \overline{M_2} \backslash \{x\colon \ (\exists y)[y \in W_{g(x)} \ \ \& \ \ x \in W_{f(y)}]\}.$$

მაშინ A და B სასრული სიმრავლეებია და ვთქვათ

$$A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_n\} \text{ და } B = \{b_0 < b_1 < \ldots < b_m\}$$

თუ $n \leq m$, მაშინ განვსაზღვროთ გამოთვლადი h ფუნქციის მნიშვნელობები, რომელიც მოახდენს M_1 სიმრავლის 1-დაყვანას M_2 სიმრავლეზე.

დავუშვათ h ფუნქცია უკვე განსაზღვრულია ყველა $n < x$-სთვის ისე, რომ $n \in M$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $h(n) \in M_2$ და h არის ცალსახა $n < x$ რიცხვებზე. ვთქვათ R არის M_2-ის უსასრულო რეკურსიული ქვესიმრავლე. ერთდროულად გადავითვალოთ M_1 , $\{W_{f(j)}\}_{j \in \omega}$ და $\{W_{f(i)}\}_{i \in \omega}$ სიმრავლეები და გავაჩეროთ პროცედურა, როგორც კი შესრულდება ერთ-ერთი ქვემოთ მოყვანილი შემთხვევებიდან:

<u>შემთხვევა 1.</u> თუ $x \in A$ მაშინ გავაჩეროთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = b_i$, თუ $x = a_i$.

<u>შემთხვევა 2.</u> თუ x გამოჩნდება M_1-ში, მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ

$$h(x) = \min(R \backslash \{h(i)\colon \ i < x\})$$

<u>შემთხვევა 3.</u> თუ $x \in W_{g(y)} \ \& \ y \in W_{f(x)}$. მაშინ

(a) თუ $y \notin \{h(i)\colon \ i < x\}$ მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ

$$h(x) = y \ ;$$

(b) თუ $y \in \{h(i) : \ i < x\}$ მაშინ $y \notin \overline{M_2}$. ამის საჩვენებლად დავუშვათ, რომ $y \in \{h(i) : \ i < x\} \cap \overline{M_2}$. მაშინ არსებობს $i < x$, ისეთი , რომ $i \in W_{g(y)}$ და $y \in W_{f(i)}$: მაგრამ მაშინ $W_{f(i)} \cap W_{f(x)} \neq \varnothing$, რაც წინააღმდეგობაა. მაშასადამე $y \in M_2$ და ვინაიდან $x \in W_{g(y)}$ & $y \in W_{f(x)}$ მივიღებთ, რომ $x \in M_1$, შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ:

$$h(x) = min(R \backslash \{h(i) \colon i < x\}).$$

ცხადია, რომ

$$\omega = M_1 \cup A \cup \left\{x \colon (\exists y)[y \in W_{f(x)} \ \ \& \ \ x \in W_{g(y)}]\right\}.$$

მაშასადამე, განხილული სამი შემთხვევა ფარავს ყველა შესაძლებლობას. ცხადია $M_1 \leq_1 M_2$ გამოთვლადი h ფუნქციით.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $M_2 \leq_1 M_1$ თუ $m \leq n$.

§ 3.2. რეკურსიულად გადათვლადი 1- ხარისხები რეკურსიულად გადათვლად Q_1- ხარისხებში

რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეებს შორის მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს ჰემიმაქსიმალურ სიმრავლეებს. ჰემიმაქსიმალური სიმრავლის ცნება შემოიტანეს დაუნიმ და სტობმა [11] და აჩვენეს ჰემიმაქსიმალური სიმრავლეების ძალიან საინტერესო თვისება, რომ ისინი ქმნიან ორბიტას, კერძოდ, ნებისმიერი ორი ჰემიმაქსიმალური სიმრავლე არის ავტომორფული. ამ პარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცებთ ჰემიმაქსიმალური სიმრავლის კიდევ ერთ საინტერესო თვისებას, კერძოდ ვაჩვენებთ, რომ ჰემიმაქსიმალური სიმრავლის Q_1-ხარისხი შეიცავს მხოლოდ ერთ რეკურსიულად გადათვლად 1-ხარისხს.

განსაზღვრება 3.2.1 A სიმრავლეს ეწოდება ჰემიმაქსიმალური, თუ არსებობს მაქსიმალური სიმრავლე M და M-ის არატრივიალური გახლეჩა M_0, M_1 ისეთი, რომ $A = M_0$.

არსად მარტივი სიმრავლის ცნება შემოიტანა შორმა [33] შემდეგი სახით:

განსაზღვრება 3.2.2 რეკურსიულად გადათვლად A სიმრავლეს ეწოდება არსად მარტივი, თუ ყოველი რეკურსიულად გადათვლადი B სიმრავლისათვის, რომლისთვისაც $B \setminus A$ უსასრულოა, არსებობს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე $W \subseteq B \setminus A$.

[24]-ში დამტკიცებულია, რომ თუ A რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, B არსად მარტივი სიმრავლეა და $A \leq_Q B$, მაშინ A არსად მარტივი სიმრავლეა.

ლემა 3.2.3 ვთქვათ A არის ჰემიმაქსიმალური სიმრავლე, ხოლო B არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, ისეთი, რომ $B \leq_{Q_1} \mathrm{A}$, მაშინ B ჰემიმაქსიმალური სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ A ჰემიმაქსიმალურია, ხოლო B არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე ისეთი, რომ $B \leq_{Q_1} A$. შედეგი 2.2.2-ით, ვთქვათ, f გამოთვლადი ფუნქციაა ისეთი, რომ ყოველი x და y-ისთვის:

1. $x \in B \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq A$,
2. $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \varnothing$,
3. $W_{f(x)}$ სასრულია.

ვთქვათ, C არის რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, ისეთი, რომ $\mathrm{A} \cap C = \emptyset$ და $M = \mathrm{A} \cup C$ მაქსიმალური სიმრავლეა. [19, თეორემა 8]-ში დამტკიცებულია, რომ თუ M მაქსიმალური სიმრავლეა და M არის არარეკურსიულ რეკურსიულად გადათვლად M_1 და M_2 თანაუკვეთ სიმრავლეთა გაერთიანება, მაშინ ორივე M_1-იც და M_2-იც არსად მარტივი სიმრავლეებია. შესაბამისად, A არსად მარტივია.

ვთქვათ $B_1 = \{x : W_{f(x)} \cap C \neq \emptyset\}$. მაშინ B_1 რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა და $B_1 \cap B = \emptyset$.

ვაჩვენოთ, რომ B_1 არაა გამოთვლადი. დავუშვათ, რომ B_1 გამოთვლადია, მაშინ $\overline{B_1}$-ც გამოთვლადია და $\overline{B_1}\backslash B$ უსასრულოა: მართლაც, თუ $\overline{B_1}\backslash B$ სასრულია, მაშინ გამოდის, რომ B რეკურსულია, რაც წინააღმდეგობაა. რადგან A არსად მარტივია და $B \leq_Q A$, გამოდის, რომ (როგორც უკვე აღვნიშნეთ) B-ც არსად მარტივია [24]. მაშინ არსებობს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე W ისეთი, რომ $W \subseteq \overline{B_1}\backslash B$. ვთქვათ, W_1 და W_2 თანაუკვეთი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებია, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ და $W = W_1 \cup W_2$. მაშინ $(\bigcup_{i \in W_1} W_{f(i)}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა და

$$\left(\bigcup_{i \in w_1} W_{f(i)}\right) \cap \left(\bigcup_{i \in W_2} W_{f(i)}\right) = \emptyset,$$

მაგრამ M მაქსიმალური სიმრავლეა. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

მაშინ B_1 არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, $B \cap B_1 = \emptyset$ და $\overline{B \cup B_1}$ უსასრულოა. თუ $B \cup B_1$ არ არის მაქსიმალური სიმრავლე, მაშინ არსებობს რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე W, ისეთი, რომ $\overline{W} \cap \overline{B \cup B_1}$ და $\overline{W} \cap \overline{B \cup B_1}$ უსასრულო სიმრავლეებია. მაშინ გამოდის, რომ $\left(\bigcup_{x \in W} W_{f(x)}\right) \cap \overline{M}$ და $\overline{\left(\bigcup_{x \in W} W_{f(x)}\right)} \cap \overline{M}$ უსასრულო სიმრავლეებია, რაც ეწინააღმდეგება M-ის მაქსიმალურობას.

■

თეორემა 3.2.4 თუ C, D ჰემიმაქსიმალური სიმრავლეებია, მაშინ

$$C \equiv_{Q_1} D \iff C \equiv_1 D.$$

დამტკიცება. დავუშვათ, C, D ჰემიმაქსიმალური სიმრავლეებია და $C \equiv_{Q_1} D$. მაშინ შედეგი 2.2.2-ით არსებობს გამოთვლადი ფუნქციები f და g ისეთი, რომ ყოველი x, y-სთვის

(c_1) $x \in C \iff W_{f(x)} \subseteq D$,

(c_2) $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$,

(c_3) $W_{f(x)}$ - სასრულია.

და

(d_1) $x \in D \iff W_{g(x)} \subseteq C$,

(d_2) $x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset$,

(d_3) $W_{g(x)}$ - სასრულია.

ვთქვათ, M_1, M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ისეთი, რომ

$$M_1 = C \cup C_1, \ M_2 = D \cup D_1$$

და

$$C \cap \ C_1 = D \cap D_1 = \emptyset.$$

ცხადია $\left|\{x: f(x) \in \overline{M} \& f(x) \neq x\}\right| < \infty$, ვინაიდან სხვა შემთხვევაში რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები

$$\{x: f(x) = x\} \text{ და } \{x: f(x) \neq x\}$$

გახლეჩდა $\overline{M}$-ს ორ უსასრულო სიმრავლედ, რაც წინააღმდეგობაა.

ლემა 3.2.5 $\overline{M_1} \subseteq^* \bigcup_{x\in\overline{M}_2} W_{g(x)}$ და $\overline{M_2} \subseteq^* \bigcup_{x\in\overline{M}_1} W_{f(x)}$ (სადაც მოცემული X და Y სიმრავლეებისთვის სიმბოლო $X \subseteq^* Y$ ნიშნავს იმას, რომ $X \setminus Y$ სასრულია).

დამტკიცება. დავუშვათ,

$$R = \overline{M_1} \cap \left(\bigcup_{x\in\overline{M}_2} W_{g(x)}\right).$$

არის სასრული, და, ვთქვათ

$$E = \left\{x: x \in D_1 \ \& \ W_{g(x)} \cap C_1 \neq \emptyset\right\}.$$

მაშინ

$$x \in \overline{M_2} \cup E \ \Leftrightarrow \ W_{g(x)} \cap (C_1 \cup R) \neq \emptyset \ ,$$

ე.ი. $\overline{M_2} \cup E$ არის რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე. მაგრამ $\overline{M_2} \cup D_1 = (\overline{M_2} \cup E) \cup D_1$ ე.ი. $\overline{M_2} \cup D_1$ არის რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, ეს კი წინააღმდეგობაა. შესაბამისად, R უსასრულოა. თუ $\overline{M_1} \setminus R$ უსასრულოა, მაშინ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე $\bigcup_{x\in\omega} W_{g(x)}$ ხლეჩს $\overline{M_1}$-ს ორ უსასრულო ნაწილად, რაც წინააღმდეგობაა.

შემთხვევა $\overline{M_2} \subseteq^* \bigcup_{x\in\overline{M}_1} W_{f(x)}$ მტკიცდება ანალოგიურად.

■

შედეგი 3.2.6 $\overline{M_1} \cap (\bigcup_{x\in D} W_{g(x)})$ და $\overline{M_2} \cap (\bigcup_{x\in C_1} W_{f(x)})$ სასრული სიმრავლეებია.

დამტკიცება. ცხადია.

■

განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია φ შემდეგნაირად. ერთდროულად გადავითვალოთ სიმრავლეები $\left\{W_{g(i)}\right\}_{i\in\omega}$ და $\{W_{f(j)}\}_{j\in\omega}$ და მოცემული z-სთვის ვიპოვოთ ისეთი x და y რიცხვები (თუ არსებობენ), რომ

$$z \in W_{g(y)} \text{ და } y \in W_{f(x)}\ .$$

თუ ასეთ x და y-ს ვიპოვით, მაშინ განვსაზღვროთ $\varphi(z) = x$.

ლემა 3.2.7 $\varphi(\overline{M_1}) \cap \overline{M_1}$ უსასრულოა.

დამტკიცება. ლემა 3.2.5-დან და შედეგი 3.2.6-დან გამოდის, რომ თითქმის ყველა x-თვის, თუ $x \in \overline{M_1}$, მაშინ $\varphi(x)$ განსაზღვრულია და $\varphi(x) \in \overline{M_1}$. თუმცა, ყველა x, y-სთვის გვაქვს

(m_1) $W_{g(x)} \cap \overline{M_1}$ სასრულია,

(m_2) $x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset$

და

(n_1) $W_{f(x)} \cap \overline{M_2}$ სასრულია,

(n_2) $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$.

მაშინ φ ფუნქციის განსაზღვრით გამოდის, რომ $\varphi(\overline{M_1}) \cap \overline{M_1}$ უსასრულოა.

■

ლემა 3.1.2-ით

$$\{x\colon\ x \in \overline{M_1} \ \ \& \ \ \varphi(x) \in \overline{M_1} \ \ \& \ \ \varphi(x) \neq x\} \text{ სასრულია.}$$

მაშასადამე, თითქმის ყველა $x \in \overline{M} -$ სთვის, $\varphi(x)$ განსაზღვრულია და ტოლია x-ის, და მაშინ, φ-ს განსაზღვრის თანახმად, არსებობს (ერთადერთი) y, ისეთი, რომ

$$x \in W_{g(y)} \,\&\, y \in W_{f(x)}.$$

მაშინ თითქმის ყველა x-სთვის გვაქვს

$$x \in \overline{M_1} \Rightarrow x \in W_{g(y)}$$

და

$$y \in W_{f(x)} \Rightarrow y \in \overline{M_2} \cup D_1.$$

ვთქვათ

$$F = \overline{M_1} \backslash \{x\colon (\exists y)(y \in W_{f(x)} \ \& \ x \in W_{f(x)})\}.$$

მაშინ F სასრული სიმრავლეა.

განვსაზღვროთ მნიშვნელობები გამოთვლადი h ფუნქციისა, რომლითაც C სიმრავლე 1-დაყვანადია D სიმრავლეზე შემდეგნაირად:

დავუშვათ h უკვე განსაზღვრულია ყველა $n < x$ -თვის და თუ $n_1 \neq n_2$, მაშინ $h(n_1) \neq h(n_2)$ და $n \in C \Leftrightarrow h(n) \in D$. ვთქვათ, R და R_1, შესაბამისად D-სა და D_1-ის უსასრულო გამოთვლადი ქვესიმრავლეებია. ჩვენ დავიწყებთ C, $C_1 \cup F$,$\{W_{f(j)}\}_{j \in \omega}$ სიმრავლეების ერთდროულ გადათვლას და შევწყვეტთ პროცედურას მაშინვე, როგორც კი შემდეგი რამდენიმე შემთხვევიდან რომელიმე შესრულდება:

შემთხვევა 1. x მოიძებნა C-ში. მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ

$$h(x) = min\{n: n \in R \ \& \ n \notin \{h(0), \dots h(x-1)\}\}.$$

შემთხვევა 2. x მოიძებნა $C_1 \cup F$-ში. მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ

$$h(x) = min\{n: n \in R_1 \ \& \ n \notin \{h(0), \dots h(x-1)\}\}.$$

შემთხვევა 3. $x \in W_{g(y)}$ და $y \in W_{f(x)}$. მაშინ

(i) თუ $y \notin \{h(0), \dots h(x-1)\}$, შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = y$.

(ii) თუ $y \in \{h(0), \dots h(x-1)\}$, მაშინ $y \notin \overline{M_2}$. მართლაც, ვთქვათ $y \in \overline{M_2}$ და $y \in \{h(0), \dots h(x-1)\}$. მაშინ არსებობს $i < x$, ისეთი, რომ $i \in W_{g(y)}$ და $y \in W_{f(i)}$. მაშინ $W_{f(i)} \cap W_{f(x)} \neq \emptyset$, რაც წინააღმდეგობაა. შესაბამისად, $y \in D \cup D_1$. გადავთვალოთ D და D_1 ერთდროულად. თუ $y \in D$, მაშინ , რადგან $x \in W_{g(y)}$ და $y \in W_{f(x)}$, გვაქვს $x \in C$ და განვსაზღვროთ

$$h(x) = min\{n: n \in R \ \& \ n \notin \{h(0), \dots h(x-1)\}\}.$$

თუ $y \in D_1$, მაშინ , რადგან

$$x \in W_{g(y)} \text{ და } y \in W_{f(x)} \ \Rightarrow \ x \in \overline{C}.$$

განვსაზღვროთ

$$h(x) = min\{n: n \in R_1 \ \& \ n \notin \{h(0), \dots h(x-1)\}\}.$$

ცხადია

$$\omega = C \cup C_1 \cup F \cup \{x: (\exists y)(y \in W_{f(x)} \ \& \ \ x \in W_{g(y)})\}.$$

მაშასადამე, ზემოთ განხილული სამი შემთხვევა მოიცავს ყველა შესაძლებლობას. ცხადია, $C \leq_1 D$ h-ით.

შემთხვევა $D \leq_1 C$ მტკიცდება ანალოგიურად.

■

თეორემა 3.2.4-ით და ლემა 3.2.3-ით გვაქვს შემდეგი:

თეორემა 3.2.8 ვთქვათ, $\boldsymbol{a}$ რაიმე ჰემიმაქსიმალური სიმრავლის Q_1-ხარისხია. მაშინ ყველა რეკურსიულად გადათვლადი $A, B \in \boldsymbol{a}$ სიმრავლეებისთვის გვაქვს $A \equiv_1 B$.

დამტკიცება. ცხადია.

■

ზახაროვმა [37] დაამტკიცა, რომ არსებობს s-ხარისხი, რომელიც შედგება ერთადერთი m-ხარისხისაგან. $\prod_1^0$ სიმრავლეებისთვის ჩვენ გვაქვს უფრო ძლიერი შედეგი:

შედეგი 3.2.9 არსებობს $\prod_1^0$ s_1 - ხარისხი $\boldsymbol{a}$, ისეთი, რომ ყოველი $\prod_1^0$ $A, B \in \boldsymbol{a}$ სიმრავლეებისთვის გვაქვს $A \equiv_1 B$.

დამტკიცება. უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 3.2.8-დან.

■

§3.3. მაქსიმალური სიმრავლეების არატრივიალური გახლეჩვები და

m - დაყვანადობა

ამ პარაგრაფში ნაჩვენები იქნება, რომ თუ ორი მაქსიმალური სიმრავლის შესაბამისი ჰემიმაქსიმალური ქვესიმრავლეები Q_1-ექვივალენტურია, მაშინ თვით ამ მაქსიმალური სიმრავლეებიდან ერთ-ერთი 1-დაყვანადია მეორეზე.

თეორემა 3.3.1 ვთქვათ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო M_1^0 , M_1^1 და M_2^0 , M_2^1 კი წარმოადგენენ, შესაბამისად, M_1 და M_2 სიმრავლეების არატრივიალურ გახლეჩვებს. თუ $M_1^0 \equiv_1 M_2^0$, მაშინ

(i) $M_1^1 \equiv_1 M_2^1$,

(ii) $M_1 \equiv_m M_2$,

(iii) $M_1 \leq_1 M_2$ ან $M_2 \leq_1 M_1$.

დამტკიცება. ვთქვათ $M_1^0 \equiv_1 M_2^0$, მაშინ მაიჰილის იზომორფიზმის თეორემის [34] თანახმად, არსებობს რეკურსიული გადანაცვლება p ისეთი , რომ

$$p(M_1^0) = M_2^0 .$$

ლემა 3.3.2 $\overline{M_2} \subseteq^* p(\overline{M_1})$, სადაც $X \subseteq^* Y$ აღნიშნავს იმას, რომ $X \backslash Y$ სასრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ $T = \overline{M_2} \cap p(\overline{M_1})$ სასრული სიმრავლეა. განვსაზღვროთ

$$E = \{x\colon\ x \in M_1^1\ \ \&\ \ p(x) \in M_2^1\}.$$

მაშინ

$$x \in \overline{M_1} \ \Leftrightarrow\ p(x) \in M_2^1 \cup T.$$

ე.ი. $\overline{M_1} \cup E$ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, მაგრამ

$$\overline{M_1} \cup M_1^1 = (\overline{M_1} \cup E) \cup M_1^1$$

და გამოდის, რომ $\overline{M_1} \cup M_1^1$ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, რაც წინააღმდეგობაა. ე.ი. T უსასრულო სიმრავლეა.

თუ $\overline{M_2} \backslash T$ უსასრულოა, მაშინ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე $W = p(M_1)$ გახლეჩს $\overline{M_2}$ -ს ორ უსასრულო ნაწილად, რასაც მივყავართ წინააღმდეგობამდე. მაშასადამე $\overline{M_2} \backslash T$ სასრულია და გვაქვს $\overline{M_2} \subseteq^* p(\overline{M_1})$.

■

განვსაზღვროთ X_1 , X_2, Y_1 და Y_2 სიმრავლეები შემდეგნაირად:

$$X_1 = \{x: x \in M_1^1 \quad \& \quad p(x) \in \overline{M_2}\},$$

$$Y_1 = \{x: x \in \overline{M_1} \quad \& \quad p(x) \in M_2^1\},$$

$$X_2 = p(Y_1) \text{ და } Y_2 = p(X_1).$$

ადვილი დასანახია, რომ ლემა 3.3.2 გვაძლევს შემდეგ შედეგს:

შედეგი 3.3.3 X_1, X_2, Y_1 და Y_2 სიმრავლეებიდან თითოეული სასრულია.

დამტკიცება. ცხადია.

■

ვთქვათ R_1^0 და R_1^1 არიან შესაბამისად M_1^0 და M_1^1 სიმრავლეების ისეთი უსასრულო რეკურსიული ქვესიმრავლეები, რომ $R_1^1 \cap X_1 = \emptyset$.

ვთქვათ $R_2^0 = p(R_1^0)$ და $p(R_1^1) = R_2^1$. ცხდაია, რომ R_2^0 და R_2^1 არიან შესაბამისად M_2^0 და M_2^1 სიმრავლეების უსასრულო რეკურსიული ქვესიმრავლეები. მაშინ მაიჰილის იზომორფიზმის თეორემის ძალით არსებობს რეკურსიული p_1 და p გადანაცვლებები ისეთი, რომ

$$p_1(R_1^1 \cup X_1) = R_2^1 \cup X_2 \quad \text{და } p_2(R_1^0 \cup Y_1) = R_2^0 .$$

(i) განვსაზღვროთ ცალსახა გამოთვლადი f ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$f(x) = \begin{cases} p_1(x), & \text{თუ} \quad x \in R_1^1 \cup X_1 , \\ p_2(x), & \text{თუ} \quad x \in R_1^0 \cup Y_1 , \\ p(x), & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში} \end{cases}$$

ცხადია $M_1^1 \leq_1 M_2^1$ გამოთვლადი f ფუნქციით.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $M_2^1 \leq_1 M_1^1$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $M_1^1 \equiv_1 M_2^1$.

(ii) განვსაზღვროთ გამოთვლადი g ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$g(x) = \begin{cases} p_1(x), & \text{თუ} \quad x \in R_1^1 \cup X_1 , \\ b, & \text{თუ} \quad x \in Y_1 , \\ p(x), & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში} \end{cases}$$

სადაც b არის $\overline{M_2}$-ის რაიმე ფიქსირებული ელემენტი. მაშინ გამოდის, რომ $M_1 \leq_m M_2$ გამოთვლადი g ფუნქციით. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $M_2 \leq_m M_1$, საიდანაც დავასკვნით, რომ $M_1 \equiv_m M_2$.

(iii) ვთქვათ $Y_1 = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_n\}$ და $Y_2 = \{b_0 < b_1 < \cdots < b_m\}$.

თუ $n \leq m$, მაშინ განვსაზღვროთ ცალსახა გამოთვლადი h_1 ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$h_1(x) = \begin{cases} p_1(x)\,, & \text{თუ} \quad x \in R_1^1 \cup X_1\,, \\ b_i\,, & \text{თუ} \quad x = a_i\,, \\ p(x)\,, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$$

ცხადია, რომ $M_1 \leq_1 M_2$ გამოთვლადი h_1 ფუნქციით.

თუ $m \leq n$, მაშინ განვსაზღვროთ გამოთვლადი h_2 ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$h_2(x) = \begin{cases} p_1^{-1}(x)\,, & \text{თუ} \quad x \in R_2^1 \cup X_2\,, \\ a_i\,, & \text{თუ} \quad x = b_i\,, \\ p^{-1}(x)\,, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$$

სადაც p_1^{-1} და p^{-1} არიან შესაბამისად p_1 და p ფუნქციების შექცეული ფუნქციები. მაშინ მივიღებთ, რომ $M_2 \leq_1 M_1$ გამოთვლადი h_2 ფუნქციით .

მაშასადამე $M_1 \leq_1 M_2$ ან $M_2 \leq_1 M_1$.

■

შედეგი 3.3.4 ვთქვათ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო M_1^0, M_1^1 და M_2^0, M_2^1 კი წარმოადგენენ, შესაბამისად, M_1 და M_2 სიმრავლეების არატრივიალურ გახლეჩვებს. თუ $M_1^0 \equiv_{Q_1} M_2^0$, მაშინ

(i) $M_1^1 \equiv_1 M_2^1$ და $M_1^1 \equiv_1 M_2^1$
(ii) $M_1 \equiv_m M_2$
(iii) $M_1 \leq_1 M_2$ ან $M_2 \leq_1 M_1$.

დამტკიცება. პირდაპირ მიიღება თეორემა 3.3.1-დან, რადგანაც თეორემა 3.2.4-ის გამო

$$M_1^0 \equiv_{Q_1} M_2^0 \;\Leftrightarrow\; M_1^0 \equiv_1 M_2^0.$$

■

§3.4. მაქსიმალური სიმრავლეების მაჟორული ქვესიმრავლეები და Q_1-დაყვანადობა

ამ პარაგრაფში ჩვენ ვაჩვენებთ მაქსიმალური სიმრავლეების მაჟორული ქვესიმრავლეების რამდენიმე საინტერესო თვისებას.

განსაზღვრება 3.4.1 მოცემული რეკურსიულად გადათვლადი $A \subseteq B$ სიმრავლეებისთვის. A არის B სიმრავლის მაჟორული ქვესიმრავლე (სიმბოლოებში $A \subset_m B$) თუ $B \setminus A$ უსასრულოა და ყოველი რეკურსიულად გადათვლადი W სიმრავლისთვის.

$$\overline{B} \subseteq^* W \Rightarrow \bar{A} \subseteq^* W .$$

ლახლანმა [15] აჩვენა, რომ ყოველ არარეკურსიულ რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს გააჩნია მაჟორული ქვესიმრავლე. ომანაძემ [23] დაამტკიცა, რომ თუ M მაქსიმალური სიმრავლეა, A ნებისმიერი სიმრავლეა და $M \equiv_Q A$, მაშინ $M \leq_m A$.

შემდეგი თეორემა გვაძლევს ანალოგიურ შედეგს:

თეორემა 3.4.2 ვთქვათ M მაქსიმალური სიმრავლეა, A არის M-ის მაჟორული ქვესიმრავლე, B ნებისმიერი სიმრავლეა და $M \setminus A \equiv_{Q_1} B$ მაშინ $M \setminus A \leq_m B$.

დამტკიცება: ვთქვათ M, A და B სიმრავლეები აკმაყოფილებენ თეორემის პირობას. დავუშვათ $B \leq_{Q_1} M \setminus A$ გამოთვლადი g ფუნქციით. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ლემას

ლემა 3.4.3 $\overline{M} \subseteq^* \bigcup_{x \in \overline{B}} W_{g(x)}$.

დამტკიცება. დავუშვათ

$$R = \overline{M} \cap \left(\bigcup_{x \in \overline{B}} W_{g(x)} \right)$$

სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$x \in \overline{B} \Leftrightarrow W_{g(x)} \cap (A \cup R) \neq \emptyset.$$

ე.ი. $\overline{B}$ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, მაგრამ ცნობილია, რომ არსებობს უმცირესი Q ხარისხი, რომელიც შედგება მხოლოდ $\prod_1^0$ სიმრავლეებისაგან [21] და თუ $\overline{M \setminus A}$ რეკურსიულად გადათვლადია, მაშინ $\overline{M} \subseteq \overline{M \setminus A}$ და რადგან $A \subset_m M$ მივიღებთ, რომ $M \setminus A \subseteq^* \overline{M \setminus A}$, რაც წინააღმდეგობაა.

მაშასადამე R უსასრულო სიმრავლეა. ცხადია, რომ

$$\overline{M} \cap \left(\bigcup_{x \in \overline{B}} W_{g(x)} \right) = \overline{M} \cap \left(\bigcup_{x \in \omega} W_{g(x)} \right) ,$$

და თუ $\overline{M} \nsubseteq^* \bigcup_{x \in \overline{B}} W_{g(x)}$, მაშინ გამოდის, რომ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე $\bigcup_{x \in \omega} W_{g(x)}$ ყოფს $\overline{M}$ -ს ორ უსასრულო სიმრავლედ, რაც წინააღმდეგობაა.

ე.ი. $\overline{M} \subseteq^* \bigcup_{x \in \overline{B}} W_{g(x)}$.

■

შედეგი 3.4.4 ყოველი x-სათვის

$$x \in \overline{B} \Rightarrow W_{g(x)} \cap \overline{M} \text{ სასრულია.}$$

დამტკიცება. თუ რაიმე x-სთვის $x \in \overline{B} \Rightarrow W_{g(x)} \cap \overline{M}$ უსასრულოა, მაშინ ლემა 3.4.3-ის გამო $W_{g(x)}$ გახლეჩს $\overline{M}$-ს ორ უსასრულო სიმრავლედ, რაც წინააღმდეგობაა.

■

ლემა 3.4.5 ვთქვათ M მაქსიმალური სიმრავლეა, ხოლო A არის M-ის მაჟორული ქვესიმრავლე. მაშინ ყოველი ნაწილობრივად რეკურსიული φ ფუნქციისათვის, თუ $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა, მაშინ

$$\{x\colon\ x \in M \backslash A\ \&\ \varphi(x) \in M \backslash A\ \&\ \varphi(x) \neq x\} \text{ სასრულია}$$

დამტკიცება. ლემა 3.1.2-ის გამო $\overline{M} \subseteq^* dom\, \varphi$ და თითქმის ყველა $x \in \overline{M}$-სათვის, $\varphi(x) = x$, მაშინ

$$W = \{x\colon\ x \in dom\, \varphi\ \ \&\ \varphi\ (x) = x\}$$

რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა და $\overline{M} \subseteq^* W$.

აქიდან გამომდინარე $M \setminus A \subseteq^* W$. ე.ი. თითქმის ყველა $x \in M \setminus A$ -სათვის $\varphi(x) = x$.

■

თეორემა 2.2.1-ის ძალით არსებობს ისეთი გამოთვლადი f ფუნქცია, რომ ყოველი x და y -სთვის:

$$x \in M \backslash A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B,$$

$$x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset,$$

$$W_{f(x)} \text{ სასრულია.}$$

განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული φ ფუნქცია შემდეგნაირად:

ერთდროულად გადავითვალოთ $\{W_{g(i)}\}_{i \in \omega}$ და $\{W_{f(j)}\}_{j \in \omega}$ სიმრავლეები და მოცემული z-სთვის ვიპოვოთ ისეთი მთელი x, y (თუ არსებობს), რომ

$$z \in W_{g(y)}\ \&\ \ y \in W_{f(x)}\,.$$

თუ ვიპოვით ასეთ x და y-ს, მაშინ განვსაზღვროთ $\varphi(z) = x$.

ლემა 3.4.6 $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა.

დამტკიცება. განვიხილოთ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე

$$C = \{x: (\exists y)\big(y \in W_{f(x)} \;\; \& \;\; W_{g(y)} \cap A \neq \emptyset\big)\}$$

და დავუშვათ, რომ

$$H = \big(\cup_{x \in \overline{M}} W_{f(x)}\big) \cap \overline{B}.$$

თუ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ უსასრულოდ ბევრი y-სთვის

$$y \in H \;\; \Rightarrow \;\; W_{g(y)} \cap \overline{M} \neq \emptyset.$$

მაშინ ნაჩვენები იქნება, რომ $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა.

დავუშვათ, რომ თითქმის ყველა y-სთვის:

$$y \in H \;\; \Rightarrow \;\; W_{g(y)} \cap A \neq \emptyset .$$

მაშინ $\overline{M} \subseteq^* C$.

თუ $x \in M \backslash A$, მაშინ $W_{f(x)} \subseteq B$ და ყოველი y-სთვის:

$$y \in W_{f(x)} \Rightarrow \;\; W_{g(y)} \subseteq M \backslash A.$$

მაშასადამე, $(M \backslash A) \cap C = \emptyset$. აქედან კი მივიღებთ, რომ $A \cup C =^* A \cup \overline{M}$. ე.ი. $A \cup \overline{M}$ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა და რადგან $A \subset_m M$, ამიტომ $M \backslash A \subseteq^* A \cup \overline{M}$, რაც წინააღმდეგობაა.

ე. ი უსასრულოდ ბევრი y-სთვის

$$y \in H \;\; \& \;\; W_{g(y)} \cap \overline{M} \neq \emptyset .$$

რადგან ყოველი x და y-სთვის გვაქვს:

$$W_{f(x)} \text{ სასრულია,}$$

$$x \neq y \;\Rightarrow\; W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$$

და

$$x \neq y \;\Rightarrow\; W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset ,$$

$$y \in \overline{B} \;\; \Rightarrow \;\; W_{g(y)} \cap \overline{M} \text{ სასრულია (შედეგი 3.4.4-ის გამო).}$$

მაშინ φ ფუნქციის განსაზღვრით გამოდის, რომ $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა.

ლემა 3.1.2-ის და ლემა 3.4.5-ის ძალით მივიღებთ, რომ

$$\{x: \; x \in \overline{M} \;\; \& \;\; \varphi(x) \in \overline{M} \;\; \& \;\; \varphi(x) \neq x\}$$

და

$$\{x\colon\ x \in M\backslash A\ \ \&\ \ \varphi(x) \in M\backslash A\ \ \&\ \ \varphi(x) \neq x\}$$

სასრული სიმრავლეებია, მაშასადამე თითქმის ყველა $x \in \overline{M} \cup (M\backslash A)$ -სთვის $\varphi(x)$ კრებადია და ტოლია x-ის, და მაშინ φ ფუნქციის განსაზღვრით არსებობს (ერთადერთი) y ისეთი, რომ

$$x \in W_{g(y)}\ \ \&\ y \in\ W_{f(x)}\ .$$

ე. ი თითქმის ყველა x-სთვის

$$x \in \overline{M} \cup (M\backslash A)\ \ \Rightarrow\ \left|\left\{y\colon\ y \in W_{f(x)}\ \&\ \ x \in W_{g(y)}\right\}\right| = 1\ .$$

მაშინ თითქმის ყველა x-სთვის გვექნება:

$$x \in \overline{M}\ \ \Rightarrow x \in W_{g(y)}\ \&\ y \in W_{f(x)} \Rightarrow y \in \overline{B}\ ,$$

$$x \in M\backslash A\ \ \Rightarrow x \in W_{g(y)}\ \&\ y \in W_{f(x)} \Rightarrow y \in B.$$

მარტივი შესამჩნევია, რომ

$$E = (M\backslash A)\backslash\left\{x\colon (\exists y)\left(y \in W_{f(x)}\right)\ \&\ x \in W_{g(y)}\right\}$$

და

$$F = \overline{M}\backslash\left\{x\colon (\exists y)\left(y \in W_{f(x)}\right)\ \&\ x \in W_{g(y)}\right\}$$

სასრული სიმრავლეებია.

განვსაზღვროთ $M\backslash A$ სიმრავლის B სიმრავლეზე m-დაყვანადობით დამყვანი გამოთვლადი h ფუნქციის მნიშვნელობები შემდეგნაირად:

ერთდროულად გადავთვალოთ $A \cup F$, E, $\left\{W_{f(j)}\right\}_{j\in\omega}$ და $\left\{W_{g(i)}\right\}_{i\in\omega}$ სიმრავლეები და შევწყვიტოთ პროცედურა როგორც კი რომელიმე შესრულდება შემდეგი შემთხვევებიდან:

შემთხვევა 1. თუ x გამოჩნდა $A \cup F$-ში. შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = b_1$, სადაც b_1 არის $\overline{B}$-ს ფიქსირებული ელემენტი.

შემთხვევა 2. $x \in W_{g(y)}\ \&\ y \in W_{f(x)}$ მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = y$

შემთხვევა 3. თუ $x \in E$, მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = b$, სადაც b არის B-ს ფიქსირებული ელემენტი.

ცხადია, რომ

$$\omega = A \cup F \cup E \cup \left\{x\colon (\exists y)(y \in W_{f(x)}\ \&\ \ x \in W_{g(y)})\right\}.$$

მაშასადამე, სამი განხილული შემთხვევა მოიცავს ყველა შესაძლებლობას და ცხადია $M\backslash A \leq_m B$

გამოთვლადი h ფუნქციით.

■

თეორემა 3.4.7 ვთქვათ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო A და B არის შესაბამისად M_1 და M_2-ის მაჟორული ქვესიმრავლეები. თუ $M_1 \backslash A \equiv_{Q_1} M_2 \backslash B$, მაშინ

(i) $M_1 \backslash A \equiv_m M_2 \backslash B$,
(ii) $A \equiv_m B$,
(iii) $M_1 \equiv_m M_2$.

დამტკიცება. (i) ცხადია, რომ ეს დებულება უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 3.4.2-დან, მაგრამ ჩვენ მოვიყვანთ მის პირდაპირ მტკიცებას, ვინაიდან ამ მტკიცებაში აგებული ფუნქციები იქნება გამოყენებული სხვა დებულებების დამტკიცებისას.

ვთქვათ, M_1 , M_2 , A და B სიმრავლეები აკმაყოფილებენ თეორემის პირობას. მაშინ თეორემა 2.2.1-ის ძალით არსებობს ისეთი გამოთვლადი f და g ფუნქციები, რომ ყოველი x და y -სთვის

$$x \in M_1 \backslash A \iff W_{f(x)} \subseteq M_2 \backslash B ,$$

$$x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset ,$$

$W_{f(x)}$ სასრულია.

და

$$x \in M_2 \backslash B \iff W_{g(x)} \subseteq M_1 \backslash A ,$$

$$x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset ,$$

$W_{g(x)}$ სასრულია.

განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული φ ფუნქცია შემდეგნაირად:

ერთდროულად გადავითვალოთ $\{W_{g(i)}\}_{i \in \omega}$ და $\{W_{f(j)}\}_{j \in \omega}$ სიმრავლეები და მოცემული z-სთვის ვიპოვოთ ისეთი მთელი x, y (თუ არსებობს), რომ

$$z \in W_{g(y)} \ \& \ y \in W_{f(x)} .$$

ლემა 3.4.8 $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა.

დამტკიცება. იხილეთ ლემა 3.4.6-ის დამტკიცება.

■

ლემა 3.1.2-ის და ლემა 3.4.5-ის ძალით მივიღებთ, რომ

$$\{x\colon\ x \in \overline{M_1}\ \&\ \varphi(x)\ \in \overline{M_1}\ \&\ \varphi(x)\ \neq x\}$$

და

$$\{x\colon\ x \in \overline{M_1}\backslash A\ \&\ \varphi(x)\ \in \overline{M_1}\backslash A\ \&\ \varphi(x)\ \neq x\}$$

სასრული სიმრავლეებია. მაშასადამე თითქმის ყველა $x \in \overline{M_1} \cup (M_1\backslash A)$-სათვის $\varphi(x)$ კრებადია და ტოლია x -ის და მაშინ φ ფუნქციის განსაზღვრითარსებობს (ერთადერთი) y ისეთი, რომ

$$x \in W_{g(y)}\ \ \&\ \ y \in W_{f(x)}.$$

მაშინ თითქმის ყველა x -ისთვის გვექნება:

$$x \in \overline{M_1} \Rightarrow x \in W_{g(y)}\ \ \&\ \ y \in W_{f(x)} \Rightarrow y \in \overline{M_2}\ ,$$

$$x \in \overline{M_1}\backslash A \Rightarrow x \in W_{g(y)}\ \ \&\ \ y \in W_{f(x)} \Rightarrow y \in \overline{M_2}\backslash B\ .$$

ვთქვათ

$$F = \overline{M_1}\backslash\{x\colon\ (\exists y)(y \in W_{f(x)}\ \ \&\ \ x \in W_{g(y)})\ \}$$

და

$$E = (M_1\backslash A)\backslash\{x\colon\ (\exists y)(y \in W_{f(x)}\ \ \&\ \ x \in W_{g(y)})\ \}\ .$$

ცხადია F და E სასრული სიმრავლეებია.

განვსაზღვროთ $\overline{M_1}\backslash A$ სიმრავლის $\overline{M_2}\backslash B$ სიმრავლეზე m-დაყვანადობით დამყვანი გამოთვლადი h ფუნქციის მნიშვნელობები შემდეგნაირად:

დავუშვათ h უკვე განსაზღვრულია ყოველი $n < x$-სთვის და $n \in \overline{M_1}\backslash A \Leftrightarrow h(n) \in \overline{M_2}\backslash B$.

ვთქვათ R არის B სიმრავლის უსასრულო რეკურსიული ქვესიმრავლე. ერთდროულად გადავითვალოთ A_1, $\{W_{f(j)}\}_{j\in\omega}$ და $\{W_{g(i)}\}_{i\in\omega}$ სიმრავლეები და შევწყვიტოთ პროცედურა, როგორც კი რომელიმე შესრულდება შემდეგი შემთხვევებიდან:

შემთხვევა 1. თუ x გამოჩნდა A -ში, მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ

$$h(x) = min\{n\colon\ n \in R\ \ \&\ \ n \notin \{h(0), \dots, h(x-1)\}\}$$

შემთხვევა 2. თუ $x \in W_{g(y)}\ \ \&\ \ y \in W_{f(x)}$, მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = y$.

შემთხვევა 3. თუ $x \in E$, მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = a$, სადაც a არის $M_2\backslash B$ -ს ფიქსირებული ელემენტი.

შემთხვევა 4. თუ $x \in F$, მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = b$, სადაც b არის M_2 -ის ფიქსირებული ელემენტი.

ცხადია, რომ

$$\omega = A \cup E \cup F \cup \{x:\ (\exists y)(y \in W_{f(x)}\ \&\ x \in W_{g(y)}\}.$$

მაშასადამე, ოთხი განხილული შემთხვევა მოიცავს ყველა შესაძლებლობას და ცხადია $M_1 \backslash A \leq_m M_2 \backslash B$ გამოთვლადი h ფუნქციით.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $M_2 \backslash B \leq_m M_1 \backslash A$.

ე.ი. $M_1 \backslash A \equiv_m M_2 \backslash B$.

(i i) ვთქვათ

$$F_1 = \{x:\ (\exists y)(x \in \overline{M_1}\ \&\ x \in W_{g(y)}\ \&\ y \in W_{f(x)}\ \&\ y \in B)\},$$

$$F_2 = \{x:\ (\exists y)(x \in \overline{M_2}\ \&\ x \in W_{f(y)}\ \&\ y \in W_{g(x)}\ \&\ y \in A)\},$$

$$E_1 = \{x:\ (\exists y)(x \in A\ \&\ x \in W_{g(y)}\ \&\ y \in W_{f(x)}\ \&\ y \in \overline{M_2})\},$$

$$E_2 = \{x:\ (\exists y)(x \in B\ \&\ x \in W_{f(y)}\ \&\ y \in W_{g(x)}\ \&\ y \in \overline{M_1}\ )\}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\overline{M_1} \subseteq^* \textstyle\bigcup_{x \in \overline{M_2}} W_{g(x)} \quad \text{და} \quad \overline{M_2} \subseteq^* \bigcup_{x \in \overline{M_1}} W_{f(x)}\ .$$

მართლაც, დავუშვათ

$$R = \overline{M}_1 \cap \left(\bigcup_{x \in \overline{M_2}} W_{g(x)} \right)$$

სასრული სიმრავლეა.

ვთქვათ $E = \{x: x \in B\ \ \&\ \ W_{g(x)} \cap A \neq \emptyset\}$. მაშინ

$$x \in \overline{M_2} \cup E \iff W_{g(x)} \cap (A \cap R) \neq \emptyset.$$

ე.ი. $\overline{M_2} \cup E$ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა.

რადგანაც $\overline{M_2} \cup B = \overline{(M_2} \cup E) \cup B$ აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overline{M_2} \cup B$ რეკურსიულად გადათვლადია, მაგრამ $B \subset_m M_2$, საიდანაც გამოდის, რომ $M \backslash B \subseteq^* \overline{M_2} \cup B$, ეს კი წინააღმდეგობაა. მაშასადამე, R უსასრულო სიმრავლეა. თუ $\overline{M}_1 \backslash R$ უსასრულოა, მაშინ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე $\bigcup_{x \in w} W_{g(x)}$ გახლეჩს $\overline{M_1}$ -ს ორ უსასრულო ნაწილად. რაც არ შეიძლება.

ე.ი. $\overline{M_1} \subseteq^* \bigcup_{x \in \overline{M_2}} W_{g(x)}$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $\overline{M_2} \subseteq^* \bigcup_{x \in \overline{M_1}} W_{f(x)}$.

მაშინ აქედან გამოდის, რომ

$$\overline{M_1} \cap (\bigcup_{x \in B} W_{g(x)}) \quad \text{და} \quad \overline{M_2} \cap (\bigcup_{x \in A} W_{f(x)})$$

სასრული სიმრავლეებია, საიდანაც თავის მხრივ ადვილად გამომდინარეობს, რომ F_1 , F_2, E_1 და E_2 სასარული სიმრავლეებია.

განვსაზღვროთ გამოთვლადი h_1 ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$h_1(x) = \begin{cases} a\,, & \text{თუ } x \in E_1\,, \\ b\,, & \text{თუ } x \in F \cup F_1\,, \\ h(x), & \text{სხვა შემთხვევაში,} \end{cases}$$

სადაც a არის B სიმრავლის ფიქსირებული ელემენტი და b არის $\overline{M_2}$ -ის ფიქსირებული ელემენტი. მაშინ განსაზღვრიდან გამოდის, რომ h_1 არის თითქმის ინექციური გამოთვლადი ფუნქცია და $A \leq_m B$, h_1-ით.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $B \leq_m A$.

(iii) გამოთვლადი h_1 ფუნქციის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $M_1 \leq_m M_2$ h_1- ით.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $M_2 \leq_m M_1$.

■

თეორემა 3.4.9 ვთქვათ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო A და B არის შესაბამისად M_1 და M_2 სიმრავლეების მაჟორული ქვესიმრავლეები. თუ $M_1 \backslash A \equiv_1 M_2 \backslash B$, მაშინ

(i) $A \equiv_m B$,

(ii) $M_1 \equiv_m M_2$,

(iii) $M_1 \leq_1 M_2$ ან $M_2 \leq_1 M_1$.

დამტკიცება. (i) და (ii) პირდაპირ მიიღება თეორემა 3.4.7-დან (iii) მიიღება თეორემა 3.3.1-ის (iii) -ის მტკიცებაში M_1^1 , M_2^1 , M_1^0 და M_2^0 სიმრავლეების შესაბამისად A, B, $M_1 \backslash A$ და $M_2 \backslash B$ სიმრავლეებით ჩანაცვლებით.

ყოველი A სიმრავლისთვის $\mathcal{R}/A$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ სტრუქტურა, რომელიც მიიღება ერთი ცვლადის გამოთვლადი ფუნქციების იდენტიფიკაციით $f \sim_A g$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f(x) = g(x)$ ყველა გარდა შესაძლოა სასრული რაოდენობის x-ებისა $\overline{A}$-დან. [16]-ში მოცემულია აუცილებელი და საკმარისი პირობა $\mathcal{R}/\overline{A}$ -სა და $\mathcal{R}/\overline{B}$ -ის ელემენტარულად

ექვივალენტურობის ($\equiv$), სადაც A და B მაქსიმალური სიმრავლეებია. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი:

თეორემა 3.4.10 [16] თუ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, მაშინ $\mathcal{R}/\overline{M_1} \equiv \mathcal{R}/\overline{M_2}$,

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\overline{M_1} \equiv_m \overline{M_2}$.

შედეგი 3.4.11 [16] თუ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია და A_i არის M_i-ის მაჟორული ქვესიმრავლე ($i = 1,2$ -სთვის), მაშინ $\mathcal{R}/\overline{A_1} \equiv \mathcal{R}/\overline{A_2}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\overline{M_1} \equiv_m \overline{M_2}$.

ამ შედეგებიდან, შედეგი 3.3.4-ისა და თეორემა 3.4.7-ის გათვალისწინებით პირდაპირ მიიღება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.4.12

(i) თუ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო M_1^0, M_1^1 და M_2^0, M_2^1 არიან შესაბამისად M_1 და M_2 სიმრავლეების არატრივიალური გახლეჩვები და $M_1^0 \equiv_{Q_1} M_2^0$, მაშინ $\mathcal{R}/\overline{M_1} \equiv \mathcal{R}/\overline{M_2}$.

(ii) თუ M_1 და M_2 მაქსიმალური სიმრავლეებია, ხოლო A და B არიან შესაბამისად M_1 და M_2 სიმრავლეების მაჟორული ქვესიმრავლეები და $M_1 \backslash A \equiv_{Q_1} M_2 \backslash B$, მაშინ $\mathcal{R}/\overline{A} \equiv \mathcal{R}/\overline{B}$.

დამტკიცება. ცხადია.

■

თავი 4. c_1-დაყვანადობის სტრუქტურული თვისებები

მოცემულ თავში შესწავლილია c_1-ხარისხების სტრუქტურული თვისებები და ნაჩვენებია, რომ ჰიპერმარტივი სიმრავლის c-ხარისხი შეიცავს $\leq_{c_1}$-ის მიმართ მთელ რიცხვთა ტიპით წრფივად დალაგებულ c_1-ხარისხების უსასრულო ერთობლიობას, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ჰიპერმარტივ სიმრავლეებს. დამტკიცებულია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი c_1-ხარისხები არაა მკვრივად დალაგებული. აგრეთვე ნაჩვენებია, რომ არსებობს მინიმალური c_1-ხარისხი.

§ 4.1. რეკურსიულად გადათვლადი c_1-ხარისხები ჰიპერმარტივი სიმრავლის c-ხარისხში

c-დაყვანადობის ცნება შემოიტანა ჯოკუშმა [13] შემდეგი სახით: A სიმრავლე c-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_c B$) თუ არსებობს გამოთვლადი ფუნქცია f ისეთი, რომ ყოველი $x \in \omega$-სთვის,

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; D_{f(x)} \subseteq B,$$

(ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ A სიმრავლე c-დაყვანადია B სიმრავლეზე f ფუნქციით).

თუ $A \leq_c B$ ისეთი გამოთვლადი f ფუნქციით, რომ ყოველი $x, y \in \omega$-სთვის,

$$x \neq y \;\Rightarrow\; D_{f(x)} \cap D_{f(y)} = \emptyset,$$

მაშინ ვამბობთ, რომ A სიმრავლე c_1-დაყვანადია B სიმრავლეზე (სიმბოლოებში: $A \leq_{c_1} B$).

რეკურსიულად გადათვლად A სიმრავლეს ეწოდება c-სრული (შესაბამისად, c_1-სრული), თუ ნებისმიერი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე c-დაყვანადია (შესაბამისად, c_1-დაყვანადია) A სიმრავლეზე.

ომანაძემ [22] აჩვენა, რომ ეს ორი ცნება არის ერთმანეთის ექვივალენტური, ე.ი. რეკურსიულად გადათვლადი A სიმრავლე c-სრულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის c_1-სრული.

ჩვენ ახლა განვიხილავთ რეკურსიულად გადათვლად c_1-ხარისხებს რეკურსიულად გადათვლად c-ხარისხებში და დავამტკიცებთ, რომ ჰიპერმარტივი სიმრავლის c-ხარისხი შეიცავს $\leq_{c_1}$-ის მიმართ მთელ რიცხვთა ტიპით წრფივად დალაგებულ c_1-ხარისხების უსასრულო ერთობლიობას, რომლებიც შეიცავს მხოლოდ ჰიპერმარტივ სიმრავლეებს.

განსაზღვრება 4.1.1 რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს ეწოდება ჰიპერმარტივი, თუ მისი დამატება ჰიპერიმუნურია.

შემდეგი თეორემა არის დეკერის ცნობილი თეორემისა (იხ., მაგ.,[32, თეორემა 8. XIV]) და თეორემა 2.2.3-ის ანალოგი.

თეორემა 4.1.2 ჰიპერმარტივი სიმრავლის c-ხარისხი შეიცავს უსასრულო ერთობლიობას c_1-ხარისხებისა, რომლებიც წრფივადაა დალაგებული $\leq_{c_1}$-ის მიმართ მთელ რიცხვთა ტიპით და რომელთაგან თითოეული შეიცავს მხოლოდ ჰიპერმარტივ სიმრავლეებს.

დამტკიცება. დავიწყოთ შემდეგი ლემით,

ლემა 4.1.3 ვთქვათ A და B რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეებია ისეთი, რომ

$$B = A \cup \{m\},$$

სადაც $m \in \overline{A}$. მაშინ

(I) A არის ჰიპერმარტივი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც B არის ჰიპერმარტივი;

(II) თუ A არის ჰიპერმარტივი, მაშინ $B \leq_1 A$, $A \leq_m B$ და $A \nleq_{c_1} B$.

ლემა 4.1.3-ის ***დამტკიცება:*** (I)

(⇒) ვთქვათ, B არ არის ჰიპერმარტივი, მაშინ არსებობს ძლიერი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე $\{D_{f(x)}\}_{x\in\omega}$ ისეთი, რომ

$$(\forall x)\big(D_{f(x)} \cap \bar{B} \neq \emptyset\big),$$

ანუ

$$(\forall x)\big(D_{f(x)} \cap (\bar{A}\backslash\{m\}) \neq \emptyset\big)$$

და აქიდან გამომდინარე

$$(\forall x)\big(D_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset\big)$$

ეს კი ეწინააღმდეგება A სიმრავლის ჰიპერმარტივობას.

(⇐) ვთქვათ, A არ არის ჰიპერმარტივი, მაშინ არსებობს ძლიერი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე $\{D_{f(x)}\}_{x\in\omega}$ ისეთი, რომ

$$(\forall x)\big(D_{f(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset\big).$$

განვსაზღვროთ გამოთვლადი g ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$D_{g(x)} = \begin{cases} D_{f(x)}, & \text{თუ} \quad x < m, \\ D_{f(x+1)}, & \text{თუ} \quad x \geq m. \end{cases}$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$(\forall x)\big(D_{f(x)} \cap \bar{B} \neq \emptyset\big).$$

ეს კი ეწინააღმდეგება B სიმრავლის ჰიპერმარტივობას.

ვაჩვენოთ (II). დაყვანადობები $B \leq_1 A$ და $A \leq_m B$ მტკიცდება ისევე, როგორც მარტივი სიმრავლის ხარიხებზე ზემოთ აღნიშნულ დეკერის თეორემაში (იხ. [32], თეორემა 8.XIV).

დავუშვათ, რომ $A \leq_{c_1} B$ გამოთვლადი f ფუნქციით , ე.ი. ყოველი x და y-სთვის,

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad D_{f(x)} \subseteq B$$

და

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad D_{f(x)} \cap D_{f(y)} = \emptyset.$$

გამოთვლადი g ფუნქცია განვსაზღვროთ ინდუქციით, შემდეგნაირად:

$$D_{g(0)} = D_{f(m)} \backslash \{m\},$$

$$D_{g(n+1)} = \bigcup_{i \in D_{g(n)}, i \neq m} D_{f(i)}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი x და y-სათვის,

$$x \neq y \ \Rightarrow \ D_{g(x)} \cap D_{g(y)} = \emptyset.$$

g ფუნქციის განსაზღვრის ძალით, ყოველი i>0-სთვის

$$D_{g(i)} \cap D_{g(0)} = \emptyset.$$

დავუშვათ, რომ ყოველი i-სთვის, $0 \leq i < n$,

$$D_{g(i)} \cap D_{g(n)} = \emptyset.$$

და ვაჩვენოთ, რომ ყოველი k-სთვის, $0 \leq k \leq n$,

$$D_{g(k)} \cap D_{g(n+1)} = \emptyset.$$

ვთქვათ, რომელიღაც k-სთვის, $0 < k \leq n$,

$$D_{g(k)} \cap D_{g(n+1)} \neq \emptyset .$$

მაშინ

$$\left(\bigcup_{i \in D_{g(k-1)}, i \neq m} D_{f(i)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in D_{g(n)}, i \neq m} D_{f(i)} \right) \neq \emptyset.$$

ვინაიდან ყოველი x და y-სთვის, გვაქვს

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad D_{f(x)} \cap D_{f(y)} = \emptyset,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(\exists i)\big(i \in D_{g(n)} \cap D_{g(k-1)}\big),$$

რაც წინააღმდეგობაა.

მაშასადამე, ყოველი x და y-სთვის, გვაქვს

$$x \neq y \Rightarrow D_{g(x)} \cap D_{g(y)} = \emptyset.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი x-სთვის,

$$D_{g(x)} \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

$n = 0$-სთვის გვაქვს

$$D_{g(0)} \cap \overline{B} = D_{f(m)} \cap \overline{B} \neq \emptyset .$$

ახლა დავუშვათ, რომ $D_{g(n)} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, მაშინ არსებობს $x \in D_{g(n)} \cap \overline{B}$, და მაშინ g ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს

$$D_{g(n+1)} \cap \overline{B} \supseteq D_{f(x)} \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

მაშასადამე, $\{D_{g(x)}\}_{x\in\omega}$ არის სასრულ სიმრავლეთა ძლიერი ცხრილი თანაკვეთების გარეშე, რომელიც არღვევს B-ს ჰიპერმარტივობას, რაც წინააღმდეგობაა.

■

ვთქვათ, A არის ჰიპერმარტივი სიმრავლე, $\{a_0, a_1, \dots\}$ არის A-ს უსასრულო ქვესიმრავლე და $\{b_0, b_1, \dots\}$ არის $\overline{A}$ -ის უსასრულო ქვესიმრავლე. მაშინ, ლემა 4.1.3-ის ძალით:

$$\dots, A \cup \{b_0, b_1\}, A \cup \{b_0\}, A \cup A\backslash\{a_0\}, A\backslash \{a_0, a_1, \dots\}, \dots$$

გვაძლევს c_1-ხარისხების წრფივ დალაგებას მთელ რიცხვთა ტიპით. უფრო მეტიც, (I)-ის თანახმად, ამ ერთობლიობის ყოველი c_1-ხარისხი შედგება მხოლოდ ჰიპერმარტივი სიმრავლეებისაგან.

■

§ 4.2. რეკურსიულად გადათვლადი c_1 ხარისხების სიმკვრივის შესახებ

მეორე თავში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ რეკურსიულად გადათვლადი Q_1 –ხარისხები არ არის მკვრივად დალაგებული. ამ პარაგრაფში დავამტკიცებთ მის ანალოგიურ თეორემას რეკურსიულად გადათვლადი c_1 –ხარისხებისთვის.

თეორემა 4.2.1 რეკურსიულად გადათვლადი c_1 –ხარისხები არ არის მკვრივად დალაგებული.

დამტკიცება. ვთქვათ A ჰიპერმარტივი სიმრავლეა. ავიღოთ $B = A \cup \{m\}$, სადაც $m \notin A$. მაშინ ლემა 4.1.3-ის გამო $B <_{c_1} A$. ვთქვათ C იყოს ისეთი რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, რომ $B \leq_{c_1} C$ გამოთვლადი f ფუნქციით და $C \leq_{c_1} A$ გამოთვლადი g ფუნქციით. შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან A სიმრავლე არის მარტივი, ამიტომ არ არსებობს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადი $\{x_n\}_{n\in\omega}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ ყოველი i და j-სთვის,

(i) $x_0 = m$,

(ii) თუ $i \neq j$, მაშინ $x_{2i} \neq x_{2j}$ და $x_{2i+1} \neq x_{2j+1}$,

(iii) $x_{2i} \epsilon D_{g\,(x_{2i+1})}$ და $x_{2i+1} \epsilon D_{f\,(x_{2i+2})}$.

გვექნება ორი შემთხვევა:

შემთხვევა 1. არსებობს ისეთი n, რომ

$$(\forall i \leq n)\left[x_{2i} \epsilon D_{g\,(x_{2i+1})}\right] \&\, (\forall i < n)\left[x_{2i+1} \epsilon D_{f\,(x_{2i+2})}\right]$$

მაგრამ არ არსებობს ისეთი x, რომ $x_{2n+1} \in D_{f(x)}$.

ასეთ შემთხვევაში განვსაზღვროთ გამოთვლადი h_1 ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$D_{h_1(x)} = \begin{cases} D_{f(x)}, & \text{თუ } x \notin \{x_0, x_2, \dots, x_{2n}\}, \\ \{x_{2i+1}\}, & \text{თუ } x = x_{2i} \text{ რაიმე } i \leq n - \text{სთვის.} \end{cases}$$

ადვილი დასანახია, რომ $A \leq_{c_1} C$ გამოთვლადი h_1 ფუნქციით. ე.ი. $A \equiv_{c_1} C$.

შემთხვევა 2. არსებობს ისეთი n, რომ

$$(\forall i < n)\left[x_{2i} \epsilon D_{g\,(x_{2i+1})}\right] \&\, (\forall i < n)\left[x_{2i+1} \epsilon D_{f\,(x_{2i+2})}\right],$$

მაგრამ არ არსებობს ისეთი x, რომ $x_{2n} \in D_{g(x)}$.

ასეთ შემთხვევაში განვსაზღვროთ გამოთვლადი h_2 ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$D_{h_2(x)} = \begin{cases} D_{g(x)}, & \text{თუ } x \notin \{x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}\}, \\ \{x_{2i+2}\}, & \text{თუ } x = x_{2i+1} \text{ რაიმე } i < n - \text{სთვის.} \end{cases}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $C \leq_{c_1} B$ გამოთვლადი h_2 ფუნქციით, ე.ი. $C \equiv_{c_1} B$. ■

§ 4.3. მინიმალური c_1-ხარისხები

დიოგტიევმა [8] დაამტკიცა, რომ ყოველ მაქსიმალურ სიმრავლეს გააჩნია მინიმალური c-ხარისხი. მის იდეებზე დაყრდნობით ჩვენ ვამტკიცებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 4.3.1 ყოველ ჰემიმაქსიმალურ სიმრავლეს აქვს მინიმალური c_1-ხარისხი.

დამტკიცება. ვთქვათ რეკურსიულად გადათვლადი A_1 და B_1 სიმრავლეები ისეთია, რომ A_1 არ არის გამოთვლადი, B_1 ჰემიმაქსიმალურია და $A_1 \leq_{c_1} B_1$. ვინაიდან $A_1 \leq_{c_1} B_1$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $A_1 \leq_{Q_1} B_1$ ამიტომ ლემა 3.2.3-ის ძალით A_1 ჰემიმაქსიმალური სიმრავლეა. ვთქვათ არარეკურსიული რეკურსიულად გადათვლადი A_2 და B_2 სიმრავლეები ისეთია, რომ $A = A_1 \cup A_2$ და $B = B_1 \cup B_2$ მაქსიმალური სიმრავლეებია და $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$. ბოლოს კი დავუშვათ, რომ $A_1 \leq_{c_1} B_1$ გამოთვლადი f ფუნქციით.

ლემა 4.3.2 $\bar{B} \subseteq^* \bigcup_{x \in \bar{A}} D_{f(x)}$.

დამტკიცება. დავუშვათ $R = \bar{B} \cap (\bigcup_{x \in \bar{A}} D_{f(x)})$ სასრული სიმრავლეა და ვთქვათ

$$E = \{x : x \in A_2 \ \& \ D_{f(x)} \cap B_2 \neq \emptyset\}$$

მაშინ

$$x \in E \cup \bar{A} \quad \Leftrightarrow \quad D_{f(x)} \cap (B_2 \cup R) \neq \emptyset,$$

საიდანაც გამოდის, რომ $E \cup \bar{A}$ რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეა, მაგრამ $\bar{A} \cup A_2 = (\bar{A} \cup E) \cup A_2$ და გამოდის, რომ სიმრავლე $\bar{A} \cup A_2$ რეკურსიულად გადათვლადია, რაც წინააღმდეგობაა. მაშასადამე R უსასრულო სიმრავლეა. თუ $\bar{B} \backslash R$ უსასრულოა, მაშინ რეკურსიულად გადათვლადი $\bigcup_{x \in \omega} D_{f(x)}$ სიმრავლე გახლეჩს $\bar{B}$-ს ორ უსასრულო ნაწილად, რაც წინააღმდეგობაა.

■

შედეგი 4.3.3 $\{x : x \in A_2 \ \& \ D_{f(x)} \cap B_2 \neq \emptyset\}$ სიმრავლე უსასრულოა.

დამტკიცება. ცხადია.

■

განვსაზღვროთ რეკურსიულად გადათვლადი C სიმრავლე შემდეგნაირად:

$$C = \{x : (\exists y)[x \in D_{f(y)} \ \& \ D_{f(y)} \backslash \{x\} \subseteq B]\}.$$

დავუშვათ, რომ $\bar{B} \backslash C$ უსასრულოა. მაშინ ლემა 4.3.2-ის გამო გვექნება:

$$(\exists^\infty y)[y \in \bar{A} \ \ \& \ \ | D_{f(y)} \cap \bar{B} | \geq 2] \qquad (1)$$

და კერძოდ კი გვექნება, რომ სიმრავლე

$$\{x : (\exists n \in \bar{A})[x = \min(D_{f(n)} \cap \bar{B})]\} \qquad (2)$$

უსასრულოა.

ვთქვათ $D_{f(x)} = \{d_0^x < d_1^x < \cdots < d_{n(x)}^x\}$. ჩვენ ეტაპობრივად განვსაზღვრავთ ნაწილობრივად გამოთვლად φ ფუნქციას: (ქვემოთ B_t-თი აღვნიშნავთ B-ს სასრულ ქვესიმრავლეს რომელიც გამოთვლილი იქნება t ბიჯში)

ბიჯი t. მოვძებნოთ უმცირესი x-ს რომლისთვისაც არსებობს $m < n(x)$ ისეთი, რომ $\varphi(d_m^x)$ კვლავ განუსაზღვრელია და $d_k^x \in B_t$ ყოველი $k < m$-სთვის; განვსაზღვროთ: $\varphi(d_m^x) = d_{n(x)}^x$ და გადავიდეთ შემდეგ ბიჯზე.

(1)-ის და (2)-ის გამო ადვილი დასანახია, რომ

$$\{x : \varphi(b_x)\downarrow \;\&\; \varphi(b_x) \geq b_{x+1}\}$$

სიმრავლე უსასრულოა, სადაც $b_0, b_1, \ldots$ არის $\bar{B}$-ის პირდაპირი გადათვლა. ეს კი ეწინააღმდეგება ფაქტს, რომ ყოველი მაქსიმალური სიმრავლე ძლიერად თანაბრად ჰიპერმარტივია (იხ [7]).

მაშასადამე, $\bar{B}\backslash C$ სასრულია. მაშინ ლემა 4.3.2-ის გამო

$$G = (\bar{B}\backslash C) \cup \left(\bar{B}\backslash(\bigcup_{x\in\bar{A}} D_{f(x)})\right).$$

სიმრავლე სასრულია.

ლემა 4.3.4 $I = \{x : x \in \bar{A} \;\&\; D_{f(x)} \cap B_2 \neq \emptyset\}$ სიმრავლე სასრულია.

დამტკიცება. დავუშვათ I სიმრავლე უსასრულოა. მაშინ A სიმრავლის მაქსიმალურობის გამო, თითქმის ყოველი $x \in \omega$-სთვის:

$$x \in \bar{A} \quad \Rightarrow \quad D_{f(x)} \cap B_2 \neq \emptyset.$$

და შედეგი 4.3.3-ის ძალით, თითქმის ყოველი $x \in \omega$ -სთვის:

$$x \in A_2 \quad \Rightarrow \quad D_{f(x)} \cap B_2 \neq \emptyset;$$

და რადგანაც

$$x \in A_1 \quad \Leftrightarrow \quad D_{f(x)} \cap (\bar{B} \cup B_2) = \emptyset,$$

ამიტომ თითქმის ყოველი $x \in \omega$-სთვის, გვექნება:

$$x \in A_2 \cup \bar{A} \quad \Leftrightarrow \quad D_{f(x)} \cap B_2 \neq \emptyset.$$

ე.ი. $A_2 \cup \bar{A}$ სიმრავლე რეკურსიულად გადათვლადია, რაც წინააღმდეგობაა.

■

შედეგი 4.3.5 $P = G \cup (\bar{B} \cap (\bigcup_{x \in I \cup A_2} D_{f(x)}))$ სასრული სიმრავლეა.

დამტკიცება. ცხადია.

■

შედეგი 4.3.6 თუ $D_{f(x)} \cap (\bar{B} \backslash P) \neq \emptyset$, მაშინ

(i) $x \in \bar{A}$;
(ii) $| D_{f(x)} \cap \bar{B} |= 1$;
(iii) თუ $y \in D_{f(x)} \cap \bar{B}$, მაშინ $D_{f(x)} \backslash \{y\} \subseteq B_1$.

დამტკიცება. ცხადია.

■

ჩვენ ახლა განვსაზღვრავთ გამოთვლად g ფუნქციას (რომლითაც B_1 სიმრავლე 1-დაყვანადი იქნება A_1 სიმრავლეზე) შემდეგნაირად:

დავუშვათ g უკვე განსაზღვრულია ყველა $n < x$-სთვის, იმ თვისებით, რომ

$n \in B_1 \quad \Leftrightarrow \quad g(n) \in A_1$ და თუ $n, m < x$ და $n \neq m$ მაშინ $g(n) \neq g(m)$. ვთქვათ R_1 და R_2 არიან შესაბამისად A_1 და A_2 სიმრავლეების უსასრულო რეკურსიული ქვესიმრავლეები. ერთდროულად გადავითვალოთ B_1, $B_2 \cup P$ და $\{D_{f(i)}\}_{i \in \omega}$ სიმრავლეები და შევწყვიტოთ პროცესი როგორც კი ქვემოთ ჩამოთვლილი შემთხვევებიდან რომელიმე შესრულდება.

შემთხვევა 1. x გამოჩნდა B_1-ში. შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ:

$$g(x) = \min(R_1 \backslash \{g(n): n < x\}).$$

შემთხვევა 2. x გამოჩნდა $B_2 \cup P$ -ში. შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ:

$$g(x) = \min(R_2 \backslash \{g(n): n < x\}).$$

შემთხვევა 3. x პირველად გამოჩნდა $D_{f(y)}$-ში და $D_{f(y)} \backslash \{x\}$ სიმრავლის ყველა ელემენტი უკვე გადათვლილია B_1-ში. ჩვენ განვასხვავებთ შემდეგ ორ ქვეშემთხვევას:

ქვეშემთხვევა 1. თუ $y \notin \{g(n): n < x\}$, მაშინ შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ:

$$g(x) = y;$$

ქვეშემთხვევა 2. თუ $y \in \{g(n): n < x\}$, მაშინ $y \notin \bar{A}$, რამდენადაც ყოველი $i, j \in \omega$-სთვის

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad D_{f(i)} \cap D_{f(j)} = \emptyset.$$

მაშასადამე $y \in A_1 \cup A_2$. თუ y პირველად გამოჩნდება A_1-ში, მაშინ ვინაიდან $D_{f(y)} \subseteq B_1$, გვაქვს, რომ $x \in B_1$: და ამ შემთხვევაში შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ:

$$g(x) = \min(R_1 \backslash \{g(n): n < x\}).$$

თუ y პირველად გამოჩნდა A_2-ში, მაშინ ვინაიდან $D_{f(y)} \cap \overline{B_1} \neq \emptyset$, გვაქვს, რომ $x \in \overline{B_1}$: და ამ შემთხვევაში შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ:

$$g(x) = \min(R_2 \backslash \{g(n): n < x\}).$$

ცხადია

$$\omega = B_1 \cup B_2 \cup P \cup \{x: (\exists y)[x \in D_{f(y)} \ \&\ D_{f(y)} \backslash \{x\} \subseteq B_1]\}$$

ამიტომ განხილული სამი შემთხვევა მოიცავს ყველა შესაძლებლობას და მაშასადამე g ყველგან განსაზღვრული ფუნქციაა. ადვილი დასანახია, რომ $B_1 \leq_1 A_1$ გამოთვლადი g ფუნქციით.

■

ლიტერატურა:

[1] Arslanov, M. M., Omanadze, R. S. Q-degrees of n-c.e. sets. Illinois Journal of Mathematics. 51 (4). 1189-1206 (2007)

[2] Batyrshin, I. Structure of m-degrees inside Q-degrees. In: Proc. International Conference "Mal'tsev Meeting", (Russian). Novosibirsk. P. 62. (2015)

[3] Blum, M., Marques, I. On complexity properties of recursively enumerable sets. Journal of Symbolic Logic. 38 (4). 579-593 (1973)

[4] Chitaia, I. Hyperhypersimple sets and Q_1-reducibility. Mathematical Logic Quarterly. (Accepted) (2016)

[5] Chitaia, I. O., Omanadze, R.S., Sorbi, A. Immunity properties and strong positive reducibilities. Archive for Mathematical Logic. 50 (3-4) 341-352 (2011)

[6] Cooper, S. B. Computability Theory. Chapman & Hall/CRC Mathematics, Boca Raton (2003)

[7] Degtev, A. N. Hypersimple sets with retraceable complements. Algebra and Logic. 10 (3). 147-154 (1971)

[8] Degtev, A. N. Comparison of linear reducibility with other reducibilities of tabular type. Algebra and Logic. 21 (5). 339-353 (1982)

[9] Dobritsa, V. P. On the word problem for recursively defined groups. Third All-Union Conference on Mathematical Logic, (Russian). Novosibirsk. pp. 63-65 (1974)

[10] Downey, R., LaForte, G., Nies, A. Computably enumerable sets and quasi-reducibility. Annals of Pure and Applied Logic. 95 (1). 1-35 (1998)

[11] Downey, R. G., Stob, M. Automorphisms of the lattice of recursively enumerable sets: Orbits. Advances in Mathematics. 92 (2). 237-265 (1992)

[12] Gill, J. T., Morris, P. H. On subcreative sets and s-reducibility. Journal of Symbolic Logic. 39. 669-677 (1974)

[13] Jockusch, C. G. Jr. Semirecursive sets and positive reducibility. Transactions of the American Mathematics Society. 131. 420-436 (1968)

[14] Kobzev, G. N. The btt-reducibility. Candidate's Dissertation, Novosibirsk (1975)

[15] Lachlan, A. H. On the lattice of recursively enumerable sets. Transactions of the American Mathematics Society. 130. 1-37 (1968)

[16] Lerman, M. Recursive functions modulo co-r-maximal sets. Transactions of the American Mathematics Society. 148. 429-444 (1970)

[17] Lerman, M. Turing degrees and many-one degrees of maximal sets. Journal of Symbolic Logic. 35 (1). 29-40 (1970)

[18] Marchenkov, S. S. One class of partial sets. Mathematical Notes. 20 (4). 823-825 (1976)

[19] Miller, D., Remmel, J. B. Effectively nowhere simple sets. Journal of Symbolic Logic. 49 (1). 129-136 (1984)

[20] Morozov, A. S. On a class of recursively enumerable sets. Sibirsk. Mat. Zh. 28 (2). 124-128 (1987) (Russian)

[21] Odifreddi, P. Classical Recursion Theory. The Theory of Functions and Sets of Natural numbers. North-Holland Publishing Co. With a foreword by G. E. Sacks. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. 125. (1989)

[22] Omanadze, R. Sh. On completeness of recursively enumerable sets. Soobshch. Acad. Nauk Gruzin. SSR. 81 (3). 529-532 (1976) (Russian)

[23] Omanadze, R. Sh. Upper semilattice of recursively enumerable Q-degrees. Algebra and Logic. 23 (2). 124-130 (1984)

[24] Omanadze, R. Sh. Q-reducibility and nowhere simple sets. Soobshch. Acad. Nauk Gruzin. SSR. 127 (1). 29-32 (1987) (Russian)

[25] Omanadze, R. Sh. On the upper semilattice of recursively enumerable sQ-degrees. Algebra and Logic. 30 (4). 265-271 (1991)

[26] Omanadze, R. Sh. On sQ-completeness of recursively enumerable sets. Mathematical Notes. 52 (3). 948-952 (1992)

[27] Omanadze, R. Sh., Chitaia, I. O. Q_1-degrees of c.e. sets. Archive for Mathematical Logic. 51 (5-6) 503-515 (2012)

[28] Omanadze, R. Sh., Chitaia, I. O. Some properties of maximal sets. Logic Journal of IGPL. 23 (4). 628-639 (2015)

[29] Omanadze, R. Sh., Sorbi, A. A characterization of the Δ_2^0 hyperhyperimmune sets. Journal of Symbolic Logic. 73 (4), 1407-1415 (2008)

[30] Omanadze, R. Sh., Sorbi, A. Immunity properties of the s-degrees. Georgian Mathematical Journal. 17 (3). 563-579 (2010)

[31] Post, E. L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bulletin of the American Mathematical Society. 50 (5). 284-316 (1944)

[32] Rogers, H. Jr. Theory of recursive functions and effective computability. 2nd edn. MIT Press, Cambridge (1987)

[33] Shore, R. A. Nowhere simple sets and the lattice of recursively enumerable sets. Journal of Symbolic Logic. 43 (2), 322-330 (1978)

[34] Soare, R. I. Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, Berlin (1987)

[35] Solov'ev V. D. Q-reducibility and hyperhypersimple sets. Veroyatn. Metod. I Kibern. 10-11. 121-128 (1974) (Russian)

[36] Yates C. E. M. On the degrees of index sets. Transactions of the American Mathematical Society. 121 (2). 309-328 (1966)

[37] Zakharov, S. D. e- and s-degrees. Algebra and Logic. 23 (4). 273-281 (1984)